O kształcie fali sprężystej w pokładach ziemskich.

IV. Studyum z teoryi trzęsień ziemi.

PRZEZ

M. P. RUDZKIEGO.

(Z 1 ryciną w tekscie).

Wniesiono na posiedzeniu Wydz. mat.-przyrod. dnia 10. lipca 1899 r.

Niniejsza rozprawa jest dalszym ciągiem innej, którą ogłosiłem mniej więcej przed rokiem[1]). Z tego powodu uważam za stosowne streścić w kilku słowach wyniki otrzymane w poprzedniej rozprawie.

Dzięki ciśnieniu albo uwarstwowaniu, albo też dzięki obu przyczynom jednocześnie, pokłady ziemskie nie mogą być uważane za izotropowe ośrodki. Mówimy tu naturalnie o izotropii wobec bardzo długich fal, jakiemi są fale sprężyste, obserwowane podczas trzęsienia ziemi; o izotropii w ścisłem tego słowa znaczeniu mowy być nie może ze względu na ziarnistą budowę pokładów. Skoro więc pokłady ziemskie nawet wobec długich fal nie mogą się zachowywać tak, jak ciała izotropowe, to potencyał sprężystości musi zawierać nie dwa współczynniki sprężystości, jak u ciał izotropowych, ale więcej współczynników. W pokładach leżących w horyzontalnych warstwach i poddanych normalnemu, t. j. pionowemu ciśnieniu, potencyał sprężystości musi zawierać pięć

[1]) O kształcie fali sprężystej w pokładach ziemskich. Rozprawy Akad. Umiej. tom XXXIII.

współczynników. Oznaczając przeto przez W potencyał oraz przez E, G i t. d.... współczynniki sprężystości, wreszcie kładąc:

$$e=\frac{\partial u}{\partial x},\quad f=\frac{\partial v}{\partial y},\quad g=\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$a=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z},\quad b=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x},\quad c=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y},$$

mamy:

$$\text{I}\qquad \begin{aligned}2W=E(e+f)^2+Gg^2+2E_1(fg+ge)+\\ +A(a^2+b^2)+C(c^2-4ef).\end{aligned}$$

Znaleźliśmy dalej w poprzedniej rozprawie, że powierzchnia falowa rozpada się na ellipsoidę obrotową oraz inną bardzo zawiłą obrotową powierzchnię. Równanie południkowego przecięcia ellipsoidy obrotowej ma kształt następujący:

$$\text{II}\qquad \frac{x^2}{C}+\frac{z^2}{A}=1,$$

zaś równanie południkowego przecięcia tamtej drugiej powierzchni ma kształt następujący:

$$\text{III}\qquad D=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{12} & c_{22} & c_{23}\\ c_{13} & c_{23} & c_{33}\end{vmatrix}=0.$$

Kładąc:

$$\begin{aligned}A+E&=2a\\ A+G&=2b\\ AE&=c^2\\ AG&=d^2,\end{aligned}$$

oraz

$$A^2+GE-(A+E_1)^2=2K^2,$$

możemy napisać [2])

---

[1]) Wyobrażamy sobie, że płaszczyzna $x\,y$ jest horyzontalna (równoległa do warstw), zaś oś z pionowa (prostopadła do warstw).

[2]) Na tem miejscu muszę poprawić pewien błąd w poprzedniej rozprawie. We wzorze na c_{33} [patrz wzory XXII na str. 391. w XXXIII tomie rozpraw] powinno być nie

$$+(3d^2-b^2)z^4+(2ab+K^2)x^2z^2$$

ale tak, jak tu:

$$+(2ab+K^2)z^4+(3d^2-b^2)x^2z^2.$$

Również na str. 394. pod znakiem pierwiastkowania powinno być nie G ale $G-A$. Wskutek tego należałoby trochę zmienić dalsze rozumowanie. Zresztą tak jeden, jak drugi błąd nie mają absolutnie żadnego wpływu na dalsze wyniki rozumowania.

$$\left.\begin{aligned}
c_{11} &= -x^4(bx^2+az^2)+(2ab+K^2)x^4+(3c^2-a^2)x^2z^2- \\
&\quad -(2aK^2+bc^2)x^2-ac^2z^2+c^2K^2 \\
c_{12} &= xz\begin{Bmatrix}-2x^2(bx^2+az^2)+(5ab-K^2)x^2+(3c^2-a^2)z^2- \\ -(3bc^2-aK^2)\end{Bmatrix} \\
c_{13} &= -x^2z^2(bx^2+az^2)+d^2x^4+3abx^2z^2+c^2z^4- \\
&\quad -2ad^2x^2-2bc^2z^2+c^2d^2 \\
c_{22} &= -4x^2z^2(bx^2+az^2)+(d^2-b^2)x^4+(10ab-6K^2)x^2z^2+ \\
&\quad +(c^2-a^2)z^4-2(ad^2-bK^2)x^2-2(bc^2-aK^2)z^2+ \\
&\quad +c^2d^2-K^4 \\
c_{13} &= xz\begin{Bmatrix}-2z^2(bx^2+az^2)+(3d^2-b^2)x^2+(5ab-K^2)z^2- \\ -(3ad^2-bK^2)\end{Bmatrix} \\
c_{33} &= -z^4(bx^2+az^2)+(2ab+K^2)z^4+(3d^2-b^2)x^2z^2- \\
&\quad -(2bK^2+ad^2)z^2-bd^2x^2+d^2K^2.
\end{aligned}\right\} \quad \text{IV}$$

Następnie okazało się, że równanie $D=0$ zawiera tylko parzyste potęgi zmiennych x i z, oraz że pomimo tego, iż c_{11} i t. d. są wielomianami 6. stopnia, jednak równanie $D=0$ jest tylko 14. stopnia, albowiem wyrazy 18. i 16. stopnia są tożsamościowo równe zeru. Wreszcie okazało się, że jedna gałęź krzywej znajduje się w nieskończoności tak, że dla skończonych wartości zmiennych x i z krzywa zachowuje się tak, jak krzywa 12. stopnia.

Otóż teraz możemy uzupełnić ten ostatni rezultat. Obliczywszy wyrazy 14. stopnia przekonałem się, że suma ich jest także tożsamościowo równa zeru. Odnośnego rachunku nie możemy tu w całości powtarzać, jest on bowiem nazbyt długi, pokażemy tylko, w jaki sposób można go stosunkowo najprędzej i najłatwiej dokonać.

Weźmy n. p. wielomian c_{11}, wydzielmy zeń wielomian 6-go, 4-go i t. d. stopnia. Oznaczmy wielomian 6. stopnia w c_{11}, t. j. wielomian: $-x^4(bx^2+az^2)$ przez $(1,1)_6$, wielomian 4-go stopnia przez $(1,1)_4$ i t. d., postąpmy tak samo z innymi wielomianami, a otrzymamy:

$$\begin{aligned}
c_{11} &= (1,1)_6+(1,1)_4+(1,1)_2+(1,1)_0 \\
c_{12} &= (1,2)_6+\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Teraz zaś zapomocą znanych twierdzeń z teoryi wyznaczników przekształćmy wyznacznik D (równanie III) na sumę wyznaczników takich, aby każdy z nich zawierał w każdej kolumnie i w każdym wierszu tylko pojedyncze wielomiany $(1,1)_6$ i t. d., ale nie zawierał sum tych wielomianów. W ten sposób znajdziemy, że wyrazy 18. stopnia w równaniu III można napisać w kształcie:

$$D_{18} = \begin{vmatrix} (1,1)_6 & (1,2)_6 & (1,3)_6 \\ (1,2)_6 & (2,2)_6 & (2,3)_6 \\ (1,3)_6 & (2,3)_6 & (3,3)_6 \end{vmatrix}$$

Po podstawieniu wartości na $(1,1)_6$ i t. d. natychmiast znajdziemy tak samo, jak w poprzedniej rozprawie, że D_{18} jest tożsamościowo równe zeru. Tak samo D_{16} będzie sumą trzech wyznaczników 16. stopnia, z których każdy oddzielnie będzie tożsamościowo równy zeru. Wreszcie znajdziemy na D_{14} następujące wyrażenie:

$$D_{14} = \begin{vmatrix} (1,1)_6 & (1,2)_6 & (1,3)_2 \\ (1,2)_6 & (2,2)_6 & (2,3)_2 \\ (1,3)_6 & (2,3)_6 & (3,3)_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (1,1)_6 & (1,2)_2 & (1,3)_6 \\ (1,2)_6 & (2,2)_2 & (2,3)_6 \\ (1,3)_6 & (2,3)_2 & (3,3)_6 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} (1,1)_2 & (1,2)_6 & (1,3)_6 \\ (1,2)_2 & (2,2)_6 & (2,3)_6 \\ (1,3)_2 & (2,3)_6 & (3,3)^6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (1,1)_6 & (1,2)_4 & (1,3)_4 \\ (1,2)_6 & (2,2)_4 & (2,3)_4 \\ (1,3)_6 & (2,3)_4 & (3,3)_4 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} (1,1)_4 & (1,2)_6 & (1,3)_4 \\ (1,2)_4 & (2,2)_6 & (2,3)_4 \\ (1,3)_4 & (2,3)_6 & (3,3)_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (1,1)_4 & (1,2)_4 & (1,3)_6 \\ (1,2)_4 & (2,2)_4 & (2,3)_6 \\ (1,3)_4 & (2,3)_4 & (3,3)_6 \end{vmatrix}$$

Podstawiwszy tu wartości na $(1,1)_6$ i t. d.... natychmiast znajdziemy, że podczas gdy pierwsze trzy wyznaczniki są każdy oddzielnie tożsamościowo równe zeru, tymczasem trzy następne wprawdzie nie są oddzielnie równe zeru, ale dają sumę, która również jest tożsamościowo równa zeru.

Widzimy więc, że równanie III sprowadza się do równania 12-go stopnia, a ponieważ zawiera tylko parzyste potęgi zmiennych x i z, więc właściwie może być rozpatrywane jako równanie 6-go stopnia Pomimo tego jednakże ogólna dyskusya tego równania jest zgoła niemożliwą. Musimy więc ograniczyć się do rozpatrzenia równania III w pewnym zupełnie specyalnym przypadku.

Już w poprzedniej rozprawie wskazałem, że wszystkie pięć współczynników A, E i t. d. należy uważać za dodatnie. Obecnie uzasadnię to założenie, jednocześnie zaś wyprowadzę niektóre nierówności, którym te współczynniki muszą zadość czynić.

Przedewszystkiem potencyał W musi być, jak wiadomo, funkcyą zawsze dodatnią. Warunek, aby funkcya W (patrz wzór I) była stale dodatnią, oczywiście rozpada się na dwa warunki; trzeba aby było oddzielnie z jednej strony:

$$A\,(a^2 + b^2) + Cc^2 > 0,$$

a z drugiej:

$$E(e+f)^2 + Gg^2 + 2E_1(ge+ef) - 4Cef > 0.$$

W tych ostatnich wzorach a, b, c i t. d. mają to samo znaczenie, co we wzorach tuż przed wzorem I.

Aby:

$$A(a^2+b^2) + Cc^2$$

było stale dodatnie, na to potrzeba i wystarcza, aby było:,

$$A > 0, \quad C > 0, \qquad \text{V}$$

warunki zaś, które muszą być spełnione, aby funkcya drugiego stopnia

$$E(e+f)^2 + Gg^2 + 2E_1(ge+ef) - 4Cef$$

była stale dodatnia, polegają na tem, aby pierwiastki pewnego równania trzeciego stopnia były wciąż dodatnie. Równanie to znane z teoryi przekształcenia formy kwadratowej na sumę kwadratów wygląda w danym razie tak:

$$\begin{vmatrix} E-R, & E-2C, & E_1 \\ E-2C, & E-R, & E_1 \\ E_1, & E_1, & G-R \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{VI}$$

Pierwiastki równania VI są, jak wiadomo, zawsze rzetelne. Wartości tych pierwiastków są:

$$R_1 = 2C$$

$$R_2 = E - C + \frac{1}{2}G + \sqrt{\left[(E-C) + \frac{1}{2}G\right]^2 - 2\left[G(E-C) - E_1^2\right]}$$

$$R_3 = E - C + \frac{1}{2}G - \sqrt{\left[(E-C) + \frac{1}{2}G\right]^2 - 2\left[G(E-C) - E_1^2\right]}$$

Widzimy stąd, że R_1 będzie dodatnie już ze względu na drugi warunek V, co zaś do R_2 i R_3, to na to, aby obie te wielkości były stale dodatnie, potrzeba, aby było:

$$E - C + \frac{1}{2}G > 0, \qquad \text{VII}$$

a także [1])

$$G(E-C) - E_1^2 > 0 \qquad \text{VIII}$$

[1]) Gdyby $G(E-C) - E_1^2 = 0$, to wyróżnik równania VI byłby równy zeru. Niema potrzeby rozpatrywać tego specyalnego przypadku.

Porównując między sobą nierówności VII i VIII widzimy, że są one tylko wtedy jednocześnie możliwe, gdy mamy oddzielnie

$$\text{IX} \qquad G > 0 \text{ i } E - C > 0.$$

Lecz ponieważ C jest stałę dodatnie, a zatem i E musi być dodatnie. Ostatecznie mamy więc następujące konieczne, a razem dostateczne warunki, aby potencyał W był stale dodatni:

$$\text{X} \qquad \left\{ \begin{array}{c} A > 0 \quad E > 0 \quad C > 0 \quad G > 0 \\ E - C > 0 \\ G(E - C) - E_1^2 > 0 \end{array} \right.$$

Widzimy stąd, że z pomiędzy pięciu współczynników sprężystości tylko jeden współczynnik E_1 może być dodatni albo odjemny, cztery pozostałe koniecznie muszą być dodatnie. Zobaczymy zresztą niezadługo, że i E_1 w naszym przypadku, t. j. w przypadku jeśli stosujemy teoryę sprężystości do pokładów ziemskich, także powinno być dodatnie.

Warunki X są to warunki konieczne, które zawsze muszą być spełnione, jeżeli tylko rzecz idzie o jakikolwiek fizycznie możliwy ośrodek, ale do tych warunków można dołączyć cały szereg innych, wyrażających pewne prawdopodobne fizyczne własności pokładów ziemskich. Aby je wyprowadzić będziemy rozumować w następujący sposób. Oznaczmy przez X, Y i Z siły normalne, działające na ściany nieskończenie małego elementu sprężystego ciała.

Z teoryi sprężystości wiadomo, że między temi siłami a wielkościami e, f i g [1]), mierzącemi wydłużenia elementu w trzech głównych kierunkach, istnieją następujące związki:

$$\text{XI} \qquad \left\{ \begin{array}{l} X = Ee + (E - 2C)f + E_1 g \\ Y = (E - 2C)e + Ef + E_1 g \\ Z = E_1 e + E_1 f + G.g \end{array} \right.$$

i odwrotnie:

$$\text{XII} \qquad \left\{ \begin{array}{l} e = s_{11} X + s_{12} Y + s_{13} Z \\ f = s_{12} X + s_{11} Y + s_{13} Z \\ g = s_{13} X + s_{13} Y + s_{33} Z, \end{array} \right.$$

gdzie s_{11} etc.... są to tak zwane moduły sprężystości, przyczem, kładąc dla krótkości:

$$H = 4C[G(E - C) - E_1^2],$$

[1]) Porówn. wzory tuż przed wzorem I.

mamy:

$$\left.\begin{aligned} s_{11} &= \frac{EG - E_1^2}{H} \\ s_{12} &= -\frac{[G(E-2C) - E_1^2]}{H} \\ s_{13} &= -\frac{2CE_1}{H} \\ s_{33} &= \frac{4C(E-C)}{H} \end{aligned}\right\} \qquad \text{XIII}$$

Zauważmy teraz, że w horyzontalnie leżących, uwarstwowanych pokładach poddanych normalnemu ciśnieniu — jakakolwiek siła działająca w pionowym kierunku powinna sprawiać mniejsze odkształcenie pionowe, aniżeli horyzontalne odkształcenie sprawione przez taką samą, ale horyzontalnie działającą siłę. Ale gdy mamy tylko siłę pionową, n. p. N, to

$$X = Y = 0, \quad Z = N,$$

a więc wedle wzorów XII

$$e = f = s_{13}N, \quad g = s_{33}N,$$

gdy zaś mamy tylko horyzontalne ciśnięnie N, n. p. w kierunku x, to

$$X = N, \quad Y = Z = 0,$$

a więc wedle wzorów XII

$$e = s_{11}N, \quad f = s_{12}N, \quad g = s_{13}N.$$

Z tego, cośmy wyżej powiedzieli, wypada, że powinno być:

$$s_{11}N > s_{33}N,$$

t. j.

$$s_{11} > s_{33},$$

albo, podstawiając wartości na s_{11} i s_{33} ze wzorów XIII,

$$EG - E_1^2 > 4C(E-C) \qquad \text{XIV}$$

Doświadczenia Bauschingera [1]) pokazują, że to przewidywanie jest słuszne i że u bardzo wielu skał nierówność XIV jest rzeczywiście spełniona. Mianowicie s_{11} jest to nic innego jak moduł sprężystości w kierunku równoległym do warstw, zaś s_{33} moduł sprężystości w kierunku prostopadłym do warstw. Doświadczenia Bauschingera dały następujące rezultaty: [2])

---

[1]) Bauschinger. Mittheilungen aus dem mechan. techn. Laboratorium der k. polytechn. Schule in München. I Heft. München 1873.

[2]) Moduły elastyczności i ciśnienie są podane w kilogramach na kwadratowy centymetr.

N. 15. Granit z Hauzenbergu w Dolnej Bawaryi

w razie ciśnienia,	$s_{33} = 447000—500000$	kg	między	0—10	kg	ciśnienia
„ „	$s_{11} = 640000$	kg	między	0— 5	kg	ciśnienia
w razie ciągnienia,	$s_{33} = 270000$	„	„	0— 5	„	ciągnienia
„ „	$s_{11} = 510000$	„	„	0— 5	„	„

N. 16. Granit z Fürstensteinu koło Passau

w razie ciśnienia,	$s_{33} = 193000$	kg	między	0— 10	kg	ciśnienia
„ „	$s_{11} = 288000$	„	„	0—200	„	„
w razie ciągnienia,	$s_{33} = 120000$	„	„	0— 5	„	ciągnienia
„ „	$s_{11} = 150000$	„	„	0— 5	„	„

N. 20. Dolomit z Lohstadt koło Kehlheim

w razie ciśnienia,	$s_{33} = 560000$	kg	między	0—200	kg	ciśnienia
„ „	$s_{11} = 530000$	„	„	0—200	„	„
w razie ciągnienia,	$s_{33} = 400000$	„	„	0— 5	„	ciągnienia
„ „	$s_{11} = 435000$	„	„	0— 5	„	„

N. 59. Zielony piaskowiec z Kapfelbergu koło Kehlheim

w razie ciśnienia,	$s_{33} = 124000$	kg	między	0— 10	kg	ciśnienia
„ „	$s_{11} = 134000$	„	„	0— 10	„	„
w razie ciągnienia,	$s_{33} =$? ?	„	„	— —	„	ciągnienia
„ „	$s_{11} = 120000$	„	„	0— 2	„	„

N. 60. Zielony piaskowiec z Abbach koło Kehlheim

w razie ciśnienia,	$s_{33} = 116000$	kg	między	0— 20	kg	ciśnienia
„ „	$s_{11} = 220000$	„	„	0— 10	„	„
w razie ciągnienia,	$s_{33} =$? ?	„	„	— —	„	ciągnienia
„ „	$s_{11} = 210000$	„	„	0— 2	„	„

W razie większych ciśnień i ciągnień moduły sprężystości mają nieco inne, niż tu przytoczone wartości, ale nierówność

$$s_{11} > s_{33}$$

pozostaje. Tylko zachowanie się dolomitu *N. 20* w doświadczeniach z ciśnieniem stanowi wyjątek; wydaje się zresztą, że ten dolomit zachowuje się prawie tak, jak ciało izotropowe. Nie przytaczaliśmy tu wartości modułów s_{11} i s_{33} odpowiadających większym ciśnieniom i ciągnieniom, gdy skała jest już bliską zmiażdżenia lub rozerwania, albowiem oczywiście warunki doświadczenia są w takich przypadkach już nazbyt odległe od tych, które zachodzą podczas rozchodzenia się sprężystych drgań. Widzimy zresztą, że wartości modułów sprężystości są inne w razie ciśnienia, a inne w razie ciągnienia; jest to okoliczność, która w klasycznej teoryi sprężystości nie bywa uwzględniona, albowiem w tej teoryi zakładamy, że tak siły działające na ciało sprężyste, jak odkształcenia przez nie spowodowane są bardzo małe i że wszystkie procesy są odwracalne. Rzecz prosta, że nie możemy się tu wdawać w rozważanie tych kwestyi; pomijamy więc różnice między modułami w razie ciśnień a modułami w razie ciągnień, dalej pomijamy zależność modułów od samych ciśnień, wreszcie pomijamy i to, że n. p. statyczne współczynniki elastyczności nie są właściwie identyczne z dynamicznymi, pierwsze bowiem są prawie izotermiczne, a drugie prawie adiabatyczne. Natomiast podkreślamy pewne ogólne wnioski wynikające z powyżej przytoczonych doświadczeń, mianowicie: 1) że nawet takie skały jak granit nie mogą być uważane za izotropowe ciała, [naturalnie mówimy tu o pewnej grubej izotropii, o izotropii względem długich fal, albowiem granit i inne skały są ziarniste, a zatem o ścisłej izotropii niema tu mowy], gdyby bowiem były izotropowe, to musiałoby być

$$s_{11} = s_{33};$$

2) że u większości skał zachodzi nierówność:

$$s_{11} > s_{33},$$

t. j. innemi słowy nierówność XIV, tak n. p. u granitu Nr. 15

$$EG - E_1{}^2 : 4C(E - C) = 640 : 447$$
$$\text{albo} \qquad = 640 : 500,$$

jeżeli weźmiemy na uwagę doświadczenia z ciśnieniem, zaś

$$EG - E_1{}^2 : 4C(E - C) = 510 : 270,$$

jeżeli weźmiemy na uwagę doświadczenia z ciągnieniem.

W dalszym ciągu będziemy zawsze zakładać, że nierówność XIV jest spełniona.

Możemy również założyć, że gdy skała jest w pewnym kierunku ściskana, to jednocześnie rozszerza się w dwóch innych, do pierwszego prostopadłych kierunkach. Jeżeli więc $X \gtrless 0$, a $Y = Z = 0$, to trzeba, aby e miało ten sam znak, co X, zaś f i g miały znak przeciwny; gdy $Y \gtrless 0$, a $X = Z = 0$, to trzeba, aby f miało ten sam znak, co Y, zaś e i g miały znak przeciwny, gdy wreszcie $Z \gtrless 0$, zaś $X = Y = 0$, to trzeba, aby g miało ten sam znak, co Z, zaś e i f miały znak przeciwny.

Kładąc we wzorach XII po kolei $X \gtrless 0$, $Y = Z = 0$ i t. d., znajdziemy zaraz, że wskazane przeciwieństwa znaków będą zachodzić, jeżeli

$$s_{11} > 0, \text{ oraz } s_{33} > 0,$$

a z drugiej strony

$$s_{12} > 0, \text{ oraz } s_{13} < 0.$$

Ponieważ jednak — na mocy koniecznych warunków X — wielkość oznaczona przez H we wzorach XIII jest stale dodatnia, przeto te nierówności — na mocy tychże wzorów XIII — natychmiast przybiorą postać:

$$EG - E_1{}^2 > 0, \quad 4C(E - C) > 0,$$
$$-[G(E - 2C) - E_1{}^2] < 0, \quad -2CE_1 < 0.$$

Pierwsze dwie nierówności już są spełnione na mocy koniecznych warunków X, trzecia wymaga, aby było:

XV $$G(E - 2C) - E_1{}^2 > 0,$$

a czwarta ze względu na to, że C jest stale dodatnie, wymaga, aby było

XVI $$E_1 > 0.$$

Zauważmy tu, że gdy warunek XV jest spełniony, to ostatni warunek X staje się zbyteczny.

Aby wreszcie wszechstronne ciśnienie zawsze zmniejszało, zaś wszechstronne ciągnienie zawsze zwiększało objętość ciała, na to potrzeba, żeby $e + f + g$ miało zawsze ten sam znak, co siły; ale wedle wzorów XII i XIII

$$(e + f + g) = \frac{1}{H}[2C(G - E_1)(X + Y) + 4C(E - C - E_1) . Z],$$

skąd, jeżeli uwzględnimy konieczne warunki X, zaraz wypada, że musi być

XVII $$G - E_1 > 0, \qquad E - C - E_1 > 0.$$

Ostatecznie zatem, dopełniając konieczne warunki X nowymi warunkami XIV, XV, XVI i XVII, otrzymamy następujące warunki:

XVIII $$\left|\begin{array}{c} A > 0 \quad E > 0 \quad G > 0 \quad C > 0 \quad E_1 > 0 \\ E > C \quad G > E_1 \quad E - C > E_1 \\ (E - 2C)\,G > E_1{}^2 \\ EG - E_1{}^2 > 4C(E - C). \end{array}\right.$$

Widzimy więc, że wszystkie współczynniki w ilości pięciu są dodatnie. Warunek, aby i E_1 było dodatnie, nie jest wprawdzie absolutnie konieczny, ale otrzymaliśmy go przyjmując, że skały posiadają tak pospolitą, tak ogólnie rozpowszechnioną fizyczną własność, jaką jest kurczenie się w innych kierunkach, gdy ciało jest wyciągane w pewnym kierunku.

Wyniki doświadczeń Bauschingera, a tak samo wyniki innych doświadczeń robionych przez inżynierów — są wprawdzie najzupełniej wystarczające do celów praktycznych, o które naturalnie głównie im chodziło, ale nie wystarczają do określenia liczbowych wartości naszych współczynników sprężystości. Tak n. p. doświadczenia Bauschingera dają tylko po dwa związki między pięciu współczynnikami A, E i t. d. Trzeba zatem obrać wartości na E, G i t. d. dowolnie, ale tak, aby zadość uczynić warunkom XVIII. Aby jednak utrzymać większe podobieństwo do warunków naturalnych, postanowiłem obrać na E, G i t. d. wartości, których wzajemne między sobą stosunki są zbliżone do stosunków między współczynnikami sprężystości berylu, którego kryształy należą do hexagonalnego systemu i posiadają potencyał sprężystości zupełnie taki sam, jak potencyał W (patrz wzór I). Wedle doświadczeń Voigta[1]) współczynniki A, E i t. d. berylu posiadają następujące wartości:

$$E = 27460 \qquad G = 24090 \qquad A = 6660$$
$$E_1 = 6740 \qquad C = 8830$$

Te wartości czynią zadość wszystkim nierównościom XVIII oprócz ostatniej, dlatego też weźmiemy tu na A, E i t. d. wartości nie wprost proporcyonalne współczynnikom berylu, ale tak dobrane, aby także ostatnia nierówność XVIII była spełniona. Wreszcie, ponieważ chodzi tu tylko o względne wartości współczynników sprężystości [zresztą możnaby odpowiednio obrać jednostki długości i czasu], więc dla ułatwienia dalszych rachunków wziąłem możliwie proste całe liczby, mianowicie położyłem:

$$A = E_1 = 2$$
$$E = 10$$
$$G = 8$$
$$C = 3,$$

skąd na mocy wzorów

$$A + E = 2a \text{ i t. d.}$$

[patrz wzory zaraz po wzorze III]

$$a = 6 \qquad b = 5 \qquad c^2 = 20 \qquad d^2 = 16 \qquad K^2 = 34.$$

Przyjąwszy te wartości na współczynniki, obliczyłem 13 punktów krzywej $D = 0$. Wszystko to są punkty pojedyncze, ale ponieważ równanie $D = 0$ zawiera tylko parzyste potęgi zmiennych x i z, więc krzywa jest symmetryczna względem obu osi współrzędnych i za wyjątkiem tych punktów, które leżą na osiach współrzędnych, każda para wartości x^2 i z^2 czyniących zadość równaniu $D = 0$ reprezentuje cztery punkty krzywej.

[1]) Patrz Podręcznik Fizyki Winckelmanna tom I, str. 287.

Połóżmy najpierw $z^2 = 0$. Przypadek ten był już rozważany w poprzedniej rozprawie. Łatwo zresztą stwierdzić, że jeżeli $z^2 = 0$, to równanie $D = 0$ ma dwa rzetelne dodatnie pierwiastki $x^2 = 2$ i $x^2 = 10$. Tylko te dwa pierwiastki odpowiadają rzeczywistym punktom krzywej [oczywiście tylko dodatnie i rzetelne wartości na x^2 i z^2 czyniące zadość równaniu $D = 0$ odpowiadają rzeczywistym punktom krzywej], podwójne pierwiastki, o których była mowa w poprzedniej rozprawie, nie odpowiadają rzeczywistym punktom krzywej, bo przy przyjętych tu wartościach współczynników nie są one rzetelne.

Tak samo, gdy założymy $x^2 = 0$, to otrzymamy tylko dwa rzetelne dodatnie pierwiastki równania $D = 0$, mianowicie:

$$z^2 = 2 \text{ i } z^2 = 8.$$

Punkty podwójne i tutaj są urojone.

Połóżmy teraz: $z^2 = 2$. Równanie $D = 0$ ma naturalnie najpierw pierwiastek $x^2 = 0$, gdy zaś skrócimy funkcyę D na x^2 i na pewien liczbowy współczynnik, to pozostanie nam równanie:

$$-18x^{10} + 719x^8 - 14440x^6 + 91688x^4 - 178176x^2 + 106480 = 0,$$

które ma trzy dodatnie i rzetelne pierwiastki:

jeden między $x^2 = 1{,}3$ a $x^2 = 1{,}4$
drugi „ $x^2 = 1{,}4$ a $x^2 = 1{,}5$
trzeci „ $x^2 = 6{,}0$ a $x^2 = 6{,}1$.

Połóżmy $z^2 = 5$. Po odrzuceniu pewnego liczbowego współczynnika równanie $D = 0$ sprowadza się do równania:

$$-36x^{12} + 71x^{10} - 21715x^8 - 124400x^6 + 541912x^4 + 105232x^2 + 192080 = 0,$$

które ma tylko jeden rzetelny dodatni pierwiastek między $x^2 = 3{,}1$ a $x^2 = 3{,}2$.

Połóżmy $z^2 = 8$. Po odrzuceniu pierwiastka $x^2 = 0$ i pewnego liczbowego współczynnika równanie $D = 0$ sprowadza się do równania:

$$-9x^{10} + 226x^8 - 4520x^6 - 348272x^4 - 193488x^2 - 54880 = 0,$$

które nie ma ani jednego rzetelnego dodatniego pierwiastka.

Połóżmy $x^2 = 2$. Po odrzuceniu pierwiastka $z^2 = 0$ i pewnego liczbowego współczynnika równanie $D = 0$ sprowadza się do równania:

$$-5z^{10} + 156z^8 - 2220z^6 - 11920z^4 - 22608z^2 + 13824 = 0,$$

które ma trzy rzetelne dodatnie pierwiastki

jeden między $z^2 = 1,4$ a $z^2 = 1,5$
drugi „ $z^2 = 1,5$ a $z^2 = 1,6$
trzeci „ $z^2 = 5,3$ a $z^2 = 5,4$.

Połóżmy $x^2 = 6$. Po odrzuceniu pewnego liczbowego współczynnika równanie $D = 0$ sprowadza się do równania:

$$-5z^{12} + 108z^{10} - 1018z^8 - 30824z^6 + 93355z^4 - 63764z^2 + \\ + 18496 = 0,$$

które ma tylko jeden rzetelny dodatni pierwiastek między $z^2 = 2$ a $z^2 = 2,1$.

Połóżmy $x^2 = 10$. Po odrzuceniu pierwiastka $x^2 = 0$ i pewnego liczbowego współczynnika równanie $D = 0$ sprowadza się do równania:

$$-z^{10} + 12z^8 + 76z^6 - 21504z^4 - 12048z^2 - 4096 = 0,$$

które nie ma żadnego rzetelnego dodatniego pierwiastka.

Wreszcie gdy położymy $z^2 = x^2$, to znajdziemy, że równanie $D = 0$ ma rzetelny i dodatni pierwiastek między

$$z^2 = x^2 = 1,0 \text{ a } z^2 = x^2 = 1,5.$$

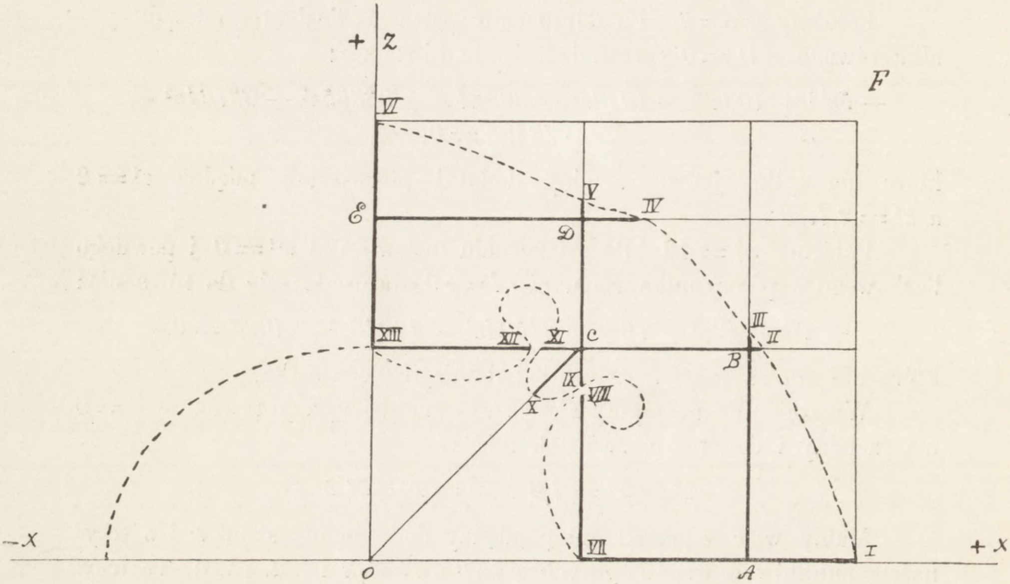
Mamy więc w przestrzeni pomiędzy dodatniemi osiami x i z trzynaście punktów o współrzędnych $x = 0$ $z = \sqrt{2}$ i t. d. i t. d. Te trzynaście punktów oznaczyłem na załączonym tu rysunku, przyjmując ostatecznie następujące współrzędne:

Punkt	I	$z = 0$	$x = 3,16$
„	II	$z = 1,41$	$x = 2,46$
„	III	$z = 1,45$	$x = 2,45$
„	IV	$z = 2,23$	$x = 1,77$
„	V	$z = 2,31$	$x = 1,41$
„	VI	$z = 2,83$	$x = 0$
„	VII	$z = 0$	$x = 1,41$
„	VIII	$z = 1,20$	$x = 1,41$
„	IX	$z = 1,25$	$x = 1,41$
„	X	$z = 1,15$	$x = 1,15$
„	XI	$z = 1,41$	$z = 1,20$
„	XII	$z = 1,41$	$z = 1,16$
„	XIII	$z = 1,41$	$z = 0$

Następnie na prostych przechodzących przez te punkty cienkiemi liniami oznaczyłem te odcinki, wzdłuż których [1]) $D < 0$, a grubemi te,

[1]) W pobliżu punktu $x = 0$ $z = 0$ mamy $D < 0$ nietylko przy tutaj obranych, ale wogóle przy jakichkolwiek wartościach współczynnik ów sprężystości.

wzdłuż których $D > 0$. Z rysunku zaraz widać, że gruba łamana linia $ABCDE$, wzdłuż której wszędzie $D > 0$, oraz jej przedłużenie w pozostałych trzech ćwierciach płaszczyzny zupełnie oddzielają pewną część płaszczyzny, a zatem punkty VII—VIII zawarte w tej odgrani-



czonej części płaszczyzny należą do pewnej gałęzi krzywej, która zupełnie się nie łączy z pozostałemi gałęziami. Dalej widać z rysunku, że łamana prosta $IFVI$, wzdłuż której wszędzie $D = 0$, oraz jej przedłużenie w pozostałych trzech ćwierciach płaszczyzny też zupełnie odgraniczają pewną część płaszczyzny, mianowicie tę, w której leżą rzeczywiste gałęzie krzywej, a zatem poza tą łamaną linią niema żadnej gałęzi krzywej, a jednocześnie punkty I—VI zawarte między łamanemi liniami $IFVI$ i $ABCDE$ należą do drugiej, też zupełnie oddzielnej gałęzi krzywej.

Na rysunku przeprowadziłem przez punkty I—VI z jednej, oraz przez punkty VII—XIII z drugiej strony linie kropkowane. Te linie oznaczają domniemany, możebny przebieg krzywej. Nie należy tym liniom przypisywać żadnego znaczenia, albowiem rzeczywisty przebieg krzywej może bardzo znacznie się różnić od tu nakreślonego; wiemy na pewno tylko tyle, że jedna gałąź musi przejść przez wszystkie punkty I—VI, a druga przez wszystkie punkty VII—XIII. Właściwie nakreśliłem te linie, aby czytelnikowi dopomódz do zoryentowania się w rysunku. Pomiędzy dodatnią osią z a odjemną osią x narysowałem grubą kropkowaną linią ćwierć elipsy:

$$\frac{x^2}{3}+\frac{z^2}{2}=1$$

dla porównania z tamtą krzywą. Z rysunku zaraz widać, że elipsa i wewnętrzna gałąź krzywej $D=0$ przecinają się ze sobą.

Na podstawie tego, co tu było powiedziane lub na rysunku przedstawione, możemy twierdzić, że powierzchnia falowa rozpada się na elipsoidę obrotową, której południkowe przecięcie jest elipsą o równaniu

$$\frac{x^2}{3}+\frac{z^2}{2}=1,$$

oraz na dwie także obrotowe zamknięte, zupełnie ze sobą nie łączące się ani też przecinające się powierzchnie; mniejsza wewnętrzna powierzchnia przecina się z elipsoidą. Elipsoidalna fala i ta druga (wewnętrzna) rozchodzą się z mniej więcej jednakową średnią prędkością, natomiast trzecia (zewnętrzna) fala rozchodzi się ze znacznie [około dwóch razy] większą średnią prędkością niż wewnętrzna oraz elipsoidalna fala. Mówimy o średniej prędkości, bo drgania rozchodzą się w różne strony z niejednakowemi prędkościami. Te drgania nie są ani wyłącznie dilatacyjne ani wyłącznie torsyonalne. W każdej fali mamy drgania o charakterze mięszanym t. j. takie, którym jednocześnie towarzyszy skręt elementu i zmiana objętości. Drgania torsyonalne nie mogą się oddzielić od podłużnych, bo warunki, które umożliwiają takie oddzielenie się jednych drgań od drugich, nie są spełnione. W danym razie n. p. drgania torsyonalne rozchodziłyby się oddzielnie od dilatacyjnych tylko wtedy, gdyby było

$$G=E, \qquad E_1=E-2A.$$

Nie zrobiliśmy założenia, że te warunki są spełnione, albowiem prawdopodobieństwo, aby pomiędzy współczynnikami sprężystości zachodziły takie specyalne związki, — jest bardzo małe.