O własnościach pewnych wyznaczników funkcyjnych

Przez

Ł. E. Böttchera.

Wniesiono na posiedz. Wydz. mat.-przyrod. dnia 18 czerwca 1900; ref. czł. Żorawski.

W pracy tej zajmiemy się pewnymi wyznacznikami, analogicznymi do wyznaczników, zwanych wrońskianami. Jeżeli mianowicie uważać będziemy szereg podstawień:

$$(1) \qquad z_1 = f(z), \quad z_2 = f(z_1), \ldots, \quad z_{n-1} = f(z_{n-2})$$

i szereg funkcyj:

$$F_1(z), \quad F_2(z), \ldots, \quad F_n(z),$$

to można utworzyć wyznacznik:

$$(2) \quad G[F_1(z), F_2(z), \ldots, F_n(z)] = \begin{vmatrix} F_1(z), & F_2(z), \ldots, & F_n(z) \\ F_1(z_1), & F_2(z_1), \ldots, & F_n(z_1) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \\ F_1(z_{n-1}), & F_2(z_{-1}), \ldots, & F_n(z_{n-1}) \end{vmatrix}.$$

Wyznaczniki takie odgrywają takąsamą rolę w teoryi pewnych równań funkcyjnych [1]), jaką wrońskiany różniczkowe odgrywają w teoryi liniowych równań różniczkowych zwyczajnych. Wrońskiany różnicowe

[1]) A. Grévy. Etude sur les équations fonctionnelles. Annales de l'École normale. 1894 i 1896.

są przypadkami szczególnymi tych wyznaczników G i otrzymują się z nich przez założenie:

$$f(z) = z + h,$$

gdzie h jest wielkością stałą. W pracy tej zamierzamy wyprowadzić szereg własności analogicznych do większości z twierdzeń o wrońskianach różniczkowych, podanych w jednych z prac P. S. Dicksteina [1]). Pewne z tych własności zaznaczone już były poprzednio w przypadku wrońskianów różniczkowych, inne zaś, o ile nam wiadomo, i w przypadku wrońskianów różnicowych nie były uważane.

1) Analogicznie do wzorów rachunku różnicowego, w naszym przypadku ogólniejszym n-tą różnicą nazywać będziemy wyrażenie:

$$\Delta^n F(z) = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \binom{n}{i} F(z_{n-i}).$$

Jeżeli pomnożymy wyznacznik:

$$G[F_1(z),\ F_2(z), \ldots,\ F_n(z)] = \\ = \Sigma \pm F_1(z)\, F_2(z_1) \ldots F_n(z_{n-1})$$

przez wyznacznik:

$$1 = \begin{vmatrix} +1, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ -1, & +1, & 0, & \ldots, & 0 \\ +1, & -2, & +1, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-1)^{n-1}\binom{n-1}{0}, & (-1)^{n-2}\binom{n-1}{1}, & (-1)^{n-3}\binom{n-1}{2}, & \ldots, & 1 \end{vmatrix}$$

to łatwo dostrzedz, że otrzymamy wyznacznik, którego i-ta kolumna jest:

$$F_i(z),\quad \Delta F_i(z),\quad \Delta^2 F_i(z), \ldots,\quad \Delta^{n-1} F_i(z).$$

Zatem otrzymujemy wzór:

$$G[F_1(z),\ F_2(z), \ldots,\ F_n(z)] = \\ = \Sigma \pm F_1(z)\, \Delta F_2(z) \ldots \Delta^{n-1} F_n(z),$$

który, w cokolwiek innej formie, znajduje się już w jednej z prac Christoffel'a [2]).

Z tego wzoru można wyprowadzić pewne inne wzory. Jeżeli mianowicie do elementów pierwszego wiersza wyznacznika, stojącego po prawej stronie poprzedniej równości, dodamy elementy drugiego wiersza,

---

[1]) Własności i niektóre zastosowania wrońskianów. Prace mat. fiz. t. I. 1888.

[2]) Zob. Crelle's Journal t. 55, 1858, str. 297.

do elementów drugiego wiersza — elementy trzeciego wiersza i t. d., a do elementów przedostatniego wiersza elementy ostatniego wiersza, to wyznacznik się nie zmieni i otrzymamy wzór:

$$
\begin{aligned}
(3) \qquad & G[F_1(z), \quad F_2(z), \ldots, \quad F_n(z)] = \\
& = \Sigma \pm F_1(z_1)\,\Delta F_2(z_1) \ldots \Delta^{n-2} F_{n-1}(z_1)\,\Delta^{n-1} F_n(z).
\end{aligned}
$$

Przekształcając, w takisam sposób, ten ostatni wyznacznik, przyczem elementy dwóch ostatnich wierszy pozostają bez zmiany, otrzymujemy równość:

$$
\begin{aligned}
& G[F_1(z), \quad F_2(z), \ldots, \quad F_n(z)] = \\
& = \Sigma \pm F_1(z_2)\,\Delta F_2(z_2) \ldots \Delta^{n-3} F_{n-2}(z_2)\,\Delta^{n-2} F_{n-1}(z_1)\,\Delta^{n-1} F_n(z).
\end{aligned}
$$

Wogóle tą drogą otrzymamy:

$$
\begin{aligned}
& G[F_1(z), \quad F_2(z), \ldots, \quad F_n(z)] = \\
& = \Sigma \pm F_1(z_k)\,\Delta F_2(z_k) \ldots \Delta^{n-k-1} F_{n-k}(z_k)\,\Delta^{n-k} F_{n-k+1}(z_{k-1}) \ldots \Delta^{n-1} F_n(z),
\end{aligned}
$$

skąd, przy $k = n - 1$, wynika wzór:

$$
G[F_1(z), \; F_2(z), \ldots, \; F_n(z)] = \Sigma \pm F_1(z_{n-1})\,\Delta F_2(z_{n-2}) \ldots \Delta^{n-1} F_n(z).
$$

Na mocy jednego z tych wzorów, mianowicie wzoru (3) łatwo znaleźć wyrażenie na różnicę wyznacznika G. Ponieważ bowiem mamy:

$$
G[F_1(z_1), \quad F_2(z_1), \ldots, \quad F_n(z_1)] = \Sigma \pm F_1(z_1)\,\Delta F_2(z_1) \ldots \Delta^{n-1} F_n(z_1),
$$

więc, odejmując od tego wzoru wyznacznik (3), otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
& \Delta\, G[F_1(z), \quad F_2(z), \ldots, \quad F_n(z)] = \\
& = \Sigma \pm F_1(z_1)\,\Delta F_2(z_1) \ldots \Delta^{n-2} F_{n-1}(z_1)\,\Delta^{n} F_n(z).
\end{aligned}
$$

2) Wprost z definicyi (2) wyznacznika G wynika wzór:

$$
\begin{aligned}
& G[F(z)\,F_1(z), \quad F(z)\,F_2(z), \ldots, \quad F(z)\,F_n(z)] = \\
& = F(z)\,F(z_1) \ldots F(z_{n-1})\; G[F_1(z), \quad F_2(z), \ldots, \quad F_n(z)]\ ^{1)}.
\end{aligned}
$$

Stąd, przez założenie:

$$
F(z) = \frac{1}{F_1(z)},
$$

otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
(4) \qquad & G[F_1(z), \quad F_2(z), \ldots, \quad F_n(z)] = \\
& = F_1(z)\,F_1(z_1) \ldots F_1(z_{n-1})\; G\left[\Delta \frac{F_2(z)}{F_1(z)}, \; \Delta \frac{F_3(z)}{F_1(z)}, \ldots, \; \Delta \frac{F_n(z)}{F_1(z)}\right],
\end{aligned}
$$

---

[1]) Zob. Christoffel. loco cit.

a jeżeli zwrócimy uwagę na to, że

$$\Delta \frac{F_k(z)}{F_1(z)} = \frac{F_1(z) F_k(z_1) - F_1(z_1) F_k(z)}{F_1(z) F_1(z_1)} = \frac{G[F_1(z), F_k(z)]}{F_1(z) F_1(z_1)},$$

to łatwo otrzymamy inną postać wzoru (4), mianowicie:

$$G[F_1(z), F_2(z), \ldots, F_n(z)] =$$
$$= \frac{G\{G[F_1(z), F_2(z)], G[F_1(z), F_3(z)], \ldots, G[F_1(z), F_n(z)]\}}{F_1(z_1) F_1(z_2) \ldots F_1(z_{n-2})}. \quad (5)$$

Własność tę łatwo uogólnić, mianowicie można pokazać, że ma miejsce równość:

$$G[F_1(z), F_2(z), \ldots, F_n(z)] = \quad (6)$$
$$= \frac{G\{G[F_1(z), \ldots, F_m(z), F_{m+1}(z)], G[F_1(z), \ldots F_m(z), F_{m+2}(z)], \ldots, G[F_1(z), \ldots, F_m(z), F_n(z)]\}}{G[F_1(z_1), \ldots, F_m(z_1)]\, G[F_1(z_2), \ldots, F_m(z_2)] \ldots G[F_1(z_{n-m-1}) \ldots F_m(z_{n-m-1})]}$$

Równość ta, przy $m = 1$, redukuje się do poprzedniego wzoru, ażeby więc udowodnić tę równość dla każdego wzkaźnika m, wystarczy pokazać, że jeżeli istnieje ona przy pewnem m, to istnieje także i przy $m+1$. W tym celu, wprowadzimy na chwilę krótsze oznaczenia:

$$G[F_1(z), F_2(z), \ldots, F_m(z)] = \lambda(z),$$
$$G[F_1(z), F_2(z), \ldots, F_m(z), F_{m+k}(z)] = \lambda_k(z).$$

Za pomocą tych oznaczeń można naszą równość napisać w postaci:

$$G[F_1(z), F_2(z), \ldots, F_n(z)] = \frac{G[\lambda_1(z), \lambda_2(z), \ldots, \lambda_{n-m}(z)]}{\lambda(z_1)\lambda(z_2) \ldots \lambda(z_{n-m-1})},$$

skąd, przez zastosowanie wzoru (5), otrzymujemy:

$$G[F_1(z), F_2(z), \ldots, F_n(z)] =$$
$$= \frac{G[G(\lambda_1, \lambda_2), G(\lambda_1, \lambda_3), \ldots, G(\lambda_1, \lambda_{n-m})]}{\lambda_1(z_1)\lambda_1(z_2) \ldots \lambda_1(z_{n-m-2})\lambda(z_1)\lambda(z_2) \ldots \lambda(z_{n-m-1})}. \quad (7)$$

Ale równość (7) możemy zastosować do $n = m + 2$ funkcyj i otrzymać z niej szereg wzorów:

$$G[F_1(z), F_2(z), \ldots, F_{m+1}(z), F_{m+k}(z)] = \frac{G[\lambda_1(z), \lambda_k(z)]}{\lambda(z_1)}$$
$$(k = 2, 3, \ldots, n - m).$$

Jeżeli ze wzorów tych określimy wyznaczniki $G[\lambda_1(z), \lambda_k(z)]$ i otrzymane wartości wstawimy we wzór (7), to ostatecznie dojdziemy do takiej samej równości, jak (6) z tą tylko różnicą, że zamiast m wszędzie mieć będziemy $m+1$. Zatem twierdzenie nasze jest udowodnione.

3) Wreszcie zajmiemy się przeprowadzeniem analogii do wzorów, odnoszących się do układu dołączonego w teoryi wrońskianów różniczkowych.

Jeżeli w wyznaczniku $G[F_1(z), F_2(z), \ldots, F_n(z)]$ ilość dołączoną do elementu $F_k(z_{n-1})$ nazwiemy $\Phi_k(z)$, t. j. oznaczymy:

$$\Phi_k(z) = (-1)^{n+k} G[F_1(z), \ldots, F_{k-1}(z), F_{k+1}(z), \ldots, F_n(z)]$$

to, wprowadzając wielkości:

$$\Psi_k(z) = (-1)^{n+k} \frac{G[F_1(z), \ldots, F_{k-1}(z), F_{k+1}(z), \ldots, F_n(z)]}{G[F_1(z), F_2(z), \ldots, F_n(z)]},$$

mieć będziemy szereg równań:

$$\begin{aligned}
&\Psi_1(z) F_1(z) + \Psi_2(z) F_2(z) + \ldots + \Psi_n(z) F_n(z) = 0,\\
&\Psi_1(z) F_1(z_1) + \Psi_2(z) F_2(z_1) + \ldots + \Psi_n(z) F_n(z_1) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Psi_1(z) F_1(z_{n-2}) + \Psi_2(z) F_2(z_{n-2}) + \ldots + \Psi_n(z) F_n(z_{n-2}) = 0,\\
&\Psi_1(z) F_1(z_{n-1}) + \Psi_2(z) F_2(z_{n-1}) + \ldots + \Psi_n(z) F_n(z_{n-1}) = 1.
\end{aligned}$$

Wprowadzając oznaczenie:

$$(8) \qquad S_{\alpha,\beta} = \Psi_1(z_\beta) F_1(z_\alpha) + \Psi_2(z_\beta) F_2(z_\alpha) + \ldots + \Psi_n(z_\beta) F_n(z_\alpha),$$

możemy równania te napisać w formie:

$$S_{00} = 0, \quad S_{10} = 0, \ldots, S_{n-2,0} = 0, \quad S_{n-1,0} = 1.$$

Widocznie, że jeżeli w tych równaniach zastąpimy z przez $f_l(z)$, to korzystając z oznaczeń (8), otrzymamy szereg równań:

$$(9) \qquad S_{l,l} = 0, \quad S_{l+1,l} = 0, \ldots, S_{l+n-2,l} = 0, \quad S_{l+n-1,l} = 1.$$

Przy różnych całkowitych dodatnych wartościach l mieć będziemy rozmaite układy takich związków i z pośród nich wszystkich zwrócimy uwagę na równania następujące:

$$S_{n-1,0} = 1, \quad S_{n-1,1} = 0, \quad S_{n-1,2} = 0, \ldots, S_{n-1,n-1} = 0,$$

t. j. na równania:

$$\begin{aligned}
&\Psi_1(z) F_1(z_{n-1}) + \Psi_2(z) F_2(z_{n-1}) + \ldots + \Psi_n(z) F_n(z_{n-1}) = 1,\\
&\Psi_1(z_1) F_1(z_{n-1}) + \Psi_2(z_1) F_2(z_{n-1}) + \ldots + \Psi_n(z_1) F_n(z_{n-1}) = 0,\\
&\Psi_1(z_2) F_1(z_{n-1}) + \Psi_2(z_2) F_2(z_{n-1}) + \ldots + \Psi_n(z_2) F_n(z_{n-1}) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Psi_1(z_{n-1}) F_1(z_{n-1}) + \Psi_2(z_{n-1}) F_2(z_{n-1}) + \ldots + \Psi_n(z_{n-1}) F_n(z_{n-1}) = 0.
\end{aligned}$$

Z równań tych wynika wzór:

$$F_k(z_{n-1}) =$$
$$=(-1)^{k+1} \frac{G[\Psi_1(z_1),\ldots,\ \Psi_{k-1}(z_1),\ \Psi_{k+1}(z_1),\ldots,\ \Psi_n(z_1)]}{G[\Psi_1(z),\ldots,\ \Psi_{k-1}(z),\ \Psi_k(z),\ \Psi_{k+1}(z),\ldots,\ \Psi_n(z)]},$$

na mocy którego otrzymujemy także:

$$F_k(z_{n-1}) =$$
$$=(-1)^{k+1} \frac{G[F_1(z), F_2(z),\ldots, F_n(z)]\, G[\Phi_1(z_1),\ldots,\Phi_{k-1}(z_1),\Phi_{k+1}(z_1),\ldots,\Phi_n(z_1)]}{G[\Phi_1(z),\ldots,\ \Phi_{k-1}(z),\ \Phi_k(z),\ \Phi_{k+1}(z),\ldots,\ \Phi_n(z)]}$$

Ale można otrzymać jeszcze inne związki. Niechaj będzie $k < n$ i uważajmy wyznacznik:

$$G[F_1(z_{n-k-1}),\ F_2(z_{n-k-1}),\ldots,\ F_n(z_{n-k-1})] =$$
$$= \begin{vmatrix} F_1(z_{n-k-1}), & F_2(z_{n-k-1}), & \ldots, & F_n(z_{n-k-1}) \\ F_1(z_{n-k}), & F_2(z_{n-k}), & \ldots, & F_n(z_{n-k}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_1(z_{n-2}), & F_2(z_{n-2}), & \ldots, & F_n(z_{n-2}) \\ F_1(z_{n-1}), & F_2(z_{n-1}), & \ldots, & F_n(z_{n-1}) \\ F_1(z_n), & F_2(z_n), & \ldots, & F_n(z_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_1(z_{2n-k-2}), & F_2(z_{2n-k-2}), & \ldots, & F_n(z_{2n-k-2}) \end{vmatrix}$$

oraz wyznacznik:

$$G[\Psi_{k+1}(z),\ \Psi_{k+2}(z),\ldots,\ \Psi_n(z)] =$$
$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & \ldots, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ \Psi_1(z), & \Psi_2(z), & \ldots, & \Psi_k(z), & \Psi_{k+1}(z), & \ldots, & \Psi_n(z) \\ \Psi_1(z_1), & \Psi_2(z_1), & \ldots, & \Psi_k(z_1), & \Psi_{k+1}(z_1), & \ldots, & \Psi_n(z_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Psi_1(z_{n-k-1}), & \Psi_2(z_{n-k-1}), & \ldots, & \Psi_k(z_{n-k-1}), & \Psi_{k+1}(z_{n-k-1}), & \ldots, & \Psi_n(z_{n-k-1}) \end{vmatrix}$$

i pomnóżmy przez siebie te dwa wyznaczniki. Otrzymamy wyznacznik, który, na podstawie oznaczenia (8), można napisać w postaci:

$$\begin{vmatrix} F_1(z_{n-k-1}), & F_2(z_{n-k-1}),\ldots, & F_k(z_{n-k-1}), & S_{n-k-1,0}, & S_{n-k-1,1},\ldots, & S_{n-k-1,n-k-1} \\ F_1(z_{n-k}), & F_2(z_{n-k}), \ldots, & F_k(z_{n-k}), & S_{n-k,0}, & S_{n-k,1}, \ldots, & S_{n-k,n-k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_1(z_{n-2}), & F_2(z_{n-2}), \ldots, & F_k(z_{n-2}), & S_{n-2,0}, & S_{n-2,1}, \ldots, & S_{n-2,n-k-1} \\ F_1(z_{n-1}), & F_2(z_{n-1}), \ldots, & F_k(z_{n-1}), & S_{n-1,0}, & S_{n-1,1}, \ldots, & S_{n-1,n-k-1} \\ F_1(z_n), & F_2(z_n), \ldots, & F_k(z_n), & S_{n,0}, & S_{n,1}, \ldots, & S_{n,n-k-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_1(z_{2n-k-2}), & F_2(z_{2n-k-2}),\ldots, & F_k(z_{2n-k-2}), & S_{2n-k-2,0}, & S_{2n-k-2,1},\ldots, & S_{2n-k-2,n-k-1} \end{vmatrix}$$

Jeżeli teraz zwrócimy uwagę na związki (9), to dostrzeżemy z łatwością, że wszystkie wyrażenia S, znajdujące się powyżej elementów wyrazu głównego tego wyznacznika, są równe zeru, wszystkie zaś wyrażenia S, które są elementami wyrazu głównego są równe jedności. Stąd wynika, że ostatni wyznacznik sprowadza się do wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} F_1(z_{n-k-1}), & F_2(z_{n-k-1}), \ldots, & F_k(z_{n-k-1}) \\ F_1(z_{n-k}), & F_2(z_{n-k}), \ldots, & F_k(z_{n-k}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ F_1(z_{n-2}), & F_2(z_{n-2}), \ldots, & F_k(z_{n-2}) \end{vmatrix},$$

a zatem, otrzymujemy wzór:

$$G[\Psi_{k+1}(z), \quad \Psi_{k+2}(z), \ldots, \quad \Psi_n(z)] =$$
$$= \frac{G[F_1(z_{n-k-1}), \quad F_2(z_{n-k-1}), \ldots, \quad F_k(z_{n-k-1})]}{G[F_1(z_{n-k-1}), \quad F_2(z_{n-k-1}), \ldots, \quad F_n(z_{n-k-1})]}.$$

Łatwo dostrzedz, że odpowiedni wzór, zawierający funkcye Φ, ma postać:

$$G[\Phi_{k+1}(z), \quad \Phi_{n+2}(z), \ldots, \quad \Phi_n(z)] =$$
$$G[F_1(z), \ldots, F_n(z)]\, G[F_1(z_1) \ldots F_n(z_1)] \ldots$$
$$G[F_1(z_{n-k-2}), \ldots, F_n(z_{n-k-2})]\, G[F_1(z_{n-k-1}), \ldots, F_k(z_{n-k-1})],$$

którą otrzymujemy na podstawie wzoru:

$$\Phi_k(z) = \Psi_k(z). \quad G[F_1(z), \quad F_2(z), \ldots, \quad F_n(z)],$$

wynikającego z określenia funkcyj $\Phi_k(z)$ i $\Psi_k(z)$.

Rachunek, który doprowadził nas do tych wzorów, stosuje się i do przypadku $k = 0$ i w tym przypadku otrzymujemy wzory:

$$G[F_1(z_{n-1}), \; F_2(z_{n-1}), \ldots, \; F_n(z_{n-1})] \; G[\Psi_1(z), \; \Psi_2(z), \ldots, \; \Psi_n(z)] = 1,$$

$$G[\Phi_1(z), \; \Phi_2(z), \ldots, \; \Phi_n(z)] =$$
$$= G[F_1(z), \ldots, F_n(z)] \; G[F_1(z_1), \ldots, F_n(z_1)] \ldots$$
$$\ldots G[F_1(z_{n-2}), \ldots, F_n(z_{n-2})].$$

Wzory naszego artykułu otrzymują się drogą analogiczną do tej, za pomocą której otrzymują się własności wrońskianów różniczkowych, widoczna jednak, że z tamtych twierdzeń wzorów naszych wprost odczytać nie można.