Böklen

Geometrie des Raumes

Analytische
Geometrie des Raumes,

enthaltend

die allgemeine Theorie der krummen Flächen, der gewundenen Kurven und der Linien auf den Flächen; die Eigenschaften der (homofokalen) Flächen zweiten Grades und der Linien auf denselben

von

Dr. Otto Böklen.

Stuttgart.
Ad. Becher's Verlag.
1861.

opis nr: 45770

Druck von C. Hoffmann in Stuttgart.

Inhalts-Verzeichniß.

§. 1. Von den Winkeln zwischen Geraden und Ebenen.

Wir nehmen 3 sich rechtwinklig schneidende Axen an, OX, OY, OZ. Durch den Ursprung O geht eine Gerade, welche mit den Axen der x, y, z der Reihe nach die Winkel α, β, γ bildet, und deren Gleichungen

1. $x + pz = o \qquad y + qz = o$ sind,

so ist

2. $\cos\alpha = -\frac{p}{k};\ \cos\beta = -\frac{q}{k};\ \cos\gamma = \frac{1}{k}$

wo der im Folgenden häufig vorkommende Ausdruck $p^2 + q^2 + 1 = k^2$ gesetzt wurde. Die Tangenten jener Winkel sind

3. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{q^2+1}}{p},\ \operatorname{tg}\beta = -\frac{\sqrt{p^2+1}}{q},\ \operatorname{tg}\gamma = \sqrt{p^2+q^2}$

Aus 2 und 3 erhält man sofort für die Sinus

4. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{q^2+1}}{k},\ \sin\beta = \frac{\sqrt{p^2+1}}{k},\ \sin\gamma = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{k}$

Wir ziehen durch den Coordinatenursprung O eine zweite Gerade, welche mit der ersten den Winkel ω bildet und deren Gleichungen

5. $x + p_{,}z = o \qquad y + q_{,}z = o$ sind,

und setzen, ähnlich wie oben, $p_{,}^2 + q_{,}^2 + 1 = k_{,}^2$, so haben wir die Relationen

6. $\cos\omega = \frac{pp_{,} + qq_{,} + 1}{kk_{,}}$

7. $\operatorname{tg}\omega = \frac{\sqrt{(p-p_{,})^2 + (q-q_{,})^2 + (pq_{,}-p_{,}q)^2}}{pp_{,} + qq_{,} + 1}$

Aus 6 und 7 erhalten wir ferner

8. $\sin\omega = \frac{\sqrt{(p-p_{,})^2 + (q-q_{,})^2 + (pq_{,}-p_{,}q)^2}}{kk_{,}}$

Wenn beide Gerade sich rechtwinklig schneiden sollen, so findet die Bedingungsgleichung statt:

9. $pp_{,} + qq_{,} + 1 = o$

welche nach 8. identisch ist mit

10. $\sqrt{(p-p_{,})^2 + (q-q_{,})^2 + (pq_{,}-p_{,}q)^2} = kk_{,}$

Durch den Punkt O gehe eine Ebene, deren Gleichung ist

11. $z = px + qy$

und welche mit den Coordinaten Ebenen der zy, zx, yx der Reihe nach die Winkel α, β, γ bildet, so hat man

12. $\cos\alpha = -\frac{p}{k}$, $\cos\beta = -\frac{q}{k}$, $\cos\gamma = \frac{1}{k}$

13. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{q^2+1}}{p}$, $\operatorname{tg}\beta = -\frac{\sqrt{p^2+1}}{k}$, $\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{p^2+q^2}$

14. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{q^2+1}}{k}$, $\sin\beta = \frac{\sqrt{p^2+1}}{k}$, $\sin\gamma = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{k}$

Eine zweite Ebene werde durch O gelegt, welche mit der ersten den Winkel ω bildet, und deren Gleichung

15. $z = p_, x + q_, y$ sei, so ist

16. $\cos\omega = \frac{pp_, + qq_, + 1}{kk_,}$

17. $\operatorname{tg}\omega = \frac{\sqrt{(p-p_,)^2 + (q-q_,)^2 + (pq_, - p_, q)^2}}{pp_, + qq_, + 1}$

18. $\sin\omega = \frac{\sqrt{(p-p_,)^2 + (q-q_,)^2 + (pq_, - p_, q)^2}}{kk_,}$

Die Bedingungsgleichung dafür, daß beide Ebenen sich senkrecht schneiden, ist

19. $pp_, + qq_, + 1 = o$ oder

20. $\sqrt{(p-p_,)^2 + (q-q_,)^2 + (pq_, - p_, q)^2} = kk_,$

Die Gerade $x + pz = o \quad y + qz = o$
und die Ebene $z = px + qy$
sind gegenseitig senkrecht, weil die Projektionen der Geraden auf den Ebenen der zx und zy beziehungsweise senkrecht stehen auf den Durchschnitten

$z = px$ und $z = qy$

welche die gegebene Ebene auf den Ebenen der zx und zy hervorbringt.

Vorstehende Gleichungen gelten allgemein für beliebige Gerade und Ebenen im Raum, deren Gleichungen sind

21. $x + pz + m = o \qquad y + qz + n = o$

22. $z = p'x + q'y + m'$

Soll die Gerade mit der Ebene parallel sein, so ist sie senkrecht auf jeder Geraden, welche auch auf der Ebene senkrecht steht, also findet die Bedingungsgleichung statt

23. $pp' + qq' + 1 = o$

Soll aber die Ebene die Gerade enthalten, so kommt noch die Bedingung hinzu

24. $p'm + q'n - m' = o$

Der Abstand des Ursprungs von der Ebene $z = px + qy + m$ ist gleich

25. $\frac{m}{k}$

Der Abstand des Punkts (ξ, η, ζ) von dieser Ebene ist gleich

26. $\frac{\zeta - p\xi - q\eta - m}{k}$

Dieß ist auch der Abstand von zwei beliebigen, durch die Punkte (x, y, z) und (ξ, η, ζ) gelegten parallelen Ebenen $z = px + qy + m'$ und $\zeta = p\xi + q\eta + m - m'$

Der Abstand des Ursprungs von der Geraden $x + pz + m = o \quad y + qz + n = o$ ist

27. $\frac{1}{k}\sqrt{m^2 + n^2 + \left(qm - pn\right)^2}$

Der Abstand des Punkts (ξ, η, ζ) von dieser Geraden ist

28. $\frac{1}{k}\sqrt{\left(\xi + p\zeta + m\right)^2 + \left(\eta + q\zeta + n\right)^2 + \left(q\xi - p\eta + qm - pn\right)^2}$

Dieß ist auch der Abstand der beiden parallelen Geraden

$$\begin{matrix} x + pz + m = o \\ y + qz + n = o \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} x + pz - (\xi + p\zeta) = o \\ y + qz - (\eta + q\zeta) = o \end{matrix}$$

Vorstehende Formeln sind geeignet bei vielen Untersuchungen der analytischen Geometrie, namentlich in der Theorie der Flächen. Bei den Curven hingegen wird gewöhnlich eine andere Form angewendet. Die Cosinus der Winkel, welche zwei Gerade mit den Axen der x, y, z bilden, bezeichnen wir mit a, b, c; α, β, γ. Der Winkel beider Geraden sei gleich ω, so haben wir

29. $\cos \omega = a\alpha + b\beta + c\gamma$

30. $\sin \omega = \sqrt{(b\gamma - \beta c)^2 + (c\alpha - \gamma a)^2 + (a\beta - \alpha b)^2}$

Die Cosinus der Winkel, welche die Normale einer beiden Geraden parallelen Ebene mit den Axen macht, seien A, B, C, so ist

31. $A = \frac{b\gamma - \beta c}{\sin \omega}$; $B = \frac{c\alpha - \gamma a}{\sin \omega}$; $C = \frac{a\beta - \alpha b}{\sin \omega}$

Die Gleichung dieser Ebene ist

32. $Ax + By + Cz = \text{const.}$,

PQ ist die Linie, welche die genannten Geraden in den Punkten P (x, y, z) und Q (x′, y′, z′) senkrecht schneidet

33. $PQ = \frac{1}{\sin \omega}\left\{(x - x^1)(b\gamma - \beta c) + (y - y^1)(c\alpha - \gamma a) + (z - z^1)(a\beta - \alpha b)\right\}$

34. $PQ = (x - x^1)A + (y - y^1)B + (z - z^1)C$

Durch den Ursprung O ziehen wir drei Gerade, welche eine concentrische Kugel, deren Halbmesser = 1, in den Punkten M, M′, M″ treffen. Die Cosinus der Winkel, welche die Geraden OM, OM′, OM″ mit den Axen bilden, sind beziehungsweise gleich a, b, c; α, β, γ; a, b, c. Man setze der Einfachheit wegen

$$\begin{matrix} b\gamma - \beta c = A \sin \omega & c\alpha - \gamma a = B \sin \omega & a\beta - \alpha b = C \sin \omega \\ bc - bc = A' \sin \omega' & ca - ca = B' \sin \omega' & ab - ab = B' \sin \omega' \\ \beta c - b\gamma = A'' \sin \omega'' & \gamma a - c\alpha = B'' \sin \omega'' & \alpha b - a\beta = C'' \sin \omega'' \end{matrix}$$

ω = Winkel MOM′; ω' = MOM″; ω'' = M′OM″

die Werthe von $\sin \omega$, $\sin \omega'$, $\sin \omega''$ folgen aus 30.

Die Winkel des sphärischen Dreiecks MM′M″ bezeichnen wir mit M, M′, M″

35. $\cos M = AA' + BB' + CC'$
$\cos M' = AA'' + BB'' + CC''$
$\cos M'' = A'A'' + B'B'' + C'C''$

36. $\sin M = \sqrt{(BC' - B'C)^2 + (CA' - C'A)^2 + (AB' - A'B)^2}$
$\sin M' = \sqrt{(B''C - BC'')^2 + (C''A - CA'')^2 + (A''B - AB'')^2}$
$\sin M'' = \sqrt{(B'C'' - B''C')^2 + (C'A'' - C''A')^2 + (A'B'' - A''B')^2}$

Zur Abkürzung setzen wir

37. $J = a\beta c + \alpha bc + ab\gamma - c\beta a - \gamma ba - cb\alpha$

So ist

38. $\sin M = \frac{J}{\sin\omega .\ \sin\omega'}$ $\sin M' = \frac{J}{\sin\omega .\ \sin\omega''}$ $\sin M'' = \frac{J}{\sin\omega' .\ \sin\omega''}$

Bezeichnen wir die Winkel zwischen den Halbmessern OM, OM′, OM″ und den ihnen gegenüberliegenden Seiten M′OM″, MOM″, MOM′ mit μ, μ', μ'', so ist

39. $\sin\mu = \frac{J}{\sin\omega''} = aA'' + bB'' + cC''$

$\sin\mu' = \frac{J}{\sin\omega'} = \alpha A' + \beta B' + \gamma C'$

$\sin\mu'' = \frac{J}{\sin\omega} = aA + bB + cC$

Die Bedingung dafür, daß die drei Geraden OM, OM′, OM″ in Einer Ebene liegen sollen, ist

40. $J = o$

und daß sie aufeinander senkrecht stehen

41. $J = 1$

Bartels: Aperçu abrégé des formules fondamentales de la géometrie à trois dimensions (Académie de Petersbourg 1825).

Statt J kann man auch schreiben:

$a(\beta c - b\gamma) + b(\gamma a - c\alpha) + c(\alpha b - a\beta)$; ebenso sei

$J' = a'(\beta'c' - b'\gamma') + b'(\gamma'a' - c'\alpha') + c'(\alpha'b' - a'\beta')$ so ist

42. $J.J' = L(M'N'' - M''N') + M(N'L'' - N''L') + N(L'M'' - L''M)$

zur Abkürzung wurde hier gesetzt:

$L = aa' + bb' + cc'$ $L' = a\alpha' + b\beta' + c\gamma'$ $L'' = aa' + bb' + cc'$

$M = \alpha a' + \beta b' + \gamma c'$ $M' = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$ $M'' = \alpha a' + \beta b' + \gamma c'$

$N = aa' + bb' + cc'$ $N' = a\alpha' + b\beta' + c\gamma'$ $N'' = aa' + bb' + cc'$

Die Gleichung 42 läßt sich auch so schreiben:

$JJ' = L(M'N'' - M''N') + L'(M''N - MN'') + L''(MN' - MN)$

Vier weitere Formen dieser Gleichung ergeben sich, wenn man der Reihe nach die Größen L′M′N′, L″M″N″, MM′M″, NN′N″ außerhalb der Parenthesen setzt.

Nachdem nun die Hauptformeln der Uebersicht wegen ohne Beweis zusammengestellt worden sind, folgt noch eine kurze Demonstration derselben:

Durch den Ursprung O gehen zwei Gerade, welche eine concentrische Kugel vom Halbmesser 1 in M und M′ treffen, und die mit den Axen Winkel bilden, deren Cosinus gleich a, b, c; α, β, γ sind. Man lege durch M drei zu den Axen senkrechte Ebenen, so erhält man ein Parallelepiped, dessen Diagonale OM ist, und dessen Kanten gleich a, b, c sind. Die Projektion von OM auf OM′ ist gleich cos MOM′ = cos ω. Man kann aber von O nach M auf einer gebrochenen Linie gelangen, welche aus drei Kanten gleich a, b und c besteht, und deren Projektion auf OM′ ebenfalls = cos ω ist. Die Projektionen von a, b, c auf OM′ sind = $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ mithin ist

$$\cos\omega = a\alpha + b\beta + c\gamma$$

Der Inhalt des Dreiecks MOM′ ist $= \frac{1}{2}\sin\omega$; auch ist nach einem bekannten Satze dieser Inhalt gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate seiner Projektionen auf den drei Coordinaten Ebenen. Es sei z. B. NON′ die Projektion von MOM′ auf der xy Ebene. Wir ziehen durch

N und N′ je zwei Linien parallel mit der x und y Axe, und erhalten dadurch 2 Rechtecke, deren Seiten a, β und α, b sind. Eine leichte geometrische Untersuchung führt nun darauf, daß Dreieck $NON' = \frac{1}{2}(a\beta - \alpha b)$ ist. Ebenso findet man für die Projektionen von MOM′ auf den beiden andern Ebenen die Werthe $\frac{1}{2}(c\alpha - \gamma a)$ und $\frac{1}{2}(b\gamma - \beta c)$, also ist

$$\sin \omega = \sqrt{(a\beta - \alpha b)^2 + (c\alpha - \gamma a)^2 + (b\gamma - \beta c)^2}$$

Hiemit sind die Fundamentalformeln erwiesen, von welchen insbesondere die Cosinusformel in der analytischen Geometrie eine wichtige Rolle spielt. Sehr häufig begegnet man einer Summe von drei Produkten mit je zwei Faktoren. Ein solcher Ausdruck stellt fast immer den Cosinus eines Winkels vor. Es seien z. B. M (x, y, z) und M′ (x′, y′, z′) zwei Punkte einer Ebene. Die Cosinus der Winkel, welche die Gerade MM′ mit den Axen bildet, sind gleich

$$\frac{x-x'}{MM'}, \quad \frac{y-y'}{MM'}, \quad \frac{z-z'}{MM'} \qquad MM' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

Die Cosinus der Winkel, welche die Normale der Ebene mit den Axen bildet, bezeichne man mit A, B, C. Da nun die Normale auf allen Geraden der Ebene senkrecht steht, so ist der Cosinus der betreffenden Winkel = o oder

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = o$$

die Gleichung der Ebene; nehmen wir hier x, y, z als die laufenden Coordinaten an, und den Punkt M′ als fest, so haben wir auch

$$Ax + By + Cz = \text{const.}$$

Mittelst dieser Betrachtungen wird man sich leicht die Formeln 1—20 erklären können. Beim Uebergang von der Geraden 1 zur Ebene 11 ist zu berücksichtigen, daß, wenn eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht, die Projektion der Geraden auf einer Coordinaten Ebene auch senkrecht steht auf dem Durchschnitt der letzteren mit der gegebenen Ebene.

Die Formeln 31 lassen sich auf folgende Art beweisen: Man ziehe durch den Ursprung die Halbmesser OM, OM′, welche mit den gegebenen Geraden (a, b, c) und (α, β, γ) parallel sind. Die Cosinus der Winkel zwischen der Normale der Ebene MOM′ und den Axen sind nach unserer Bezeichnung gleich A, B, C. Nun ist der Winkel φ zwischen der Fläche MOM′ und ihrer Projektion NON′ auf der xy Ebene gleich dem Winkel zwischen dieser Normale und der z Axe, oder $\cos\varphi = C$; andererseits ist $\cos\varphi = \frac{NON'}{MOM'}$ oder nach dem Obigen gleich $\frac{a\beta - \alpha b}{\sin\omega}$; mithin $C = \frac{a\beta - \alpha b}{\sin\omega}$; ebenso werden die Ausdrücke für B und A bewiesen. Die Gleichungen 33 und 34 beruhen darauf, daß der Winkel zwischen PQ und der Normale der, beiden Geraden parallelen, Ebene gleich Null, also der Cosinus des Winkels gleich 1 ist. Statt 34 kann man auch setzen

$$A\frac{x-x'}{PQ} + B\frac{y-y'}{PQ} + C\frac{z-z'}{PQ} = 1$$

$\frac{x-x'}{PQ}, \frac{y-y'}{PQ}, \frac{z-z'}{PQ}$ sind die Cosinus der Winkel zwischen PQ und den Axen.

Die Gleichungen 35 und 36 folgen direkt aus 29 und 30; denn die Größen A, B, C, A'... sind die Cosinus der Winkel, welche die Normalen der Ebenen MOM', MOM'', M'OM'' mit den Axen machen, und der Winkel zwischen zwei solchen Normalen ist gleich dem Winkel zwischen den entsprechenden Ebenen. Die Gleichung 37 kann auch so geschrieben werden:

$$J = a(\beta c - b\gamma) + b(\gamma a - c\alpha) + c(\alpha b - a\beta)$$
$$= (aA'' + bB'' + cC'') \sin \omega''$$

Sin μ ist gleich dem Cosinus des Winkels zwischen OM und der Normale von M'OM'', oder nach der Cosinusformel $\sin \mu = aA'' + bB'' + cC''$, da A'', B'', C'' die Cosinus der Winkel sind, welche die Normale von M'OM'' mit den Axen macht. Somit wären die Formeln 39 erwiesen; nun führen ganz einfache geometrische Betrachtungen darauf, daß $\sin \mu \sin \omega''$ gleich dem Inhalt des durch die Kanten OM, OM', OM'' bestimmten Parallelepipeds ist $\left(\frac{1}{2} \sin \omega'' = \text{Dreieck } M'OM''\right)$; mithin ist auch J gleich diesem Inhalt. Daraus folgt, daß wenn die Geraden OM, OM', OM'' in Einer Ebene liegen, J = Null sein muß. Stehen sie aber auf einander senkrecht, so ist das genannte Parallelepiped ein Würfel, dessen Kanten OM = OM' = OM'' = 1 sind, und dessen Inhalt also auch = 1 ist.

Die Formel 42 ist eine identische Gleichung zwischen den 18 beliebigen Größen

$$\begin{array}{ccc} a\,b\,c\,, & \alpha\,\beta\,\gamma\,, & a\,b\,c\,, \\ a'b'c', & \alpha'\beta'\gamma', & a'b'c', \end{array}$$

man überzeugt sich davon durch Ausführung der Multiplikationen, was hier unterbleibt, da diese Rechnung, abgesehen von ihrer Weitläufigkeit, ohne alle Schwierigkeit ist. Wenn die 18 Größen die Bedingungen erfüllen: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ u. s. f., so sind sie die Cosinus von 6 Geraden im Raum, und die Bedeutung der Gleichung 42 in der analytischen Geometrie besteht darin, daß aus ihr eine Reihe von einfacheren Beziehungen sich ableiten lassen, durch Annahme spezieller Fälle. Es können also eine oder mehrere dieser 6 Geraden zusammenfallen, oder auf einander senkrecht stehen.

Bei der Formel 25 ist zu bemerken, daß m der Abstand des Ursprungs von dem Durchschnitt der zAxe mit der Ebene $z = px + qy + m$ ist, und nach 12. bedeutet $\frac{1}{k}$ den Cosinus des Winkels zwischen dieser Axe und der vom Ursprung auf die Ebene herabgelassenen Senkrechten. Die durch den Punkt (ξ, η, ζ) gehende parallele Ebene hat die Gleichung $\zeta = p\xi + q\eta + m'$, und $m' - m = \zeta - p\xi - q\eta - m$ ist dasjenige Stück der zAxe, welches zwischen beiden Ebenen enthalten ist, woraus sich die Relation 26. erklärt.

Die Ebene, welche durch den Ursprung senkrecht auf die Gerade $x + pz + m = o$, $y + qz + n = o$ gelegt wird, hat die Gleichung (11) $z = px + qy$; die Coordinaten des Durchschnittspunktes sind also

$$z = -\frac{1}{k^2}(pm + qn) \qquad y = \frac{1}{k^2}\left\{p(qm - pn) - n\right\}$$
$$x = -\frac{1}{k^2}\left\{q(qm - pn) + m\right\}$$

nach einigen leichten Reduktionen ergibt sich hieraus mit Berücksichtigung der Gleichung $k^2 = 1 + p^2 + q^2$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{k^2}\left\{m^2 + n^2 + (qm - pn)^2\right\}$$

welches der Ausdruck 27 ist.

Um den Abstand des Punkts (ξ, η, ζ) von der Geraden $x + pz + m = o$, $y + qz + n = o$ zu finden, verlegen wir den Coordinaten Ursprung nach diesem Punkt, indem wir statt x, y, z, die neuen Coordinaten $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ setzen, hiedurch verwandeln sich die Gleichungen der Geraden in folgende

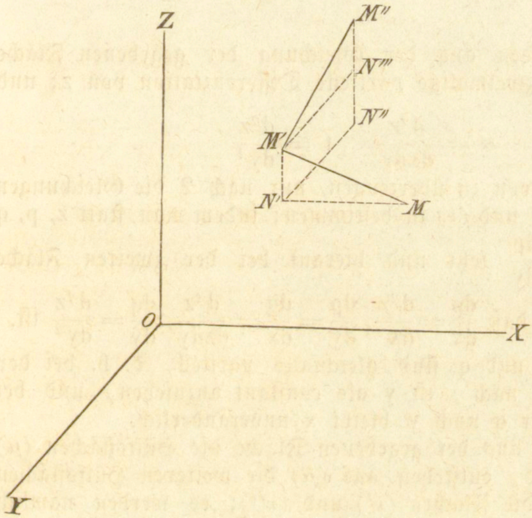
$$x + pz + (\xi + p\zeta + m) = o \quad y + qz + (\eta + q\zeta + n) = o$$

Mithin dürfen wir, um von der Formel 27 auf 28 überzugehen, nur statt m und n die Größen $\xi + p\zeta + m$ und $\eta + q\zeta + n$ setzen, wodurch wir die letztere Form erhalten.

§. 2. Die Tangential-Ebene und Normale einer Fläche.

In einem Punkte M einer Fläche denken wir uns die Berührungsebene und nehmen auf dieser noch zwei Punkte M′ und M″ an, so daß MM′ parallel der zx Ebene und M″M′ parallel der zy Ebene ist; durch M wird eine Ebene gelegt parallel der xy Ebene und von M′ und M″ aus fällen wir darauf die Perpendikel M′N′ und M″N″; endlich lege man durch M′ eine Ebene, ebenfalls parallel der xy Ebene, welche M″N″ in N‴ schneidet. Nun ist $M''N'' = M''N''' + N'''N'' = M''N''' + M'N'$ Aber $M'N' = p.MN'$ und $M''N''' = q.N'''M'$ wo $\operatorname{tg} M'MN' = p$ und $\operatorname{tg} M''M'N''' = q$ gesetzt wurde. Es seien xyz die Coordinaten von M und x′y′z′ diejenigen von M″, so haben wir die Gleichung der Berührungsebene

Fig. 1.



1. $z' - z = p(x' - x) + q(y' - y)$

Wenn der Punkt M fest ist, so bleiben die Werthe p und q ungeändert, wo auch M″ auf der Tangential-Ebene liegt; ist M″ unendlich nahe bei M, und nennt man die Differenzen $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ beziehungsweise dx, dy, dz, so erhält man die Gleichung der Tangential-Ebene in folgender Form:

2. $dz = p\,dx + q\,dy$

Die Größen p und q werden nun aus der Gleichung der Fläche $z = f(x,y)$ bestimmt, indem man zuerst y unverändert läßt und die partielle Ableitung von z nach x $\frac{dz}{dx} = p$ setzt, hierauf bleibt x unveränderlich und dann ist die partielle Ableitung von z nach y $\frac{dz}{dy} = q$.

Die Projektionen der Linie, welche in M die Tangential-Ebene oder die Fläche senkrecht schneidet, auf den Ebenen der zx und zy müssen die Durchschnitte der Tangential-Ebene mit diesen Ebenen ebenfalls senkrecht treffen, hieraus ergeben sich unmittelbar die Gleichungen der Normale in M

3. $x' - x + p(z' - z) = 0 \quad y' - y + q(z' - z) = 0$

Die Gleichungen 2, 3, 4 in § 1 geben die Werthe der Winkel α, β, γ an, welche die Normale einer Fläche mit den Coordinatenaxen bildet; sie sind identisch mit den Gleichungen 12, 13, 14 in § 1, die sich auf die Winkel α, β, γ beziehen, welche die Berührungs-Ebene einer Fläche mit den Coordinaten-Ebenen macht.

Wir fällen von M aus auf die xy Ebene das Perpendikel MN und nehmen auf dessen Richtung den Punkt μ an, so daß $N\mu = \text{const. } p$ ist, dehnen dieses Verfahren auf sämmtliche Punkte M der gegebenen Fläche aus, so liegen die entsprechenden Punkte μ auf der abgeleiteten Fläche, die wir mit (μ) bezeichnen wollen. Eine zweite abgeleitete Fläche (ν) ergibt sich, wenn auf den Ordinaten MN die Punkte ν angenommen werden, so daß $N\nu = \text{const. } q$ ist. Die Gleichungen der Tangential-Ebenen dieser Flächen sind folgende:

4. $dp = r\,dx + s\,dy$

5. $dq = s\,dx + t\,dy$

Die Größen r, s, t werden aus der Gleichung der gegebenen Fläche $z = f(x, y)$ bestimmt, durch zweimalige partielle Differenziation von z; und zwar ist

$$r = \frac{d^2z}{dx^2} \quad s = \frac{d^2z}{dxdy} \quad t = \frac{d^2z}{dy^2}$$

Man braucht, um sich hievon zu überzeugen, nur nach 2 die Gleichungen der Tangential-Ebenen von (μ) und (ν) zu bestimmen; indem man statt z, p, q zuerst die Größen p, $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dp}{dy}$ setzt und hierauf bei der zweiten Fläche q, $\frac{dq}{dx}$, $\frac{dq}{dy}$; und berücksichtigt, daß $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = \frac{d^2z}{dzdy}$, $\frac{dq}{dy} = \frac{d^2z}{dy^2}$ ist.

Die Ableitungen von p und q sind gleichfalls partiell, d. h. bei der Differenziation von p oder q nach x ist y als constant anzusehen, und bei der Differenziation von p oder q nach y bleibt x unveränderlich.

Auf dieselbe Weise, wie aus der gegebenen Fläche die Hülfsflächen (μ) und (ν) abgeleitet worden sind, entstehen aus (μ) die weiteren Hülfsflächen (μ') und (μ'') und aus (ν) die Flächen (ν') und (ν''); es werden nämlich auf der Richtung der Ordinate $N\mu$ die Punkte μ' und μ'' angenommen, so daß $N\mu' = \text{const. } r$ und $N\mu'' = \text{const. } s$ ist. Wenn dieses Verfahren auf alle Punkte der Fläche (μ) ausgedehnt wird, so bestimmen die entsprechenden Punkte μ' und μ'' die abgeleiteten Flächen (μ') und (μ''). Ferner nehmen wir auf der Richtung der Ordinate $N\nu$ die Punkte ν' und ν'' an, so daß $N\nu' = \text{const. } s$ und $N\nu'' = \text{const. } t$ ist, so liegen ν' und ν'' auf den abgeleiteten Flächen (ν') und (ν''). Den Tangential-Ebenen von (μ'), (μ'') oder (ν'), (ν'') entsprechen nachstehende Gleichungen:

6. $dr = u\,dx + \mathfrak{w}\,dy \quad (\mu')$

7. $ds = \mathfrak{w}\,dy + v\,dy \quad (\mu'')$ oder (ν')

8. $dt = v\,dx + w\,dy \quad (\nu'')$

Die Größen u, $\mathfrak{w}$, v, w werden aus der Gleichung der gegebenen Fläche bestimmt, $z = f(x, y)$, durch dreimalige partielle Differenziation von x, und zwar ist

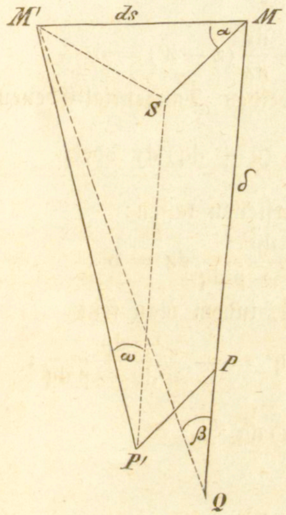
$$u = \frac{d^3z}{dx^3}, \quad w = \frac{d^3z}{dx^2dy}, \quad v = \frac{d^3z}{dxdy^2}, \quad w = \frac{d^3z}{dy^3}$$

Die Gleichungen 6, 7, 8 für die Tangential-Ebenen der neuen Hülfsflächen bestimmen sich ganz analog der Gleichung 2 der gegebenen Fläche. Statt z, p, q werden nämlich der Reihe nach r, $\frac{dr}{dx}$, $\frac{dr}{dy}$; s, $\frac{ds}{dx}$, $\frac{ds}{dy}$; t, $\frac{dt}{dx}$, $\frac{dt}{dy}$ gesetzt, wo $\frac{dr}{dx} = \frac{d^3z}{dx^3}$; $\frac{dr}{dy} = \frac{d^3z}{dx^2dy} = \frac{ds}{dx}$; $\frac{ds}{dy} = \frac{d^3z}{dxdy^2} = \frac{dt}{dx}$; $\frac{dt}{dy} = \frac{d^3z}{dy^3}$ ist. Alle diese Ableitungen sind partiell, d. h. bei der Differenziation von r, s, t nach x ist y und bei der Differenziation nach y ist x als constant zu betrachten.

§. 3. Konjugirte Tangenten.

Auf einer Fläche liegen zwei unendlich nahe Punkte, M und M', deren Tangential-Ebenen mit einander den Winkel ω bilden und sich in MS schneiden; die Linien MM' und MS sind zwei konjugirte Tangenten des Punkts M, der Winkel M'MS sei $= \alpha$, ferner nehmen wir an, daß M'S senkrecht auf MS stehe. Das Linien-Element MM' bezeichnen wir mit ds. Man ziehe in den Punkten M und M' die Normalen der Fläche; auf denselben liegen zwei Punkte, P und P', welche die Eigenschaft haben, daß die Linie PP' senkrecht steht sowohl auf MP als auch auf M'P' und also die kürzeste Entfernung zwischen beiden Normalen angibt. Diese Linie ist parallel und gleich MS, der Punkt P wird der Pol des Linienelements ds genannt, und MP die Poldistanz. Wir haben mithin folgende Gleichungen, indem wir MP mit δ und PP' mit λ bezeichnen:

Fig. 2.



1. $\lambda = ds \cdot \cos\alpha$
2. $\delta = ds \cdot \sin\alpha \cdot \operatorname{cotg}\omega$

In der Ebene PMM' werde M'Q senkrecht auf M'M gezogen, Q liegt auf der Richtung der Normale MP; nun heißt MQ der Krümmungshalbmesser des dem Element ds entsprechenden Normalschnitts der Fläche. Wenn wir denselben mit ϱ bezeichnen, und den Winkel MQM' mit β, so ist $\frac{1}{\varrho} = \frac{\beta}{ds}$. Für β läßt sich aber durch einige von selbst sich darbietende geometrische Betrachtungen sogleich der Werth finden

$$\beta = \frac{ds \cdot \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\omega}{ds} \text{ oder}$$

3. $\beta = \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\omega$
4. $\frac{1}{\varrho} = \frac{\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\omega}{ds}$

Den Winkel zwischen M'P' und der Ebene PMM', welcher die Abweichung der Normale am Ende des Elements ds von der durch seinen Anfangspunkt M gelegten Normalebene der Fläche vorstellt, bezeichnen wir mit γ und erhalten

$$\gamma = \frac{PP' \cdot \sin\alpha}{MP} = \frac{\lambda \cdot \sin\alpha}{\delta} \text{ oder}$$

5. $\gamma = \cos\alpha \,.\, \mathrm{tg}\,\omega$.

Die Gleichung der Tangential-Ebene des Punkts M sei $dz = p\,dx + q\,dy$; beim Uebergang auf den Punkt M' verwandeln sich p und q in $p + dp$ und $q + dq$. Die Gleichung der Tangential-Ebene in M' ist also

$$dz = (p + dp)\,dx + (q + dq)\,dy$$

Wir wenden nun die Formeln 17 und 18 des §. 1 an, indem wir statt p und q, $p + dp$ und $q + dq$ setzen und bemerken, daß in den Nennern jener Ausdrücke pp, + qq, + 1 und kk, die unendlich kleinen Größen dp und dq neben den endlichen Werthen von p und q verschwinden, hiedurch erhalten wir die Formel

$$6.\quad \mathrm{tg}\,\omega = \sin\omega = \frac{1}{k^2}\sqrt{A}$$

indem wieder der Einfachheit wegen $k^2 = 1 + p^2 + q^2$ und der im Folgenden häufig vorkommende Ausdruck $(1 + q^2)\,dp^2 + (1 + p^2)\,dq^2 - pq\,dp\,dq = A$ gesetzt wird.

Um den Winkel α zu bestimmen, haben wir für die Linie MM' zunächst die Gleichungen

$$7.\quad (x - x') - \frac{dx}{dz}(z - z') = o;\quad (y - y') - \frac{dy}{dz}(z - z') = o$$

Die Gleichungen der Linie MS, welche auf beiden Tangential-Ebenen von M und M' zugleich liegt, sind

$$dz = p\,dx + q\,dy \text{ und } dz = (p + dp)\,dx + (q + dq)\,dy \text{ oder}$$
$$o = dp\,dx + dq\,dy$$

welche Ausdrücke sich auch unter folgender Form darstellen lassen:

$$8.\quad dx + \frac{dq}{q\,dp - p\,dq}\,dz = o \qquad dy - \frac{dp}{q\,dp - p\,dq}\,dz = o$$

Nach Anwendung der Formeln 6, 7, 8 in § 1, indem man setzt

$$p = -\frac{dx}{dz},\quad q = -\frac{dy}{dz};\ p' = \frac{dq}{q\,dp - p\,dq},\ q' = -\frac{dp}{q\,dp - p\,dq};$$

ergibt sich

$$9.\quad \cos\alpha = \frac{(q\,dz + dy)\,dp - (p\,dz + dx)\,dq}{ds\sqrt{A}}$$

$$10.\quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{(dp\,dx + dq\,dy)\,k}{(q\,dz + dy)\,dp - (p\,dz + dx)\,dq}$$

$$11.\quad \sin\alpha = \frac{(dp\,dx + dq\,dy)\,k}{ds\sqrt{A}}$$

Bei der Entwicklung des Werths von $\mathrm{tg}\,\alpha$ ist die Gleichung $dz = p\,dx + q\,dy$ zu berücksichtigen.

Wir haben also für $\lambda, \delta, \beta, \frac{1}{\varrho}, \gamma$ die Gleichungen

$$12.\quad \lambda = \frac{(q\,dz + dy)\,dp - (p\,dz + dx)\,dq}{\sqrt{A}}$$

$$13.\quad \delta = \frac{k^3}{A}(dp\,dx + dq\,dy)$$

$$14.\quad \beta = \frac{dp\,dx + dq\,dy}{k\,ds}$$

$$15. \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{dp\,dx + dq\,dy}{k\,ds^2}$$

$$16. \quad \gamma = \frac{(q\,dz + dy)\,dp - (p\,dz + dx)\,dq}{ds\,k^2}$$

§. 4. Die Krümmungslinien.

In den Formeln 9, 10, 11 des §. 3, welche die Werthe des Winkels α angeben, den zwei konjugirte Tangenten in einem Punkt einer Fläche mit einander bilden, setzen wir $\alpha =$ const. und erhalten dadurch die Differenzial-Gleichungen derjenigen Linien, welche durch die Eigenschaft charakterisirt sind, daß in jedem Punkt derselben der Winkel zwischen der Tangente der Linie und der konjugirten Tangente der Fläche constant ist. In dem speziellen Fall, wo dieser Winkel $= 90^0$, erhält man aus 9 oder 10.

$$1. \quad (q\,dz + dy)\,dp - (p\,dz + dx)\,dq = o$$

und aus der Gleichung 11 des vorhergehenden Paragraphen

$$2. \quad dp\,dx + dq\,dy = \frac{ds\sqrt{A}}{k}$$

Die Linien $\alpha = 90^0$ werden Krümmungslinien genannt; ihre Gleichungen sind in 1 und 2 dargestellt, und ihre erste Eigenschaft besteht darin, daß die Tangente der Krümmungslinie auf der konjugirten Tangente der Fläche senkrecht steht. Durch Vergleichung der vorstehenden Formeln mit den Numern 12—16 des §. 3 erhalten wir weiter:

$$3. \quad \lambda = \gamma = o$$

hierin ist die zweite Eigenschaft der Krümmungslinien enthalten, daß zwei aufeinanderfolgende Normalen sich schneiden, oder daß die Normale am Endpunkt eines Elements der Krümmungslinie nicht aus der Ebene heraustritt, welche sich durch dieses Element und die Normale der Fläche im Anfangspunkt desselben legen läßt. Durch Anwendung von 2 auf die Werthe von δ und $\frac{1}{\varrho}$ ergibt sich

$$4. \quad \delta = \varrho = \frac{k^2\,ds}{\sqrt{A}}$$

Der Gleichung 1 läßt sich eine andere Form geben, wenn man die Gleichungen 2, 4 und 5 in § 2 benützt, nämlich $dz = p\,dx + q\,dy$ $dp = r\,dx + s\,dy$ $dq = s\,dx + t\,dy$

Man erhält dann nachstehende Gleichung der Krümmungslinien, wie sie von Monge häufig angewendet worden ist:

$$5. \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \left\{(1 + q^2)\,s - pqt\right\} s - \frac{dy}{dx} \left\{(1 + q^2)\,r - (1 + p^2)\,t\right\} - (1 + p^2)\,s + pqr = 0$$

Dieß ist die Differenzialgleichung der Projektion der Krümmungslinien auf der xy Ebene; da sie in Beziehung auf $\frac{dy}{dx}$ vom zweiten Grade ist, und also 2 Wurzeln hat, so folgt daraus, daß sich in jedem Punkt M einer Fläche 2 Krümmungslinien schneiden. Wir nehmen diesen Punkt als Coordinatenursprung, die Berührungsebene von M als xy Ebene, also die Normale als z Axe an; und setzen demgemäß in der Gleichung 5 $p = q = o$, welche sich dadurch in

6. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dx}\left(\frac{r - t}{s}\right) - 1 = o$ verwandelt.

Das Produkt der beiden Werthe von $\frac{dy}{dx}$ ist hier $= - 1$, mithin schneiden sich die Tangenten der Krümmungslinien in M recht-winklig, wodurch eine weitere Eigenschaft derselben bewiesen ist: die Krümmungslinien bilden auf jeder Fläche zwei orthogonale Liniensysteme. Wählt man die Tangenten der in M sich schneidenden Krümmungslinien zur x und y Axe, so ist in 6. $\frac{dy}{dx} = o$ zu setzen, woraus sich sofort ergibt

7. $s = o$

Für dieses Axensystem wollen wir nun die Werthe der Größen λ, δ, β, $\frac{1}{\varrho}$, γ ermitteln, indem wir in den Ausdrücken 12 — 16 des §. 3 zunächst $p = q = s = o$ setzen und für dp und dq demgemäß r dx und t dy substituiren, und erhalten so:

8. $\lambda = \frac{r\,dx\,dy - t\,dx\,dy}{\sqrt{r^2dx^2 + t^2dy^2}}$

9. $\delta = \frac{r\,dx^2 + t\,dy^2}{\sqrt{r^2dx^2 + t^2dy^2}}$

10. $\beta = \frac{r\,dx^2 + t\,dy^2}{ds}$

11. $\frac{1}{\varrho} = \frac{r\,dx^2 + t\,dy^2}{ds^2}$

12. $\gamma = \frac{r\,dx\,dy - t\,dx\,dy}{ds}$

Wir bezeichnen den Winkel, welchen das Linienelement ds mit der x. Axe bildet, durch a und die zwei Werthe von ϱ, welche den Krümmungslinien entsprechen, mit R und R′, so hat man $\frac{dx}{ds} = \cos a$ und $\frac{dy}{ds} = \sin a$. Die Werthe von R und R′ ergeben sich aus 11, indem man darin zuerst $\frac{dx}{ds} = 1$ und $\frac{dy}{ds} = o$ setzt, hierauf $\frac{dx}{ds} = o$ und $\frac{dy}{ds} = 1$, wodurch man erhält

13. $\frac{1}{R} = r; \quad \frac{1}{R_,} = t;$

Obige Gleichungen verwandeln sich nun in folgende:

14. $\lambda = \frac{1}{2}\sin 2a\,\frac{\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}}{\sqrt{\frac{1}{R^2}\cos^2 a + \frac{1}{R_,^2}\sin^2 a}}\,ds$

15. $\delta = \frac{\frac{1}{R}\cos^2 a + \frac{1}{R_,}\sin^2 a}{\frac{1}{R^2}\cos^2 a + \frac{1}{R_,^2}\sin^2 a}$

16. $\beta = ds \left(\frac{1}{R} \cos^2 a + \frac{1}{R,} \sin^2 a \right)$

17. $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} \cos^2 a + \frac{1}{R,} \sin^2 a$

18. $\gamma = \frac{1}{2} \sin 2a \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R,} \right) ds$

Die Gleichung 17 zeigt an, daß die beiden äußersten Werthe von ϱ gleich R und R, sind, weßhalb letztere Krümmungshalbmesser **Hauptkrümmungshalbmesser** genannt werden und **hiemit wäre die 4. Haupteigenschaft der Krümmungslinien bewiesen, wovon sie ihren Namen erhalten haben, und welche darin besteht, daß ihre Tangenten in jedem Punkte die Richtung der größten und kleinsten Krümmung angeben.**

Aus der Gleichung der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ erhalten wir $p = -\frac{x}{z}$, $q = -\frac{y}{z}$, $dp = \frac{xdz - zdx}{z^2}$, $dq = \frac{ydz - zdy}{z^2}$

Durch Elimination von x, y, z ergibt sich

19. $(qdz + dy)\, dp - (pdz + dx)\, dq = o$

Dieser Ausdruck, als zweite Differenzial-Gleichung der Kugel betrachtet, gilt für jeden Werth von dx und dy, d. h. wenn man einen bestimmten Punkt M der Kugel als Mittelpunkt eines unendlich kleinen Kreises betrachtet, dessen Halbmesser MM′ ist, so kann der Punkt M′, dessen Coordinaten von denjenigen von M um dx, dy, dz differiren, irgendwo auf der Peripherie dieses Kreises liegen, und bei jeder Lage wird jene Gleichung befriedigt sein; von jedem Punkt der Kugel aus lassen sich also nach allen Richtungen hin Krümmungslinien ziehen, oder, was dasselbe ist, alle Normalen der Kugel schneiden sich in Einem Punkte. Wenn aber die Gleichung 19 einer andern Fläche angehört, so wird sie blos für zwei bestimmte Werthe von $\frac{dy}{dx}$ befriedigt, und der Punkt M′ kann nur so liegen, daß die Richtungen MM′ diesen zwei Werthen entsprechen; von allen übrigen Punkten des unendlich kleinen Kreises, auf welchem M′ liegt, treffen die Normalen der Fläche diejenigen von M nicht.

Eine weitere Methode, die Gleichung der Krümmungslinien zu entwickeln, besteht nach **Monge** darin, die Gleichungen der Normale zu differenziiren. Diese Gleichungen sind nach §. 2, 2

$$x' - x + p\,(z' - z) = o; \quad y' - y + q\,(z' - z) = o$$

Betrachtet man hier die laufenden Coordinaten $x'y'z'$ als constant, und xyz als veränderlich, so ist die Bedingung erfüllt, daß die Normalen in den aufeinanderfolgenden Punkten M und M′, deren Coordinaten beziehungsweise x, y, z und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ sind, sich schneiden, und zwar in den Punkten $x'y'z'$. Man erhält dadurch, mit Berücksichtigung von

$$dz = pdx + qdy; \; dp = rdx + sdy; \; dq = sdx + tdy$$

20. $dx + p^2 dx + pqdy + (z - z')\,(rdx + sdy) = o$

21. $dy + pqdx + q^2 dy + (z - z')\,(sdx + tdy) = o$

oder, wenn das einemal $z - z'$ und das anderemal $\frac{dy}{dx}$ eliminirt wird,

22. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \left\{ (1 + p^2)\, s - pqt \right\} + \frac{dy}{dx} \left\{ (1 + q^2)\, r - (1 + p^2)\, t \right\} - (1 + p^2)\, s + pqr = o$

23. $(z - z')^2 g + (z - z') h + k^2 = 0$

indem der Kürze wegen gesetzt wird:

$$g = rt - s^2 ; \; h = (1 + q^2) r + (1 + p^2) t - 2pqs$$

Nach dem Obigen ist der Winkel γ zwischen der Normale und der z Axe bestimmt durch $\cos \gamma = \frac{1}{k}$, mithin ist der Hauptkrümmungs-Halbmesser $R = (z - z') k$, also

$$gR^2 + hkR + k^4 = 0$$

24. $R = \frac{k}{2g}\left(- h \pm \sqrt{h^2 - 4k^2g}\right) = \frac{-2k^3}{h \pm \sqrt{h^2 - 4k^2g}}$

Die Gleichung 20 liefert 2 Werthe von R, je nachdem man das obere oder untere Zeichen bei der Quadratwurzel nimmt. Sind beide Werthe von gleichem Vorzeichen, so ist die Fläche gleichartig gekrümmt, wie z. B. das Ellipsoid; sind sie von entgegengesetzten Vorzeichen, so ist die Fläche ungleichartig gekrümmt, d. h. in der Richtung der Einen Krümmungslinie konkav und in der Richtung der andern Krümmungslinie konvex, wie das einmantlige Hyperboloid. Ein dritter Fall ist endlich der, wo der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen gleich h^2 ist; alsdann ist der eine Krümmungshalbmesser gleich unendlich, die entsprechende Krümmungslinie ist gerade, und die Fläche heißt entwickelbare Fläche. Wir haben also folgende Eintheilung:

$h^2 > h^2 - 4k^2g$ oder $rt > s^2$ bei Flächen von gleichartiger Krümmung.

$h^2 < h^2 - 4k^2g$ oder $rt < s^2$ bei Flächen von ungleichartiger Krümmung.

$h^2 = h^2 - 4k^2g$ oder $rt = s^2$ bei entwickelbaren Flächen.

Aus 22 erhält man

25. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\{(1+q^2)s - pqt\}}\left\{(1+q^2)r - (1+p^2)t \pm \sqrt{h^2 - 4k^2g}\right\}$

Die Gleichung 22 kann auch noch in dieser Weise geschrieben werden:

26. $\frac{d\frac{p}{k}}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{p}{k}}{dx} - \frac{d\frac{q}{k}}{dy}\right)\frac{dy}{dx} - \frac{d\frac{q}{k}}{dx} = 0$

hier sind die Ableitungen von $\frac{p}{k}$ oder $\frac{q}{k}$ partiell entweder nach x oder nach y genommen.

Nach den Formeln 2 des §. 1 ist $\cos \alpha = -\frac{p}{k}$; $\cos \beta = -\frac{q}{k}$; α und β sind die Winkel zwischen der Normale und den Axen der x und y. Wir haben somit noch eine weitere Form für die Gleichung der Krümmungslinien:

27. $\frac{d\cos\alpha}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\alpha}{dx} - \frac{d\cos\beta}{dy}\right)\frac{dy}{dx} - \frac{d\cos\beta}{dx} = 0$

Wenn die Gleichung $gR^2 + hkR + k^4 = 0$ für R gleiche Werthe gibt, so hat die Fläche in dem Punkt alle Krümmungshalbmesser der Normalschnitte gleich, d. h. es ist ein Nabelpunkt vorhanden. Hiedurch ergibt sich die Bedingung $h^2 = 4gk^2$, welche Gleichung sich unter die Form bringen läßt:

$$\left\{(1+p^2)t - (1+q^2)r + 2pq\left(\frac{pqr}{1+p^2} - s\right)\right\}^2 + 4k^2\left(\frac{pqr}{1+p^2} - s\right)^2 = 0$$

oder

$$28.\quad \frac{r}{1+p^2} = \frac{t}{1+q^2} = \frac{s}{pq}$$

Die Nabelpunkte oder Punkte sphärischer Krümmung genügen also außer der Gleichung der Fläche noch zwei andern Gleichungen, und scheinen mithin im Allgemeinen in begrenzter Zahl auf einer Fläche vorhanden zu sein. (Siehe § 15.)

Nennen wir die beiden Werthe von R, welche die Gleichung 24 gibt, R und R′, so ist

$$29.\quad \frac{1}{R\,.\,R'} = \frac{g}{k^4} \qquad 30.\quad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{h}{k^3}$$

Die geometrische Bedeutung der Gleichung der Krümmungslinien

$$(qdz + dy)\,dp - (pdz + dx)\,dq = o$$

kann noch in anderer Weise aufgefaßt werden. Man kann diese Gleichung auch so schreiben:

$$-dq\,.\,dx + dp\,.\,dy + (qdp - pdq)\,dz = o \text{ oder auch}$$

$$31.\quad \frac{-dq}{\sqrt{A}}\,\frac{dx}{ds} + \frac{dp}{\sqrt{A}}\,\frac{dy}{ds} + \frac{qdp - pdq}{\sqrt{A}}\,\frac{dz}{ds} = o$$

Hier bedeutet ds das Linienelement auf der Fläche, mithin sind $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ die Cosinus der Winkel, welche dieses Element mit den Axen bildet. Die Größe A hat dieselbe Bedeutung, wie oben, nämlich

$$A = (1+q^2)\,dp^2 + (1+p^2)\,dq^2 - 2pq\,dp\,dq = dq^2 + dp^2 + (qdp - pdq)^2$$

Die Größen $\frac{-dq}{\sqrt{A}}$, $\frac{dp}{\sqrt{A}}$, $\frac{qdp - pdq}{\sqrt{A}}$ sind somit gleichfalls die Cosinus von 3 Winkeln, welche eine Linie mit den Axen bildet, da man identisch hat

$$\frac{dq^2}{A} + \frac{dp^2}{A} + \frac{(qdp - pdq)^2}{A} = 1$$

Die Gleichungen dieser Linie sind

$$dx + \frac{dq}{qdp - pdq}\,dz = o; \qquad dy - \frac{dp}{qdp - pdq}\,dz = o$$

$$\text{oder } dz = pdx + qdy; \; dpdx + dqdy = o$$

Diese Linie ist mithin der Durchschnitt der durch die zwei Endpunkte des Elements ds gelegten Tangentialebenen, und die Gleichung 31 drückt also aus, daß der Cosinus zwischen ds und diesem Durchschnitt gleich o, oder daß der Winkel zwischen der Tangente der Krümmungslinie und der konjugirten Tangente der Fläche = 90^0 ist.

Wenn wir, wie oben, den Winkel zwischen zwei konjugirten Tangenten α nennen, so haben wir

$$32.\quad \cos\alpha = \frac{-dq\,dx + dp\,dy + (qdp - pdq)\,dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\sqrt{(1+q^2)\,dp^2 + (1+p^2)\,dq^2 - 2pq\,dp\,dq}}$$

Setzt man hier α = const., so erhält man die Gleichung derjenigen Linien, bei welchen der Winkel konstant ist, welchen in jedem Punkt die Tangente der Linie mit der konjugirten Tangente der Fläche bildet.

§. 5. Ueber die unendlich nahen Normalen einer Fläche.

Die Theorie dieser Normalen ist in den Gleichungen 14—18 des § 4 enthalten, welche die Werthe der Größen λ, δ, β, $\frac{1}{\varrho}$, γ angeben, mit Rücksicht auf folgendes Coordinatensystem: Der Punkt M der Fläche ist der Ursprung und die Normale dieses Punktes die z Axe. Die Tangenten der zwei durch M gehenden Krümmungslinien sind die beiden übrigen Axen, und zwar entspricht der zx Ebene der Hauptkrümmungshalbmesser R, und der zy Ebene der Hauptkrümmungshalbmesser R,. M ist der Mittelpunkt eines unendlich kleinen Kreises auf der Fläche, dessen Peripherie der Punkt M′ beschreibt, und dessen Halbmesser MM′ = ds ist. Der Winkel zwischen ds und der x Axe wird mit a bezeichnet. Wir betrachten zunächst die Größe λ. Man differenziire den Ausdruck

$$\beta = \frac{1}{2} \sin 2a \frac{\frac{1}{R} - \frac{1}{R_,}}{\sqrt{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R_,^2}}} ds$$

indem man a als Variable betrachtet und setze das Differenzial gleich o, so erhält man

$$1. \quad o = \frac{\cos^4 a}{R^2} - \frac{\sin^4 a}{R_,^2} \quad \text{oder } tg^2 a = \pm \frac{R_,}{R}$$

je nachdem die beiden Hauptkrümmungshalbmesser gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Aus 1 folgt weiter

$$2. \quad \sin^2 a = \frac{R_,}{R + R_,} \quad \cos^2 a = \frac{R}{R + R_,} \quad \frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R_,^2} = \frac{1}{RR_,}$$

Die Gleichung $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} \cos^2 a + \frac{1}{R_,} \sin^2 a$ verändert sich in folgende

$$3. \quad \varrho = \frac{1}{2} (R + R_,)$$

für λ erhält man den speziellen Werth

$$4. \quad \lambda = \pm \frac{R_, - R}{R_, + R} ds$$

Vorstehende Formeln gelten für den Fall, daß R und R, gleiche Zeichen haben; sind die Zeichen entgegengesetzt, so ist

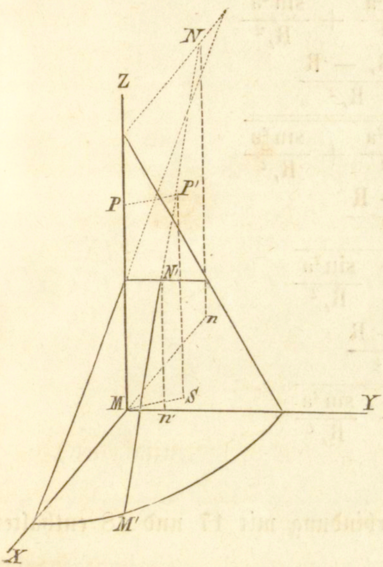
$$5. \quad \cos^2 a = \frac{R}{R - R_,} \qquad \sin^2 a = - \frac{R_,}{R - R_,}$$

$$6. \quad \lambda = ds; \quad \varrho = \infty \text{ (unendlich).}$$

In diesen Gleichungen ist nachstehendes Theorem (von Joachimsthal, Journal de M. Liouville, 1848 tome XIII,) enthalten:

Wenn sich eine bewegliche Normale einer Fläche um eine feste so dreht, daß der Fußpunkt der ersten einen unendlich kleinen Kreis vom Halbmesser ds um den Fußpunkt der letzten, als Mittelpunkt, beschreibt, so ist das Maximum der Linie, welche auf beiden Normalen senkrecht steht, entweder gleich der Differenz der Hauptkrümmungshalbmesser dividirt durch ihre Summe, mal ds; oder gleich ds, je nachdem die Fläche in dem genannten Mittelpunkt gleichartig, oder ungleichartig gekrümmt ist. Die Krümmungshalbmesser derjenigen Normalschnitte, welche durch die Fußpunkte beider Normalen gehen, sind im ersten Fall gleich der halben Summe der Hauptkrümmungshalbmesser, im andern gleich unendlich.

Fig. 3.



Wir haben oben die Punkte auf den Normalen in M und M', welche die kürzeste Entfernung λ derselben angeben, P und P' genannt; die Durchschnittspunkte der beweglichen Normale M'P' mit den Ebenen der zx und der zy nennen wir N und N', und die Projektionen der Punkte N; N'; P' auf der xy Ebene sollen mit n; n'; S bezeichnet werden; dann sind nach dem Vorhergehenden MM' und MS konjugirte Tangenten, deren Winkel gleich α gesetzt wurde. $M'Mx = a$; und $M'Nn = \omega$ Es bestehen jetzt folgende Relationen:

$$MM' = ds,\ MS = \lambda$$

7. $Mn = \lambda \,.\, \sec(\alpha + a)$
8. $Mn' = \lambda \,.\, \operatorname{cosec}(\alpha + a)$
9. $Sn = -\lambda \,.\, \operatorname{tg}(\alpha + a)$
10. $Sn' = -\lambda \,.\, \operatorname{cotg}(\alpha + a)$
11. $P'N = Sn \,.\, \operatorname{cotg}\omega = -\lambda \,.\, \operatorname{tg}(\alpha + a) \,.\, \operatorname{cotg}\omega$
12. $P'N' = Sn' \,.\, \operatorname{cotg}\omega = -\lambda \,.\, \operatorname{cotg}(\alpha + a) \,.\, \operatorname{cotg}\omega$
13. $Nn = M'P' + P'N = \delta - \lambda \,.\, \operatorname{tg}(\alpha + a) \,.\, \operatorname{cotg}\omega$
14. $N'n' = M'P' - P'N' = \delta - \lambda \,.\, \operatorname{cotg}(\alpha + a)\, \operatorname{cotg}\omega$

Den Frühern zufolge ist $\cos\alpha = \cos a \,.\, \sin a \dfrac{\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{R,}}{\sqrt{\dfrac{\cos^2 a}{R^2} + \dfrac{\sin^2 a}{R,^2}}}$

$$\sin\alpha = \frac{\dfrac{\cos^2 a}{R} + \dfrac{\sin^2 a}{R,}}{\sqrt{\dfrac{\cos^2 a}{R^2} + \dfrac{\sin^2 a}{R,^2}}} \text{ also}$$

15. $\sin(\alpha + a) = \dfrac{1}{R}\dfrac{\cos a}{\sqrt{\dfrac{\cos^2 a}{R^2} + \dfrac{\sin^2 a}{R,^2}}}$; $\cos(\alpha + a) = -\dfrac{1}{R,}\dfrac{\sin a}{\sqrt{\dfrac{\cos^2 a}{R^2} + \dfrac{\sin^2 a}{R,^2}}}$

16. $\operatorname{cotg}\omega = \dfrac{1}{ds\sqrt{\dfrac{\cos^2 a}{R^2} + \dfrac{\sin^2 a}{R,^2}}}$

Die obigen Ausdrücke verwandeln sich nun in folgende:

17. $Mn = -ds \,.\, \cos a \dfrac{R, - R}{R}$

$$18.\quad Mn' = ds \,.\, \sin a \,\frac{R' - R}{R,}$$

$$19.\quad Sn = ds \,.\, \cos^2 a \,\frac{\dfrac{R, - R}{R^2}}{\sqrt{\dfrac{\cos^2 a}{R^2} + \dfrac{\sin^2 a}{R,^2}}}$$

$$20.\quad Sn' = ds \,.\, \sin^2 a \,\frac{\dfrac{R, - R}{R,^2}}{\sqrt{\dfrac{\cos^2 a}{R^2} + \dfrac{\sin^2 a}{R,^2}}}$$

$$21.\quad P'N = \cos^2 a \,\frac{\dfrac{R, - R}{R^2}}{\dfrac{\cos^2 a}{R^2} + \dfrac{\sin^2 a}{R,^2}}$$

$$22.\quad P'N' = \sin^2 a \,\frac{\dfrac{R, - R}{R,^2}}{\dfrac{\cos^2 a}{R^2} + \dfrac{\sin^2 a}{R,^2}}$$

$$23.\quad Nn = R,$$

$$24.\quad N'n' = R$$

Die beiden letzten Gleichungen in Verbindung mit 17 und 18 enthalten nachstehendes Theorem:

Wenn sich ein Linien-Element auf einer Fläche um einen seiner Endpunkte dreht, so beschreibt die Normale des beweglichen Endpunkts eine Fläche, deren Leitlinien ein Kreis und zwei Gerade sind. Der Kreis ist der Weg dieses beweglichen Endpunkts auf der gegebenen Oberfläche; die geraden Leitlinien sind parallel mit den Tangenten der Krümmungslinien, welche durch den festen Endpunkt des Linien-Elements gehen, und schneiden die Normale dieses Endpunkts, von welcher sie halbirt werden, in den Höhen = R, und R. Die erste dieser geraden Leitlinien liegt in der Ebene des dem Hauptkrümmungshalbmesser R entsprechenden Krümmungskreises und ist gleich $2 ds \dfrac{R, - R}{R}$; die andere liegt in der Ebene des dem Hauptkrümmungshalbmesser R, entsprechenden Krümmungskreises und ist gleich $2 ds \dfrac{R, - R}{R,}$.

Durch diesen Satz ist die Bewegung einer Normale, deren Fußpunkt sich auf einem unendlich kleinen Kreis auf einer Fläche dreht, bestimmt, und vollkommen anschaulich gemacht. Wir können hiebei einige spezielle Fälle unterscheiden:

Wenn R, = R ist, so vereinigen sich die beiden geraden Leitlinien in einem Punkt, und die von der Normale beschriebene Fläche ist ein gerader Kegel, dessen Seite = R und dessen Basis der unendlich kleine Kreis ist, dessen Halbmesser = ds. Die gegebene Fläche ist eine Kugel.

Wenn $R_{,} = \infty$ ist, so wird die erste der geraden Leitlinien $= \infty$ und die andere $= 2\,ds$

Die Normale bleibt in ihrer Bewegung stets der zx Ebene, oder der Ebene des Krümmungskreises parallel, welcher vom Hauptkrümmungshalbmesser R beschrieben wird. Die Fläche der Normale ist also ein senkrechtes Conoid. Dieser Fall bezieht sich auf die entwickelbaren Flächen.

$R_{,} = - R$. Die geraden Leitlinien sind gleich $\pm 4\,ds$; sie schneiden die Normale des festen Endpunkts in gleichen Entfernungen auf beiden Seiten ihres Fußpunkts.

§. 6. Die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte.

Das Gesetz dieser Krümmungshalbmesser ist in der Gleichung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} \cos^2 a + \frac{1}{R_{,}} \sin^2 a$$ (von Euler) enthalten.

Der Krümmungshalbmesser eines zweiten Normalschnitts, dessen Ebene auf derjenigen des ersten senkrecht steht, ist gegeben durch

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{R} \sin^2 a + \frac{1}{R_{,}} \cos^2 a$$ also

$$1. \quad \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_{,}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_{,}}$$ d. h.

Die Summe der reciproken Werthe von zwei Krümmungshalbmessern, deren Ebenen auf einander senkrecht stehen, ist konstant.

Wir haben oben den Winkel zwischen zwei konjugirten Elementen (oder Tangenten) mit α bezeichnet, und wollen die Krümmungshalbmesser der diesen Elementen entsprechenden Normalschnitte ϱ und $\varrho_{,,}$ nennen, so haben wir für $\varrho_{,,}$ die Gleichung

$$2. \quad \frac{1}{\varrho_{,,}} = \frac{1}{R} \cos^2 (\alpha + a) + \frac{1}{R_{,}} \sin^2 (\alpha + a)$$

Oder mit Benützung der Formeln 15 in §. 5

$$3. \quad \frac{1}{\varrho_{,,}} = \frac{1}{RR_{,}} \; \frac{\dfrac{\cos^2 a}{R} + \dfrac{\sin^2 a}{R_{,}}}{\dfrac{\cos^2 a}{R^2} + \dfrac{\sin^2 a}{R_{,}^2}}$$

Wir betrachten den Punkt M auf der Fläche als den Mittelpunkt eines Kegelschnitts, dessen Ebene mit der Berührungsebene zusammenfällt, und dessen Axen gleiche Richtung haben, wie die Tangenten der Krümmungslinien von M. Die Gleichung dieses Kegelschnitts ist

$$4. \quad \frac{x^2}{R} + \frac{y^2}{R_{,}} = 1$$

Die Axen desselben sind also proportional den Größen $\sqrt{R}$ und $\sqrt{R_{,}}$ der Werth des Semidiameters, welcher mit der x Axe den Winkel a bildet, ist, und den wir mit $\sqrt{\varrho}$ bezeichnen, ist gegeben durch die Gleichung

$$5. \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} \cos^2 a + \frac{1}{R_{,}} \sin^2 a$$

Für zwei sich senkrecht kreuzende Semidiameter $\sqrt{\varrho}$ und $\sqrt{\varrho_{,}}$ gilt die Formel:

$$6. \quad \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_{,}} = \text{const.}$$

Für zwei konjugirte Semidiameter, $\sqrt{\varrho}$ und $\sqrt{\varrho_{,,}}$, welche mit der großen Axe beziehungsweise die Winkel a und α + a bilden, bestehen die Relationen

$$7. \ \sin(\alpha + a) = \frac{1}{R} \frac{\cos a}{\sqrt{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R_{,}^2}}}; \ \cos(\alpha + a) = -\frac{1}{R_{,}} \frac{\sin a}{\sqrt{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R_{,}^2}}}$$

$$8. \quad \frac{1}{\varrho_{,,}} = \frac{1}{RR_{,}} \frac{\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R_{,}}}{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R_{,}^2}}$$

Die Quadrate der Semidiameter unseres Kegelschni[tts] befolgen also dasselbe Gesetz, wie die Krümmungshalbmesse[r d]er Normalschnitte. Zwei konjugirte Tangenten der Fläche fa[llen] mit zwei konjugirten Semidiametern des Kegelschnitts zusa[m]men, welcher eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, je nachdem die Fläche gleichartig, ungleichartig gekrümmt, oder entwickelbar ist. (Satz von Dupin, welcher den genannten Kegelschnitt die indicatrice nennt.)

Wir geben dem Winkel a die Werthe 45°, 45° + b, 45° — b und bezeichnen die entsprechenden Krümmungshalbmesser mit ϱ_0 ϱ_1 ϱ_2, so bestehen folgende Gleichungen

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_{,}}\right)$$

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{R} \cos^2(45 + b) + \frac{1}{R_{,}} \sin^2(45 + b)$$

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{R} \sin^2(45 + b) + \frac{1}{R_{,}} \cos^2(45 + b)$$

$$9. \quad \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_{,}} = \frac{2}{\varrho_0}$$

Die drei Krümmungsmittelpunkte, welche den Halbmessern ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2 entsprechen, bilden also in Verbindung mit dem Punkt M auf der Fläche vier harmonische Punkte. Nehmen wir noch zwei weitere Krümmungsmittelpunkte auf der Normale an, für welche α die Werthe 45 ± c hat, so sind diese mit den vorhergehenden vier Punkten in Involution.

Die Gleichung 9 läßt sich auch in dieser Form schreiben:

$$10. \quad \left(\varrho_1 - \frac{\varrho_0}{2}\right)\left(\varrho_2 - \frac{\varrho_0}{2}\right) = \left(\frac{\varrho_0}{2}\right)^2$$

Die Formeln 7 führen zu der Gleichung

$$11. \quad \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg}(\alpha + a) = -\frac{R_{,}}{R}$$

Ferner erhält man aus 3:

12. $\varrho + \varrho_{,,} = R + R,$

d. h. die Summe von je zwei konjugirten Krümmungshalbmessern ist konstant.

Die in den Gleichungen 1 und 12 enthaltenen Sätze sind einer Erweiterung fähig, welche durch diese Formeln ausgedrückt ist

13. $\frac{1}{\varrho_,} + \frac{1}{\varrho_{,,}} + \frac{1}{\varrho_{,,,}} + \ldots\ldots \frac{1}{\varrho_{2m}} = m \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_,}\right)$

14. $\varrho_, + \varrho_{,,} + \varrho_{,,,} + \ldots\ldots \varrho_{2m} = m\,(R + R_,)$

Im ersten Fall sind $\varrho, \varrho_{,,} \ldots \varrho_{2m}$ solche Krümmungshalbmesser, welchen die Werthe $a = \frac{90^0}{m}$; $2\frac{90^0}{m}$; $3\frac{90^0}{m}$ .... $2m\frac{90^0}{m}$ entsprechen; im andern Fall sind $\varrho, \varrho_{,,}$ ...... ϱ_{2m} Krümmungshalbmesser, welchen die Werthe $a_, = \frac{90^0}{m}$; $2\frac{90^0}{m}$; $3\frac{90^0}{m}$ .... $2m\frac{90^0}{m}$ zukommen. Diese Winkel a, werden gebildet durch die x Axe und durch die Durchschnitte der Ebenen der Krümmungskreise von $\varrho, \varrho_{,,} \ldots. \varrho_{2m}$ mit einer durch die x Axe gelegten Ebene, welche mit der Tangentialebene einen Winkel macht, dessen Cosinus $= \sqrt{\frac{R_,}{R}}$.

Auf dem Theorem von Euler beruht nachstehende Veranschaulichung der Krümmungs-Verhältnisse in einem Punkt einer Fläche:

In der Tangentialebene einer Fläche beschreibe man einen unendlich kleinen Kreis, dessen Mittelpunkt der Berührungspunkt ist. Dieser Kreis ist die Basis eines Cylinders, dessen Erzeugende von der Tangentialebene und der Fläche begrenzt sind; diese Erzeugenden sind also den reciproken Werthen der Krümmungshalbmesser ϱ proportional. Die Summe von je zwei Erzeugenden, deren Fußpunkte auf dem unendlich kleinen Kreis einen Quadranten begrenzen, ist konstant; hieraus und aus 9. geht hervor, daß die Durchschnittslinie des Cylinders und der Fläche eine Schraubenlinie ist, welche die Erzeugenden des Cylinders unter konstantem Winkel schneidet. Würde man den Mantel des Cylinders abwickeln, so löste sich die Schraubenlinie in 4 gleiche Gerade auf, welche ein Zikzak bilden; die höchsten und die niedrigsten Punkte entsprechen den 4 Erzeugenden, welche die Fläche in ihren Krümmungslinien schneiden; die mittleren Punkte entsprechen 4 anderen Erzeugenden, deren Fußpunkte auf dem unendlich kleinen Kreis mit den Fußpunkten der erstgenannten 4 Erzeugenden ein reguläres Achteck bilden. Mlle. Sophie Germain: Sur la courbure des surfaces (Crelle's Journal Bd. 7. 1).

§. 7. Die Größen δ und γ.

Für die Poldistanz δ haben wir oben die Gleichung gefunden:

$$1.\quad \delta = \frac{\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R_,}}{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R_,^2}} = \varrho\,.\,\sin^2\alpha$$

Es seien $\delta_,$ und $\varrho_,$ die Poldistanz und der Krümmungshalbmesser für ein Linienelement der Fläche senkrecht auf ds, so ist

$$\frac{1}{\delta\varrho} = \frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R_,^2};\quad \frac{1}{\delta_,\varrho_,} = \frac{\sin^2 a}{R^2} + \frac{\cos^2 a}{R_,^2}\ \text{also}$$

2. $\frac{1}{\delta\varrho} + \frac{1}{\delta,\varrho,} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R,^2}$

Mit $\delta_{,,}$ und $\varrho_{,,}$ bezeichnen wir den Werth von δ und ϱ für das konjugirte Element und erhalten $\delta_{,,} = \varrho_{,,} . \sin^2\alpha$, also

3. $\frac{\delta}{\delta_{,,}} = \frac{\varrho}{\varrho_{,,}}$

Bei zwei konjugirten Elementen verhalten sich die Poldistanzen wie die Krümmungshalbmesser. Durch Elimination von a zwischen den Gleichungen

$$\delta = \frac{\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R,}}{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R,^2}} \text{ und } \frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R,} \text{ ergibt sich}$$

4. $\delta = \frac{RR,}{R + R, - \varrho}$

Ferner ist $\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta_{,,}} = \frac{1}{\varrho . \sin^2\alpha} + \frac{1}{\varrho_{,,} . \sin^2\alpha}$.

Nun ist aber $\varrho\varrho_{,,} . \sin^2\alpha = R . R,$ mithin nach §. 6, 12

5. $\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta_{,,}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R,}$

Für zwei konjugirte Elemente ist die Summe der reciproken Werthe der Poldistanzen konstant.

Nach der Formel 9 des vorigen §. ist demnach

6. $\frac{1}{\delta,} + \frac{1}{\delta_{,,}} = \frac{2}{\varrho_0}$

Die Pole, welche den Poldistanzen von zwei konjugirten Elementen entsprechen, bilden in Verbindung mit dem Fußpunkt der Normale und dem Krümmungsmittelpunkt von ϱ_0 4 harmonische Punkte. Hieraus folgt unmittelbar der Satz (von Joachimsthal) Journal de M. Liouville XIII, 514.

Die Pole von 6 paarweise konjugirten Elementen sind in Involution.

Der Winkel, welchen die Normale am Endpunkt des Elements ds mit der durch dieses Element bestimmten Normalebene bildet, wurde mit γ bezeichnet, und für denselben der Ausdruck gefunden

$$\gamma = \frac{1}{2} \sin 2a \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R,}\right) ds$$

Es sei $\gamma,$ der Werth dieses Winkels für einen auf dem ersten senkrecht stehendes Element, so ist

7. $\gamma + \gamma, = 0$

Ferner entspreche $\gamma_{,,}$ dem konjugirten Element, so ist

8. $\gamma_{,,} = \sin(\alpha + a)\cos(\alpha + a)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R,}\right)ds = -\frac{1}{RR,} \frac{\sin a . \cos a . ds}{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R,^2}}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R,}\right)$

$$= -\frac{1}{RR,} \frac{\gamma}{\frac{\cos^2 a}{R^2} + \frac{\sin^2 a}{R,^2}}$$

Für a = 45° erreicht γ sein Maximum und ist dann gleich

9. $\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R,}\right)$ ds (Journal de M. Liouville; Bertrand: sur la théorie générale des surfaces XII, 343.)

§. 8. Die Krümmungshalbmesser der schiefen Schnitte.

M, M′, M″ sind 3 unendlich nahe Punkte einer Fläche. Wir setzen die Entfernungen MM′ = M′M″ = 1 und verlängern MM′ nach N, so daß M′N ebenfalls = 1 ist; fällen wir auf die Fläche das Perpendikel NL, ziehen M′L und M″L, so kann M′L = 1 gesetzt werden, und in dem rechtwinkligen Dreieck M″NL ist

1. NL = NM″. cos M″NL

Wir bezeichnen nun den Radius des durch die 3 Punkte MM′L gehenden Krümmungskreises mit ϱ und denjenigen des Krümmungskreises MM′M″ mit $\varrho,$; so ist

2. $NL = \frac{1}{\varrho}$; $LM'' = \frac{1}{\varrho,}$ also

3. $\varrho, = \varrho \,.\, \cos \mu$

wenn der Winkel M″NL = μ gesetzt wird. Die Ebene MM′L schneidet die Fläche normal, während die Ebene MM′M″ einen schiefen Winkel bildet; der Winkel zwischen beiden ist gleich μ. Die Gleichung 3 enthält folgendes Theorem (von Meunier):

Wenn man durch ein Linienelement auf einer Fläche 2 Ebenen legt, wovon die erste normal ist, so ist der Krümmungshalbmesser des der schiefen Ebene entsprechenden Schnitts die Projektion vom Krümmungshalbmesser des Normalschnitts. Wenn also durch ein solches Linienelement mehrere Ebenen gelegt werden, und man zieht die Krümmungskreise, welche jedem dadurch entstandenen Schnitt der Fläche zukommen, so liegen alle diese Kreise auf einer Kugel. Von einem Punkt aus lassen sich auf einer Fläche nach allen Richtungen hin Linienelemente ziehen; jedem dieser Elemente entspricht eine solche Kugel, welche man die Krümmungskugel desselben nennen kann. Das Gesetz dieser Krümmungskugeln enthält die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R}\cos^2 a + \frac{1}{R,}\sin^2 a$$

R und R, sind die Halbmesser der zwei äußersten Krümmungskugeln (der größten und kleinsten) und ϱ ist der Halbmesser irgend einer andern, deren Linienelement mit der Tangente der ersten Krümmungslinie den Winkel a bildet. Wenn die Fläche gleichartig gekrümmt ist, so liegen alle Krümmungskugeln auf einer Seite derselben; bei ungleichartiger Krümmung liegen sie aber auf verschiedenen Seiten und eine davon hat einen unendlich großen Halbmesser. Bei Kegelflächen endlich liegen die Krümmungskugeln auf einer Seite der Fläche, aber die eine äußerste ist unendlich groß.

Der Satz von Meunier läßt sich noch auf eine andere Art beweisen, welche auf der Betrachtung der Coeffizienten in den allgemeinen Gleichungen mit 2 und 3 Variabeln beruht. Die allgemeine Gleichung mit 2 Variabeln ist

4. $o = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2 + \ldots\ldots$

Stellt dieselbe eine Linie vor, welche durch den Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems geht, so ist $A = o$; berührt die Linie die Axe der x im Ursprung, so ist auch $B = o$. Wir differenziiren die Gleichung zweimal nach x und setzen $x = y = \frac{dy}{dx} = o$, so ist

$$o = \frac{Cd^2y}{dx^2} + 2D$$

5. $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2D}{c} = \frac{1}{\varrho}$

ϱ ist der Krümmungshalbmesser im Ursprung.

Die allgemeine Gleichung mit 3 Variabelen ist

6. $o = A + Bx + Cy + Dz + Exy + Fxz + Gyz + Hx^2 + Jy^2 + Kz^2 + \ldots$

Stellt diese Gleichung eine Fläche vor, bezogen auf 3 rechtwinklige Axen, die sich in O schneiden, so ist $A = o$, wenn die Fläche durch O geht; berührt sie zugleich die Ebene der xy in O, so ist auch $B = C = o$. Wir setzen nun in $o = Dz + Exy + Fxz \ldots\ldots.$ $x = o$ und erhalten wie zuvor aus der Gleichung 4

7. $\frac{1}{\varrho} = -\frac{2J}{D}$

wenn ϱ der Krümmungshalbmesser des durch die Ebene zy in der Fläche hervorgebrachten Schnitts ist. Man lege durch die y Axe eine Ebene, welche mit der zy Ebene den Winkel μ bildet und die Fläche in einer Linie L schneidet, deren Coordinaten z' und y sind. Setzt man $z = z' \cos\mu$ und $x = z' \sin\mu$ in die Gleichung der Fläche,

8. $o = Dz + Exy + Fxz + Gyz + Hx^2 + Jy^2 + Kz^2 + \ldots.$

so ergibt sich nach dem Vorhergehenden

$\frac{1}{\varrho,} = -\frac{2J}{D\cos\mu}$, und durch Vergleichung mit 6

9. $\varrho, = \varrho \cos\mu$

$\varrho,$ ist der Krümmungshalbmesser von L für den Punkt O.

Durch einen Punkt M einer Fläche lassen sich unendlich viele Ebenen legen, wovon jede eine besondere Schnittkurve enthält, und mithin auch den Krümmungsmittelpunkt des dieser Kurve für den Punkt M entsprechenden Krümmungskreises. Die Krümmungsmittelpunkte aller jener Ebenen liegen auf einer Fläche, welche die Eigenschaft hat, zufolge des Theorems von Meunier, daß ihre sämmtlichen durch die Normale von M gelegten Schnitte Kreise sind. Die Polargleichung dieser Fläche, welche man die Fläche der Krümmungsmittelpunkte nennen kann, wird erhalten durch die Vergleichung der Sätze

$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R}\cos^2 a + \frac{1}{R,}\sin^2 a$ und $\varrho, = \varrho\cos\mu$ und heißt

10. $\frac{1}{\varrho,} = \frac{1}{\cos\mu}\left(\frac{1}{R}\cos^2 a + \frac{1}{R,}\sin^2 a\right)$

Die Variabelen sind hier $\varrho,$, μ und a. $\varrho,$ ist ein beliebiger Radiusvektor der Fläche vom Ursprung M aus gezogen, der mit der Normale von M den Winkel μ bildet. a ist der Winkel zwischen der durch diese Normale und ϱ, bestimmten Ebene und derjenigen des Krümmungskreises vom Hauptkrümmungshalbmesser R. Aus der Gleichung 10 ergibt sich, daß die Krümmungsradien $\varrho_{,}$, welche auf dem Mantel eines geraden Kegels liegen, dessen Axe die Normale der gegebenen Fläche ist, und dessen Seiten mit dieser Axe den konstanten Winkel μ bilden, dasselbe Gesetz befolgen, wie die Krümmungsradien der Normalschnitte.

Die Gleichung der Fläche der Krümmungsmittelpunkte, bezogen auf ein Coordinatensystem, dessen z Axe die Normale von M, und dessen x und y Axen die Tangenten der Krümmungslinien von M sind, heißt

$$11. \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2\,RR_{,}\,(x^2 + y^2)\,z}{Ry^2 + R_{,}x^2}$$

§. 9. Die Surosfulations-Normalkreise.

Unter denjenigen Oskulations- oder Krümmungskreisen, welche in einem Punkt M einer Fläche durch die Normale bestimmt sind, gibt es immer solche, welche mit der ihrer Ebene entsprechenden Schnittkurve eine Berührung höherer Ordnung haben oder, was dasselbe ist, surosfuliren. Um diese Kreise zu finden, benützen wir die Formel 15 des §. 3

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{dp\,dx + dq\,dy}{k\,ds^2}$$

wo $k^2 = 1 + p^2 + q^2$ gesetzt wird. In dieser Gleichung betrachten wir p, q, dp, dq, dx, dy, als variabel und das Linienelement ds als konstant, und setzen das Differenzial $d\varrho = o$, dadurch erhalten wir

$$1. \quad k^2\,d(dp\,dx + dq\,dy) - (dp\,dx + dq\,dy)\,(pdp + qdq) = o$$

Dieß ist die Differenzialgleichung derjenigen Linien, welche auf einander folgende Surosfulations-Normalkreise berühren; um sie weiter zu entwickeln, nehmen wir zunächst die in §. 2 angegebenen Werthe von dp, dq zu Hülfe. Dort ist in 4 und 5 nachgewiesen, daß

$dp = rdx + sdy \qquad dq = sdx + tdy$ ist, also

$$2. \quad (dp\,dx + dq\,dy)\,(pdp + qdq) = (rdx^2 + 2s\,dx\,dy + tdy^2)\,\{(pr + qs)\,dx + (ps + qt)\,dy\}$$

Ferner erhalten wir für das erste Differenzial in 1

$$3. \quad d\,(dp\,dx + dq\,dy) = ddp\,.\,dx + ddq\,dy + 2\,(rdx + sdy)\,ddx + 2\,(sdx + tdy)\,.\,ddy$$

Um die mit ddx und ddy behafteten Glieder zu erhalten, setzen wir statt $dp\,dx + dq\,dy$ seinen Werth $rdx^2 + 2s\,dx\,dy + tdy^2$ und differenziiren denselben nach dx und dy.

Es handelt sich nun darum, die Werthe von ddp, ddq, ddx, ddy auszumitteln. Ganz auf dieselbe Art, wie in §. 2 in den Gleichungen 2, 4 und 5 die Ausdrücke für dz, dp und dq gefunden wurden, erhalten wir

$$4. \quad ddp = dr\,dx + ds\,dy$$
$$5. \quad ddq = ds\,dx + dt\,dy$$

Nun erhält man nach 6, 7, 8 in § 2 für dr, ds, dt die Werthe

$$dr = u\,dx + \mathfrak{w}\,dy$$
$$ds = \mathfrak{w}\,dx + v\,dy$$
$$dt = v\,dx + w\,dy$$

Durch Substitution in 4 und 5 ergibt sich also

$$6. \quad ddp = u\,dx^2 + 2\mathfrak{w}\,dx\,dy + v\,dy^2$$
$$7. \quad ddq = \mathfrak{w}\,dx^2 + 2v\,dx\,dy + w\,dy^2$$

und schließlich

8. $ddp.dx + ddq.dy = udx^3 + 3\mathfrak{w}dx^2.dy + 3vdxdy^2 + wdy^3$

Um ddx und ddy zu bestimmen, differenziiren wir zuerst die Gleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

wo ds das Linienelement vorstellt, welches wir als konstant ansehen, und erhalten

9. $ddx . dx + ddy . dy + ddz . dz = o$

Ferner erhält man durch Differenziation der Gleichung der Tangentialebene $dz = pdx + qdy$ die Formel

10. $p.ddx + q.ddy - ddz + (dp.dx + dq.dy) = o$ oder

11. $p.ddx + q.ddy - ddz + (rdx^2 + 2sdx.dy + t.dy^2) = o$

Die Gleichung derjenigen Normalebene der Fläche, welche das Linienelement enthält, dem die Coordinaten dx, dy, dz entsprechen, ist

12. $(dy + qdz)\,dx - (dx + pdz)\,dy + (pdy + qdx)\,dz = o$

Da aber das folgende Linienelement, dem die Coordinaten ddx, ddy, ddz entsprechen, ebenfalls in dieser Normalebene enthalten sein muß, so ist auch

13. $(dy + qdz)\,ddx - (dx + pdz)\,ddy + (pdy - qdx)\,ddz = o$

Die Gleichungen 10, 11, 13 liefern nachstehende Werthe:

14. $$ddx = - \frac{p}{k^2}(rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2)$$

$$ddy = - \frac{q}{k^2}(rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2)$$

Hiedurch verwandelt sich die Gleichung 3 in folgende

15. $$d(dpdx + dqdy) = udx^3 + 3\mathfrak{w}dx^2dy + 3vdxdy^2 + wdy^3 + 2.\frac{1}{k^2}(rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2)\{(pr + qs)dx + (ps + qt)dy\}$$

Durch Substitution der gefundenen Werthe in 1 erhalten wir

16. $$\{udx^3 + 3\mathfrak{w}dx^2dy + 3vdxdy^2 + wdy^3\}k^2 - 3\{(pr + qs)dx + (ps + qt)dy\}(rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2) = o$$

Dieß ist die Gleichung der Projektion auf der xy Ebene von denjenigen Linien einer Fläche, welche auf einander folgende Suroskulations-Normalkreise berühren. Da sie vom dritten Grade ist, so besitzt sie wenigstens eine reelle Wurzel, worauf nachstehender Satz beruht (von de la Gournerie):

Jede Fläche hat in jedem ihrer Punkte wenigstens einen surosk ulirenden Normalkreis.

§. 10. Ueber konjugirte Liniensysteme.

Wir haben oben den Winkel α bestimmt, zwischen einem Linienelement auf einer Fläche und dem Durchschnitt der durch seine beiden Endpunkte gelegten Tangentialebenen. Dieser Durchschnitt, welcher selbst eine Tangente der Fläche ist, und die dem Element entsprechende Tangente heißen konjugirte Tangenten. Wenn nun ein System von Linien auf einer Fläche gegeben ist, so bilden die konjugirten Tangenten aller ihrer Punkte ein zweites Liniensystem, welches wir das konjugirte nennen. Monge nennt die Linien des ersten Systems caractéristiques, und diejenigen des zweiten trajectoires, und definirt die letzteren als die Verbindungslinien der nächsten Punkte von je zwei auf einander folgenden caractéristiques; eine andere Erzeugungsweise besteht darin, daß eine Tangentialebene so über die Fläche hingleitet, daß sie immer zwei unendlich nahe caractéristiques berührt; der Berührungspunkt dieser Ebene beschreibt alsdann eine trajectoire.

Das erste Beispiel von konjugirten Liniensystemen bilden die Krümmungslinien, sie sind charakterisirt durch die Gleichung $\alpha = 90^0$. Diese Linien sind die einzigen konjugirten, welche sich rechtwinklig schneiden, oder orthogonal sind; weil es in einem Punkt einer Fläche nur ein Paar von konjugirten Tangenten gibt, die auf einander senkrecht stehen. Dieß folgt unmittelbar aus dem Satz von Dupin, §. 6, 8, welchem zufolge je zwei konjugirte Tangenten in einem Punkt einer Fläche mit den konjugirten Durchmessern eines Kegelschnitts zusammen fallen (woher die ersteren auch ihren Namen erhalten haben); da nun ein Kegelschnitt nur ein Paar von konjugirten Durchmessern hat, welche sich senkrecht schneiden, so gibt es auch in einem Punkt einer Fläche nur ein Paar von konjugirten Tangenten, die auf einander rechtwinklig sind.

Den Krümmungslinien steht ein anderes System gegenüber, welches in der Gleichung

1. $\alpha = 0$

enthalten ist. Die allgemeine Differenzialgleichung dieser Linien wird erhalten, wenn man in den Gleichungen 9, 10 und 11 des §. 3 $\cos \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = 0 = \sin \alpha$ setzt, dadurch enthält man entweder

2. $(q dz + dy)\, dp - (p dz + dx)\, dq = ds \sqrt{A}$

oder

3. $dp\, dx + dq\, dy = 0$

Wir werden im Folgenden die letztere Form benützen, welche identisch ist mit

4. $r dx^2 + 2 s dx dy + t dy^2 = 0$

woraus man erhält

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t}$

Dieß ist die Differenzialgleichung der Projektion auf der xy Ebene von denjenigen Linien, deren Tangenten mit ihren konjugirten Tangenten zusammen fallen. Man kann nun drei Fälle unterscheiden. Erster Fall:

6. $s^2 = rt$

Hier hat $\dfrac{dy}{dx}$ nur einen Werth, also gibt es nur ein System von Linien $\alpha = 0$, oder vielmehr beide Systeme verwandeln sich in ein Eines, dessen Gleichung sich reducirt auf

7. $s dx + t dy = 0$

oder, durch Vergleichung mit 6.

8. $r dx + s dy = 0$

Nun haben wir schon in §. 2 die Gleichungen aufgestellt

$$dp = r dx + s dy; \quad dq = s dx + t dy$$

Durch Verbindung derselben mit 7 und 8 erhalten wir somit

9. $dp = 0; \quad dq = 0;$

oder durch Integration

10. $p = \text{const.}; \quad q = \text{const.}$

Die Flächen $s^2 = rt$ haben also nur eine Berührungsebene längs einer Linie $\alpha = 0$; diese Linien sind somit die Durchschnitte auf einander folgender

Berührungsebenen und demgemäß gerade; auch folgt hieraus unmittelbar, daß sie die Tangenten einer Kurve sind. Die durch die Gleichung 6 charakterisirten Flächen werden entwickelbare Flächen genannt.

Die Gleichung 20 des §. 4 gibt für den Hauptkrümmungshalbmesser R, wenn $g = rt - s^2 = o$ gesetzt wird

11. $R = -\frac{k^2}{h}$ oder $= \infty$

Diese Werthe von R zeigen, daß der Kegelschnitt, dessen konjugirte Durchmesser mit den konjugirten Tangenten harmoniren, bei den entwickelbaren Flächen eine Parabel ist.

Zweiter Fall:

12. $s^2 > rt$

Die hieher gehörigen Flächen haben zwei Systeme von Linien $\alpha = o$, da die Gleichung 5 zwei reelle Werthe für $\frac{dy}{dx}$ ergibt. Der Kegelschnitt von Dupin ist eine Hyperbel, deren Asymtoten mit den Tangenten der Linien $\alpha = o$ zusammen fallen. Die Krümmungshalbmesser der diesen Tangenten entsprechenden Normalschnitte sind ebenfalls unendlich groß, mithin ist

13. $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R} \cos^2 a + \frac{1}{R,} \sin^2 a = o$;

14. $\operatorname{tg} a = \sqrt{\frac{-R,}{R}}$

Die Fläche ist ungleichartig gekrümmt, da die beiden Hauptkrümmungshalbmesser entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Dritter Fall:

15. $s^2 < rt$

Beide Werthe von $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung 5 sind imaginär, also besitzt die Fläche keine Linien $\alpha = o$; der betreffende Kegelschnitt ist eine Ellipse, von welcher kein Paar konjugirte Durchmesser zusammenfallen können; beide Krümmungshalbmesser haben gleiche Vorzeichen, also ist die Fläche gleichartig gekrümmt.

§. 11. Andere Form der Gleichungen für die Normale und Tangential-Ebene.

In dem Bisherigen wurde vorausgesetzt, daß die Gleichung der Fläche $f(x,y) = z$ sei; die durch Differenziation dieser Gleichung abgeleiteten Formeln sind für die geometrische Anschauung zwar leicht zugänglich, allein sie sind weniger symmetrisch, als diejenigen Formeln, welche man erhält, wenn man von der Gleichung der Fläche in ihrer allgemeinen Form ausgeht.

1. $f(x,y,z) = o$

Wenn in dieser Gleichung x zunimmt, so bezeichnen wir den Coefficienten der ersten Potenz des Zuwachses mit X; ebenso sind Y, Z die durch partielle Zunahme von y oder z entstehenden Differenzialcoefficienten, mithin erhalten wir durch Differenziation von 1

2. $Xdx + Ydy + Zdz = o$

Diese Gleichung kann auch so geschrieben werden

$$3. \quad \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\frac{dx}{ds}+\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\frac{dy}{ds}+\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\frac{dz}{ds}=0$$

wo, wie gewöhnlich $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ gleich dem Linienelement auf der Fläche gesetzt wurde, dessen Projektionen auf den Axen der x, y, z beziehungsweise dx, dy, dz, sind. Die Gleichung 3 ist eine Summe von drei Produkten mit je zwei Faktoren; eine solche Summe bedeutet in der analytischen Geometrie sehr häufig den Cosinus zweier Geraden; und da dieser Cosinus gleich o ist, so stehen beide Gerade auf einander senkrecht. Die eine derselben bildet mit den Axen Winkel, deren Cosinus $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ sind; sie ist also das Element ds oder auch die demselben entsprechende Tangente der Fläche. Da nun die Gleichungen 2 und 3 für unendlich viele Werthe von dx, dy, dz gelten, oder für alle diejenigen Linienelemente, die sich durch einen Punkt einer Fläche auf derselben ziehen lassen, so müssen $\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$, $\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$, $\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$ die Cosinus der Winkel sein, welche eine auf allen jenen Linienelementen senkrecht stehende Gerade mit den Axen bildet. Diese Gerade ist mithin die Normale der Fläche, und da die Gleichung 2 für alle Linienelemente gilt, die sich von einem Punkt aus auf der Fläche ziehen lassen, so ist sie die Gleichung ihrer Tangentialebene, welche auch so geschrieben werden kann:

$$4. \quad X(x'-x)+Y(y'-y)+Z(z'-z)=0$$

wo x, y, z die Coordinaten des Berührungspunkts und x′, y′, z′ die laufenden Coordinaten bedeuten.

Die Gleichung der Normale schreiben wir in dieser Form

$$5. \quad x'-x : y'-y : z'-z = X : Y : Z$$

hier sind x′, y′, z′ die laufenden Coordinaten der Normale und x, y, z diejenigen ihres Fußpunkts auf der Fläche.

Die Gleichung einer unendlich nahen Tangentialebene ergibt sich durch Differenziation von 2

$$dXdx + dYdy + dZdz + Xd^2x + Yd^2y + Zd^2z = 0$$

Für die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der ersten Tangentialebene bleiben dx, dy, dz konstant. Also sind die Gleichungen dieser Durchschnitts-Linie

$$6. \quad Xdx + Ydy + Zdz = 0; \quad dXdx + dYdy + dZdz = 0$$

Wenn man durch den Ursprung zwei Ebenen legt,

$$ax + by + cz = 0; \quad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

so ist die Gleichung des Durschnitts dieser Ebenen

$$(a\beta - b\alpha)\,x + (c\beta - b\gamma)\,z = 0; \quad (a\beta - b\alpha)\,y + (c\alpha - a\gamma)\,z = 0$$

Die Cosinus der Winkel, welche diese Linie mit den Axen der x, y, z macht, sind also

$$-\frac{c\beta - b\gamma}{M},\ -\frac{c\alpha - a\gamma}{M},\ \frac{a\beta - b\alpha}{M},\ M = \sqrt{(a\beta - b\alpha)^2 + (c\alpha - a\gamma)^2 + (c\beta - b\gamma)^2}$$

Die Cosinus der Winkel, welche die Linie der Gleichung 6 oder die Durchschnittslinie von zwei unendlich nahen Tangentialebenen

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \quad (X + dX)\,dx + (Y + dY)\,dy + (Z + dz)\,dz = 0$$

mit den Axen macht, sind daher

$$\frac{ZdY - YdZ}{M'},\ \frac{XdZ - ZdX}{M'},\ \frac{YdX - XdY}{M'}$$

$$M' = \sqrt{(ZdY - YdZ)^2 + (XdZ - ZdX)^2 + (YdX - XdY)^2}$$

Nennen wir nun, wie früher, den Winkel zwischen dieser Durchschnittslinie und dem Element ds oder den Winkel zwischen zwei konjugirten Tangenten der Fläche α, so ist

$$7.\quad \cos\alpha = \frac{1}{M'.\,ds}\left\{(ZdY - YdZ)\,dx + (XdZ - ZdX)\,dy + (YdX - XdY)\,dz\right\}$$

Diese Gleichung ist identisch mit der Gleichung 9 des §. 3. Setzt man darin α = const., so ergibt sich ebenfalls die Differenzialgleichung solcher Linien auf den Flächen, bei welchen der Winkel konstant ist zwischen der Tangente der Linie und der konjugirten Tangente der Fläche. In dem speziellen Fall $\alpha = 90^0$ oder $\cos\alpha = o$ ist

$$8.\quad (ZdY - YdZ)\,dx + (XdZ - ZdX)\,dy + (YdX - XdY)\,dz = o$$

Dieß ist die Gleichung der Krümmungslinien.

Die Größe M′ ist der Sinus des Winkels zwischen den zwei unendlich nahen Tangentialebenen, oder auch, was dasselbe ist, zwischen ihren Normalen; diesen Winkel bezeichneten wir früher mit ω, demnach ist

$$9.\quad \sin\omega = \sqrt{(ZdY - YdZ)^2 + (XdZ - ZdX)^2 + (YdX - XdY)^2}$$

Die Gleichungen der Normale der Fläche im Punkt x, y, z sind nach 5

$$x' - x : y' - y : z' - z = X : Y : Z$$

Diejenigen der Tangenten, oder der Verlängerung des Elements ds sind

$$10.\quad x' - x : y' - y : z' - z = dx : dy : dz$$

Mithin sind die Gleichungen der Linie, welche auf der Normale und der Tangente zugleich senkrecht steht:

$$11.\quad x' - x : y' - y : z' - z = Zdy - Ydz : Xdz - Zdx : Ydx - Xdy$$

Also ist die Gleichung der Ebene, welche die Normale und die Tangente enthält

$$12.\quad (Zdy - Ydz)(x' - x) + (Xdz - Zdx)(y' - y) + (Ydx - Xdy)(z' - z) = o$$

In allen diesen Gleichungen bezeichnen x, y, z die Coordinaten des Punkts auf der Fläche und x′, y′, z′ die laufenden Coordinaten der betreffenden Linie oder Ebene. Die Gleichung 12 bedeutet, daß jede durch (x y z) in dieser Normalebene gezogene Linie auf der Linie der Gleichung 11 senkrecht steht, denn die Cosinus der Winkel, welche jene Linie mit den Axen bildet, sind den Größen x′ — x, y′ — y, z′ — z proportional.

§. 12. Die gewundenen Kurven.

Die Cosinus der Winkel, welche die Tangente in einem Punkt der Kurve mit den Axen bildet, sind

$$1.\quad \frac{dx}{ds};\ \frac{dy}{ds};\ \frac{dz}{ds}$$

Es sei m′ dieser Punkt und mm′, m′m″ seien zwei auf einander folgende Elemente der Kurve, so ist die durch diese zwei Elemente bestimmte Ebene die Oskulationsebene der Kurve im Punkt m′; und der Halbmesser des Kreises, welcher durch die drei Punkte m, m′, m″ geht, der Krümmungshalbmesser der Kurve im Punkt m′; wir bezeichnen den Mittelpunkt dieses Kreises mit O und seinen Halbmesser mit ϱ; eine in O auf der Oskulationsebene errichtete

Senkrechte ist die Axe derselben. Der Winkel $mm'm''$, den wir ω nennen, ist der Contingenzwinkel. Man verlängere mm' über m' hinaus nach t und $m'm''$ nach t'; $m't = m't' = 1$; die Projektionen von $m't$ auf den Axen sind beziehungsweise gleich $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ und denjenigen von $m't'$ sind $\frac{dx}{ds} + d\,\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds} + d\,\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds} + d\,\frac{dz}{ds}$; daraus folgt, daß die Projektionen von $tt' = \omega$ auf den Axen gleich $d\,\frac{dx}{ds}$, $d\,\frac{dy}{ds}$, $d\,\frac{dz}{ds}$ sind, oder

$$2.\quad \omega = \sqrt{\left(d\,\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\,\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\,\frac{dz}{ds}\right)^2}$$

Durch Differenziation ergibt sich $d\,\frac{dx}{ds} = \frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^2}$, $d\,\frac{dy}{ds} = \frac{ds\,d^2y - dy\,d^2s}{ds^2}$, $d\,\frac{dz}{ds} = \frac{ds\,d^2z - dz\,d^2s}{ds^2}$, hiernach ist

$$3.\quad \omega = \frac{1}{ds^2}\sqrt{(ds\,d^2x - dx\,d^2s)^2 + (ds\,d^2y - dy\,d^2s)^2 + (ds\,d^2z - dz\,d^2s)^2}$$

Man kann aber auch die Kurve in gleiche Elemente $mm' = m'm'' \ldots\ldots = ds$ eintheilen, oder ds als unabhängige Variabele betrachten, dann ist $d^2s = 0$ und man erhält den einfacheren Ausdruck

$$4.\quad \omega = \frac{1}{ds}\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}$$

Wenn man den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in 3. entwickelt, mit Berücksichtigung von

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2;\quad ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z$$

so erhält man folgende Formel

$$5.\quad \omega = \frac{1}{ds^2}\sqrt{(dy\,d^2z - d^2y\,dz)^2 + (dz\,d^2x - d^2z\,dx)^2 + (dx\,d^2y - d^2x\,dy)^2}$$

Dieser Werth läßt sich noch auf eine andere Weise finden; bezeichnet man allgemein durch a, b, c; α, β, γ die Cosinus der drei Winkel, welche zwei beliebige Gerade im Raum mit einander bilden, so ist der Sinus des Winkels, welchen diese Gerade unter sich machen, durch die Formel gegeben

$$\sqrt{(b\gamma - \beta c)^2 + (c\alpha - \gamma a)^2 + (a\beta - \alpha b)^2}$$

Sind nun diese beiden Geraden die Elemente mm' und $m'm''$, so ist

$$a = \frac{dx}{ds}\quad b = \frac{dy}{ds}\quad c = \frac{dz}{ds}$$

$$\alpha = \frac{dx + d^2x}{ds} - \frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{ds^3}\,dx,$$

$$\beta = \frac{dy + d^2y}{ds} - \frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{ds^3}\,dy,$$

$$\gamma = \frac{dz + d^2z}{ds} - \frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{ds^2}\,dz,$$

wodurch man für $\omega = \sin mm'm''$ den genannten Werth erhält.

Wenn man den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in 3 entwickelt, und bedenkt, daß

$$-2ds\,d^2s\,(dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z) = -2ds^2d^2s^2$$

ist, so ergibt sich

$$6.\quad \omega = \frac{1}{ds}\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}$$

Die vorhergehenden Gleichungen 2 — 6 erhalten eben so viele Ausdrücke für den Krümmungshalbmesser, indem

$$7.\quad \varrho = \frac{ds}{\omega} \text{ ist.}$$

Man kann dem Werthe von ω noch eine andere Form geben, indem man einen neuen Winkel i einführt; da die Bedingungsgleichung $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$ statt findet, so ist es erlaubt, $\frac{dy}{ds} = \sin\alpha . \sin i$ und $\frac{dz}{ds} = \sin\alpha . \cos i$ zu setzen, wobei wir den Winkel, dessen Cosinus $\frac{dx}{ds}$ ist, α nennen. Nun ist $\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2 = d\alpha^2 + \sin\alpha^2\, di^2$ Also nach 2

$$8.\quad \omega = \sqrt{d\alpha^2 + \sin^2\alpha\, di}$$

Diese Formel kann dazu dienen, die Kurven zu finden, für welche der Krümmungshalbmesser ϱ eine gegebene Funktion des Bogens s ist; man hat nämlich $\sqrt{d\alpha^2 + \sin^2\alpha\, di^2} = \frac{ds}{\varrho}$ und kann also $d\alpha = \sin\varphi(s)\frac{ds}{\varrho}$ und $\sin\alpha\, di = \cos\varphi(s)\frac{ds}{\varrho}$ setzen.

Die oben betrachtete Linie tt′, welche mit den Axen Winkel bildet, deren Cosinus gleich

$$\frac{d\frac{dx}{ds}}{\omega},\quad \frac{d\frac{dy}{ds}}{\omega},\quad \frac{d\frac{dz}{ds}}{\omega}$$

sind, ist parallel der Halbirungslinie des Winkels mm′m″, welche durch den Mittelpunkt o des Krümmungskreises mm′m″ geht, om′ ist $= \varrho$. Die Projektionen von ϱ auf den x, y, z Axen sind also durch folgende Relationen gegeben:

$$9.\quad \varrho^2\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds},\quad \varrho^2\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds},\quad \varrho^2\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}$$

Die Cosinus der Winkel, welche die Oskulationsebene mm′m″ mit den zy, zx, xy Ebenen bildet, oder was dasselbe ist, die Cosinus der Winkel, welche die Axe dieser Ebene, nämlich die in o auf ihr errichtete Senkrechte, mit den x, y, z Axen macht, bezeichnen wir mit a, b, c und erhalten

$$10.\quad a = \frac{dy\,d^2z - d^2y\,dx}{\omega . ds^2},\quad b = \frac{dz\,d^2x - d^2z\,dx}{\omega . ds^2},\quad c = \frac{dx\,d^2y - d^2x\,dy}{\omega . ds^2}$$

Wenn wir die Cosinus der Winkel, welche die Linie om′ mit den Axen bildet, durch α, β, γ ausdrücken, so erhalten wir folgende Zusammenstellung für die Werthe der 9 Cosinus der Winkel, welche nachstehende 3 zu einander senkrechte Gerade mit den Axen bilden: die Tangente in einem Punkt einer gewundenen Kurve (m′t), die Hauptnormale (m′o) und die Axe der Oskulationsebene:

$$11.\quad \frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds}$$

$$\alpha = \frac{d\dfrac{dx}{ds}}{\omega},\quad \beta = \frac{d\dfrac{dy}{ds}}{\omega},\quad \gamma = \frac{d\dfrac{dz}{ds}}{\omega}$$

$$a = \frac{dy\,d^2z - d^2y\,dz}{\omega\,.\,ds^2},\quad b = \frac{dz\,d^2x - d^2z\,dx}{\omega\,.\,ds^2},\quad c = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{\omega\,.\,ds^2}$$

Es seien $m\ m'\ m''\ m'''$ 4 auf einander folgende Punkte der Kurve; die beiden Oskulationsebenen $m\,m'm''$ und $m'm''m'''$ schneiden sich in der Geraden $m'm''$; der Winkel, welchen sie mit einander bilden, heißt der Oskulationswinkel; wir bezeichnen ihn mit Ω; durch die Mitte n des Elements $m'm''$ ziehen wir zwei Gerade $nT = nT' = 1$, wovon die erste senkrecht auf der Ebene $m\,m'm''$ ist und die andere senkrecht auf der Ebene $m'm''m'''$. Die Projektionen von nT auf den Axen sind beziehungsweise gleich a, b, c und diejenigen von nT' gleich $a + da$, $b + db$, $c + dc$, mithin sind die Projektionen von TT' gleich da, db, dc oder es ist, da $\Omega = TT'$,

$$12.\quad \Omega = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}$$

Da die Linie nT senkrecht auf $m'm''$ steht, so ist der Cosinus des Winkels $Tnm' = o$, oder

$$adx + bdy + cdz = o$$

Die Linie TT' ist ebenfalls senkrecht auf $m'm''$, mithin ist

$$da\,dx + db\,dy + dc\,dz = o$$

Wenn man die erste Gleichung differenziirt, und das Resultat mit der zweiten vergleicht, so findet man

$$ad^2x + bd^2y + cd^2z = o$$

Zu demselben Resultat würde man auch durch die Gleichungen 10 gelangen, wenn man die erste derselben mit d^2x, die zweite mit d^2y und die dritte mit d^2z multiplizirte.

Wir setzen nun $dyd^2z - d^2ydz = d\xi$, $dz\,d^2x - d^2z\,dx = d\eta$, $dx\,d^2y - d^2xdy = d\zeta$. Ferner sei $d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}$, so erhalten wir die Formeln für Ω aus denjenigen für ω durch bloße Veränderung der Buchstaben; indem wir statt ds $d\sigma$, statt dx, dy, dz, die Bezeichnungen $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ setzen. Aus 3. erhalten wir

$$13.\quad \Omega = \frac{1}{d\sigma^2}\sqrt{(d\sigma d^2\xi - d\xi d^2\sigma)^2 + (d\sigma d^2\eta - d\eta d^2\sigma)^2 + (d\sigma d^2\zeta - d\zeta d^2\sigma)^2}$$

Würde man hier $d\sigma$ als unabhängige Variabele betrachten, so wäre $d^2\sigma = o$, und man erhielte für Ω den einfacheren Werth

$$14.\quad \Omega = \frac{1}{d\sigma}\sqrt{d^2\xi^2 + d^2\eta^2 + d^2\zeta^2}$$

Aus 5. erhalten wir die weitere Relation

$$15.\quad \Omega = \frac{1}{d\sigma^2}\sqrt{(d\eta d^2\zeta - d^2\eta d\zeta)^2 + (d\zeta d^2\xi - d^2\zeta d\xi)^2 + (d\xi d^2\eta - d^2\xi d\eta)^2}$$

und aus 6.

$$16.\quad \Omega = \frac{1}{d\sigma}\sqrt{d^2\xi^2 + d^2\eta^2 + d^2\zeta^2 - d^2\sigma^2}$$

Nun ist

$$d\eta d^2\zeta - d^2\eta d\zeta = (dzd^2x - d^2zdx)(dxd^3y - d^3xdy) - (dzd^3x - d^3zdx)(dxd^2y - d^2xdy)$$
$$= dx\,\{(dyd^2z - d^2ydz)d^3x + (dzd^2x - d^2zdx)d^3y + (dxd^2y - d^2xdy)d^3z\}$$
$$= dx\{(d^2yd^3z - d^3yd^2z)dx + (d^2zd^3x - d^3zd^2x)dy + (d^2xd^3y - d^3xd^2y)dz\}$$

Ebenso findet man

$$d\zeta d^2\xi - d^2\zeta d\xi = \frac{dy}{dx}(d\eta d^2\zeta - d^2\eta d\zeta)$$

$$d\xi d^2\eta - d^2\xi d\eta = \frac{dz}{dx}(d\eta d^2\zeta - d^2\eta d\zeta)$$

Mithin ist nach der Formel 15

17. $$\Omega = \frac{(dyd^2z - d^2ydz)d^3x + (dzd^2x - d^2zdx)d^3y + (dxd^2y - d^2xdy)d^3z}{(dy\,d^2z - d^2y\,dz)^2 + (dz\,d^2x - d^2z\,dx)^2 + (dx\,d^2y - d^2x\,dy)^2}\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

18. $$\Omega = \frac{(d^2yd^3z - d^3yd^2z)dx + (d^2zd^3x - d^3zd^2x)dy + (d^2xd^3y - d^3xd^2y)dz}{(dy\,d^2z - d^2y\,dz)^2 + (dz\,d^2x - d^2zdx)^2 + (dx\,d^2y - d^2x\,dy)^2}\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Den Ausdruck $\frac{ds}{\Omega}$ setzen wir $= r$, dann ist r der sogenannte Torsionshalbmesser; die vorhergehenden Formeln für Ω geben die entsprechenden Werthe von r.

Durch Verbindung der Ausdrücke 5, 7, 17 und 18 erhalten wir

19. $$r = \frac{ds^6}{\varrho^2}\left\{(dyd^2z - d^2ydz)d^3x + (dzd^2x - d^2zdx)d^3y + (dxd^2y - d^2xdy)d^3z\right\}$$

20. $$r = \frac{ds^6}{\varrho^2}\left\{(d^2yd^3z - d^3yd^2z)dx + (d^2zd^3x - d^3zd^2x)dy + (d^2xd^3y - d^3xd^2y)dz\right\}$$

Um die geometrische Bedeutung der Größen d^2s, d^2x, d^2y, d^2z besser würdigen zu können, stellen wir noch einige weitere Betrachtungen an. Wir bezeichnen wieder mit m, m', m'' drei auf einander folgende Punkte der Kurve, nehmen aber die dazwischen liegenden Elemente ungleich an, so daß

$$mm' = ds \qquad m'm'' = ds + d^2s$$

ist; d^2s bedeutet den unendlich kleinen Zuwachs des Elements ds gerade so, wie ds den unendlich kleinen Zuwachs des Bogens s der Kurve vorstellt. Die Projektionen von mm' auf den Axen sind dx, dy, dz, diejenigen von $m'm''$ sind $dx + d^2x$, $dy + d^2y$, $dz + d^2z$; hieraus folgt die Gleichung $(ds + d^2s)^2 = (dx + d^2x)^2 + (dy + d^2y)^2 + (dz + d^2z)^2$ oder, wenn man entwickelt und bedenkt, daß $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ ist, und daß die Größen d^2s^2, d^2x^2, d^2y^2, d^2z^2 im Verhältniß zu den andern unendlich klein sind, und also weggelassen werden können:

22. $$d^2s = \frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{ds}$$

Dieser Werth, welcher sonst durch Differenziation der Gleichung $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ gefunden wird, gibt noch zu einigen Bemerkungen Veranlassung: Er enthält nämlich rechts die Summe von drei Produkten mit je zwei Faktoren; eine solche Summe kann immer so aufgefaßt werden, daß sie den Cosinus des Winkels zweier Geraden im Raume darstellt. Setzen wir nämlich allgemein $a\alpha + b\beta + c\gamma = A$ und bezeichnen $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ mit s, $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ mit σ, so ist $\frac{a}{s}\,\frac{\alpha}{\sigma} + \frac{b}{s}\,\frac{\beta}{\sigma} + \frac{c}{s}\,\frac{\gamma}{\sigma} = \frac{A}{s\sigma}$

Da nun $\frac{a^2}{s^2} + \frac{b^2}{s^2} + \frac{c^2}{s^2} = 1$ ist, wie auch $\frac{\alpha^2}{\sigma^2} + \frac{\beta^2}{\sigma^2} + \frac{\gamma^2}{\sigma^2} = 1$, so sind $\frac{a}{s}$, $\frac{b}{s}$, $\frac{c}{s}$ die Cosinus der Winkel, welche die erste Gerade mit den Axen macht, und $\frac{\alpha}{\sigma}$, $\frac{\beta}{\sigma}$, $\frac{\gamma}{\sigma}$ die Cosinus der Winkel, welche die zweite Gerade mit den Axen bildet. $\frac{A}{s.\sigma}$ ist der Cosinus des Winkels zwischen beiden Geraden. Wenn wir diese Ueberlegungen auf die Gleichung 22 anwenden, so können wir sie zunächst in die Form bringen

$$23. \frac{d^2s}{\sqrt{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2}} = \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{\sqrt{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2}} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{\sqrt{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2}} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{\sqrt{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2}}$$

Der Ausdruck rechts ist der Cosinus des Winkels zweier Geraden; die erste bildet mit den Axen Winkel, deren Cosinus beziehungsweise sind $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$; diese Gerade ist also das Element mm'. Um die zweite Gerade zu finden, verlängern wir mm' über m' hinaus nach n, nehmen auf $m'm''$ den Punkt l so an, daß $m'l = m'n = mm'$ ist, und ziehen die Geraden nl, nm''. Die Projektionen von $m'n$ auf den Axen sind dx, dy, dz. Diejenigen von $m'm''$ sind $dx + d^2x$, $dy + d^2y$, $dz + d^2z$, also sind die Projektionen von nm'' auf den Axen gleich d^2x, d^2y, d^2z, mithin ist

$$24. \quad nm'' = \sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}$$

Die Cosinus der Winkel, welche nm'' mit den Axen bildet, sind $\frac{d^2x}{nm''}$, $\frac{d^2y}{nm''}$, $\frac{d^2z}{nm''}$. Mithin drückt die rechte Seite der Gleichung 23 den Cosinus des Nebenwinkels von $m'nm''$ aus; dieser Winkel ist aber gleich $m'' + nm'm''$; $nm'm''$ ist unendlich klein im Verhältniß zu m'', also ist $m'nm'' = m''$, und wenn man das Dreieck lnm'' als rechtwinklig ansieht, so ist andererseits $\cos m'' = \frac{lm''}{nm''} = \frac{d^2s}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}}$, somit wäre die Richtigkeit der Gleichung 23, oder von 22 auch auf rein geometrischem Wege nachgewiesen.

In dem rechtwinkligen Dreieck nlm'' ist $ln = \sqrt{nm''^2 - lm''^2}$ oder, da $ln = \omega \,.\, ds$ ist, $\omega \,.\, ds = \sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}$
Hierin liegt auch der geometrische Nachweis der Formel 6 für den Contingenzwinkel ω.

§. 13. Die gewundenen Kurven. Fortsetzung.

Wir betrachten wieder, wie früher, vier auf einander folgende Punkte $m\ m'\ m''\ m'''$ der Kurve und ziehen durch m' drei auf einander senkrechte Linien, $m't = m'T = m'\tau = 1$; die erste ist die Tangente der Kurve, oder die Verlängerung des Elements und bildet mit den Axen Winkel, deren Cosinus durch die deutschen Buchstaben $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bezeichnet werden; die zweite ist die Axe der Oskulationsebene $mm'm''$ und bildet mit den Axen Winkel, deren Cosinus a, b, c genannt werden; die dritte ist senkrecht auf mm′ und liegt in der Oskulationsebene; ihre Verlängerung geht durch den Mittelpunkt o des Krümmungskreises m m′m″, und die Cosinus der Winkel, die sie mit den Axen bildet, sind wie früher α, β, γ. Es bestehen nun folgende Relationen:

1. $a^2 + b^2 + c^2 = 1$; $a^2 + b^2 + c^2 = 1$; $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$

Durch Differenziation

2. $a\,da + b\,db + c\,dc = o$; $\quad a\,da + b\,db + c\,dc = o$
$$\alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta + \gamma\,d\gamma = o$$

Die Gleichungen 1 rühren daher, daß die drei Axen auf einander senkrecht stehen; die Gleichungen 2 sind die Formeln für die Cosinus von drei rechten Winkeln; zieht man nämlich durch m′ drei weitere Linien, m′t′, m′T′, $m'\mathsf{T}' = 1$, wovon die erste die Verlängerung des Elements m′m″, die zweite senkrecht auf der Oskulationsebene m′m″m‴ und die dritte senkrecht auf dem Element m′m″ ist, und in der zweiten Oskulationsebene m′m″m‴ liegt, so sind die Cosinus der Winkel, welche die Linien tt′, TT′, TT' mit den Axen bilden,

$$\frac{da}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}},\quad \frac{db}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}},\quad \frac{dc}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}},$$
$$\frac{da}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}},\quad \frac{db}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}},\quad \frac{dc}{\sqrt{da^2 + db^2 + dc^2}},$$
$$\frac{d\alpha}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}},\quad \frac{d\beta}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}},\quad \frac{d\gamma}{\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}},$$

Die Gleichungen 2 bedeuten also, daß die Winkel m′tt′, m′TT′, $m'\mathsf{TT}'$ als Rechte anzusehen sind, wenn man blos die unendlich kleinen Größen erster Ordnung in Betracht zieht. Wir haben ferner die Relationen:

3. $aa + bb + cc = o$; $a\alpha + b\beta + c\gamma = o$; $a\alpha + b\beta + c\gamma = o$

welche sich auf die Cosinus der rechten Winkel t m′T, $t\,m'\mathsf{T}$, $T\,m'\mathsf{T}$ beziehen.

Die Quadratsummen der drei Cosinus, welche die Axen der x, y, z je mit den drei Linien m′t, m′T, $m'\mathsf{T}$ bilden, sind gleich 1, also

4. $a^2 + a^2 + \alpha^2 = 1$; $b^2 + b^2 + \beta^2 = 1$; $c^2 + c^2 + \gamma^2 = 1$

und durch Differenziation

5. $a\,da + a\,da + \alpha\,d\alpha = o$; $b\,db + b\,db + \beta\,d\beta = o$; $c\,dc + c\,dc + \gamma\,d\gamma = o$

Der Contingenzwinkel t m′t′ wurde mit ω, der Oskulationswinkel Tm′T′ mit Ω bezeichnet, mithin ist $tt' = \omega$ und $TT' = \Omega$, und da die Projektionen von tt′ auf den Axen der x, y, z gleich sind da, db, dc und diejenigen von Ω gleich da, db, dc, so ist mit Berücksichtigung des Parallelismus der Linien tt′, TT′, $m'\mathsf{T}$

6. $\omega\,.\,\alpha = da$; $\omega\,.\,\beta = db$; $\omega\,.\,\gamma = dc$

7. $\Omega\alpha = da$; $\Omega\beta = db$; $\Omega\gamma = dc$

Diese Relationen in Verbindung mit 5 geben

8. $d\alpha = -a\omega - a\Omega$; $d\beta = -b\omega - b\Omega$; $d\gamma = -c\omega - c\Omega$

Durch Quadriren dieser Gleichungen erhält man ferner

9. $d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = \omega^2 + \Omega^2$ oder

10. $\mathsf{TT}'^2 = tt'^2 + TT'^2$

Die geometrische Bedeutung dieser Gleichung ist wieder sehr einfach; die Axen m′t, m′T, $m'\mathsf{T}$ werden in die zweite Lage m′t′, m′T′, $m'\mathsf{T}'$ durch zwei Drehungen gebracht; bei der ersten Drehung ist m′T die feste Axe; m′t dreht sich nach m′t′ und $m'\mathsf{T}$ kommt in die Lage $m'\mathsf{T}''$, so daß $\mathsf{TT}'' = tt'$ ist; bei der zweiten Drehung bleibt m′t′ fest, m′T dreht sich nach m′T′ und m′T″ kommt in die Lage m′T′, so daß T″T′ = TT′ ist; nun ist offenbar TT″T′ ein bei T″ rechtwinkliges Dreieck, also $TT'^2 = TT''^2 + T''T'^2 = tt'^2 + TT'^2$.

Die Gleichungen 9 und 10 führen auf einige Fragen, welche die Grundlage der Theorie der Kurven bilden. Dieselben enthalten 3 Variabeln, nämlich den Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Hauptkrümmungshalbmessern, den Contigenzwinkel und den Torsionswinkel. Man kann sich nun eine dieser Größen als Funktion der andern denken, so ergibt sich in Verbindung mit einer der genannten Gleichungen eine Relation, welche nur noch zwei dieser Winkel enthält; durch Spezialisirung der gegebenen Funktion entsteht sofort eine Reihe von Differenzialgleichungen, wovon jede einer gewissen Klasse von Kurven entspricht. Man gelangt so zu einer Eintheilung der Kurven, die derjenigen der Flächen analog ist, welche Monge in die Geometrie einführte, indem er gewisse Relationen zwischen den beiden Hauptkrümmungshalbmessern in einem Punkt einer Fläche annahm, und aus diesen Relationen die Gleichungen der Flächen ableitete. Bezeichnet man die Hauptkrümmungshalbmesser mit R und R′, so ist $R = R'$ die einfachste dieser Differenzialgleichungen, welche durch Integration auf die Kugel führt; eine andere Gattung von Flächen ist durch die Beziehung $R + R' = o$ charakterisirt, worunter sich eine Schraubenfläche befindet, deren Erzeugende parallel einer Ebene ist, und welche sich durch die Eigenschaft auszeichnet, in sich selbst verschiebbar zu sein, eine Eigenschaft, welche sie nur mit den Drehungsflächen gemein hat. Die Flächen $R \,.\, R' = \text{const.}$ können, was aus den Gauß'schen Untersuchungen über die Abbildung der Flächen hervorgeht, auf einer Kugel abgebildet werden. Es bieten sich hier noch weitere, bis jetzt unbeantwortete Fragen über die Diskussion von Differenzialgleichungen dar, z. B. $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \text{const.}$ $R^2 + R'^2 = \text{const.}$ u. s. f.

Ein ähnliches Verfahren läßt sich nun bei den gewundenen Kurven einschlagen; der Hauptkrümmungshalbmesser $\varrho = \frac{ds}{\omega}$ und der Torsionshalbmesser $r = \frac{ds}{\Omega}$ stehen in sehr einfachen Beziehungen zu den Winkeln ω und Ω, eine Relation zwischen ω und Ω läßt sich also unmittelbar in eine entsprechende zwischen ϱ und r umsetzen. Betrachten wir z. B. die Kurven, welchen folgende Gleichungen zukommen:

11. $\varrho = r = \text{const.}$ oder $\omega = \Omega = \text{const.}$

12. $\varrho = \text{const.}$ $r = \text{const.}$ oder $\omega = \text{const.}$ $\Omega = \text{const.}$

13. $\frac{\varrho}{r} = \text{const.}$ oder $\frac{\omega}{\Omega} = \text{const.}$

Die Eigenschaften derselben lassen sich sehr leicht geometrisch entwickeln, wie es zuerst Bertrand zeigte.

Wenn man durch einen festen Punkt Linien zieht, parallel mit den Tangenten einer gewundenen Kurve, so erhält man einen Kegel, dessen Erzeugende unter sich Winkel bilden, welche den Contingenzwinkeln der Kurve entsprechen, während die beiden durch drei auf einander folgende Erzeugende bestimmten Tangentialebenen des Kegels einen Winkel einschließen, gleich dem Oskulationswinkel der Kurve. Die Linie $\omega = \text{const.}$ ist eine solche, der sich ein gleichseitiges und gleichwinkliges Polygon von unendlich vielen Seiten einbeschreiben läßt. Liegt eine solche Kurve in der Ebene, so ist sie ein Kreis, mithin haben wir schon einen speziellen Fall, welcher der Gleichung 12 entspricht, nämlich $\omega = \text{const.}$ $\Omega = o.$ Um aber die übrigen Kurven $\omega = \text{const.}$ $\Omega = \text{const.}$ zu finden, nehmen wir die Spitze des Kegels als den Mittelpunkt einer Kugel an, welche denselben in einer sphärischen Kurve schneidet. Gleichen auf einander folgenden Elementen der gegebenen Kurve entsprechen eben so viele Erzeugende des Kegels, welche unter sich gleiche Winkel bilden, und also auf der sphärischen Kurve gleiche Bögen abschneiden. Zieht man durch die Mitten dieser Bögen Linien, die auf denselben senkrecht sind, und zugleich die Kugel tangiren, so sind die von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich den Oskulationswinkeln der gegebenen Kurve; mithin sind sie unter sich gleich, also sind diese Linien ebenfalls unter einander gleich und schneiden sich somit in einem Punkt; die genannte sphärische Kurve ist demnach ein Kreis und der Hülfskegel ist ein Drehungskegel, dessen Erzeugende mit der Axe einen konstanten Winkel bilden; die Tangenten der gegebenen Kurve bilden also ebenfalls mit einer Geraden konstante Winkel; diese Kurve selbst liegt auf einem Cylinder, dessen Erzeugende ihre Elemente unter konstantem Winkel schneiden. Da die zwischen je zwei unendlich nahem Erzeugenden liegenden Elemente der Kurve mit denselben sowohl, als auch unter sich selbst gleiche Winkel bilden, so folgt daraus, daß der Winkel zwischen den entsprechenden Tangentialebenen des Cylinders konstant, und daß mithin ein auf den Erzeugenden senkrechter Schnitt desselben ein Kreis ist. Die Kurven, welche der Gleichung 12 entsprechen, sind daher Schraubenlinien, welche die Erzeugenden eines Cylinders mit kreisförmiger Basis unter konstantem Winkel schneiden; ist dieser Winkel gleich 45 Grad, so erhält man den durch die Gleichung 11 dargestellten speziellen Fall, weil dann die Erzeugenden der zwei Kegel, welche mit der Kugel konzentrisch sind und sie berühren, mit ihrer Axe einen Winkel von 45 Graden bilden. Zur dritten Art von Kurven gehören solche, bei welchen weder der Contingenz-, noch der Torsionswinkel konstant ist, sondern nur das Verhältniß beider. Wir theilen die gegebene Kurve wieder in gleiche Elemente ein, konstruiren den Kegel, dessen Erzeugende parallel mit diesen Elementen sind, und welcher von einer konzentrischen Kugel in einer sphärischen Kurve geschnitten wird. Da die Contingenzwinkel der gegebenen Kurve nicht mehr unter sich gleich sind, so sind auch die Winkel zwischen je zwei Erzeugenden des Kegels und mithin auch die entsprechenden Bögen der sphärischen Kurve ungleich. Zieht man durch die Mitten dieser Bögen Linien, welche die Kugel tangiren und zugleich senkrecht auf der sphärischen Kurve sind, so ist das Verhältniß der Winkel zwischen je zwei solchen Linien und zwischen den Erzeugenden des Kegels konstant, woraus sich wieder ergibt, daß diese Linien in einem Punkte zusammentreffen müssen; der Hülfskegel ist also gleichfalls ein Drehungskegel, alle Tangenten der gegebenen Kurve machen mit einer bestimmten Geraden, welche der Axe dieses Drehungskegels parallel ist, einen konstanten Winkel. Diese Kurve liegt somit auch auf einem Cylinder, dessen Erzeugende sie unter konstantem Winkel schneidet. Derselbe ist aber kein Drehungscylinder, denn die einzelnen Elemente der Kurve, welche wir unter einander gleich annehmen, bilden zwar gleiche Winkel mit den Erzeugenden, aber der Contingenzwinkel wechselt von einem Element zum andern, mithin wechselt auch der Winkel zwischen den entsprechenden Tangentialebenen des Cylinders, also ist ein senkrechter Schnitt desselben nicht mehr kreisförmig.

Wir haben nun folgende Zusammenstellung:

1. Beide Krümmungshalbmesser einer gewundenen Kurve sind unter sich gleich und konstant; die Kurve ist eine Schraubenlinie, welche die Erzeugenden eines Cylinders mit kreisförmiger Basis unter einem Winkel von 45 Graden schneidet. Diese Kurve ist in sich selbst verschiebbar.

Beide Hauptkrümmungshalbmesser einer Fläche sind unter sich gleich und konstant; die Fläche ist eine Kugel, welche nach allen Richtungen in sich selbst verschiebbar ist.

2. Jeder der beiden Krümmungshalbmesser einer gewundenen Kurve ist konstant. Die Kurven sind Schraubenlinien, welche die Erzeugenden eines Cylinders mit kreisförmiger Basis unter einem beliebigen, aber konstanten Winkel schneiden. In dem speziellen Fall, wo einer der Krümmungshalbmesser unendlich groß ist, erhält man einen Kreis. Diese Kurven sind ebenfalls in sich selbst verschiebbar.

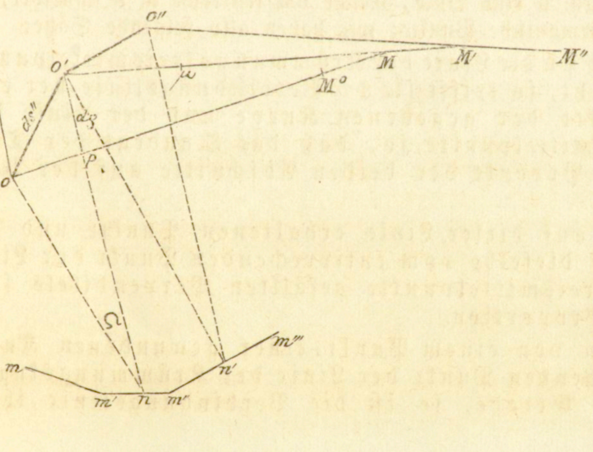
Unter den Flächen, bei welchen beide Hauptkrümmungshalbmesser konstant und unter sich ungleich sind, ist nur der Cylinder mit kreisförmiger Basis zu nennen, bei welchem ein Krümmungshalbmesser unendlich groß ist. Diese Fläche ist gleichfalls in sich selbst verschiebbar und zwar nach zwei zu einander senkrechten Richtungen.

3. Das Verhältniß der beiden Krümmungshalbmesser einer gewundenen Kurve ist konstant; dieselbe ist eine Schraubenlinie, welche die Erzeugenden eines Cylinders mit beliebiger Basis unter einem konstanten Winkel schneidet. Solche Kurven sind nicht in sich selbst verschiebbar.

Unter den Flächen, bei welchen das Verhältniß der beiden Hauptkrümmungshalbmesser konstant ist, sind diejenigen hervorzuheben, bei welchen dieses Verhältniß gleich — 1 und gleich — 2 ist. Zur der ersten Art gehört die Schraubenfläche, deren Erzeugende parallel einer Ebene ist, und die durch Umdrehung einer Kettenlinie um ihre Direktrice erzeugte Drehungsfläche. Zur zweiten Art gehört die durch Umdrehung einer Parabel um ihre Direktrice erzeugte Drehungsfläche.

§. 14. Die gewundenen Kurven. Schluß.

Fig. 4.



m m′ m″ m‴ sind vier auf einander folgende Punkte einer solchen Kurve; die beiden Oskulationsebenen m m′ m″ und m′ m″ m‴ schneiden sich in m′ m″; durch die Mitte n dieses Elements ziehen wir zwei zu demselben senkrechte Linien; die erste no liegt in der Ebene m m′ m″ und die zweite no′ liegt in der Ebene m′ m″ m‴; o ist der Mittelpunkt des Krümmungskreises $m\,m'm''$; o' ist der Mittelpunkt des Krümmungskreises $m'm''m'''$; die Richtungen $m'm''$ und oo' sind offenbar zu einander senkrecht, und da oo' ein Element der Kurve der Krümmungskreismittelpunkte ist, so folgt hieraus der Satz:

1. Die Tangenten einer gewundenen Kurve und der Linie ihrer Krümmungskreismittelpunkte stehen in je zwei entsprechenden Punkten auf einander senkrecht.

Die Mittelpunkte sämmtlicher Kugeln, welche sich um die drei Punkte $m\,m'm''$ beschreiben lassen, oder welche den Krümmungskreis $m\,m'm''$ zum gemeinschaftlichen Durchschnitt haben, liegen auf der Axe dieser Oskulationsebene, d. h. auf der in o auf derselben errichteten Senkrechten; die Mittelpunkte sämmtlicher Kugeln, welche durch die drei Punkte $m'm''m'''$ gehen, oder den Krümmungskreis $m'm''m'''$ zum gemeinsamen Durchschnitt haben, liegen auf der Axe der zweiten Oskulationsebene, d. h. auf der in o' auf der Ebene $m'm''m'''$ errichteten Senkrechten. Diese beiden Axen schneiden sich im Punkte M, welcher der Mittelpunkt der durch die vier Punkte $m\,m'm''m'''$ bestimmten Kugel ist; diese Kugel heißt die Krümmungskugel der gegebenen Kurve. Da nun oM oder $o'M'$ Tangenten der Kurve sind, auf welcher die Punkte $MM'\ldots$ liegen, oder der Kurve der Krümmungskugelmittelpunkte und da die Elemente oo' und MM' in der durch n gelegten Normalebene der gegebenen Kurve liegen, so folgen hieraus nachstehende Sätze:

2. Je drei entsprechende Punkte einer gewundenen Kurve, der Linie ihrer Krümmungskreismittelpunkte und der Linie ihrer Krümmungskugelmittelpunkte liegen in der Normalebene der gegebenen Kurve; die Tangente der letzteren steht senkrecht auf den beiden Tangenten der andern Kurven.

Der Kreis noM, welcher in der Normalebene der gegebenen Kurve liegt, hat zum Durchmesser die Linie nM. Da aber $no'M$ gleichfalls ein rechter Winkel ist, so liegt der Punkt o' auch auf diesem Kreise; die Linie oo' ist sowohl ein Element des Kreises als auch der Kurve der Krümmungsmittelpunkte, mithin ist die Verlängerung dieses Elements eine gemeinschaftliche Tangente beider; verbindet man o oder o' mit der Mitte der Geraden nM, so ist die Verbindungslinie senkrecht auf oo'; verlängert man oo' bis zum Durchschnitte mit der Verlängerung von nM in q, so ist $qo^2 = qM \, . \, qn$; zieht man endlich durch o eine Linie, welche nM senkrecht in s schneidet, so sind q, M, s, n vier harmonische Punkte; wir haben also folgende Sätze:

3. Wenn man an die Linie der Krümmungskreismittelpunkte eine Tangente zieht, so trifft sie die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte der gegebenen Kurve und der Linie der Krümmungskugelmittelpunkte so, daß das Quadrat der Tangente gleich dem Produkt der beiden Abschnitte auf der Verbindungslinie ist.

4. Die drei auf dieser Linie erhaltenen Punkte und der Fußpunkt des auf dieselbe vom entsprechenden Punkt der Linie der Krümmungskreismittelpunkte gefällten Perpendikels sind in harmonischer Proportion.

5. Zieht man von einem Punkt einer gewundenen Kurve nach dem entsprechenden Punkt der Linie der Krümmungskugelmittelpunkte eine Gerade, so ist die Verbindungslinie ihres

Halbirungspunkts mit dem entsprechenden Punkt der Linie der Krümmungskreismittelpunkte eine Normale der letzteren.

In dem Kreisviereck $noo'M$ sind die Winkel bei n und M, ono' und oMo', einander gleich; der erste dieser Winkel ist der Oskulationswinkel der gegebenen Kurve und der zweite ist der Contingenzwinkel der Linie der Krümmungskugelmittelpunkte, hieraus folgt also

6. der Oskulationswinkel einer gewundenen Kurve ist gleich dem Contingenzwinkel in dem entsprechenden Punkt der Linie ihrer Krümmungskugelmittelpunkte.

Wir bezeichnen wieder wie früher die Cosinus der Winkel, welche in einem Punkt einer gewundenen Kurve die Tangente, die Hauptnormale und die Axe der Oskulationsebene mit den Axen bilden, durch a, b, c; α, β, γ; $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$; durch ω und Ω Contingenz- und Oskulationswinkel, durch ϱ und r Krümmungs- und Torsionshalbmesser und endlich durch R den Halbmesser der Krümmungskugel. Dieselben Buchstaben mit einem Strich beziehen sich auf die Linie der Krümmungskugelmittelpunkte und mit zwei Strichen auf die Linie der Krümmungskreismittelpunkte.

Aus dem zweiten Theorem folgen die Gleichungen

7. $aa' + bb' + cc' = o$; $aa'' + bb'' + cc'' = o$

Aus 6. folgt

8. $\Omega = \omega'$

Ferner kann man sich sehr leicht überzeugen, daß die Halbirungslinie des Winkels oMM' parallel der Halbirungslinie von ono' ist; hierauf beruht der Satz:

9. Die Hauptnormalen in einem Punkt einer gewundenen Kurve und in dem entsprechenden Punkt der Linie ihrer Krümmungskugelmittelpunkte sind gegenseitig parallel, daher die Gleichungen

10. $\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$; $\gamma = \gamma'$

Wir bezeichnen die Coordinaten von n mit xyz, und diejenigen von M also mit $x'y'z'$, dann sind die Projektionen der Linie nM auf den Axen beziehungsweise gleich

$$x - x'; \quad y - y'; \quad z - z'$$

$x - x'$ ist aber gleich der Summe der Projektionen von no' und $o'M$ auf der x Axe; oder da $no' = \varrho$ und $o'M = \frac{o'p}{\omega'}$ (p ist der Durchschnitt von no' und Mo) $= \frac{o'p}{\Omega} = \frac{d\varrho}{\Omega} = d\varrho \frac{r}{ds}$, und $y - y'$, $z - z'$ gleich der Summe der Projektionen von no' und $o'M$ auf den y und z Axen sind, so entstehen die Gleichungen:

$$11. \quad x - x' = \alpha\varrho + \mathfrak{a}\, r \frac{d\varrho}{ds}$$

$$y - y' = \beta\varrho + \mathfrak{b}\, r \frac{d\varrho}{ds}$$

$$z - z' = \gamma\varrho + \mathfrak{c}\, r \frac{d\varrho}{ds}$$

Da $nM^2 = no'^2 + o'M^2$ ist, so haben wir für den Halbmesser der Krümmungskugel:

$$12.\quad R^2 = \varrho^2 + r^2 \frac{d\varrho^2}{ds^2}$$

Zu demselben Resultat wäre man auch durch Quadriren der Gleichungen 11 gelangt, da $\alpha a + \beta b + \gamma c = o$ ist.

Durch die Formeln 11 ist der Mittelpunkt, durch 12 der Halbmesser der Krümmungskugel bestimmt.

Bei einer sphärischen Kurve ist R und also auch $\varrho^2 + r^2 \frac{d\varrho^2}{ds^2} = \text{const.}$

$$13.\quad (x - x')\,a + (y - y')\,b + (z - z')\,c = o$$

$$14.\quad (x - x')\,\alpha + (y - y')\,\beta + (z - z')\,\gamma = -\varrho$$

$$15.\quad (x - x')\,a + (y - y')\,b + (z - z')\,c = r\frac{d\varrho}{ds}$$

Zum Behuf der geometrischen Begründung von diesen weiteren Gleichungen ist zu bemerken, daß $\frac{x - x'}{R}$, $\frac{y - y'}{R}$, $\frac{z - z'}{R}$ die Cosinus der drei Winkel sind, welche der Halbmesser der Krümmungskugel $nM = R$ mit den Axen bildet; die Gleichung 13 bedeutet also, daß nM senkrecht auf der Tangente der gegebenen Kurve in n steht; sie behält übrigens ihre Geltung, wo man auch den Punkt x'y'z' in der durch n gehenden Normalebene der gegebenen Kurve annehmen möge, also ist sie die Gleichung dieser Normalebene.

Die linke Seite von 14. mit R dividirt, gibt den Cosinus des Winkels onM an, welcher gleich $\frac{on}{Mn} = \frac{\varrho}{R}$ ist. Diese Gleichung läßt sich auch durch Differenziation aus 13. ableiten, wenn man x'y'z' als konstant ansieht, und berücksichtigt, daß $dx\,.\,a + dy\,.\,b + dz\,.\,c = ds$; $\frac{ds}{\omega} = \varrho$ und $da = \omega\,.\,\alpha$; $db = \omega\,.\,\beta$; $dc = \omega\,.\,\gamma$ (§. 13, 6) ist. Die Gleichungen 13 und 14 beziehen sich also auf zwei unendlich nahe Normalebenen der gegebenen Kurve, mithin auf den Durchschnitt oM derselben, oder auf die Oskulationsaxe.

Wenn man die linke Seite von 15. durch R dividirt, so erhält man den Werth des Cosinus vom Winkel o'Mn, und da dieser Cosinus gleich $\frac{o'M}{Mn}$, ferner nach dem Obigen $o'M = r\frac{d\varrho}{ds}$, $Mn = R$ ist, so wäre hiemit auch diese Relation geometrisch nachgewiesen. Man kann die Gleichung 15 durch Differenziation aus 14. ableiten, indem man wieder x'y'z' als konstant betrachtet, und berücksichtigt, daß $dx\,.\,\alpha + dy\,.\,\beta + dz\,.\,\gamma = o$, $\frac{ds}{\Omega} = r$ und nach §. 13, 8, $d\alpha = \quad a\omega - a\Omega$, $d\beta = - b\omega \quad b\Omega$, $d\gamma = - c\omega - c\Omega$ ist. Die Gleichungen 14 und 15 beziehen sich auf zwei unendlich nahe Oskulationsaxen; da man bei der Differenziation von 14. x'y'z' als konstant angesehen hat, so stellen die Formeln 13, 14, 15 die Coordinaten x'y'z' von M, oder des Durchschnitts von drei auf einander folgenden Normalebenen, oder auch von zwei auf einander folgenden Oskulationsaxen der gegebenen Kurve dar. Weil die Formeln 11 gleichfalls die Coordinaten des Mittelpunkts M der Krümmungskugel angeben, so müssen sie identisch sein mit den genannten Gleichungen, und in der That lassen sie sich aus 13., 14., 15. ableiten durch

Multiplikation dieser Ausdrücke zuerst mit a, α, a; dann mit b, β, b und endlich mit c, γ, c. Da die Axe der Oskulationsebene der gegebenen Kurve zugleich die Tangente der Linie ihrer Krümmungskugelmittelpunkte ist, so haben wir die Formeln:

16. $a = a'; \quad b = b'; \quad c = c'$

Durch die Tangente MM' der letzteren Linie gehen zwei Normalebenen der gegebenen Kurve, nämlich M'Mo'n und M'Mo'n', wo n' die Mitte des dritten Elements m''m''' ist; nun ist der Winkel zwischen diesen beiden Ebenen einerseits der Oskulationswinkel der Linie MM' und andererseits ist dieser Winkel gleich no'n' oder gleich dem Contingenzwinkel bei n, hieraus folgt

17. $\Omega = \omega$

Der Contingenzwinkel einer gewundenen Kurve ist gleich dem Oskulationswinkel in dem entsprechenden Punkt der Linie ihrer Krümmungskugelmittelpunkte.

Dieser Satz läßt sich auch noch auf anderem Wege beweisen; zufolge der Gleichung 9 des §. 13 ist das Quadrat des Winkels zwischen zwei auf einander folgenden Krümmungshalbmessern einer Kurve gleich der Summe der Quadrate des Contingenz- und des Torsionswinkels; da nun die Krümmungshalbmesser in zwei entsprechenden Punkten einer Kurve und der Linie ihrer Krümmungskugelmittelpunkte parallel sind, so sind auch die Winkel zwischen je zwei solchen Krümmungshalbmessern gleich, oder $\omega^2 + \Omega^2 = \omega'^2 + \Omega'^2$.

Nach der Gleichung 8 dieses §. ist aber $\Omega = \omega'$ also auch $\Omega' = \omega$. Es seien $M^0MM'M''$ auf einander folgende Punkte einer gewundenen Kurve; in der Oskulationsebene M^0MM' nehmen wir einen beliebigen Punkt n an und in der zweiten Oskulationsebene MM'M'' den Punkt n' so, daß das Element nn' diese beiden Ebenen senkrecht schneidet; man kann ebenso in der dritten Oskulationsebene den Punkt n'' annehmen, so daß n'n'' die zweite und dritte dieser Ebenen rechtwinklig trifft u. s. f. Dadurch erhält man eine Linie nn'n''.., welche sämmtliche Oskulationsebenen der gegebenen Kurve senkrecht schneidet, und deren Krümmungskugeln ihre Mittelpunkte in M,M',M''.. haben; diese Linie ist vollkommen bestimmt, so bald die Lage eines ihrer Punkte, z. B. von n angegeben ist; da aber dieser Punkt beliebig auf der Oskulationsebene M^0MM' gewählt werden kann, so gibt es unendlich viele Linien, welche die gleiche Eigenschaft haben, wie nn'n''.., nämlich daß M, M', M''.... die Mittelpunkte ihrer Krümmungskugeln sind; alle diese Linien schneiden die Oskulationsebenen der Kurve $M^0MM'M''$.. senkrecht, mithin sind ihre Tangenten in denjenigen Punkten, wo sie eine dieser Oskulationsebenen treffen, unter einander parallel. Vorstehende Betrachtungen führen zu folgenden Sätzen:

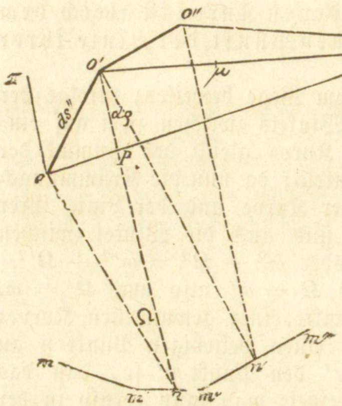
18. Sämmtliche Kurven, welche eine gemeinsame Linie M für die Mittelpunkte ihrer Krümmungskugeln haben, bilden ein System von Linien, deren Tangenten in entsprechenden Punkten unter einander parallel sind. Diese entsprechenden Punkte liegen auf der Oskulationsebene von M. Unter den Linien dieses Systems hat keine mit der andern einen Punkt gemeinschaftlich; denn wenn zwei solche Linien einen Punkt gemein hätten, so würden sie ganz zusammenfallen.

Die beiden Ebenen M^0MM' und MM'M'' haben die Linie MM' gemeinschaftlich; fällt man auf dieselbe die Perpendikel no' und n'o', so ist o' der Mittelpunkt eines Krümmungskreises der Linie nn'n''...; die Mittelpunkte aller Krümmungskreise dieser Linie liegen demnach auf den Tangenten der Kurve $M^0MM'M''$...., woraus sich der Satz ergibt:

19. **Die Linien des in 18. genannten Systems haben die Eigenschaft, daß die Linien ihrer Krümmungskreis-Mittelpunkte auf einer entwickelbaren Fläche liegen, deren Erzeugende die Tangenten der Linie ihrer gemeinsamen Krümmungskugel-Mittelpunkte sind.**

Wir betrachten wieder das Kreisviereck $noo'M$, welches in der durch die Mitte n des Elements $m'm''$ der gegebenen Kurve gelegten Normalebene enthalten ist. M ist der Mittelpunkt der Krümmungskugel, o und o' sind die Mittelpunkte von zwei auf einander folgenden Krümmungskreisen. p ist der Durchschnitt der Diagonalen no' und oM. Auf der Verlängerung von $o'M$ liegt M'; $MM' = ds'$ ist ein Element der Linie der Krümmungskugelmittelpunkte.

Fig. 4 b.



$$o'p = d\varrho\,;\quad op = \frac{\varrho}{r}\,ds = \varrho\Omega\,;\quad oM = r\,\frac{d\varrho}{ds} = \frac{d\varrho}{\Omega} = \varrho'\,\frac{d\varrho}{ds'}$$

$$d\,(oM) = MM' - op = ds' - \frac{\varrho}{r}\,ds \quad \text{mithin}$$

$$20.\quad ds' = \frac{\varrho}{r}\,ds + d\left(r\,\frac{d\varrho}{ds}\right)$$

Die Projektionen von ds' auf den Axen sind dx', dy', dz', also

$$21.\quad dx' = a\left(\frac{\varrho}{r}\,ds + d\left(r\,\frac{d\varrho}{ds}\right)\right);\quad dy' = b\left(\frac{\varrho}{r}\,ds + d\left(r\,\frac{d\varrho}{ds}\right)\right)$$

$$dz' = c\left(\frac{\varrho}{r}\,ds + d\left(r\,\frac{d\varrho}{ds}\right)\right)$$

Die Gleichung 20 kann in folgender Form geschrieben werden:

$$22.\quad \frac{d\left(\varrho'\,\frac{d\varrho}{ds'}\right)}{ds'} + \frac{\varrho}{\varrho'} - 1 = o$$

Die Gleichungen 11 können wir auch so darstellen:

$$23.\quad x = x' + \alpha'\varrho + \mathfrak{a}'\varrho'\,\frac{d\varrho}{ds'}$$

$$y = y' + \beta'\varrho + \mathfrak{b}'\varrho'\,\frac{d\varrho}{ds'}$$

$$z = z' + \gamma'\varrho + c'\varrho' \frac{d\varrho}{ds'}$$

Wir wollen nun annehmen, die Linie MM′M″... sei gegeben, und zwar dadurch, daß ihr Krümmungshalbmesser ϱ' als eine Funktion des Bogens s' derselben ausgedrückt ist (siehe die Gleichung 8 des §. 12). Durch Substitution dieses Werths von ϱ' in 22. erhält man eine Differenzialgleichung mit zwei Variabeln, nämlich s', ϱ und den Ableitungen von ϱ nach s'. Durch Integration dieser Gleichung ergibt sich ϱ als Funktion von s' und von zwei willkürlichen Konstanten. Die Gleichungen 23 lehren hierauf x, y, z kennen, und somit ist die Aufgabe auch analytisch gelöst, die wir oben auf geometrischem Wege behandelten:

24. **Eine gewundene Kurve ist gegeben; es sollen diejenigen Kurven bestimmt werden, welche dieselbe zur Linie ihrer Krümmungskugel-Mittelpunkte haben.**

Indem wir auf die Linie der Krümmungskreis-Mittelpunkte übergehen, möge daran erinnert werden, daß die gleichen Buchstaben gebraucht werden, wie bei der gegebenen Kurve, doch daß diese Buchstaben zur Unterscheidung mit zwei Strichen versehen werden sollen; a'', b'', c''; α'', β'', γ''; a'', b'', c'' bedeuten also der Reihe nach die Cosinus der Winkel, welche die Tangente, die Hauptnormale, die Oskulationsaxe mit den Axen machen; ω'' und Ω'' sind die Contingenz- und Oskulationswinkel, ϱ'' und r'' die Krümmungs- und Torsionshalbmesser. In dem Dreieck $oo'p$ ist $oo' = ds''$ das Element der Kurve der Krümmungsmittelpunkte, also, weil $oo'^2 = o'p^2 + op^2$, so ist nach den oben angegebenen Werthen

25. $$ds''^2 = d\varrho^2 + \frac{\varrho^2 ds^2}{r^2} \quad \text{oder} \quad \frac{ds}{r} = \frac{ds''}{\varrho}\sqrt{1 - \frac{d\varrho}{ds''^2}}$$

26. $$aa'' + bb'' + cc'' = o; \quad \alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' = \frac{d\varrho}{ds''};$$

$$aa'' + bb'' + cc'' = -\sqrt{1 - \left(\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}$$

Die erste der Gleichungen 26 beruht darauf, daß die Elemente $m'm''$ der gegebenen Kurve und oo' der Kurve der Krümmungsmittelpunkte auf einander senkrecht stehen; die linke Seite der zweiten Gleichung gibt den Cosinus des Winkels zwischen der Hauptnormale der ersten Kurve und der Tangente der zweiten an, welcher offenbar $= \frac{o'p}{oo'} = \frac{d\varrho}{ds''}$ ist; die linke Seite der dritten Gleichung gibt den Cosinus des Winkels zwischen der Oskulationsaxe der ersten Kurve und der Tangente der zweiten an, welcher gleich dem Cosinus des Winkels $poo' = \sqrt{1 - \left(\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}$ ist.

27. $$a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = -\frac{\varrho''}{\varrho}\frac{ds}{ds''}\frac{d\varrho}{ds''}$$

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = \sqrt{1 - \left(\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}\sqrt{1 - \left(\frac{\varrho''}{\varrho}\frac{ds}{ds''}\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}$$

$$a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = \frac{d\varrho}{ds''}\sqrt{1 - \left(\frac{\varrho''}{\varrho}\frac{ds}{ds''}\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}$$

$$28.\quad aa'' + bb'' + cc'' = \sqrt{1 - \left(\frac{\varrho''}{\varrho}\,\frac{ds}{ds''}\,\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}$$

$$\alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' = \sqrt{1 - \left(\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}\,\frac{\varrho''}{\varrho}\,\frac{ds}{ds''}\,\frac{d\varrho}{ds''}$$

$$aa'' + bb'' + cc'' = \frac{d\varrho}{ds''}\left(\frac{\varrho''}{\varrho}\,\frac{ds}{ds''}\,\frac{d\varrho}{ds''}\right).$$

Um die geometrische Auslegung dieser Formeln zu erhalten, legen wir durch den Punkt o drei Linien, op, oπ, op parallel der Tangente, Hauptnormale, und Oskulationsaxe der gegebenen Kurve; diese drei Linien stehen auf einander senkrecht, wie auch drei weitere, oo', oπ', op', welche die Tangente, Hauptnormale und Oskulationsaxe der Kurve der Krümmungsmittelpunkte angeben. Die Linie oo' liegt in der Ebene poπ, und nach dem Obigen ist $\frac{d\varrho}{ds''} = \sin poo'$; $\sqrt{1 - \left(\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2} = \cos poo'$.

Die linken Seiten der Gleichungen 27 und 28 stellen nun der Reihe nach die Cosinus der Winkel π'op, π'oπ, π'op; p'op, p'oπ, p'op vor; es handelt sich zunächst darum, die Bedeutung des Ausdrucks $\frac{\varrho''}{\varrho}\,\frac{ds}{ds''}\,\frac{d\varrho}{ds''}$ zu finden; da $\frac{ds}{\varrho} = \omega$ und $\frac{ds''}{\varrho''} = \omega''$ ist, so kann man statt desselben auch setzen $\frac{\omega}{\omega''} \sin poo'$. Betrachtet man aber o' als den Mittelpunkt einer Kugel, welche die drei Linien o'o, o'o'', o'M in dem sphärischen Dreieck oo''μ schneidet, so ist hier Seite oo'' $= \omega''$ Winkel $\mu = \omega$; μo'o'' oder Seite μo'' = Winkel poo'; da nun in einem sphärischen Dreieck die Sinus der Seiten sich verhalten, wie die Sinus der Gegenwinkel, so ist $\sin o : \sin \mu = \sin \mu o'' : \sin oo''$ oder $\sin o = \frac{\sin \mu \,.\, \sin \mu o''}{\sin oo''} = \frac{\omega \,.\, \sin poo'}{\omega''}$. Aber o ist der Winkel zwischen den Ebenen oo'o'' und oo'μ, und da op senkrecht auf der Ebene oo'μ steht, und oπ' senkrecht auf oo' und in der Ebene oo'o'' liegt, so ist $\sin o = -\cos \pi' op$ oder

$$\cos \pi' op = -\frac{\varrho''}{\varrho}\,\frac{ds}{ds''}\,\frac{d\varrho}{ds''}$$

somit wäre die erste der Gleichungen 27 bewiesen.

op steht senkrecht auf der Ebene oo'μ und op' senkrecht auf der Ebene oo'o'', also ist

$$\cos p'op = \cos o = \sqrt{1 - \left(\frac{\varrho''}{\varrho}\,\frac{ds}{ds''}\,\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}$$

wodurch die erste der Gleichungen 28 bewiesen ist.

Ferner haben wir zufolge bekannter Formeln für zwei in einem Punkte sich schneidende rechtwinklige Axensysteme $\cos \pi' o \pi = \cos poo' \,.\, \cos p'op$ $= \sqrt{1 - \left(\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}\;\sqrt{1 - \left(\frac{\varrho''}{\varrho}\,\frac{ds}{ds''}\,\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}$

$$\cos \pi' op = \sin poo' \,.\, \cos p'op = \frac{d\varrho}{ds''}\sqrt{1 - \left(\frac{\varrho''}{\varrho}\,\frac{ds}{ds''}\,\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}$$

$$\cos p'o\pi = \cos poo' \,.\, \sin p'op = \sqrt{1 - \left(\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2} \left(\frac{\varrho''}{\varrho} \frac{ds}{ds''} \frac{d\varrho}{ds''}\right)$$

$$\cos p'op = \sin poo' \,.\, \sin p'op = \frac{d\varrho}{ds''} \left(\frac{\varrho''}{\varrho} \frac{ds}{ds''} \frac{d\varrho}{ds''}\right)$$

Hiemit sind die vier übrigen von den Gleichungen 27 und 28 ebenfalls bewiesen.

Der Zusammenhang zwischen den Gleichungen 26, 27, 28 läßt sich auch auf analytischem Wege zeigen. Durch Differenziation der Formel $aa'' + bb'' + cc'' = o$ erhält man $ada'' + bdb'' + cdc'' + da.a'' + db.b'' + dc.c'' = o$; nun ist

$$da'' = \alpha''.\frac{ds''}{\varrho''};\; db'' = \beta''\frac{ds''}{\varrho''};\; dc'' = \gamma''\frac{ds''}{\varrho''};$$

$$da = \alpha\frac{ds}{\varrho};\; db = \beta\frac{ds}{\varrho};\; dc = \gamma\frac{ds}{\varrho}$$

also mit Berücksichtigung der zweiten unter den Gleichungen 26

$$29.\quad a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = -\frac{\varrho''}{\varrho}\frac{ds}{ds''}\frac{d\varrho}{ds''}$$

Die Differenziation der zweiten Gleichung $\alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' = \frac{d\varrho}{ds''}$ ergibt $\alpha da'' + \beta db'' + \gamma dc'' + d\alpha\,.\,a'' + d\beta\,.\,b'' + d\gamma\,.\,c'' = \frac{d^2\varrho}{ds''}$; nach §. 13, 8 ist

$$d\alpha = -a\frac{ds}{\varrho} - a\sqrt{ds''^2 - d\varrho^2}\,\frac{1}{\varrho};\quad d\beta = -b\frac{ds}{\varrho} - b\sqrt{ds''^2 - d\varrho^2}.\,\frac{1}{\varrho}$$

$$d\gamma = -c\,\frac{ds}{\varrho} - c\,\sqrt{ds''^2 - d\varrho^2}.\,\frac{1}{\varrho}\ \text{mithin}$$

$$30.\quad \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = \varrho''\left(\frac{d^2\varrho}{ds''^2} - \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho^2}{ds''^2}\right)$$

Die dritte Gleichung $aa'' + bb'' + cc'' = -\sqrt{1 - \left(\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}$ gibt endlich beim Differenziiren

$$ada'' + bdb'' + cdc'' + da.a'' + db.b'' + dc.c'' = \frac{\frac{d\varrho}{ds''}\,\frac{d^2\varrho}{ds''^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}}$$

Mit Berücksichtigung der Formeln 7 des §. 22

$$da = \alpha\,\frac{\sqrt{ds''^2 - d\varrho^2}}{\varrho};\quad db = \beta\,\frac{\sqrt{ds''^2 - d\varrho^2}}{\varrho};\ dc = \gamma\,\frac{\sqrt{ds''^2 - d\varrho^2}}{\varrho},$$

der oben angegebenen Werthe von da'', db'', dc'' und der Gleichung $\alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' = \frac{d\varrho}{ds''}$ erhalten wir

$$31.\quad a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = \varrho''\,\frac{\frac{d\varrho}{ds''}}{\sqrt{1 - \left(\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}}\left(\frac{d^2\varrho}{ds''^2} - \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho^2}{ds''^2}\right)$$

Wenn man 29, 30 und 31 quadrirt und hierauf die Resultate addirt, so findet man

$$32. \quad \frac{\varrho''}{\sqrt{1-\left(\frac{d\varrho}{ds''^2}\right)^2}}\left(\frac{d^2\varrho}{ds''^2}-\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho}\,\frac{d\varrho^2}{ds''^2}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{\varrho''}{\varrho}\,\frac{ds}{ds''}\,\frac{d\varrho}{ds''}\right)^2}$$

Durch diese Gleichung werden die Formeln 29, 30 und 31 identisch mit 27.

Die Quadrate von $a''a + b''b + c''c$; $a''a + b''b + c''c$; $a''\alpha + b''\beta + c''\gamma$ zu den Quadraten der ersten, zweiten, dritten unter den Gleichungen 26 und 27 addirt, geben Werthe, welche gleich der Einheit sind, woraus sofort die Gleichungen 28 hervorgehen.

Wir setzen der Kürze wegen $\frac{d^2\varrho}{ds''^2}+\frac{1}{\varrho}\,\frac{d\varrho^2}{ds''^2}-\frac{1}{\varrho}=V$, so erhalten wir durch Multiplikation der letzten Gleichungen in 26, 27 und 28 mit a'', α'', a''; b'', β'', b''; c'', γ'', c''

$$33. \quad \alpha=\frac{x''-x}{\varrho}=\frac{d\varrho}{ds''}a''+\varrho''V\alpha''+\sqrt{1-\frac{d\varrho^2}{ds''^2}-\varrho''^2V^2}\,.\,a''$$

$$\beta=\frac{y''-y}{\varrho}=\frac{d\varrho}{ds''}b''+\varrho''V\beta''+\sqrt{1-\frac{d\varrho^2}{ds''^2}-\varrho''^2V^2}\,.\,b''$$

$$\gamma=\frac{z''-z}{\varrho}=\frac{d\varrho}{ds''}c''+\varrho''V\gamma''+\sqrt{1-\frac{d\varrho^2}{ds''^2}-\varrho''^2V^2}\,.\,c''$$

Durch Differenziation von 27. erhält man ferner

$$34. \quad aa''+bb''+cc''+\frac{r''\varrho''^2V}{\sqrt{1-\frac{d\varrho^2}{ds''^2}}\sqrt{1-\frac{d\varrho^2}{ds''^2}-\varrho''^2V^2}}=U$$

$$\alpha a''+\beta b''+\gamma c''=-\frac{r''\varrho''\frac{d\varrho}{ds''}}{\sqrt{1-\frac{d\varrho^2}{ds''^2}}}U$$

$$aa''+bb''+cc''=-r''\varrho''U$$

Zur Abkürzung wurde gesetzt

$$U=\frac{dV}{ds''}+\frac{V^2}{\frac{d\varrho}{ds''}\left(1-\frac{d\varrho^2}{ds''^2}\right)}+\left(\frac{1}{\varrho}\,\frac{d\varrho}{ds''}+\frac{1}{\varrho}\,\frac{d\varrho''}{ds''}\right)V-\frac{1}{\varrho''^2}\,\frac{1-\frac{d\varrho^2}{ds''^2}}{\frac{d\varrho}{ds''}}$$

Durch Vergleichung von 34. und 28 ergibt sich

$$34. \quad U+\frac{1}{r''\varrho''}\sqrt{1-\frac{d\varrho^2}{ds''^2}-\varrho^2V^2}=o$$

(Journal v. Liouville, XVIII., S. 193.) Serret: Sur les courbes à double courbure.

Die Gleichung 35 enthält die analytische Auflösung der Aufgabe:

Eine gewundene Kurve ist gegeben; es soll diejenige Kurve bestimmt werden, von welcher sie die Linie der Krümmungskreismittelpunkte ist. Bei der gegebenen Kurve müssen die Hauptkrümmungshalbmesser ϱ'' und Torsionshalbmesser r'' als Funktion des Bogens s'' gegeben sein. Setzt man diese Werthe in 34 ein, so erhält man eine Gleichung, welche die Variabelen ϱ, s'' und die erste und zweite Ableitung von ϱ nach s'' enthält. Durch Integration dieser Differenzialgleichung ergibt sich sofort ϱ als Funktion von s''. Es mag hier noch erwähnt werden, wie man die Kurven erhält, bei welchen ϱ eine gegebene Funktion von s ist. Wir haben oben für ϱ den Werth $\frac{ds}{\sqrt{\left(d\,\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\,\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\,\frac{dz}{ds}\right)^2}}$ gefunden, und durch Einführung der Winkel $\frac{dx}{ds}=\cos\alpha$, $\frac{dy}{ds}=\sin\alpha\,.\,\sin i$, $\frac{dz}{ds}=\sin\alpha\,.\,\cos i$ erhielten wir die Gleichung $\omega=\frac{ds}{\varrho}=\sqrt{d\alpha^2+\sin^2\alpha\,di^2}$ oder $\frac{ds^2}{\varrho^2}=d\alpha^2+\sin^2\alpha\,di^2$; wenn nun $\varphi(s)$ eine vorläufig unbestimmte Funktion des Bogens s ist, so kann man setzen $d\alpha=\sin\varphi(s)\,\frac{ds}{\varrho}$, $\sin\alpha\,di=\cos\varphi(s)\,\frac{ds}{\varrho}$; durch Spezialisirung der Funktion $\varphi(s)$ erhält man alle diejenigen Kurven, welche der Bedingung genügen $s=f(\varrho)$. Durch Integration erhält man die Winkel α und i und sofort auch die Werthe von $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ in s ausgedrückt; eine weitere Integration führt auf die Werthe von x, y, z, ebenfalls durch s gegeben. Die Elimination von s aus diesen drei Gleichungen führt sofort auf zwei Gleichungen, welche diejenigen der Kurve sind. Ein ganz ähnliches Verfahren läßt sich bei den Kurven in Anwendung bringen, wo der Torsionshalbmesser r eine gegebene Funktion des Bogens sein soll. (Monge, application de l'analyse à la géométrie, 5me éd. IIme note de M. Liouville, page 549.)

§. 15. Die Linien auf den Flächen.

Auf einer Fläche ist eine Linie gegeben, von welcher $m\,m'\,m''$ drei aufeinander folgende Punkte sind. Die Formeln 11 des §. 12 geben uns nachstehende Werthe für die Cosinus der Winkel, welche die Tangente $(m\,m')$, die Hauptnormale (Halbirungslinie des Winkels $m\,m'\,m''$) und die Axe der Oskulationsebene (Senkrechte der Ebene $m\,m'\,m''$) mit den Coordinatenaxen bilden:

$$1.\quad a=\frac{dx}{ds};\quad b=\frac{dy}{ds};\quad c=\frac{dz}{ds}$$

$$2.\quad \alpha=\frac{d\,\frac{dx}{ds}}{\omega};\quad \beta=\frac{d\,\frac{dy}{ds}}{\omega};\quad \gamma=\frac{d\,\frac{dz}{ds}}{\omega}$$

$$3.\quad \mathfrak{a}=\frac{dy\,d^2z-d^2y\,dz}{\omega\,.\,ds^2};\quad \mathfrak{b}=\frac{dz\,d^2x-d^2z\,dx}{\omega\,.\,ds^2};\quad \mathfrak{c}=\frac{dx\,d^2y-d^2x\,dy}{\omega\,.\,ds^2}$$

ω ist der Sinus des Contingenzwinkels $m\,m'\,m''$ und gegeben durch die Gleichungen 5 und 6 des §. 12. Wenn wir die Differenziation von 2. ausführen, so erhalten wir

$$4.\quad \alpha=\frac{ds\,d^2x-dx\,d^2s}{\omega\,.\,ds^2},\quad \beta=\frac{ds\,d^2y-dy\,d^2s}{\omega\,.\,ds^2},\quad \gamma=\frac{ds\,d^2z-dz\,d^2s}{\omega\,.\,ds^2}$$

Die Cosinus der Winkel, welche das Element $m'm''$ oder die nächstfolgende Tangente mit den Axen bildet, sind

$$a + da = \frac{dx}{ds} + d\,\frac{dx}{ds}\,;\quad b + db = \frac{dy}{ds} + d\,\frac{dy}{ds}\,;\quad c + dc = \frac{dz}{ds} + d\,\frac{dz}{ds}$$

oder

$$5.\quad a + da = \left(1 - \frac{d^2s}{ds}\right)\frac{dx}{ds} + \frac{d^2x}{ds};\quad b + db = \left(1 - \frac{d^2s}{ds}\right)\frac{dy}{ds} + \frac{d^2y}{ds}$$

$$c + dc = \left(1 - \frac{d^2s}{ds}\right)\frac{dx}{ds} + \frac{d^2x}{ds}$$

Aus der Gleichung der Fläche $f(x, y, z) = o$ erhält man durch Differenziation

$$6.\quad Xdx + Ydy + Zdz = o$$

Die Cosinus der Winkel, welche die Flächennormale im Punkt m' mit den Axen macht, sind:

$$7.\quad \frac{X}{K}, \frac{Y}{K}, \frac{Z}{K}$$

wo der Kürze halber $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = K$ gesetzt wird.

Die Gleichung 6 bedeutet, daß der Cosinus des Winkels zwischen der Flächennormale und dem Element mm' gleich Null, oder daß dieser Winkel ein Rechter ist. Sie ist mithin die Gleichung der Tangentialebene der Fläche. Durch Differenziation von 7. erhält man für die Cosinus der Winkel, welche die nächstfolgende Flächennormale im Punkt m'' mit den Axen macht:

$$8.\quad \frac{K^2 - XdX - YdY - ZdZ}{K^3}\,X + \frac{dX}{K};\quad \frac{K^2 - XdX - YdY - ZdZ}{K^3}\,Y + \frac{dY}{K}$$

$$\frac{K^2 - XdX - YdY - ZdZ}{K^3}\,Z + \frac{dZ}{K}$$

Durch bloße Anwendung der Cosinusformel finden wir nun sogleich die Differenzialgleichungen von verschiedenen Linien auf den Flächen.

Wir bezeichnen den Winkel zwischen der Tangentialebene der Fläche und der Oskulationsebene der Kurve $mm'm''$ mit φ, so folgt aus 3. und 7.

$$9.\ \cos\varphi = \frac{1}{\omega . ds^2 . K}\left\{(dy\,d^2z - d^2y\,dz)X + (dz\,d^2x - d^2z\,dx)Y + (dx\,d^2y - d^2x\,dy)Z\right\}$$

Setzt man hier $\varphi = \text{const.}$, so erhält man die Gleichung derjenigen Linien auf den Flächen, bei welchen der Winkel zwischen der Oskulationsebene und der Tangentialebene der Fläche konstant ist; in dem speziellen Fall, wo dieser Winkel ein Rechter ist, ergibt sich

$$10.\quad (dy\,d^2z - d^2y\,dz)\,X + (dz\,d^2x - d^2z\,dx)\,Y + (dx\,d^2y - d^2x\,dy)\,Z = o$$

oder

$$11.\quad (Yd^2z - Zd^2y)\,dx + (Zd^2x - Xd^2z)\,dy + (Xd^2y - Yd^2x)\,dz = o$$

oder auch

$$12.\quad (Ydz - Zdy)\,d^2x + (Zdx - Xdz)\,d^2y + (Xdy - Ydx)\,d^2z = o$$

Alle diese drei Gleichungen, welche identisch sind, beziehen sich auf die geodätischen Linien, deren Oskulationsebenen senkrecht auf der Fläche stehen. Um die geometrische Bedeutung von 11. und 12. zu finden, benützen wir die Formeln 31 des §. 1. Die Cosinus der Winkel, welche die Axe der durch die Flächennormale und Hauptnormale bestimmten Ebene mit den Coordinatenaxen macht, sind

$$\frac{Y\gamma - Z\beta}{K \,.\, \varphi'}, \quad \frac{Z\alpha - X\gamma}{K \,.\, \varphi'}, \quad \frac{X\beta - Y\alpha}{K \,.\, \varphi'}$$

φ' ist der Sinus des Winkels zwischen diesen beiden Normalen, und da $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ die Cosinus der Winkel sind, welche das Linienelement mm′ mit den Axen bildet, so ist nach der Cosinusformel

$$\cos \psi = \frac{1}{K \,.\, \varphi' \, ds} \left\{ (Y\gamma - Z\beta)\, dx + (Z\alpha - X\gamma)\, dy + (X\beta - Y\alpha)\, dz \right\}$$

indem wir ψ den Winkel zwischen der Axe jener durch die Flächennormale und Hauptnormale der Kurve bestimmten Ebene und zwischen mm′ nennen. Da die Quadratsumme der drei Cosinus einer Geraden gleich Eins sein muß, so haben wir zur Bestimmung von φ'

$$\varphi' = \frac{1}{K} \sqrt{(Y\gamma - Z\beta)^2 + (Z\alpha - X\gamma)^2 + (X\beta - Y\alpha)^2}$$

Wenn man aber im Werthe von $\cos \psi$ mit Hülfe von 4. den Ausdruck in der Klammer entwickelt, so ergibt sich mit Rücksicht auf die identische Gleichung: $(Ydz - Zdy)\, dx + (Zdx - Xdz)\, dy + (Xdy - Ydx)\, dz = o$

$$13. \quad \cos \psi = \frac{1}{\omega . K . \varphi' . ds^2} \left\{ (Yd^2z - Zd^2y)dx + (Zd^2x - Xd^2z)dy + (Xd^2y - Yd^2x)\, dz \right\}$$

Setzt man hier $\psi =$ const., so hat man die Gleichung solcher Linien auf den Flächen, bei welchen der Winkel zwischen ihrer Tangente und der durch die Flächennormale und Hauptnormale der Kurve bestimmten Ebene konstant ist. In dem speziellen Fall, wo dieser Winkel gleich Null Grad, also $\cos \psi = o$ ist, erhält man die Gleichung 11, deren geometrische Bedeutung somit darin besteht, daß die Tangente der geodätischen Linie in der Ebene der Flächennormale und Hauptnormale enthalten ist. Die Gleichung 13 vereinfacht sich, wenn man annimmt, daß die Kurve in gleiche Elemente eingetheilt ist, also $ds =$ const., $d^2s = o$, dann hat man für φ' den Werth

$$\varphi' = \frac{1}{K . \omega . ds} \sqrt{(Yd^2z - Zd^2y)^2 + (Zd^2x - Xd^2z)^2 + (Xd^2y - Yd^2x)^2}$$

$\omega = \frac{1}{ds} \sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}$, somit

$$14. \quad \cos \psi = \frac{(Yd^2z - Zd^2y)\, dx + (Zd^2x - Xd^2z)\, dy + (Xd^2y - Yd^2x)\, dz}{ds \sqrt{(Yd^2z - Zd^2y)^2 + (Zd^2x - Xd^2z)^2 + (Xd^2y - Yd^2x)^2}}$$

Die Cosinus der Winkel zwischen der Axe der durch die Flächennormale und das Element mm′ der Linie gehenden Ebene und zwischen den Coordinatenaxen sind nach 31. §. 1

$$15. \quad \frac{Ydz - Zdy}{K \,.\, ds}, \quad \frac{Zdx - Xdz}{K \,.\, ds}, \quad \frac{Xdy - Ydx}{K \,.\, ds}$$

Bezeichnen wir den Winkel zwischen dieser Axe und der Hauptnormale der Kurve mit ψ', so ist nach der Cosinusformel

$$\cos \psi' = \frac{1}{K \,.\, ds} \left\{ (Ydz - Zdy)\, \alpha + (Zdx - Xdz)\, \beta + (Xdy - Ydx)\, \gamma \right\}$$

Ersetzen wir hier α, β, γ durch ihre Werthe in 4., so finden wir mit Berücksichtigung der Identität

$$(Ydz - Zdy)\, dx + (Zdx - Xdz)\, dy + (Xdy - Ydx)\, dz = o$$

16. $\cos\psi' = \frac{1}{K.\omega.ds^2}\left\{(Ydz - Zdy)\,d^2x + (Zdx - Xdz)d^2y + (Xdy - Ydx)\,d^2z\right\}$

Setzt man hier $\psi' = \text{const.}$, so ergibt sich die Gleichung derjenigen Linien auf den Flächen, wo der Winkel zwischen der Hauptnormale der Kurve und der durch ihre Tangente und die Flächennormale gehenden Ebene konstant ist. Wenn die Konstante gleich 90^0 oder $\cos\psi' = o$ ist, so kommt man auf die Formel 12 zurück, welche beweist, daß bei den geodätischen Linien die Hauptnormale in der durch die Tangente gelegten Normalebene der Fläche liegt.

Für den Cosinus des Winkels zwischen der Axe der durch die Tangente und die Flächennormale gelegten Ebene und dem folgenden Element $m'm''$ der Kurve erhält man nach der Cosinusformel aus 5. und mit Berücksichtigung der so eben angeführten identischen Gleichung

$$\frac{1}{K.ds^2}\left\{(Ydz - Zdy)\,d^2x + (Zdx - Xdz)\,d^2y + (Xdy - Ydx)\,d^2z\right\}.$$

Ist diese Größe gleich Null, so ergibt sich wieder die Formel 12, woraus hervorgeht, daß bei den geodätischen Linien zwei auf einander folgende Elemente und die Flächennormale in einer Ebene liegen.

Aus 8. und 15. erhalten wir nach der Cosinusformel und mit Rücksicht auf die Gleichung

$$(Ydz - Zdy)\,X + (Zdx - Xdz)\,Y + (Xdy - Ydx)\,Z = o$$

17. $\cos\omega' = \frac{1}{K^2.ds}\left\{(Ydz - Zdy)\,dX + (Zdx - Xdz)\,dY + (Xdy - Ydx)\,dZ\right\}$

Hier ist ω' der unendlich wenig von einem Rechten abweichende Winkel zwischen der Axe der Ebene, welche durch das Element mm' und die Flächennormale in m' geht, und zwischen der nächstfolgenden Flächennormale, deren Fußpunkt m'' ist. Auch hier könnte man die unendlich kleine Größe $\cos\omega'$ gleich const. setzen, und erhielte dadurch die Differenzialgleichung derjenigen Linien auf den Flächen, bei welchen der Winkel ω' konstant ist, wie z. B. beim Kreis der Contingenzwinkel, und bei der Schraubenlinie Contingenz- und Torsionswinkel, welche beide gleichfalls unendlich klein, konstant sind. Wenn $\cos\omega'$ = Null ist, so hat man statt 17.

18. $(Ydz - Zdy)\,dX + (Zdx - Xdz)\,dY + (Xdy - Ydx)\,dZ = o$

oder

19. $(YdZ - ZdY)\,dx + (ZdX - XdZ)\,dy + (XdY - Ydx)\,dz = o$

oder auch

20. $(dYdz - dZdy)\,X + (dZdx - dXdz)\,Y + (dXdy - dYdx)\,Z = o$

Die beiden letzten Gleichungen folgen direkt aus 18., wie man sich sehr leicht überzeugen kann. 18 ist die Differenzialgleichung der Krümmungslinien, wo $\omega' = 90$ Grad ist, und mithin die durch eine Tangente der Linie und die Normale der Fläche gelegte Ebene auch die nächstfolgende Normale enthält, wo also je zwei auf einander folgende Flächennormalen sich schneiden.

Um die geometrische Bedeutung von 19. und 20. zu finden, benützen wir wieder die Formeln 31 des §. 1. Bezeichnen wir die drei in Gleichung 8 dargestellten Cosinus mit α', β', γ', so sind

$$\frac{Y\gamma' - Z\beta'}{K.w},\ \frac{Z\alpha' - X\gamma'}{K.w},\ \frac{X\beta' - Y\alpha'}{K.w}$$

die Cosinus der Winkel, welche die Axe derjenigen Ebene mit den Coordinatenaxen bildet, die den beiden unendlich nahen Flächennormalen in m′ und m″ parallel ist. w ist der Winkel zwischen diesen Normalen, und

$$w = \sin w = \frac{1}{K} \sqrt{(Y\gamma' - Z\beta')^2 + (Z\alpha' - X\gamma')^2 + (X\beta' - Y\alpha')^2}$$

Nach der Cosinusformel erhält man für den unendlich wenig von 90° abweichenden Winkel zwischen der genannten Axe und dem Element m′m″

$$\cos W = \frac{1}{K.wds} \left\{ (Y\gamma' - Z\beta')\, dx + (Z\alpha' - X\gamma')\, dy + (X\beta' - Y\alpha')\, dz \right\}$$

Wenn man den Ausdruck in der Klammer entwickelt, und in Betracht zieht, daß die Coefficienten von X, Y, Z in der Gleichung 8 verschwinden, so erhält man

$$21.\quad \cos W = \frac{1}{K^2.wds} \left\{ (YdZ - ZdY)\, dx + (ZdX - XdZ)\, dy + (XdY - YdX)\, dz \right\}$$

Wenn man hier $W = \text{const.}$ setzt, so folgt hieraus die Gleichung der Linie, wo der Winkel zwischen der Tangente und einer mit zwei unendlich nahen Flächennormalen parallelen Ebene konstant ist. Ist dieser Winkel gleich Null, also auch $\cos W$, so ergibt sich die Formel 20, welche ebenfalls zeigt, daß zwei solche Flächennormalen und die Tangente der Krümmungslinie in einer Ebene liegen.

$$\frac{dy\gamma' - dz\beta'}{ds.\sin w'},\quad \frac{dz\alpha' - dx\gamma'}{ds.\sin w'},\quad \frac{dx\beta' - dy\alpha'}{ds.\sin w'}$$

sind die Cosinus der Winkel, welche die Axe derjenigen Ebene mit den Coordinatenaxen bildet, die mit dem Element mm′ und der folgenden Flächennormale in m″ parallel ist. $\sin w'$ ist unendlich wenig von 1 verschieden und kann also weggelassen werden. Der Winkel zwischen dieser Axe und der ersten Flächennormale in m′ sei W′, so ist

$$\cos W' = \frac{1}{K.ds} \left\{ (dy\gamma' - dz\beta')\, X + (dz\alpha' - dx\gamma')\, Y + (dx\beta' - dy\alpha')\, Z \right\}$$

Mittelst der Gleichung 8 kann man hieraus ableiten, mit Berücksichtigung der identischen Gleichung

$$(dyZ - dzY)\, X + (dzX - dxZ)\, Y + (dxY - dyX)\, Z = o$$

$$22.\quad \cos W' = \frac{1}{K^2.ds} \left\{ (dydZ - dzdY)\, X + (dzdX - dxdZ)\, Y + (dxdY - dydX)\, Z \right\}$$

Wenn hier $W' = \text{const.}$ gesetzt wird, so hat man die Gleichung der Linien, wo der unendlich kleine Winkel konstant ist, welche die Flächennormale mit der Ebene bildet, die parallel der Tangente und der unmittelbar folgenden Normale ist. Ist dieser Winkel gleich Null, so ist $\cos W' = o$, und es ergibt sich die Formel 20 für die Krümmungslinien.

Die Gleichungen 12 und 18 für geodätische und Krümmungslinien geben mit einander multiplicirt folgende merkwürdige Relation:

$$23.\quad \frac{\left\{(Ydz - Zdy)\, d^2x + (Zdx - Xdz)\, d^2y + (Xdy - Ydx)\, d^2z\right\}}{\left\{(Ydz - Zdy)\, dX + (Zdx - Xdz)\, dY + (Xdy - Ydx)\, dZ\right\}}$$

$$= \frac{dXd^2x + dYd^2y + dZd^2z}{dXdx + dYdy + dZdz} + \frac{Xdx + Ydy + Zdz}{X^2 + Y^2 + Z^2} - \frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Der Beweis dieser Gleichung beruht auf der Formel 42 des §. 1. Wir setzen nämlich

$$J = (Ydz - Zdy)\,d^2x + (Zdx - Xdz)\,d^2y + (Xdy - Ydx)\,d^2z = o$$
$$J' = (Ydz - Zdy)\,dX + (Zdx - Xdz)\,dY + (Xdy - Ydx)\,dZ = o$$

ſomit iſt nach den in 42. §. 1 gebrauchten Buchſtaben:

$$a = d^2x,\ b = d^2y,\ c = d^2z;\ \alpha = \alpha' = X,\ \beta = \beta' = Y,\ \gamma = \gamma' = Z$$
$$a' = dX,\ b' = dY,\ c' = dZ;\ \mathfrak{a} = \mathfrak{a}' = dx,\ \mathfrak{b} = \mathfrak{b}' = dy,\ \mathfrak{c} = \mathfrak{c}' = dz$$

Die Gleichung der Tangentialebene iſt $Xdx + Ydy + Zdz = o$, woraus durch Differenziation entſteht $Xd^2x + Yd^2y + Zd^2z = -(dXdx + dYdy + dZdz)$; mit Rückſicht auf dieſe Werthe haben wir ferner

$$\begin{aligned}
L &= aa' + bb' + cc' = dXd^2x + dYd^2y + dZd^2z\\
M &= \alpha a' + \beta b' + \gamma c' = XdX + YdY + ZdZ\\
N &= \mathfrak{a}a' + \mathfrak{b}b' + \mathfrak{c}c' = dXdx + dYdy + dZdz\\
L' &= a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = -(dXdx + dYdy + dZdz)\\
M' &= \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = X^2 + Y^2 + Z^2\\
N' &= \mathfrak{a}\alpha' + \mathfrak{b}\beta' + \mathfrak{c}\gamma' = Xdx + Ydy + Zdz = o\\
L'' &= a\mathfrak{a}' + b\mathfrak{b}' + c\mathfrak{c}' = d^2xdx + d^2ydy + d^2zdz\\
M'' &= \alpha\mathfrak{a}' + \beta\mathfrak{b}' + \gamma\mathfrak{c}' = Xdx + Ydy + Zdz = o\\
N'' &= \mathfrak{a}\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}\mathfrak{b}' + \mathfrak{c}\mathfrak{c}' = dx^2 + dy^2 + dz^2;
\end{aligned}$$
ſomit iſt

$$\begin{aligned}
&L(M'N'' - M''N') + M(N'L'' - N''L') + N(L'M'' - L''M') = JJ'\\
&= LM'N'' - MN''L' - NL''M'\\
&= (dXd^2x + dYd^2y + dZd^2z)(X^2 + Y^2 + Z^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)\\
&+ (XdX + YdY + ZdZ)(dx^2 + dy^2 + dz^2)(dXdx + dYdy + dZdz)\\
&- (dXdx + dYdy + dZdz)(d^2xdx + d^2ydy + d^2zdz)(X^2 + Y^2 + Z^2)
\end{aligned}$$

Dividirt man hier mit $(dXdx + dYdy + dZdz)(X^2 + Y^2 + Z^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, ſo erhält man, da $J \cdot J' = o$ iſt, die Gleichung

$$24.\quad \frac{dXd^2x + dYd^2y + dZd^2z}{dXdx + dYdy + dZdz} + \frac{Xdx + Ydy + Zdz}{X^2 + Y^2 + Z^2} - \frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = o$$

(Joachimsthal: de curvis curvaturae et lineis brevissimis in superficiebus secundi gradus, Crelle's Journal XXVI., 155.)

Ehe wir dieſe Relation näher betrachten, mögen noch einige weitere Formeln für geodätiſche Linien angegeben werden: Im Eingang des §. 12 haben wir gefunden, daß, wenn man zwei auf einander folgende Elemente mm' und $m'm''$ einer Linie nach t und t' verlängert, $m't = m't' = 1$, die Projektionen von tt' auf den Axen gleich $d\frac{dx}{ds}$, $d\frac{dy}{ds}$, $d\frac{dz}{ds}$ ſind. Nun iſt bei geodätiſchen Linien tt' parallel der Flächennormale in m', mithin ſind dieſe Größen proportional den Coſinus der Winkel, welche die Normale mit den Axen bildet; wir haben ſomit die Gleichungen für geodätiſche Linien

$$25.\quad d\frac{dx}{ds} : d\frac{dy}{ds} : d\frac{dz}{ds} = -\frac{p}{k} : -\frac{q}{k} : \frac{1}{k} = -p : -q : 1 \quad (§.\ 1,\ 2)$$
$$d\frac{dx}{ds} : d\frac{dy}{ds} : d\frac{dz}{ds} = X : Y : Z \quad (§.\ 11)$$

je nachdem die Gleichung der Fläche die Form $z = f(x, y)$ oder $f(x, y, z) = o$ hat. Ferner iſt

$$\frac{d\frac{dx}{ds}}{tt'} = X,\quad \frac{d\frac{dy}{ds}}{tt'} = Y,\quad \frac{d\frac{dz}{ds}}{tt'} = Z;$$

und da $u' = \frac{ds}{\varrho}$ (§. 12, 7), so gelten auch nachstehende Formeln für geodätische Linien:

$$26.\quad d\,\frac{dx}{ds}\,.\,\varrho = X\,.\,ds\,,\ d\,\frac{dy}{ds}\,.\,\varrho = Y\,.\,ds\,,\ d\,\frac{dz}{ds}\,.\,\varrho = Z\,.\,ds$$

(Gauss: disquisitiones generales circa superficies curvas.)

ϱ ist der Krümmungshalbmesser der Linie, welcher in die Richtung der Flächennormale fällt, und der also zugleich Krümmungshalbmesser eines Normalschnitts der Fläche ist.

Die Euler'sche Gleichung über die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte (§. 6)

$$27.\quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R}\cos^2 a + \frac{1}{R'}\sin^2 a$$

kann ebenfalls als Gleichung der geodätischen Linien auf den Flächen angesehen werden.

Der Krümmungshalbmesser ϱ dieser Linien ist hier durch drei Variabeln, R, R' und a gegeben. R und R' sind die Halbmesser der größten und kleinsten Krümmung der Fläche, und a ist der Winkel, welchen die Tangente der geodätischen Linie mit der Tangente einer Krümmungslinie macht. Man ersieht aus 27., daß bei gleichartig gekrümmten Flächen, wo R und R' positiv sind, der Krümmungshalbmesser ϱ der geodätischen Linien immer zwischen R und R' eingeschlossen ist, und also nie gleich unendlich werden kann. Bei ungleichartig gekrümmten Flächen dagegen wird $\frac{1}{\varrho}$ = Null, oder es liegen drei auf einander folgende Punkte der geodätischen Linie in einer Geraden, wenn dieselbe eine Krümmungslinie unter dem Winkel

$$28.\quad \operatorname{tg} a = \pm\sqrt{\frac{R'}{R}}$$

schneidet. Bei entwickelbaren Flächen endlich ist R' gleich unendlich, also nimmt hier die Gleichung der geodätischen Linien folgende einfache Form an:

$$29.\quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\sin^2 a}{R}$$

Die Gleichung aller Linien auf den Flächen, ohne Unterschied, ist die nachstehende:

$$30.\quad \frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\sin\varphi}\left\{\frac{1}{R}\cos^2 a + \frac{1}{R'}\sin^2 a\right\}$$

Hier ist der Krümmungshalbmesser ϱ' der Linie durch vier Variabeln ausgedrückt: R und R' sind die Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche, a ist der Winkel, den die Tangente der Linie mit derjenigen Krümmungslinie bildet, welcher R entspricht, und φ ist, wie oben (Gleichung 9) der Winkel zwischen der Oskulationsebene der Linie und der Tangentialebene der Fläche. Der Beweis beruht ganz einfach auf der Vergleichung der Formeln 27 und 30, welche zu dem Theorem von Meunier (§. 8)

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho}\sin\varphi$$

führt. Die Gleichung 30 wird in jedem einzelnen Fall dadurch aufgelöst, daß zur Spezialisirung der Kurve eine der fünf Variabeln ϱ, φ, R, R', a als Funktion der andern gegeben ist; nehmen wir z. B. an, es sei φ als Funktion von ϱ' gegeben, so ist

$$31.\quad f(\varrho') = \frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}$$

die Differenzialgleichung aller derjenigen Linien auf den Flächen, bei welchen der Winkel zwischen der Oskulationsebene und der Tangentialebene eine gegebene Funktion des Krümmungshalbmessers ist. In dem spezielleren Fall, wo $\varphi = \text{const.}$ ist, hat man

$$32.\quad \frac{1}{\varrho'} = \text{const.}\left(\frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R_,}\right)$$

als Gleichung der Linien, wo der Winkel zwischen Oskulationsebene und Tangentialebene konstant ist. Wird die Konstante gleich 1 angenommen, so ist dieser Winkel gleich 90 Grad, und man erhält die Gleichung 27 für geodätische Linien.

Auf die Gleichung 30 finden ähnliche Schlüsse Anwendung wie auf 27. Bei gleichartig gekrümmten Flächen kann $\frac{1}{\varrho'}$ nicht Null werden, also können hier nie drei unendlich nahe Punkte einer Linie in einer Geraden liegen. Bei ungleichartig gekrümmten Flächen aber ist dieß der Fall, so oft die Gleichung befriedigt ist

$$\operatorname{tg} a = \pm\sqrt{\frac{R'}{R}}$$

Alle Linien endlich auf entwickelbaren Flächen entsprechen der Relation:

$$33.\quad \varrho' = \frac{\sin\varphi \,.\, R}{\cos^2 a}$$

Wir kehren nun zu der Gleichung 24

$$J\,.\,J' = \frac{dXd^2x + dYd^2y + dZd^2z}{dXdx + dYdy + dZdz} + \frac{Xdx + Ydy + Zdz}{X^2 + Y^2 + Z^2} + \frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = o$$

zurück. $J = o$ ist die Gleichung der geodätischen und $J' = o$ diejenige der Krümmungslinien. Wir wollen annehmen

$$34.\quad F(p, p' \ldots) = C$$

sei ein Integral dieser Gleichung; $p, p' \ldots$ sind gewisse Parameter, z. B. Durchmesser der Fläche, welche mit den Tangenten oder den konjugirten Tangenten der Linie, auf welche die Formel 34 Bezug hat, parallel sind; Krümmungshalbmesser von — durch die genannten Tangenten bestimmten — Normalschnitten der Fläche, Perpendikel, die vom Mittelpunkt auf diese Tangenten oder auf die Tangentialebenen gefällt sind, Poldistanzen der Elemente oder der konjugirten Elemente der Linien §. 7. C ist eine Konstante; da die Gleichung 34 sowohl auf die Krümmungslinien als auch auf die geodätischen Linien Anwendung findet, so wird in sehr vielen Fällen, namentlich in allen solchen, wo keine andern Parameter, als die angeführten, vorkommen, die Konstante C für alle geodätischen Linien, welche eine Krümmungslinie der Fläche berühren, denselben Werth haben. Wir können unter dieser bestimmten Voraussetzung verschiedene Gattungen von Flächen unterscheiden.

a. Flächen, wo jeder Krümmungslinie ein besonderer, von den andern verschiedener, Werth von C zukommt. Hier kann eine geodätische Linie nur eine Krümmungslinie berühren, alle andern, mit welchen sie zusammentrifft, wird sie schneiden. Hat eine solche Fläche einen Nabelpunkt, so muß dieser als eine Krümmungslinie angesehen werden, welcher ebenfalls ein eigenthümlicher, von den andern verschiedener, Werth von C entspricht; mithin werden alle durch einen Nabelpunkt gehenden geodätischen Linien die übrigen Krümmungslinien schneiden und keine derselben berühren. In den Punkten, wo zwei, eine Krümmungslinie berührende, geodätische Linien eine andere Krümmungslinie schneiden, findet die Gleichung statt

$$F(p, p' \ldots) = F(p_0, p_0' \ldots .)$$

welche die Beziehung angibt zwischen den, diesen Punkten entsprechenden Parametern $p, p' \ldots .., p_0, p_0' \ldots .$ beider Linien. Hieher gehören die Kegelflächen und die meisten entwickelbaren Flächen. Wenn man eine Kegelfläche in einer Ebene ausbreitet, so verwandeln sich die Krümmungslinien in concentrische Kreise, die geodätischen Linien in Gerade. Da nun eine Gerade von mehreren concentrischen Kreisen nur einen berühren kann, während sie alle übrigen schneidet, so wird auch eine geodätische Linie auf der Kegelfläche eine Krümmungslinie berühren und alle andern schneiden. Breitet man eine entwickelbare Fläche in einer Ebene aus, dann verwandeln sich die Krümmungslinien in parallele Kurven, welche die Tangenten der Verwandelten der Rückkehrkante rechtwinklig schneiden. Letztere ist die gemeinschaftliche Evolute aller parallelen Kurven. Im Allgemeinen wird eine Gerade nicht zwei solcher Kurven zugleich tangiren können, also wird auch in den meisten Fällen eine geodätische Linie nur eine Krümmungslinie berühren und die übrigen schneiden.

b. Flächen, bei welchen je zwei Krümmungslinien zugleich ein von den andern verschiedener Werth von C zukommt. Ein Paar solcher Krümmungslinien theilt die Fläche in drei Zonen, die mittlere, welche von ihnen eingeschlossen ist, wollen wir Z nennen. Die geodätischen Linien, welche die erste Krümmungslinie berühren, werden nach der Berührung Z durchkreuzen, bis sie an der andern Grenze der Zone angekommen sind; nachdem sie dieselbe berührt haben, gehen sie zurück, durchschneiden die Krümmungslinien von Z zum zweitenmal, berühren wieder die erste Grenze u. s. f.; sie werden also auf Z unendlich viele Windungen innerhalb der zwei begrenzenden Krümmungslinien bilden. Nabelpunkte können auf solchen Flächen nur paarweise vorhanden sein. Alle geodätischen Linien, die von einem Nabelpunkt ausgehen, konvergiren wieder in dem entsprechenden, für welchen C denselben Werth hat. Beispiele von solchen Flächen sind das Ellipsoid, die Hyperboloide, die Kugel, sehr viele Rotationsflächen, welche durch eine Aequatorialebene in zwei symmetrische Hälften getheilt werden, sowie manche Flächen, die überhaupt eine Symmetralebene zulassen.

Bei solchen Flächen endlich, wo ein und derselbe Werth von C drei oder mehreren Krümmungslinien entspricht, läßt sich nichts Näheres über den Verlauf der geodätischen Linien angeben, da hier der Fall möglich ist, daß eine solche Linie drei oder mehrere Krümmungslinien berührt.

Gegeben ist eine Fläche (α) und eine Krümmungslinie K auf ihr. Die Tangenten aller geodätischen Linien, welche K berühren, bilden eine Reihe von entwickelbaren Flächen B . . . ., wovon jede senkrecht auf (α) steht, in so fern nämlich, als die Tangentialebenen einer solchen Fläche, welche zugleich die Oskulationsebenen der geodätischen Linien sind, (α) senkrecht schneiden. Jede entwickelbare Fläche B hat die Eigenschaft, daß ihre Erzeugenden Tangenten von (α) sind, und daß eine Ebene, welche durch eine solche Erzeugende so gelegt ist, daß sie B berührt, senkrecht auf (α) steht, und umgekehrt, berührt diese Ebene (α), so steht sie senkrecht auf B. Die scheinbaren Umrisse von (α) und irgend einer der Flächen B, von welchem Punkt des Raums sie auch gesehen werden mögen, stehen somit auf einander senkrecht. Alle diese entwickelbaren Flächen B umhüllen eine weitere Fläche (β), welche durch die aufeinanderfolgenden Durchschnitte G von je zwei unendlich nahen Flächen B gebildet wird. Diese neue Fläche (β) schneidet also (α) ebenfalls orthogonal, und zwar in der Krümmungslinie K. Da sie von jeder Fläche B längs einer Linie G berührt wird, so kommt den Flächen (α) und (β) auch die Eigenschaft zu, daß ihre scheinbaren Umrisse von irgend einem Punkt des Raums aus gesehen, auf einander senkrecht stehen. Die Tangenten aller geodätischen Linien auf (α), welche K berühren, tangiren auch (β) längs einer Linie B. Diese Tangenten sind also den Flächen (α) und (β) gemeinschaftlich. Wenn man durch zwei unendlich nahe Punkte von G Tangentialebenen an (β) legt, so sind diese zugleich Oskulationsebenen einer geodätischen Linie auf (α), ihr Durchschnitt ist also eine Tangente dieser Linie, andererseits ist dieser Durchschnitt eine konjugirte Tangente von G, woraus hervorgeht, daß die konjugirten Tangenten einer Linie G auf (β) zugleich die Tangenten einer geodätischen Linie auf (α) sind.

Wir wollen nun auf zwei unendlich nahen, die Krümmungslinie K berührenden, geodätischen Linien auf (α) zwei Punkte m und m′ so annehmen, daß das Element m m′ eine konjugirte Tangente der durch m gehenden geodätischen Linie sei. Die Tangente der letzteren Linie ist demnach der Durchschnitt zweier Ebenen, welche (α) in m und m′ berühren; sie ist ferner nach dem Vorhergehenden eine gemeinschaftliche Tangente der Flächen (α) und (β); da nun die genannten Berührungsebenen zugleich Normalebenen von (β) sind, und ihr Durchschnitt eine Tangente dieser Fläche ist, so sind sie die Oskulationsebenen einer geodätischen Linie von (β); dieselben Schlüsse lassen sich auf zwei folgende Punkte, m′ und m″, deren Verbindungslinie eine konjugirte Tangente der durch m′ gehenden geodätischen Linie von (α) ist, ausdehnen. Die Punkte m m′m″ . . . ., welche das System der — die Krümmungslinie K berührenden — geodätischen Linien auf (α) so durchkreuzen, daß die Elemente m m′, m′m″ . . . . konjugirte Tangenten dieser Linien sind, bilden eine konjugirte Linie (§. 10) und sie wird im folgenden *konjugirte geodätische Linie* genannt werden. Wir können nun das Vorhergehende in diesem Satze zusammen fassen:

Gegeben ist eine Fläche (α) und eine Krümmungslinie K derselben. Man ziehe alle geodätischen Linien, welche K berühren; ihre Tangenten bilden entwickelbare Flächen, welche eine weitere Fläche (β) berühren, die (α) in K orthogonal schneidet. Diese Tangenten sind also den Flächen (α) und (β) gemeinschaftlich. Eine durch sie gehende Ebene, welche die eine dieser Flächen berührt, schneidet die andere senkrecht.

Die scheinbaren Umrisse von (α) und (β) sind, von irgend einem Punkt des Raums aus gesehen, zu einander rechtwinklig. Alle Tangenten einer — K berührenden — geodätischen Linie auf (α) bilden mit ihren auf einander folgenden Berührungspunkten auf (β) eine konjugirte geodätische Linie, und umgekehrt, alle Tangenten einer geodätischen Linie auf (β) bilden mit ihren Berührungspunkten auf (α) eine konjugirte geodätische Linie.

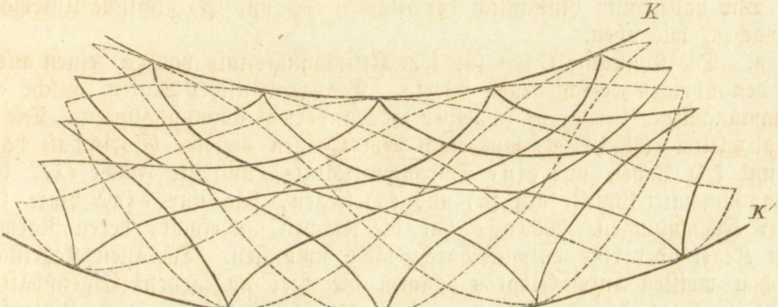
Es folgt aus der Eigenschaft der konjugirten Tangenten unmittelbar, daß die konjugirten geodätischen Linien auf (α) und (β), wenn sie bis zur Krümmungslinie K verlängert werden, dieselbe rechtwinklig schneiden. Von jedem Punkt von (α) oder (β) aus lassen sich jedenfalls zwei geodätische Linien ziehen, die K berühren, mithin gehen auch von diesem Punkt aus zwei konjugirte geodätische Linien, die auf K senkrecht stehen. Die Gleichung sämmtlicher konjugirten geodätischen Linien, die auf K senkrecht stehen, ist

35. $F(p, p' \ldots) = C$

also dieselbe, wie diejenige der geodätischen Linien, welche K berühren; nur mit dem Unterschied, daß die Parameter p, p' .. eine andere Bedeutung haben. Beziehen sie sich nämlich in der Gleichung 34 auf die Tangenten der Linien, so beziehen sie sich in 35. auf die konjugirten Tangenten der Linien und umgekehrt. Ist z. B. p ein Diameter der Fläche, welcher in 34. mit der Tangente der geodätischen Linie parallel ist, so ist in 35. angenommen, daß er mit der konjugirten Tangente der konjugirten geodätischen Linie parallel ist.

Alle Schlüsse, welche auf 34. Anwendung finden, können auch auf 35. ausgedehnt werden. Auf den Flächen, wo jeder Krümmungslinie ein besonderer von den andern verschiedener Werth von C entspricht, werden die konjugirten geodätischen Linien, welche auf einer Krümmungslinie senkrecht stehen, die andern Krümmungslinien schief kreuzen oder berühren. Allen konjugirten geodätischen Linien, welche eine Krümmungslinie rechtwinklig schneiden, entspricht der nämliche Werth der Konstante C in 35. Bei Flächen, wo den Krümmungslinien paarweise gleiche Werthe von C zukommen, durchkreuzen die konjugirten geodätischen Linien eine von zwei solchen Krümmungslinien eingeschlossene Zone, ungefähr wie es in Fig. 5 dargestellt ist.

Fig. 5.



K und K' sind die zwei begrenzenden Krümmungslinien, die geodätischen Linien sind punktirt, und die konjugirten geodätischen Linien sind ganz ausgezogen. Wenn sich zwei solche Linien schneiden, so hat die Konstante C für beide, wie auch für die Krümmungslinie, gleichen Werth, wodurch sich aus den Gleichungen 34 und 35 für die Parameter p, p' .. eine Relation ergeben wird.

Wir wollen nun annehmen, die gemeinschaftliche Tangente der Flächen (α) und (β) bewege sich so, daß sie nach und nach mit allen denjenigen Punkten dieser Flächen in Berührung kommt, mit welchen sie überhaupt in Berührung kommen kann. Dann wird ein bestimmter Punkt L derselben eine neue Fläche, (λ), beschreiben, von welcher die bewegliche Tangente eine Normale ist. Be=

rührt letztere stets eine geodätische Linie von (α), und also zugleich eine konjugirte geodätische Linie von (β), so beschreibt L eine Krümmungslinie des einen Systems von (λ); die auf einander folgenden Durchschnittspunkte der Normalen liegen auf der geodätischen Linie von (α); bewegt sich aber die gemeinschaftliche Tangente von (α) und (β) und Normale von (λ) so, daß sie (β) in einer geodätischen, und also (α) in einer konjugirten geodätischen Linie tangirt, so beschreibt L eine Krümmungslinie des andern Systems von (λ), die auf einander folgenden Durchschnittspunkte der Normalen liegen auf der geodätischen Linie von (β). (α) und (β) sind somit die Flächen der Krümmungsmittelpunkte von (λ). Kommt endlich die gemeinschaftliche Tangente während ihrer Bewegung mit der Durchschnittslinie K von (α) und (β) in Berührung, so fallen die beiden Krümmungsmittelpunkte von (λ) zusammen; die Hauptkrümmungshalbmesser letzterer Fläche sind einander gleich, d. h. L ist in einem Punkte sphärischer Krümmung von (λ). So lange also die Normale von (λ) die Linie K berührt, beschreibt L eine Linie sphärischer Krümmung auf dieser Fläche. Von einem Punkt L dieser Linie kann man nach drei Richtungen fortschreiten, so daß sich die auf einander folgenden Normalen von (λ) schneiden; wenn der Fußpunkt L der Normale sich auf einer Krümmungslinie von (λ) bewegt, so liegen die auf einander folgenden Durchschnitte der Normale auf einer K berührenden geodätischen Linie von (α) oder (β). Bewegt sich aber L auf einer Linie sphärischer Krümmungen von (λ), so schneiden sich die Normalen auf der gemeinsamen Krümmungslinie K der Flächen (α) und (β). Da alle geodätischen Linien auf (α) oder (β), deren Tangenten diesen Flächen gemeinschaftlich und also zugleich Normalen von (λ) sind, K berühren, so folgt daraus, daß die Linie sphärischer Krümmungen alle Krümmungslinien beider Systeme durchkreuzt.

Wir haben nun hinsichtlich der Flächen (α) und (β) ähnliche Unterschiede zu machen, wie oben.

a. Die Konstante C hat für jede Krümmungslinie von (α) einen andern, von den übrigen verschiedenen Werth. Die geodätischen Linien, welche eine Krümmungslinie berühren, schneiden alle andern Krümmungslinien. Die von (α) abgeleitete Fläche (β) muß nach dem Obigen dieselbe Eigenschaft haben; (α) und (β) haben nur eine Durchschnittslinie, und die Fläche (λ), deren Krümmungsmittelpunkte auf (α) und (β) liegen, hat nur eine Linie sphärischer Krümmungen. Monge hat die Flächen untersucht, deren Normalen einen Kegel oder eine entwickelbare Fläche umhüllen. Da allen Kegelflächen und den meisten entwickelbaren Flächen die hier angegebene Eigenschaft zukommt, so folgt, daß die ihnen entsprechende Fläche (λ) nur eine Linie sphärischer Krümmungen hat, welche bei den Kegelflächen die Evolvente einer sphärischen Kurve ist.

b. Die Konstante C hat für je zwei Krümmungslinien von (α) denselben Werth. Da alle geodätischen Linien innerhalb einer von zwei solchen Krümmungslinien eingeschlossenen Zone letztere berühren, so schneidet die abgeleitete Fläche (β) (α) zweimal; die Fläche (λ), deren Krümmungsmittelpunkte auf (α) und (β) liegen, hat zwei Linien sphärischer Krümmung.

Wenn die Konstante C für mehr als zwei Krümmungslinien von (α) denselben Werth hat, so wird (α) von der abgeleiteten Fläche drei oder mehreremal geschnitten, die Fläche (λ) kann also eben so viele Linien sphärischer Krümmungen haben. Ueber die Punkte sphärischer Krümmung, auch Nabelpunkte genannt (ombilic nach Monge), welche durch die Eigenschaft charakterisirt sind, daß bei ihnen die Hauptkrümmungshalbmesser R und R′ gleich sind, wurden schon verschiedene Ansichten aufgestellt.

Monge gibt an, daß die Normale eines Nabelpunkts von allen unendlich nahen Normalen der Fläche geschnitten wird. Nach Dupin findet ein solches Schneiden nur nach drei Richtungen statt. Poisson (Journal de l'école polytechnique, cahier 21. page 205) nimmt an, daß zwei unendlich nahe Normalen, deren Fußpunkte auf einer Krümmungslinie liegen, sich nicht schneiden, sondern daß deren kürzeste Entfernung ein unendlich Kleines der ersten Ordnung ist. Von einem Nabelpunkt aus kann man nach allen Richtungen auf der Fläche fortschreiten, so daß die kürzeste Entfernung der Normale des Nabelpunkts und der nächstfolgenden ein unendlich Kleines der ersten Ordnung ist; aber es gibt drei verschiedene Richtungen, wo diese Entfernung ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung wird.

Ohne uns ganz an die Ansicht Poisson's anzuschließen, welche auch mit §. 5 im Widerspruch ist, glauben wir im Vorhergehenden gezeigt zu haben, daß, wenn eine Fläche (λ) eine Linie von Punkten sphärischer Krümmung enthält, die beiden Flächen ihrer Krümmungs-Mittelpunkte (α) und (β) sich in einer Krümmungslinie schneiden, und daß man alsdann von jedem Nabelpunkte auf (λ) aus nach drei Richtungen fortschreiten kann, in welchen sich die unendlich nahen Normalen schneiden. Zwei dieser Richtungen berühren die Krümmungslinien von (λ), die entsprechenden Normalen tangiren zwei geodätische Linien auf (α) und (β); die dritte Richtung ist diejenige der Punkte sphärischer Krümmung auf (λ), deren Normalen die Schnittlinie von (α) und (β) berühren.

Durch einen Punkt sphärischer Krümmung auf einer Fläche gehen also im Allgemeinen drei Linien, welche die Fußpunkte solcher Flächennormalen sind, die eine entwickelbare Fläche bilden, deren Rückkehrkante die Durchschnitte der Normalen enthält. Der Winkel, welchen die Linie sphärischer Krümmung mit einer Krümmungslinie bildet, ist derselbe, welchen die Oskulationsebene der Krümmungslinie K mit der Oskulationsebene der berührenden geodätischen Linien macht. Es kann der Fall eintreten, daß dieser Winkel ein Rechter ist, oder daß diese Oskulationsebene auf der einen von den Flächen (α) und (β) senkrecht steht, während sie die andere berührt. Nehmen wir z. B. an, (α) sei die Umhüllungsfläche einer Kugel von konstantem Halbmesser, die auf einer Ebene rollt, und K sei die Berührungslinie dieser Fläche mit der Ebene. Da diese Fläche eben ist, so fallen ihre Oskulationsebenen alle in eine zusammen, welche (α) berührt, und auf (β) senkrecht steht.

Die Punkte sphärischer Krümmung können aber auch isolirt auf Flächen vorkommen, und dann kommt ihnen speziell die Benennung „Nabelpunkte“ zu. Wir wollen annehmen, eine beliebige Fläche (α) habe einen oder mehrere vereinzelte Nabelpunkte. Man ziehe alle geodätischen Linien, welche durch einen solchen Nabelpunkt N gehen; die entwickelbaren Flächen, welche die Tangenten dieser Linien bilden, hüllen eine Fläche (β) ein, die in N eine Spitze hat. Man kann nun ganz wie im Vorigen die Fläche (λ) konstruiren, deren Normalen die gemeinschaftlichen Tangenten von (α) und (β) sind. Alle Tangenten von (α), welche durch N gehen, schneiden (λ) in einer Linie sphärischer Krümmung. Da diese Tangenten in einer Ebene liegen, so ist die Linie sphärischer Krümmung ebenfalls eben. Sämmtliche Berührungsebenen von (λ), welche durch die Punkte dieser Linie gehen, umhüllen also einen Cylinder. Unter Umständen kann (β) auch eine Kurve sein, bei dem Ellipsoid z. B. ist sie die Fokalhyperbel.

§. 16. Die Linien auf den Flächen. Fortsetzung.

Gegeben sind zwei entwickelbare Flächen S und S', welche sich so schneiden, daß in jedem Punkt der Schnittlinie sowohl die Erzeugenden, als auch die Tangentialebenen auf einander senkrecht stehen. Es sei mm' ein Element dieser Linie; mo und m'o sind zwei Erzeugende von S, mo' und m'o' zwei Erzeugende von S'. Da die Winkel omo' und om'o' Rechte sind, so liegen die 4 Punkte omm'o' auf einer Kugel, deren Durchmesser oo' ist; und da die Tangentialebenen omm' und o'mm' auf einander senkrecht stehen, so sind die Winkel mm'o und mm'o' Rechte, d. h. mm' ist ein Element der Krümmungslinie:

Zwei entwickelbare Flächen, deren Erzeugende und Tangentialebenen in jedem Punkt der Durchschnittslinie auf einander senkrecht stehen, schneiden sich in einer Krümmungslinie.

Wir wollen nun annehmen, daß zwar die Winkel omo' und om'o' Rechte sind, daß aber die Tangentialebenen nicht auf einander senkrecht stehen; dann sind offenbar die Winkel omm' und o'mm' schief, d. h. mm' ist nicht ein Element der Krümmungslinie. Oder umgekehrt, stehen blos die Tangentialebenen omm' und o'mm' auf einander senkrecht, sind dagegen die Winkel der Erzeugenden omo' und om'o' schief, so ist mm' ebenfalls keine Krümmungslinie, weil die Winkel omm' und o'mm' gleichfalls schief sind:

Zwei entwickelbare Flächen, bei welchen blos die Erzeugenden oder blos die Tangentialebenen in jedem Punkt der Schnittlinie auf einander senkrecht stehen, schneiden sich nicht in einer Krümmungslinie.

Es kann aber in einem speziellen Fall die Durchschnittslinie von zwei entwickelbaren Flächen, deren Tangentialebenen orthogonal sind, eine Krümmungslinie auf der einen Fläche und zugleich eine geodätische Linie auf der andern sein. Es seien mm'm'' drei auf einander folgende Punkte einer geodätischen Linie auf S; wir verlängern mm' nach t und m'm'' nach t', so ist die Ebene tm't' senkrecht auf der durch m'm'' gehenden Tangentialebene von S, weil die Oskulationsebenen der geodätischen Linie senkrecht auf der Fläche sind. Dehnt man dieses Verfahren auf alle Elemente der Linie mm'm''.. aus, so erhält man eine entwickelbare Fläche S', deren Tangentialebenen in jedem Punkt der Schnittlinie senkrecht auf S stehen; die Linie mm'm'' ist die Rückkehrkante und also eine Krümmungslinie von S'. (Die Rückkehrkanten sind Krümmungslinien auf den entwickelbaren Flächen, weil sie alle Krümmungslinien des einen Systems senkrecht schneiden.)

Auf S sollen zwei geodätische Linien gezogen sein, welche sich in M rechtwinklig schneiden. mm'm'' sind drei unendlich nahe Punkte auf der ersten Linie und die Erzeugenden von S, welche durch diese Punkte gehen, schneiden die zweite Linie in $\mu\mu'\mu''$; die Tangenten mm' und $\mu\mu'$ treffen sich in M', und die Tangenten m'm'' und $\mu'\mu''$ in M''. Um dieß zu beweisen, ziehen wir in M die Tangentialebene von S, und durch M in dieser Ebene zwei rechtwinklige Gerade. Beim Rollen der Ebene auf der entwickelbaren Fläche S werden diese Geraden die geodätischen Linien beschreiben. Geht die Ebene von der Lage $m'mM'\mu\mu'$ in die folgende, unendlich nahe Lage $m''m'M''\mu'\mu''$ über, so beschreiben alle Punkte unendlich kleine Bögen, senkrecht zur Ebene. $M'M''$ ist ein solcher Bogen, welcher demnach senkrecht ist auf den Geraden $M'mm'$ und $M'\mu\mu'$, also ist $M'M''$ ein Element einer Krümmungslinie der beiden orthogonalen Flächen S' und S'', welche durch die Tangenten der geodätischen Linien $mm'm''$ und $\mu\mu'\mu''$ auf S gebildet werden, und da die Winkel $mM'\mu$ und $m'M''\mu'$ rechte sind, so stehen die Flächen S' und S'' auf einander senkrecht. Wir haben also drei orthogonale Flächen, S, S' und S''. Im Durchschnitt von S mit S' und S'' stehen blos die Tangentialebenen, aber nicht die Erzeugenden der betreffenden Flächen auf einander senkrecht; diese Durchschnittslinien sind somit geodätische Linien auf S und Krümmungslinien (nämlich die Rückkehrkanten) von S' und S''. S' und S'' sind aber in dem Sinn orthogonal, daß in jedem Punkt ihrer Durchschnittslinie nicht blos die Erzeugenden beider Flächen, sondern auch die Tangentialebenen rechtwinklig sind; diese Flächen schneiden sich somit in einer Krümmungslinie. Das Theorem von Ch. Dupin heißt:

1. Drei sich rechtwinklig schneidende Flächen schneiden sich in ihren Krümmungslinien. Um dasselbe zu beweisen, nehmen wir die Gleichung 18 des §. 4 zu Hülfe:

$$\gamma = \frac{1}{2} \sin 2\,a \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) ds$$

m, m' seien die beiden Endpunkte des Elements ds; a ist der Winkel zwischen mm' und der durch m gehenden Krümmungslinie; die Normale der Fläche in m' bildet mit der durch mm' und die Normale von m gelegten Ebene den Winkel γ. Dreht sich mm' nach mm'', so daß Winkel $m'mm'' = 90^0$ ist, so haben wir

$$1. \quad \gamma' = \frac{1}{2} \sin 2\,(90 + a) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) ds = \gamma$$

Wir wollen nun annehmen, im Punkt m schneiden sich drei Flächen orthogonal, mm', mm'', mm''' seien die Elemente der Durchschnittslinien. Durch jeden der drei Punkte m', m'', m''' gehen zwei Flächennormalen; diejenigen von m' machen mit den Axen mm', mm'', mm''' Winkel, deren Cosinus gleich α, β, γ und α', β', γ' sind; die Cosinus der Winkel, welche die Normale, deren Fußpunkt m'' ist, mit den Axen bildet, sind a, b, c und a', b', c'; endlich sind a, b, c; a', b', c' die Cosinus der Winkel, welche die Normale in m''' mit den Axen macht. Nun ist

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = o$$

Die Winkel, deren Cosinus $= \alpha$ und α', sind unendlich wenig von 90^0 verschieden, also ist mit Vernachläßigung einer unendlich kleinen Größe zweiter Ordnung $\beta\beta' + \gamma\gamma' = o$; ferner sind die Cosinus β und γ' gleichfalls unendlich klein, also haben wir $\beta' + \gamma = o$; ebenso findet man $a' + c = o$; $a + b' = o$. Nach der Gleichung 1 aber haben wir $\beta' = a'$; $c = b'$; $\gamma = a$; aus diesen sechs Gleichungen ergibt sich $\gamma = a = b' = c = a' = \beta' = o$. Die Normalen in m', m'', m''' liegen also in Ebenen, welche durch diese drei Punkte und die correspondirende Normale von m gehen, mithin schneiden sie dieselbe, sonach sind mm', mm'', mm''' Krümmungslinien. Dieser Beweis ist von Bertrand (Journal de M. Liouville, tome IX, 133), außerdem haben noch verschiedene Mathematiker Beweise desselben Satzes gegeben: Dupin (développements de géométrie), Lamé und Finck (Journal de M. Liouville), Ossian Bonnet (Journal de l'école polytechnique, cahier 32. page 1). Bei allen Sätzen über die allgemeine Theorie der Flächen, welche auf der Differenziation der Gleichung $f(x, y, z) = o$ beruhen, ist die Voraussetzung zu berücksichtigen, daß keiner der Differenzialquotienten $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$ .... einen exceptionellen Werth annimmt, Null, unendlich u. s. f., wie dieß bei besonderen Punkten oder Linien auf den Flächen der Fall ist. Wenn bei dem Theorem von Euler

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2 a}{R} + \frac{\sin^2 a}{R'}$$

$R' = o$ ist, so erhält man $\varrho = o$ und mithin auch $R = o$. Nun gibt es aber Punkte auf Flächen, wo $R' = o$ ist, und R einen endlichen Werth hat, und wo also diese Gleichung nicht mehr anwendbar ist. Man denke sich z. B. zwei ebene Kurven, die sich in einem Punkt M so schneiden, daß ihre Ebenen orthogonal sind. Der Krümmungshalbmesser der einen Kurve sei R, und derjenige der andern $= o$; eine dritte Kurve, welche über die beiden ersten hingleitet, erzeugt eine Fläche, deren Hauptkrümmungshalbmesser gleich R und o sind, und für welche also das Theorem von Euler nicht mehr anwendbar ist. In irgend einem Punkt der Rückkehrkante einer entwickelbaren Fläche ist der eine Hauptkrümmungshalbmesser R = unendlich, dessen Ebene durch eine Erzeugende der Fläche oder Tangente der Rückkehrkante geht. Der andere Hauptkrümmungshalbmesser R', dessen Ebene senkrecht auf dieser Tangente steht, ist $= o$. Mithin ist hier ebenfalls das Theorem von Euler nicht mehr gültig, welches verlangt, daß wenn $R' = o$ ist, zugleich ϱ und sofort auch $R = o$ sein soll. Der Grund von dieser scheinbaren Anomalie liegt darin, daß in derartigen Punkten einzelne der genannten Differenzialquotienten verschwinden, und dann in der Ableitung der Gleichung $f(x, y, z) = o$ blos die höheren Differenzialquotienten übrig bleiben, welche bei dem Beweis der Sätze von Euler, Bertrand, Dupin nicht berücksichtigt wurden. Bei den folgenden Entwicklungen sind solche Ausnahmsfälle ausgeschlossen, und sie haben darum auch nur unter dieser Voraussetzung Geltung.

2. Wenn sich zwei Flächen überall unter konstantem Winkel schneiden, und die Schnittlinie ist eine Krümmungslinie der einen Fläche, so ist sie auch eine Krümmungslinie der andern.

A, B, C sind drei auf einander folgende Punkte der Schnittlinie; die durch die Elemente AB und BC gehenden Tangentialebenen der ersten Fläche, auf welcher ABC eine Krümmungslinie ist, schneiden sich in BD; die Winkel DBA und DBC sind mithin Rechte. Zwei Tangentialebenen der zweiten Fläche, welche durch AB und BC gehen, bilden mit den Ebenen DBA und DBC gleiche Winkel; ihr Durchschnitt BE muß demnach ebenfalls mit den Elementen AB und BC gleiche Winkel bilden, oder auf diesen beiden Linien senkrecht stehen. AB und BE sind somit sich rechtwinklig schneidende konjugirte Tangenten der zweiten Fläche und AB ist ein Element einer Krümmungslinie auf letzterer Fläche; ebenso wird bewiesen, daß alle Elemente der Schnittkurve einer Krümmungslinie der zweiten Fläche angehören.

2. Wenn der Durchschnitt zweier Flächen eine Krümmungslinie auf beiden ist, so schneiden sich die Flächen überall unter konstantem Winkel.

Es sind A, B, C drei auf einander folgende Punkte des Durchschnitts. Die durch AB und BC gelegten Tangentialebenen der ersten Fläche schneiden sich in BD und die durch dieselben Elemente gehenden Tangentialebenen der zweiten Fläche schneiden sich in BE. Da ABC eine Krümmungslinie auf beiden Flächen zugleich ist, so sind die Durchschnittslinien BD sowohl als auch BE senkrecht auf AB oder BC. Der Winkel der Tangentialebenen ABC und ABE muß somit gleich dem Winkel der Tangentialebenen CBD und CBE sein. Ebenso wird bewiesen, daß dieser Winkel konstant ist, für die durch alle folgenden Elemente der Durchschnittslinie beider Flächen gelegten Tangentialebenen derselben. Jede Linie auf einer Ebene ist eine Krümmungslinie derselben; unser Satz führt also sogleich auf folgendes Theorem (von Joachimsthal):

Wenn eine Krümmungslinie einer Fläche eben ist, so schneidet die Ebene derselben die Fläche überall unter konstantem Winkel.

Jede Linie auf einer Kugel ist eine Krümmungslinie derselben, weil sich alle Normalen einer Kugel schneiden, im Mittelpunkt. Ein zweiter spezieller Fall des Satzes ist mithin der nachstehende (von Serret):

Wenn eine Krümmungslinie einer Fläche sphärisch ist, so schneidet die Kugel, auf welcher sie liegt, die Fläche überall unter konstantem Winkel.

Aus unserem zweiten Satz läßt sich ebenso mit leichter Mühe ableiten:

Wenn eine Ebene oder eine Kugel eine Fläche überall unter konstantem Winkel schneiden, so ist die Durchschnittskurve eine Krümmungslinie auf der Fläche.

Ist eine Krümmungslinie einer Fläche kreisförmig, dann bilden die Normalen der Fläche, deren Fußpunkte auf der Krümmungslinie liegen, einen Drehungskegel. Denn durch einen Kreis lassen sich unendlich viele Kugeln legen; jede schneidet die Fläche unter einem konstanten Winkel; unter diesen Kugeln befindet sich immer eine solche, wo dieser Winkel gleich Null ist, oder welche die Fläche berührt. Der Mittelpunkt dieser Kugel ist die Spitze des genannten Drehungskegels. Die Fläche läßt sich auch von einem Drehungskegel längs der kreisförmigen Krümmungslinie berühren.

Zwei sich schneidende Linien haben im Durchschnitt einen Punkt gemeinschaftlich; bei zwei Linien, welche eine Berührung erster Ordnung haben, sind zwei auf einander folgende Punkte oder ein Linienelement, bei einer Berührung zweiter Ordnung sind zwei auf einander folgende Linienelemente oder drei Punkte gemein. Wenn sich zwei Flächen in einem Punkt so tangiren, daß sie eine Berührung zweiter Ordnung haben, so wird jede durch den Punkt gelegte Ebene beide Flächen in zwei Kurven schneiden, die zwei Linienelemente gemeinschaftlich haben. Alle diese gemeinschaftlichen Linienelemente bilden einen unendlich kleinen sehr stumpfen Kegel, dessen Spitze der Berührungspunkt ist, und dessen Mantel sowohl der einen als auch der andern Fläche angehört. C sei die Spitze des Kegels und CA, CB sind zwei Erzeugende desselben, deren Ebene die Normale der Fläche enthält. Die durch CA und CB gelegten Tangentialebenen der Fläche schneiden sich in der Geraden CD. Die Tangenten CA und CD sind also für beide Flächen konjugirt; hierauf beruht der wichtige Satz von Dupin:

4. Bei zwei Flächen, die sich in einem Punkt in zweiter Ordnung berühren, sind die konjugirten Tangenten gemeinschaftlich. In jedem Punkt einer Fläche läßt sich dieselbe nach dem Theorem von Euler von einer Fläche zweiten Grades in zweiter Ordnung tangiren; konjugirte Tangenten in einem Punkt einer Fläche befolgen somit dasselbe Gesetz, wie bei einer Fläche zweiten Grades. Siehe §. 6.

Dieses Gesetz ist aber bei den centrischen Flächen zweiten Grades sehr einfach, denn je zwei konjugirte Tangenten der Fläche sind zwei konjugirten Durchmessern des der Tangentialebene parallelen Diametralschnitts parallel; und da sich die Axen dieses Diametralschnitts verhalten wie die Quadratwurzeln der beiden Hauptkrümmungshalbmesser im Berührungspunkt, so geht daraus weiter hervor:

5. Construirt man für einen beliebigen Punkt einer Fläche in der Tangentialebene einen Kegelschnitt, dessen Axen mit den Tangenten der Krümmungslinien zusammenfallen, und den Quadratwurzeln der beiden Hauptkrümmungshalbmesser proportional sind, so sind irgend zwei konjugirte Durchmesser des Kegelschnitts zugleich konjugirte Tangenten der Fläche; diese Durchmesser sind den Quadratwurzeln der Krümmungshalbmesser von den durch sie gehenden Normalschnitten der Fläche proportional.

Wenn zwei Flächen in einem Punkt eine Berührung erster Ordnung haben, so kann zwischen ihren konjugirten Tangenten keine bestimmte Beziehung statt finden, weil sich jede Fläche um die gemeinschaftliche Normale beliebig drehen läßt. Anders verhält es sich aber, wenn sich zwei Flächen längs einer gemeinschaftlichen Linie berühren. Dann sind die Tangentialebenen in zwei auf einander folgenden Punkten der Berührungslinien beiden Flächen gemein, also ist ihr Durchschnitt der Tangente der Berührungslinie für beide Flächen konjugirt.

6. Haben zwei Flächen eine gemeinschaftliche Berührungslinie, so entspricht einer Tangente der letzteren für beide Flächen dieselbe konjugirte Tangente. Die Erzeugenden eines Kegels, eines Cylinders, überhaupt einer entwickelbaren Fläche, welche eine Fläche in einer Kurve berühren, sind den Tangenten dieser Kurve konjugirt. Diese Erzeugenden fallen bei ungleichartig gekrümmten Flächen mit der Tangente der Berührungskurve zusammen, wenn sie mit einer Krümmungslinie den Winkel a bilden, so daß $\text{tg}a = \pm \sqrt{\frac{R'}{R}}$ (Hachette, im Journal v. Crelle, Bd. 1, S. 371.)

Wenn zwei sich berührende Flächen zwei konjugirte Tangenten gemein haben, so können drei Fälle statt finden; entweder sind die jeder Tangente entsprechenden Krümmungshalbmesser der Normalschnitte für beide Flächen gleich, dann sind auch die Tangentialebenen in zwei auf einander folgenden Punkten in der Richtung der Tangenten die nämlichen; die Flächen berühren sich in der zweiten Ordnung und haben mithin im Berührungspunkt alle Paare von konjugirten Tangenten gemeinschaftlich. Oder sind blos die einer Tangente entsprechenden Krümmungshalbmesser der Normalschnitte für beide Flächen gleich, dann fallen nur die beiden Tangentialebenen in zwei auf einander folgenden Punkten der Richtung dieser Tangente zusammen; dieß findet statt, wenn beide Flächen eine gemeinschaftliche Berührungslinie haben. Endlich ist keiner der genannten Krümmungshalbmesser für beide Flächen der gleiche; in diesem Fall ist die Berührung eine gewöhnliche von der ersten Ordnung.

Haben zwei Flächen eine gemeinschaftliche Berührungslinie, so ist dieß ein besonderer Fall des zweiten Satzes, wo der konstante Winkel, unter dem sich die Flächen schneiden, gleich Null ist. Hieraus geht also hervor:

Wenn sich zwei Flächen in einer Kurve berühren, welche eine Krümmungslinie auf der ersten Fläche ist, so ist sie auch eine Krümmungslinie auf der zweiten.

Jede Linie auf einer Ebene oder auf einer Kugel ist eine Krümmungs-Linie:

Wenn eine Fläche von einer Ebene längs einer Linie berührt wird, so ist die Berührungskurve eine Krümmungslinie der Fläche. Eine entwickelbare Fläche läßt sich von einer Ebene längs einer Erzeugenden berühren, also ist die letztere eine Krümmungslinie. Die Erzeugenden eines Kegels, eines Cylinders sind Krümmungslinien. Eine Kugel (oder eine beliebige Fläche) rollt auf einer Ebene; die auf einander folgenden Berührungspunkte bilden eine Kurve, welche auf derjenigen Fläche liegt, die die Kugel in ihren einzelnen Lagen umhüllt; diese Kurve ist die Berührungslinie zwischen der Ebene und der Umhüllungsfläche, also ist sie eine Krümmungslinie der letzteren. Die auf der Ebene rollende Kugel kann einen konstanten oder einen veränderlichen Halbmesser haben. Zwei auf einander folgende Kugeln schneiden sich bei dieser Bewegung in einem Kreis, welcher auf der Umhüllungsfläche liegt, und da er zugleich die Berührungskurve zwischen der beweglichen Kugel und dieser Fläche ist, so folgt daraus, daß die Kreisschnitte der Umhüllungsfläche Krümmungslinien derselben sind; und da diese Kreise zugleich Krümmungslinien der Ebenen, auf welchen sie liegen, sind, so haben wir zufolge des dritten Satzes folgenden:

Bei jeder Umhüllungsfläche einer beweglichen Kugel von konstantem oder veränderlichem Halbmesser sind die Kreisschnitte Krümmungslinien; die Ebene jedes solchen Kreises trifft die Fläche überall unter demselben Winkel.

Es seien A, B, C drei auf einander folgende Punkte der Durchschnittslinie zweier Flächen. Die durch AB und BC gehenden Tangentialebenen der ersten Fläche schneiden sich in BD, und die durch dieselben Elemente gelegten Tangentialebenen der zweiten Fläche schneiden sich in BE. Wir wollen nun annehmen, die Linie ABC oder die Oskulationsebene der Durchschnittskurve halbire den Winkel der Ebenen ABD und ABE, wie auch den Winkel der Ebenen CBD und CBE; dann müssen offenbar auch die Winkel ABD und ABE oder CBD und CBE einander gleich sein. Hierauf beruht der Satz:

7. Zwei Flächen schneiden sich so, daß die Oskulationsebene der Durchschnittslinie in jedem Punkt den Winkel der Tangentialebenen der Flächen halbirt, dann sind auch die Winkel gleich, welche jede Tangente dieser Linie mit den hinsichtlich beider Flächen ihr konjugirten Tangenten bildet.

Hat diese Durchschnittslinie die Eigenschaft, daß sie mit allen ihren konjugirten Tangenten der ersten Fläche einen konstanten Winkel bildet, so hat sie diese Eigenschaft auch bei der zweiten Fläche. Ist dieser konstante Winkel gleich einem Rechten, so ist er es auch bei der letzteren Fläche; wir können also als speziellen Fall unseres Satzes folgenden angeben:

8. Die Durchschnittslinie zweier Flächen ist eine Krümmungslinie auf der einen von ihnen; und zugleich hat sie die Eigenschaft, daß ihre Oskulationsebenen in jedem Punkt den Winkel der beiden Tangentialebenen der Flächen halbiren, dann ist diese Durchschnittslinie eine Krümmungslinie auch auf der andern Fläche.

Eine Fläche wird durch eine Reihe von parallelen Ebenen geschnitten. Man ziehe auf der Fläche eine den Schnittkurven konjugirte Linie, d. h. eine Linie, deren Tangenten die konjugirten Tangenten der Schnittkurven sind; sind z. B. A, B, C, D vier auf einander folgende Punkte dieser Transversallinie und BB′, CC′ die Tangenten der durch B und C gehenden parallelen Schnittkurven, so sind AB und BB′, BC und CC′ konjugirte Tangenten der Fläche; ebenso sind auch CD und DD′ konjugirte Tangenten u. s. f. Nun sind BB′, CC′, DD′ einerseits die Durchschnitte von auf einander folgenden Ebenen, je zwei dieser Durchschnitte schneiden sich also, oder sie bilden eine entwickelbare Fläche. Andererseits liegen sie in parallelen Ebenen, mithin sind ihre Durchschnittspunkte unendlich fern und die von ihnen gebildete entwickelbare Fläche ist ein Cylinder.

9. Wenn eine beliebige Fläche durch eine Reihe von parallelen Ebenen geschnitten wird, so sind die Tangenten der Schnittkurven in denjenigen Punkten, wo sie von einer konjugirten Transversallinie (trajectoire nach Monge) getroffen werden, einander parallel, und bilden also einen Cylinder.

Wir wollen annehmen, daß die Transversallinien der parallelen Schnittkurven die Eigenschaft haben, daß der Winkel, den ihre Tangenten mit den konjugirten Tangenten der Fläche bilden, konstant ist, so schneiden diese Transversallinien alle Erzeugenden des Cylinders, auf welchem sie liegen, unter einem konstanten Winkel, mithin sind sie Schraubenlinien, welche sich bei der Abwicklung des Cylinders auf eine Ebene in Gerade verwandeln. Hierauf beruht dieser Satz:

Eine Fläche enthält ein System von parallelen Schnittkurven und die konjugirten Transversallinien derselben gehören zu derjenigen Klasse von Linien auf Flächen, bei welchen der Winkel zwischen ihren Tangenten und den konjugirten Tangenten der Fläche für alle Punkte einer Linie konstant ist, dann sind diese konjugirten Transversalen Schraubenlinien.

Wenn der konstante Winkel ein Rechter ist, so sind die parallelen Schnittkurven sowohl, als auch die konjugirten Transversalen Krümmungslinien; dieß führt zu folgendem Theorem von Joachimsthal (Journal von Crelle):

Eine Fläche besitzt ein System von parallelen Krümmungslinien; jede Krümmungslinie des andern Systems liegt auf einem Berührungscylinder der Fläche, dessen Erzeugende sie senkrecht schneidet, mithin liegt sie selbst in einer Ebene, welche auf diesen Erzeugenden senkrecht steht. Die Ebenen aller Krümmungslinien des zweiten Systems stehen also auf parallelen Ebenen der Krümmungslinien des ersten Systems senkrecht, somit haben sie entweder eine gemeinsame Durchschnittslinie, wie bei den Drehungsflächen, oder bilden sie die Tangentialebenen eines Cylinders.

Eine Fläche wird durch ein System von Ebenen geschnitten, welche durch eine Gerade M gehen. Man ziehe wieder auf der Fläche eine konjugirte Transversallinie der Schnittkurven; es seien A, B, C, D auf einander folgende Punkte derselben, und BB′, CC′, DD′ die konjugirten Tangenten der durch die Elemente AB, BC, CD bestimmten Tangenten der Fläche. BB′, CC′, DD′ liegen nun einerseits als Durchschnitte von auf einander folgenden Ebenen, ABB′, BCC′, CDD′ auf einer entwickelbaren Fläche und schneiden sich zu zweien. Andererseits liegen sie auf den durch die Gerade M gehenden Ebenen, mithin haben sie einen gemeinsamen Durchschnittspunkt auf M und die von ihnen gebildete entwickelbare Fläche ist ein Kegel:

10. Wenn eine Fläche durch eine Reihe von Ebenen mit gemeinschaftlicher Durchschnittslinie geschnitten wird, so haben die Tangenten der Schnittkurven in denjenigen Punkten, wo sie von einer konjugirten Transversale getroffen werden, einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt und bilden einen Kegel. (Siehe Satz 6.)

Die parallelen Schnittkurven können so beschaffen sein, daß jede mit ihrer konjugirten Transversallinie einen konstanten Winkel bildet, alsdann schneiden sie die Erzeugenden des Kegels, auf welchem sie liegen, gleichfalls unter einem konstanten Winkel, und man kann den letzten Satz ebenso modificiren, wie den neunten; ist dieser konstante Winkel ein Rechter, so sind die parallelen Schnittkurven sowohl als auch ihre konjugirten Transversalen Krümmungslinien; letztere schneiden die Erzeugenden des Kegels, auf welchem sie liegen, senkrecht, mithin liegen sie auf einer Kugel, deren Mittelpunkt die Spitze dieses Kegels ist; wir können somit diesen Satz (von Joachimsthal) aussprechen:

Wenn die Krümmungslinien des einen Systems auf einer Fläche in Ebenen enthalten sind, die eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie haben, so bilden ihre Tangenten in denjenigen Punkten, wo sie von einer Krümmungslinie des andern Systems geschnitten werden, einen Kegel, dessen Spitze der Mittelpunkt einer Kugel ist, auf welcher diese letztere Krümmungslinie liegt. Alle Krümmungslinien des zweiten Systems sind sphärische Kurven.

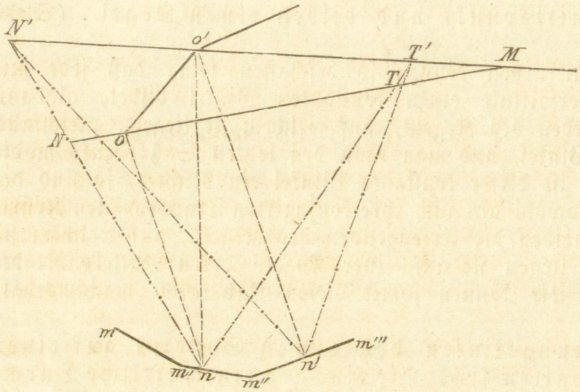
Auf einer Fläche ist eine beliebige Linie gegeben. Man denke sich eine Tangentialebene, welche so über die Fläche hingleitet, daß die auf einander folgenden Berührungspunkte auf der Linie liegen. Der Durchschnitt von irgend zwei aufeinander folgenden Tangentialebenen und die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte sind konjugirte Tangenten der Fläche. Diese Verbindungslinie ist eine Tangente der gegebenen Linie. Die Durchschnitte von je zwei auf einander folgenden Tangentialebenen bilden zusammen eine entwickelbare Fläche:

Die konjugirten Tangenten von irgend einer Linie auf einer Fläche bilden eine entwickelbare Fläche. Eine Krümmungslinie schneidet die Erzeugenden der von ihren konjugirten Tangenten gebildeten entwickelbaren Fläche senkrecht, also ist sie eine Evolvente ihrer Rückkehrkante. Die Krümmungslinien gehören zu derjenigen Klasse von Linien, welche durch die Eigenschaft charakterisirt sind, daß sie mit ihren konjugirten Tangenten einen konstanten Winkel bilden. Solche Linien schneiden also die Erzeugenden der von ihren konjugirten Tangenten gebildeten abwickelbaren Fläche unter einem konstanten Winkel. Die Oskulationsebenen einer geodätischen Linie auf einer Fläche stehen senkrecht auf der letzteren; mithin stehen sie auch senkrecht auf der entwickelbaren Fläche, welche die konjugirten Tangenten der geodätischen Linie bilden; und hieraus folgt weiter, daß sie sich bei der Abwicklung dieser Fläche auf eine Ebene in eine Gerade verwandeln.

Eine geodätische Linie auf einer Fläche ist auch eine kürzeste oder geodätische Linie auf der von ihren konjugirten Tangenten gebildeten entwickelbaren Fläche, und verwandelt sich bei der Abwicklung der letzteren auf eine Ebene in eine Gerade.

Es seien m, m', m'', m''' vier auf einander folgende Punkte einer Krümmungslinie auf einer Fläche; n ist die Mitte des Elements $m'm''$ und n' die Mitte des Elements $m''m'''$. o ist der Mittelpunkt des durch die drei Punkte $mm'm''$ gehenden Krümmungskreises und o' der Mittelpunkt des durch die Punkte $m'm''m'''$ gehenden Krümmungskreises. Die in o auf der Oskulationsebene $mm'm''$ und in o' auf der Oskulationsebene $m'm''m'''$ errichteten Perpendikel schneiden sich in M, also ist M der Mittelpunkt der durch die Punkte $mm'm''m'''$ gehenden Krümmungskugel.

Fig. 5.



Die Gerade oM ist die *Polare* von n und die Gerade $o'M$ die Polare von n'; man kann auch sagen, daß oM und $o'M$ die *Polaren* der *Elemente* $m'm''$ und $m''m'''$ sind. Die Ebene $noo'M$ ist die Normalebene des Elements $m'm''$, also enthält sie nicht blos die Normale der Fläche, sondern auch die konjugirte Tangente des Elements $m'm''$ der Krümmungslinie; letztere ist zugleich die Tangente der zweiten durch n gehenden auf $m'm''$ senkrechten Krümmungslinie. Die Polare oM, oder ihre Verlängerung, werde von der Flächennormale nN im Punkt N und von der konjugirten Tangente des Elements $m'm''$ in T geschnitten. Ferner werde die Polare $o'M$, oder ihre Verlängerung, von der Flächennormale $n'N'$ in N' und von der konjugirten Tangente des Elements $m''m'''$ in T' geschnitten. Da nun die beiden Normalebenen der Fläche $noo'M$ und $n'o'M$ sich in der Polare $o'M$ schneiden, so liegt auf diesem Durchschnitt sowohl der der Normale $n'N'$ entsprechende Krümmungsmittelpunkt der Fläche als auch der Durchschnitt der zwei auf einander folgenden konjugirten Tangenten nT und $n'T'$; der Krümmungsmittelpunkt ist also N' und der Durchschnitt von nT und $n'T'$ ist T'. Hierin ist folgender Satz enthalten:

11. *Die Polare eines Elements der Krümmungslinie auf einer Fläche enthält den diesem Element entsprechenden Krümmungsmittelpunkt der Fläche, und den Durchschnittspunkt von zwei auf einander folgenden konjugirten Tangenten der Krümmungslinie.*

$o'N' \cdot o'T' = \overline{n'o'}^2$, weil der Winkel $N'n'T'$ ein Rechter ist; $n'o'$ ist der Krümmungshalbmesser der Krümmungslinie für den Punkt n' oder das Element $m''m'''$. D. h.:

12. Das Produkt des Abstands des Krümmungsmittelpunkts einer Fläche, welcher einem Element ihrer Krümmungslinie entspricht, und des Durchschnitts von zwei konjugirten Tangenten dieses Elements von der Oskulationsebene ist gleich dem Quadrat des Krümmungshalbmessers der Krümmungslinie.

Sämmtliche konjugirte Tangenten einer Krümmungslinie bilden eine entwickelbare Fläche. Die beiden konjugirten Tangenten nTT' und $n'T'$ schneiden sich in T'; ebenso läßt sich zeigen, daß der Durchschnitt von nT und der unmittelbar vorhergehenden konjugirten Tangente des Elements mm' der Punkt T ist. Also ist TT' ein Element der Rückkehrkante dieser entwickelbaren Fläche. Dieses Element liegt aber auch auf der Ebene oMo', welche durch zwei auf einander folgende Polaren oM und $o'M$ der Elemente $m'm''$ und $m''m'''$ gebildet ist. Sämmtliche Polaren irgend einer Kurve doppelter Krümmung, also auch einer Krümmungslinie, bilden eine entwickelbare Fläche:

Die Rückkehrkante der von den konjugirten Tangenten einer Krümmungslinie gebildeten entwickelbaren Fläche liegt auf der entwickelbaren Fläche der Polaren der Krümmungslinie.

Die Flächennormalen nN und $n'N'$ schneiden sich in N' auf der Polare $o'M$; ebenso kann man nachweisen, daß der Durchschnitt von nN und der vorhergehenden Flächennormale, welche dem Element mm' entspricht, in N auf der Polare oM ist; somit ist NN' ein Element der Rückkehrkante der von den auf einander folgenden Flächennormalen, deren Fußpunkte die Krümmungslinie $mm'm''m'''$ bilden, erzeugten entwickelbaren Fläche. Wir haben somit einen dem vorigen ganz analogen Satz:

Die Rückkehrkante der entwickelbaren Fläche, welche diejenigen Normalen einer Fläche bilden, deren Fußpunkte auf einer Krümmungslinie sind, liegt auf der Fläche der Polaren der Krümmungslinie.

Die Ebene $nT'n'$ enthält die Gerade nn', welche man als senkrecht auf der Ebene oMo' betrachten kann, mithin steht die Ebene $nT'n'$ selbst senkrecht auf oMo'; da nun nT' und $n'T'$ zwei auf einander folgende Tangenten der Rückkehrkante auf der entwickelbaren Fläche sind, welche die konjugirten Tangenten der Krümmungslinie $mm'm''m'''$ bilden, so ist die Ebene $nT'n'$ eine Oskulationsebene dieser Rückkehrkante; die Oskulationsebenen letzterer Linie stehen demnach senkrecht auf den Tangentialebenen der Fläche der Polaren, woraus folgt:

13. Die Rückkehrkante der von den konjugirten Tangenten einer Krümmungslinie gebildeten entwickelbaren Fläche ist eine geodätische Linie auf der Fläche der Polaren.

Ganz analog läßt sich der Beweis dieses Satzes führen:

14. Die Rückkehrkante der entwickelbaren Fläche, welche diejenigen Normalen einer Fläche bilden, deren Fußpunkte auf einer Krümmungslinie liegen, ist auf der Fläche der Polaren der Krümmungslinie eine geodätische Linie.

Wir haben also auf der entwickelbaren Fläche der Polaren irgend einer Krümmungslinie zwei geodätische Linien; die eine enthält die Durchschnitte von je zwei auf einander folgenden konjugirten Tangenten der Krümmungslinie; die andere die Durchschnitte von je zwei auf einander folgenden Normalen der Fläche, oder die Krümmungsmittelpunkte, welche den durch die Tangenten der Krümmungslinie gehenden Normalschnitten der Fläche entsprechen. Da der Winkel $T'n'N'$ ein Rechter ist, so schneiden die Linien $n'T'$ und $n'N'$ die Gerade $T'o'N'$ so, daß die Differenz der beiden Winkel ein Rechter ist, oder auch, die Tangenten der beiden geodätischen Linien, wovon soeben die Rede war, bilden mit einer Erzeugenden der entwickelbaren Fläche, auf welcher sie liegen, Winkel, die um 90^0 verschieden sind.

Wir wollen als ersten speziellen Fall eine ebene Krümmungslinie annehmen. Die Fläche der Polaren ist alsdann ein Cylinder, welcher die Ebene der Krümmungslinie senkrecht trifft; die beiden, von den konjugirten Tangenten der Krümmungslinie und von den Flächennormalen, deren Fußpunkte auf der Krümmungslinie liegen, erzeugten geodätischen Linien sind also Schraubenlinien; und da die Tangenten einer Schraubenlinie mit der Grundfläche des Cylinders, auf dem sie sich befinden, einen konstanten Winkel bilden, so haben wir wieder den Satz von Joachimsthal, daß die Normalen einer Fläche längs einer ebenen Krümmungslinie, oder was dasselbe ist, die Tangentialebenen mit der Ebene einer solchen Krümmungslinie einen konstanten Winkel bilden.

Wenn aber die Krümmungslinie sphärisch ist, so bilden ihre Polaren, welche alle durch den Mittelpunkt der Kugel gehen müssen, auf welcher die Krümmungslinie liegt, einen Kegel; die konjugirten Tangenten der letzteren und die Flächennormalen berühren diesen Kegel ebenfalls in geodätischen Linien, und da diese Linien bei der Abwicklung des Kegelmantels in eine Ebene sich in Gerade verwandeln müssen, so folgt daraus, daß das von der Spitze des Kegels oder dem Mittelpunkt der Kugel auf diese Gerade gefällte Perpendikel so groß ist, als irgend ein von der Spitze auf eine Tangente der geodätischen Linie herabgelassenes Perpendikel, welche entsteht, wenn die Ebene mit der in ihr liegenden festen Geraden wieder auf die Kegelfläche aufgerollt wird, d. h. alle Tangenten einer geodätischen Linie auf einem Kegel sind gleichweit von der Spitze desselben entfernt; sie umhüllen eine concentrische Kugel und bilden in der vorhin genannten Kugel solche Sehnen, welche vermöge ihrer konstanten Entfernung vom Mittelpunkt unter einander gleich sind. Alle gleich lange Sehnen einer Kugel schneiden dieselbe unter einem konstanten Winkel, oder auch, sie bilden mit jeder durch ihren Endpunkt gehenden Tangentialebene der Kugel einen konstanten Winkel. Wir können Vorstehendes so zusammenfassen:

15. Wenn eine Krümmungslinie sphärisch ist, so bilden ihre konjugirten Tangenten sowohl als auch die Normalen der Fläche, deren Fußpunkte auf dieser Krümmungslinie liegen, Sehnen von konstanter Größe in der Kugel, welche die Krümmungslinie enthält. Diese Kugel schneidet die Fläche überall unter konstantem Winkel.

Die Ebene $n'o'M$ geht durch den Mittelpunkt M der Kugel, also liegen die beiden Sehnen von konstanter Größe in einer Diametralebene derselben, die Summe ihrer Quadrate ist sohin gleich dem Quadrat des Durchmessers der Kugel.

Da sich die Normalen nN und $n'N'$ in N' schneiden, so machen beide mit der Oskulationsebene $m'm''m'''$ der Krümmungslinie $mm'm''m'''$ gleiche Winkel, und da die Krümmungshalbmesser on und $o'n$ in der Normalebene $Nnoo'M$ liegen, so ist der Winkel α, welchen die Normale nN mit der Oskulationsebene $mm'm''$ bildet, gleich Nno. Andererseits ist der Winkel β, welchen die Normale n′N′ mit der Oskulationsebene m′m″m‴ macht, gleich N′n′o′ = Nno′; mithin $\beta - \alpha$ = Nno′ − Nno = ono; dieß ist aber der Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Oskulationsebenen der Krümmungslinie; man hat also nachstehenden Satz (von Liouville):

16. Längs einer Krümmungslinie auf einer Fläche ist die unendlich kleine Veränderung des Winkels zwischen der Flächennormale und der Oskulationsebene, oder was dasselbe ist, zwischen der Tangentialebene und der Oskulationsebene von einem Element zum andern gleich dem Winkel zwischen beiden Oskulationsebenen.

Dieser Satz enthält wieder als speziellen Fall in sich, daß bei einer ebenen Krümmungslinie die Fläche von dieser Ebene überall unter demselben Winkel geschnitten wird, denn bei einer ebenen Kurve fallen alle Oskulationsebenen zusammen; also ist auch der Winkel zwischen der Flächennormale und der Oskulationsebene konstant.

Wir wollen nun annehmen, die Linie mm′m″m‴ sei die Durchschnittslinie von zwei sich rechtwinklig und in einer Krümmungslinie schneidenden Flächen, so gelten auch die vorhergehenden Demonstrationen, nur mit der Veränderung, daß die konjugirten Tangenten nT und n′T′ nun zugleich Normalen der zweiten Fläche sind, und daß ihre auf einander folgenden Durchschnittspunkte Krümmungsmittelpunkte der letzteren Fläche werden. Wir können also folgende Sätze anführen:

17. Bei zwei sich rechtwinklig und in einer Krümmungslinie schneidenden Flächen ziehe man eine Tangente an die gemeinschaftliche Durchschnitts- oder Krümmungslinie; durch diese Tangente gehen zwei Normalebenen, in jeder derselben liegt der Krümmungsmittelpunkt des betreffenden Normalschnitts. Die Verbindungslinie dieser beiden Krümmungsmittelpunkte ist die Polare der Durchschnittskurve. Das Produkt der Entfernungen derselben von der Oskulationsebene der letzteren ist gleich dem Quadrat ihres Krümmungshalbmessers.

Die Normalen einer beliebigen Fläche (λ) berühren die beiden Mäntel der Fläche der Krümmungsmittelpunkte (α) und (β) zugleich, (α) und (β) schneiden sich in der gemeinschaftlichen Krümmungslinie K orthogonal (§. 15). Diejenigen Normalen von (λ), deren Fußpunkte eine Krümmungslinie L dieser Fläche sind, bilden auf (α) eine geodätische Linie, deren konjugirte Tangenten die Polaren von L sind. Wir haben nämlich oben nachgewiesen, daß die auf einander folgenden Durchschnitte dieser Normalen auf der Fläche der Polaren von L liegen, und daß sie hier eine geodätische Linie bilden. Die entwickelbare Fläche, deren Erzeugende die Normalen von (λ) sind, schneidet somit nicht blos (α), sondern auch die Fläche der Polaren von L senkrecht, also ist die genannte geodätische Linie eine gemeinschaftliche Berührungslinie der zwei letzteren Flächen; und hieraus folgt auch, daß die Polaren von L konjugirte Tangenten der geodätischen Linie auf (α) sind. Da wo diese Linie K berührt, trifft die Tangente von K (λ) in einem Nabelpunkt, und hier stehen auch die konjugirten Tangenten von K hinsichtlich der Flächen (α) und (β) auf einander senkrecht, und also auch die Polaren der durch den Nabelpunkt gehenden Krümmungslinie von (λ). Wir haben also den Satz:

18. Die Polaren der Krümmungslinie einer Fläche sind die konjugirten Tangenten einer geodätischen Linie auf der Fläche der

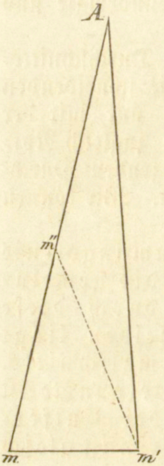
Krümmungsmittelpunkte; die Polaren der beiden durch einen Nabelpunkt gehenden Krümmungslinien stehen auf einander senkrecht. Die Polaren der zwei durch jeden andern Punkt der gegebenen Fläche gehenden Krümmungslinien schneiden sich schief.

Hier reiht sich die Uebertragung verschiedener Sätze auf die Polaren und geodätischen Linien an, welche den Krümmungslinien entsprechen (Dr. W. Schell: Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung, S. 31).

§. 17. Die Linien auf den Flächen. Schluß.

A ist ein beliebiger Punkt auf einer Fläche, von welchem aus zwei gleich lange geodätische Linien gezogen sind, Am und Am', die bei A einen unendlich kleinen Winkel bilden, so muß der Winkel mm'A ein Rechter sein. Denn wäre er schief und größer als der Winkel bei m, so könnte man m'm'' so ziehen, daß Winkel mm'm'' = 90 Grad wäre; in dem unendlich kleinen Dreieck mm'm'' wäre mm'' die Hypotenuse, also größer als m'm'', mithin Am'' + m''m' < Am'' + m''m < Am < Am' oder kleiner als die kürzeste Linie zwischen A und m', was nicht möglich ist. Hierauf beruht folgender Satz von Gauß: (Disquisitiones generales circa superficies curvas, Seite 528 in der fünften Auflage des Werks: Monge, application de l'analyse à la géométrie)

Fig. 7.



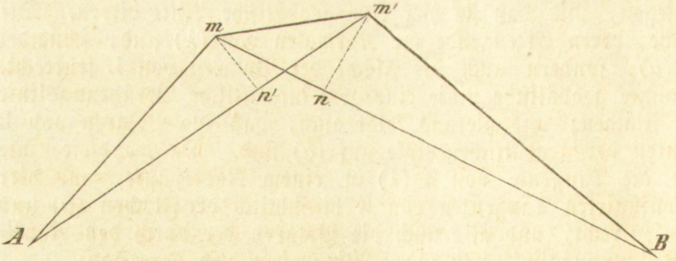
Wenn man von einem Punkt auf einer Fläche unendlich viele gleich lange geodätische Linien zieht, so schneiden sie die Verbindungslinie ihrer Endpunkte rechtwinklig.

Dieser Satz läßt sich umkehren:

Alle von einem Punkt einer Fläche ausgehenden geodätischen Linien, welche die Verbindungslinie ihrer Endpunkte rechtwinklig treffen, sind gleich lang. Denn wäre z. B. Am > Am', so könnte man auf Am einen Punkt m'' annehmen, so daß Am'' = Am' wäre. Dann müßte nach dem vorigen Satz Winkel m''m'A ein Rechter sein, was der Voraussetzung widerspricht.

A und B sind zwei feste Punkte auf einer Fläche; mm' ist ein Element einer Kurve der Fläche, welche die Eigenschaft hat, daß die Summe der von einem Punkt derselben nach A und B gezogenen geodätischen Linien konstant ist; also Am + Bm = Am' + Bm'. Hieraus folgt Bm — Bm' = Am' — Am. Wir nehmen auf Am' den Punkt n' und auf Bm den Punkt n an, so daß An' = Am und Bn = Bm' ist; man ziehe mn' und m'n, so sind nach dem Vorhergehenden die Winkel

Fig. 8.



$mn'm$ und mnm' Rechte; ferner sind die Differenzen mn und $m'n'$ gleich, also haben die unendlich kleinen rechtwinkligen Dreiecke zwei Seiten gleich, mithin sind sie kongruent, woraus die Gleichheit der Winkel $mm'A$ und $m'mB$ folgt. Hierauf beruht der Satz:

Wenn eine Kurve auf einer Fläche die Eigenschaft hat, daß die Summe der von einem Punkt derselben nach zwei festen Punkten der Fläche gezogenen geodätischen Linien konstant ist, so schneiden die letzteren die Kurve unter gleichen Winkeln.

Nehmen wir aber umgekehrt an, es sei vorausgesetzt, die Winkel $mm'A$ und $m'mB$ sollen gleich sein, so ziehen wir mn' und $m'n$ senkrecht auf Am' und Bm; dann haben die rechtwinkligen Dreiecke $mm'n'$ und $mm'n$ die Hypotenuse und die Winkel gleich, sind somit kongruent, also ist $mn = m'n'$. Nun ist $Am = An'$ und $Bn = Bm'$ also auch $Am' - Am = Bm - Bm'$ oder $Am + Bm = Am' + Bm'$.

Wenn auf einer Fläche eine Kurve gegeben ist, welche die Eigenschaft hat, daß die von einem Punkt derselben nach zwei festen Punkten der Fläche gezogenen geodätischen Linien mit der Kurve gleiche Winkel bilden, so ist die Summe dieser Linien für jeden Punkt der Kurve konstant.

Die beiden vorhergehenden Sätze behalten ihre Richtigkeit, wenn man statt Summe „Differenz“ setzt und annimmt, daß die Kurve den von beiden geodätischen Radienvektoren gebildeten Winkel halbirt. Da der Beweis ganz analog dem früheren ist, so braucht er nicht angeführt zu werden. Wir haben also folgende Sätze:

Auf einer Fläche sind zwei feste Punkte und eine Kurve gegegeben. Wenn der Winkel, welchen die von einem Punkt der Kurve nach den festen Punkten gezogenen geodätischen Radienvektoren mit einander bilden, von der Kurve halbirt wird, so ist die Differenz dieser Radien konstant, und umgekehrt.

Wir verbinden die festen Punkte A und B durch eine geodätische Linie, ziehen durch die Mitte derselben eine zweite geodätische Linie auf der Fläche, welche sie senkrecht trifft. Durch einen beliebigen Punkt m der Fläche ziehen wir die geodätischen Linien mA und mB; es sei $mA + mB = 2\mu$; $mA - mB = 2\nu$, so liegt m auf dem Durchschnitt zweier Kurven. Die erste entspricht der Gleichung $\mu = \text{const.}$ und die andere der Gleichung $\nu = \text{const.}$ Es folgt aus dem Vorhergehenden unmittelbar, daß diese Kurven, welche wir mit (μ) und (ν) bezeichnen, sich in m senkrecht schneiden, weil die erste den Nebenwinkel der in m zusammentreffenden geodätischen Linien, die andere diesen Winkel selbst halbirt. Die Linie (μ) treffe die Verlängerung der geodätischen Axe AB in M; C sei die Mitte von AB, so ist $CM = (\mu)$; die Linie (ν) trifft AB selbst im Punkt N, $CN = \nu$; die Größen μ und ν können wir die Parameter der Kurven (μ) und (ν) nennen. Durch beliebige Veränderung dieser Parameter erhält man zwei Systeme von orthogonalen Kurven, welche die Fläche in unendlich kleine Rechtecke oder Quadrate theilen. Jeder Punkt der Fläche ist bestimmt, wenn die Parameter μ und ν der durch ihn gezogenen Linien (μ) und (ν) gegeben sind; somit können die Größen μ und ν als krummlinige Coordinaten (coordonnées curvilignes) des Punkts angesehen werden. Bei diesem Coordinatensystem haben die Kurven (μ) und (ν) die einfachste Gleichung; nämlich $\mu = \text{const.}$ $\nu = \text{const.}$

Um bestimmte Anhaltspunkte zu geben, mögen drei verschiedene Fälle angeführt werden:

1. Die gegebene Fläche ist eine Ebene; dann sind die geodätischen Linien mA und mB Gerade, und die Kurven (μ) sind Ellipsen, die Kurven (ν) Hyperbeln, A und B sind die gemeinschaftlichen Brennpunkte dieser Kegelschnitte, weßhalb dieselben homofokal genannt werden. Hieher gehört auch der Fall, wo die gegebene Fläche entwickelbar ist. Die Kurven (μ) und (ν) verwandeln sich bei der Abwicklung der Fläche in eine Ebene ebenfalls in homofokale Kegelschnitte.

2. Die Fläche ist eine Kugel. Die Kurven (μ) und (ν) sind sphärische Kegelschnitte, deren Brennpunkte A und B sind, und die deßhalb gleichfalls homofokal heißen. Die geodätischen Linien sind größte Kreise der Kugel; wenn man durch die Brennpunkte eines sphärischen Kegelschnitts zwei solche Kreise zieht, die sich auf dem Kegelschnitt schneiden, so bilden sie mit den Kurven gleiche Winkel, und die Summe ihrer Bögen ist konstant.

3. Die Fläche ist ein Ellipsoid oder ein zweimantliges Hyperboloid. Die Kurven (μ) und (ν) sind die Krümmungslinien der Fläche, die Brennpunkte A und B sind die Nabelpunkte.

Wie wir später sehen werden, haben zwei durch die Nabelpunkte eines Ellipsoids oder zweimantligen Hyperboloids gezogene geodätische Linien die Eigenschaft, daß sie mit der Krümmungslinie, auf welcher sie sich schneiden, gleiche Winkel bilden, und hieraus folgt nach unseren Sätzen, daß die Summe oder Differenz dieser geodätischen Linien für alle Punkte einer Krümmungslinie konstant und gleich 2μ oder 2ν ist. Bei der Summe schließt die Krümmungslinie beide Nabelpunkte ein, und bei der Differenz trennt sie diese Punkte. Es seien A B B′ drei Nabelpunkte eines Ellipsoids. C ist die Mitte des Bogens AB und C′ diejenige von BB′. Durch einen beliebigen Punkt M der Fläche geht eine Krümmungslinie, welche den Bogen C′B in N trifft. $CN = \mu$, $C'N = \nu$; MA, MB, MB′ sind geodätische Linien; nun ist

$$MA + MB = 2\mu = 2CN;\ MB' - MB = 2\nu = 2C'N;\ \text{also}$$
$$MA + MB' = 2(\mu + \nu) = 2(CN + C'N) = \text{Bogen } ABB'$$

In dieser Gleichung ist folgendes Theorem, welches Mich. Roberts zuerst aus der Liouville'schen Gleichung für geodätische Linien auf dem Ellipsoid ableitete, enthalten:

Alle geodätische Linien zwischen zwei Nabelpunkten eines Ellipsoids sind gleich lang.

Unter allen geodätischen Linien, welche sich von einem Punkt auf einer Fläche nach einer Kurve ziehen lassen, ist diejenige die kürzeste, welche dieselbe rechtwinklig schneidet, und umgekehrt.

Denn würde die Minimumslinie die Kurve schief schneiden, so ließe sich im Durchschnittspunkt ein unendlich kleines rechtwinkliges Dreieck bilden, mm′m″; die Hypotenuse mm′ wäre ein Element der kürzesten geodätischen Linie, und mm″ ein Element der Kurve. Nun würde der Weg über m′ nach m länger sein, als derjenige über m′ nach m″, was der Voraussetzung widerspricht, mithin kann die kürzeste geodätische Linie die gegebene Kurve nicht schief schneiden. Die Converse läßt sich auf ähnliche Art beweisen.

Wenn man auf einer Fläche unendlich viele gleich lange geodätische Linien zieht, welche eine gegebene Kurve senkrecht schneiden, so treffen sie die Verbindungslinie ihrer Endpunkte rechtwinklig. (Gauss: disquisitiones.)

Es sei nn' ein Element der gegebenen Kurve, und nm gleich $n'm'$ sind zwei gleich lange geodätische Linien. Wäre der Winkel bei m' schief, so ziehe man mm'' senkrecht auf mm'. Nun ist $m'm''$ als Hypotenuse größer als die Cathete mm'', mithin wäre $m'm'' + m''n' > mm'' + m''n'$; aber $m'm'' + m''n'$ ist gleich mn, also auch $mn > mm'' + m''n'$, was dem vorigen Satz widerspricht, da mn die kürzeste Linie ist, die sich von m nach der gegebenen Kurve ziehen läßt. Ganz leicht ist der Beweis der Umkehrung:

Alle geodätische Linien einer Fläche, welche zwei gegebene Kurven senkrecht treffen, sind zwischen diesen Kurven von gleicher Länge.

Auf den Flächen gibt es gewisse Kurven, welche die Eigenschaft haben, daß alle geodätische Linien, welche durch die verschiedenen Punkte ihres Umfangs senkrecht auf demselben gezogen werden, sich in einem Punkte schneiden. Solche Linien sollen der Kürze wegen Mittelpunktskurven genannt werden. Dieß vorausgesetzt, seien auf einer Fläche ein fester Punkt A, eine Kurve C und eine Mittelpunktskurve M gegeben. Zieht man von irgend einem Punkte c auf C geodätische Linien, cA und cm, wovon die letztere M rechtwinklig trifft in m, und wird der Winkel zwischen cA und cm von der Tangente der Kurve C halbirt, so ist $cA - cm = \text{const.}$, denn cm geht verlängert durch den Mittelpunkt B von M; nach dem Früheren ist $cB - cA = \text{const.}$, und da alle Radien Bm von M einander gleich sind, so ist auch $cA - cm = \text{const.}$ Jeder Krümmungslinie auf einem Ellipsoid oder zweimantligen Hyperboloid entspricht z. B. eine Mittelpunktskurve. Sind A und B die Nabelpunkte der Fläche, ist m ein Punkt der Krümmungslinie, ferner $Am + Bm = 2\mu$ oder $Am - Bm = 2\nu$, so sind die von A und B mit den geodätischen Halbmessern 2μ beziehungsweise 2ν beschriebenen Kurven die Mittelpunktskurven der Krümmungslinie; jeder Punkt der letzteren hat die Eigenschaft, daß die von ihm nach A oder B gezogenen geodätischen Linien so lang sind, als die nach der Mittelpunktskurve gezogenen geodätischen Minimumslinien. Das elliptische Paraboloid hat zwei Nabelpunkte A und A'; die beiden andern sind unendlich ferne Punkte. Alle von A oder A' ausgehenden geodätischen Linien gehen nach diesen unendlich fernen Nabelpunkten hin. Betrachtet man z. B. eine derjenigen Mittelpunktskurven, deren geodätische Halbmesser in A konvergiren, d. h. eine solche Linie, welche alle von A ausgehenden geodätischen Linien senkrecht schneidet, so findet man, daß derselben eine Krümmungslinie der Fläche entspricht; zieht man also von einem Punkt c der letztern die geodätischen Linien cA und cm (in m wird die genannte Mittelpunktskurve senkrecht geschnitten), so ist im Allgemeinen $cA - cm = \text{const.}$ für alle Punkte der Krümmungslinie. Bei einer besonderen Mittelpunktskurve ist die const. gleich Null, also $cA = cm$; zu dieser Kurve steht die Krümmungslinie in einer ähnlichen Beziehung, wie die Parabel zu ihrer Direktrice. Die Tangente der Krümmungslinie halbirt den Winkel der geodätischen Linien cA und cm.

Auf einer Fläche sind zwei Kurven gegeben, welche sich in A schneiden; alle diejenigen Punkte, deren geodätische Entfernungen von beiden Kurven gleich sind, liegen auf einer Linie, welche den Winkel in A halbirt. Es sei ABC ein von drei beliebigen Kurven auf einer Fläche gebildetes Dreieck. Durch die Ecken gehen drei Linien, welche die Eigenschaft haben, daß jeder ihrer Punkte von den beiden in einer solchen Ecke zusammenstoßenden Seiten gleichweit entfernt ist, d. h. daß die geodätischen Minimumslinien, die sich von dem Punkte nach diesen Seiten ziehen lassen, einander gleich sind. Man erhält also drei Linien, welche die Winkel bei A, B, C halbiren, und einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben. Dieß ist der Mittelpunkt der die drei Seiten von A B C berührenden Mittelpunktskurve.

A und B sind zwei feste Punkte auf einer Fläche. Alle diejenigen Punkte, deren geodätische Entfernungen von A und B einander gleich sind, liegen auf einer Kurve, welche die geodätische Linie in ihrer Mitte senkrecht schneidet. Diese Kurve gehört zur Klasse derjenigen Linien, welche wir oben betrachtet haben, und bei welcher die Differenz der geodätischen Entfernungen eines ihrer Punkte von zwei festen Punkten konstant ist. In dem hier betrachteten speziellen Fall ist diese Differenz gleich Null. Um auf einer Fläche einen Punkt zu finden, der von drei gegebenen Punkten A, B, C gleich weit entfernt ist, konstruirt man drei Linien, bei welchen jeder Punkt gleichweit absteht von A und B, von A und C und von B und C. Diese drei Linien haben einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, welcher zugleich Mittelpunkt der um das Dreieck ABC beschriebenen Mittelpunktskurve ist.

Wenn man sämmtliche geodätische Linien zieht, welche irgend eine Kurve C auf einer Fläche senkrecht schneiden, so berühren dieselben eine zweite Kurve C′, zu welcher C in derselben Beziehung steht, wie eine Linie in der Ebene zu ihrer Evolute. Ein Faden, welcher so über die Fläche gespannt ist, daß er fortwährend C′ berührt, beschreibt bei der Abwicklung mit einem seiner Punkte die gegebene Kurve C. Jeder einzelne Punkt des Fadens beschreibt bei dieser Bewegung wieder eine andere Kurve, welche alle mit C parallel sind, d. h. alle geodätischen Linien, die zwischen solchen parallelen Kurven senkrecht auf die Eine gezogen werden, sind an Länge gleich und schneiden auch die andere senkrecht. Diese parallelen Kurven in Verbindung mit den sie senkrecht kreuzenden geodätischen Linien bilden zwei orthogonale Systeme von Kurven, welche zur Bestimmung der Punkte auf der Fläche dienen können, wie auf der Ebene zwei sich senkrecht kreuzende Systeme von Linien zur Bestimmung der Lage von Punkten angewandt werden.

Wir können zu diesem Zweck eine der parallelen Kurven als die erste Coordinatenaxe, und eine der auf ihr senkrechten geodätischen Linien als die andere Coordinatenaxe betrachten. Beide Axen sollen sich in O schneiden; wir bezeichnen sie mit OX und OY; ein Punkt (x, y) auf der Fläche ist bestimmt, wenn die Größen x und y gegeben sind; y ist die kürzeste geodätische Entfernung des Punkts von der Kurve oder Axe OX und x ist der Bogen von OX zwischen dem Durchschnittspunkt dieser sie senkrecht treffenden geodätischen Linie und zwischen dem Ursprung O. Die Gleichungen der auf OX senkrechten geodätischen Linien haben die Form

$$x = \text{const.}$$

und die Gleichungen der mit der Axe OX parallelen Kurven sind

$$y = \text{const.}$$

Ein spezieller Fall dieser Coordinatensysteme, welcher den Polarcoordinaten der Ebene entspricht, ist derjenige, wo die Parallelkurven Mittelpunktskurven sind; dann convergiren die sie orthogonal schneidenden geodätischen Linien in einem Punkte. Es sei O dieser Punkt, und Ox diejenige geodätische Linie, welche als Axe angenommen wird. Ein beliebiger Punkt M der Fläche ist bestimmt durch die Länge OM des geodätischen Radiusvektor, auf welchem er liegt, und durch den Winkel ω, welchen derselbe bei O mit der Axe Ox bildet.

$$\omega = \text{const.}$$

ist die Gleichung aller in O convergirenden geodätischen Linien.

$$r = \text{const.}$$

ist die Gleichung derjenigen Mittelpunktskurven der Fläche, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt O ist.

§. 18. Zusammenstellung von Formeln für die Flächen zweiten Grads.

A. Die drei centrischen Flächen, das Ellipsoid, das einmantlige Hyperboloid, das zweimantlige Hyperboloid.

$$1.\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Dieß sind die Gleichungen dieser Flächen. Wir setzen, wie oben, die partiellen Ableitungen

$$\frac{dz}{dx} = p,\ \frac{dz}{dy} = q,\ \frac{d^2z}{dx^2} = r,\ \frac{d^2z}{dxdy} = s,\ \frac{d^2z}{dy^2} = t$$

und erhalten

$$2.\quad p = -\frac{c^2}{a^2}\,\frac{x}{z};\ q = -\frac{c^2}{b^2}\,\frac{y}{z};\ r = -\frac{c^4}{a^2b^2z^3}(b^2 - y^2);\ s = -\frac{c^4}{a^2b^2z^3}xy;$$

$$t = -\frac{c^4}{a^2b^2z^3}(a^2 - x^2) \text{ für das Ellipsoid.}$$

$$3.\quad p = +\frac{c^2}{a^2}\,\frac{x}{z};\ q = +\frac{c^2}{b^2}\,\frac{y}{z};\ r = -\frac{c^4}{a^2b^2z^3}(b^2 - y^2);\ s = -\frac{c^4}{a^2b^2z^3}xy;$$

$$t = -\frac{c^4}{a^2b^2z^3}(a^2 - x^2) \text{ für das einmantlige Hyperboloid.}$$

$$4.\quad p = +\frac{c^2}{a^2}\,\frac{x}{z};\ q = \frac{c^2}{b^2}\,\frac{y}{z};\ r = -\frac{c^4}{a^2b^2z^3}(b^2 + y^2);\ s = +\frac{c^4}{a^2b^2z^3}xy;$$

$$t = +\frac{c^4}{a^2b^2z^3}(a^2 - x^2) \text{ für das zweimantlige Hyperboloid.}$$

Durch die Substitution dieser Werthe in die allgemeine Gleichung der Tangentialebene $z' - z = p(x' - z) + q(y' - y)$ ergibt sich

$$5.\quad \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1;\ \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - \frac{zz'}{c^2} = 1;\ \frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} - \frac{zz'}{c^2} = 1$$

Dieß sind die Gleichungen der Tangentialebenen; x, y, z sind die laufenden Coordinaten und x', y', z' ist der Berührungspunkt. Betrachten wir nun in $z' - z = p(x' - x) + q(y' - y)$ $x'y'z'$ als die Coordinaten der Spitze eines Kegels, so stellt diese Gleichung eine Kegelfläche vor. Durch Substitution der Werthe von p und q aus 2., 3. und 4. erhält man genau die Gleichungen 5 wieder; und da letztere mit Hülfe von 1. gefunden wurden, so geht daraus hervor, daß wenn der Punkt $(x'y'z')$ nicht auf der Fläche liegt, sie sich auf diejenige Kurve beziehen, welche die Fläche und der durch diesen Punkt an sie gelegte Tangentialkegel gemein haben. Man sieht, daß diese Kurve eben ist; die Ebene, worin sie liegt, heißt die P o l a r e b e n e des Punkts $(x'y'z')$, welcher Pol heißt. Wir haben somit den Satz:

D i e G l e i c h u n g e n 5 s t e l l e n d i e T a n g e n t i a l e b e n e d e s P u n k t s o d e r P o l s $(x'y'z')$ d a r, w e n n e r a u f d e r F l ä c h e l i e g t, u n d d e s s e n P o l a r e b e n e, w e n n e r n i c h t a u f d e r F l ä c h e l i e g t. Befindet sich der Pol innerhalb der Fläche, so läßt sich kein Berührungskegel an die Fläche legen, dessen Spitze er ist; oder vielmehr, dieser Kegel wird imaginär. Allein die Gleichungen 5 stellen dessen ungeachtet reelle Ebenen vor, welche auch in diesem Fall die Polarebenen des Pols $(x'y'z')$ genannt werden.

Wenn wir nun annehmen, der Pol $(x'y'z')$ bewege sich auf einer Geraden, deren Gleichungen

6. $x' + \alpha z' = m\,; \; y' + \beta z' = n$

sind, so erhalten wir durch Verbindung der Formeln 5 und 6

$$\frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} - \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - \frac{z}{c^2}\right) z' = 1$$

Diese Gleichung ist von z' unabhängig, wenn $\frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} - 1 = o$ und $\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - \frac{z}{c^2} = o$, oder, was dasselbe ist

7. $$x + \frac{n\frac{a^2}{c^2}}{\beta m - \alpha n} z = \frac{\beta a^2}{\beta m - \alpha n}\,; \quad y + \frac{m\frac{b^2}{c^2}}{\alpha n - \beta m} z = \frac{\alpha b^2}{\alpha n - \beta m}$$

Dieß ist die Gleichung einer Geraden, welche folgenden Satz enthält:

Bewegt sich der Pol auf einer Geraden, so schneiden sich die Polarebenen ebenfalls in einer Geraden; beide Gerade heißen konjugirt; zwei solche Gerade sind durch die Gleichungen 6 und 7 dargestellt; der Cosinus ihres Winkels ist gleich

8. $$\frac{\alpha na^2 - \beta mb^2 + (\beta m - \alpha n)\, c^2}{\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}\,\sqrt{n^2a^4 + m^2b^4 + (\beta m - \alpha n)\, c^4}}$$

Sollen zwei konjugirte Gerade senkrecht auf einander stehen, so muß

$$\alpha na^2 - \beta mb^2 + (\beta m - \alpha n)\, c^2 = o$$

sein. Bei der Kugel, wo $a = b = c$ ist, erfüllt sich diese Bedingung von selbst, mithin stehen dort je zwei konjugirte Gerade auf einander senkrecht.

Wir wollen nun annehmen, der Pol $(x'y'z')$ bewege sich auf einer Ebene, deren Gleichung

9. $\alpha x' + \beta y' + \gamma z' = 1$

sei, durch Verbindung derselben mit 5. erhalten wir

$$\frac{x}{\alpha a^2} - 1 + \left(\frac{y}{b^2} - \frac{\beta x}{\alpha a^2}\right) y' + \left(\frac{z}{c^2} - \frac{\gamma x}{\alpha a^2}\right) z' = o$$

Soll diese Gleichung von y' und z' unabhängig sein, so muß

10. $x = \alpha a^2 \qquad y = \beta b^2 \qquad z = \gamma c^2$ sein.

Dieß ist die Gleichung eines Punkts und enthält folgenden Satz:

Bewegt sich der Pol auf einer Ebene, so gehen die Polarebenen durch einen Punkt.

Die Gleichung 9 läßt sich auch so schreiben $x' + \frac{\beta}{\alpha} y' + \frac{\gamma}{\alpha} z' = \frac{1}{\alpha}$ und statt 10. kann man setzen $\frac{y}{x} = \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{b^2}{a^2}\,; \; \frac{z}{x} = \frac{\gamma}{\alpha}\,\frac{c^2}{a^2}$; wenn sich die Polarebene mit sich selbst parallel bewegt, so bleiben die Verhältnisse $\frac{\beta}{\alpha}$ und $\frac{\gamma}{\alpha}$ konstant, also auch die Brüche $\frac{y}{x}$ und $\frac{z}{x}$; hieraus schließt man:

Wenn sich die Polarebene parallel mit sich selbst bewegt, so liegen die Pole auf einer durch den Mittelpunkt gehenden Geraden.

$$11.\quad x = \frac{c^2}{a^2}\,\frac{x'}{z'}\,z + \frac{a^2 - c^2}{a^2}\,x' \qquad y = \frac{c^2}{b^2}\,\frac{y'}{z'}\,z + \frac{b^2 - c^2}{b^2}\,y'$$

$$12.\quad x = -\frac{c^2}{a^2}\,\frac{x'}{z'}\,z + \frac{a^2 + c^2}{a^2}\,x' \qquad y = -\frac{c^2}{b^2}\,\frac{y'}{z'}\,z + \frac{b^2 + c^2}{b^2}\,y'$$

$$13.\quad x = -\frac{c^2}{a^2}\,\frac{x'}{z'}\,z + \frac{a^2 + c^2}{a^2}\,x' \qquad y = \frac{c^2}{b^2}\,\frac{y'}{z'}\,z + \frac{b^2 - c^2}{b^2}\,y'$$

Diese Gleichungen beziehen sich auf die Normalen des Ellipsoids, des einmantligen und des zweimantligen Hyperboloids. x, y, z sind die laufenden Coordinaten, x', y', z' diejenigen des Fußpunkts der Normale auf der Fläche.

Setzen wir z. B. in der ersten Gleichung $z = 0$, so ist $\frac{x}{x'} = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$ $=$ const., d. h.:

Bei einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Verhältniß der Abstände von einer Hauptebene derjenigen zwei Punkte einer Normale, wo sie die Fläche und eine andere Hauptebene trifft, konstant. Setzen wir noch $x' =$ const., so ist auch $x =$ const. oder:

Die Normalen, deren Fußpunkte eine zu einer Hauptebene parallele Kurve bilden, schneiden eine andere Hauptebene in einer Geraden, die zu der ersten parallel ist.

Die Entfernung der Ebene $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ vom Ursprung sei $= P$, so ist nach §. 1, 25 $P = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$. Mittelst der Gleichungen 5 dieses Paragraphs erhalten wir somit für die Entfernungen P der Tangentialebenen des Punkts x', y', z' der drei centrischen Flächen vom Ursprung

$$14.\quad P = \frac{1}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}}}$$

Da aber die Gleichungen 5 zugleich die Polarebenen des Punkts (x', y', z') sind, wenn er nicht auf den Flächen liegt, so gibt der Werth von P in 14. auch das vom Mittelpunkt auf die Polarebene dieses Punkts oder Pols gefällte Perpendikel an, also:

Gegeben sind die drei Flächen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

wo die Größen a, b, c gleiche absolute Werthe haben.

Diese drei Flächen haben die Eigenschaft, daß ihre Polarebenen hinsichtlich eines Pols vom Mittelpunkt gleichweit abstehen.

Bewegt sich der Pol auf der Fläche $\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4} = \frac{1}{k^2}$, so berührt die Polarebene die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = k^2$, wo k eine Konstante bedeutet.

Die Formeln 29 und 30 des §. 4 lauten

$$\frac{1}{R\,.\,R'} = \frac{g}{k^4} \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{h}{k^3}$$

R und R′ sind die beiden Hauptkrümmungshalbmesser $k^2 = 1 + p^2 + q^2$, $g = rt - s^2$, $h = (1 + q^2) r + (1 + p^2) t - 2pqs$. Durch Hülfe der Gleichungen 2, 3, 4 erhalten wir für das Ellipsoid

$$k^2 = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right) \frac{c^4}{z^2} = \frac{c^4}{P^2 z^2}$$

$$g = \frac{c^6}{a^2 b^2 z^4}$$

$$h = -\frac{c^4}{a^2 b^2 z^3}(a^2 + b^2 + c^2 - x^2 - y^2 - z^2)$$

Für das einmantlige Hyperboloid

$$k^2 = \frac{c^4}{P^2 z^2} \qquad g = -\frac{c^6}{a^2 b^2 z^4}$$

$$h = \frac{c^4}{a^2 b^2 z^3}(a^2 - b^2 + c^2 - x^2 - y^2 - z^2)$$

Für das zweimantlige Hyperboloid

$$k^2 = \frac{c^4}{P^2 z^2} \qquad g = \frac{c^6}{a^2 b^2 z^4} \qquad h = -\frac{c^4}{a^2 b^2 z^3}(a^2 - b^2 - c^2 - x^2 - y^2 - z^2)$$

Ellipsoid:

$$\frac{1}{RR'} = \frac{P^4}{a^2 b^2 c^2} \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = -\frac{P^3}{a^2 b^2 c^2}(a^2 + b^2 + c^2 - x^2 - y^2 - z^2)$$

$$15. \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{2}\,\frac{P^2}{a^2 b^2 c^2}\Big\{(a^2 + b^2 + c^2 - x^2 - y^2 - z^2)\,P \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 - x^2 - y^2 - z^2)^2 P^2 - 4a^2 b^2 c^2}\Big\}$$

Die entsprechenden Relationen für das einmantlige Hyperboloid erhält man durch Veränderung des Zeichens von b^2 und für das zweimantlige Hyperboloid durch Veränderung des Zeichens von b^2 und c^2. Aus der Relation $\frac{1}{RR'} = \frac{P^4}{a^2 b^2 c^2}$ folgt der Satz: In allen Punkten einer Poloide ist das Krümmungsmaß (mensura curvaturae nach Gauß) konstant. Die Poloide ist diejenige Kurve, für welche P einen konstanten Werth hat; $\frac{1}{RR'}$ ist das Krümmungsmaß.

Die Gleichung der Krümmungslinien 22 in §. 4 heißt

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\Big((1 + q^2)\,s - pqt\Big) + \frac{dy}{dx}\Big\{(1 + q^2)r - (1 + p^2)\,t\Big\} - (1 + p^2)s + pqr = o$$

Durch Hülfe der Werthe in 2., 3., 4 verwandelt sich diese Gleichung in folgende:

$$A\,yx\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - Ay^2 - B)\,\frac{dy}{dx} - xy = o$$

$A = \dfrac{a^2(b^2 - c^2)}{b^2(a^2 - c^2)}$ $\qquad B = \dfrac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2}$ für das Ellipsoid. Durch Differenziation:

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(2Axy\frac{dy}{dx}+x^2-Ay^2-B\right)+\left(A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right)\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)=o$$

eliminirt man aus den 2 letzten Gleichungen eine der Konstanten, so verschwindet auch die andere, und man erhält $xyd^2y + dy\,(xdy - ydx) = o$ Durch Integration

$$\frac{y}{x}\,dy = \beta dx$$

16. $y^2 = \beta x^2 + \gamma$

Dieß ist die Gleichung der Projektion der Krümmungslinien auf der xy Ebene.

Die Konstanten β und γ müssen folgender Gleichung genügen:

$$16.\ \text{bis.}\quad -\frac{\frac{\gamma}{\beta}}{B} \pm \frac{\gamma}{\frac{B}{A}} = 1$$

Für das einmantlige Hyperboloid setzt man $-b^2$ statt b^2 und beim zweimantligen $-b^2$ und $-c^2$ statt b^2 und c^2 in den Werthen von A und B.

Die Relation 16 bis ergibt sich dadurch, daß man aus der Gleichung 16 und ihrem Differenzial $\frac{y}{x}\,dy = \beta dx$ die Werthe von y und $\frac{dy}{dx}$ in die obige Differenzialgleichung der Krümmungslinien setzt, wodurch auch x verschwindet.

Die Konstruktion dieser Linien, wie sie Monge für das Ellipsoid zuerst angegeben und ausführlich entwickelt hat, kann nun für alle centrische Flächen zweiten Grades keinem Anstand mehr unterliegen.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ und $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1$ sind die Gleichungen eines Ellipsoids und der Berührungsebene im Punkt (x', y', z'). Der mit ihr parallele Centralschnitt hat die Gleichung $\frac{x'\xi}{a^2} + \frac{y'\eta}{b^2} + \frac{z'\zeta}{c^2} = o$;

$x^2 + y^2 + z^2 = D^2$ ist die Gleichung einer concentrischen Kugel, also

17. $\frac{\xi^2}{a^2}(a^2-D^2) + \frac{\eta^2}{b^2}(b^2-D^2) + \frac{\zeta^2}{c^2}(c^2-D^2) = o$

diejenige eines concentrischen Kegels, welcher mit dem Ellipsoid und der Kugel eine Durchschnittslinie gemeinschaftlich hat. Dieser Kegel schneidet den Diametralschnitt in zwei Geraden, welche einander gleich sind und symmetrisch gegen die Axen dieses Schnitts liegen. In dem speziellen Fall, wo die Kegelfläche den elliptischen Centralschnitt berührt, fallen diese Geraden in eine zusammen, welche die Axe der Ellipse ist. Die Gleichung der Berührungsebene des Kegels im Punkt $(\xi, \eta, \zeta,)$ ist

$$\xi\xi'\frac{a^2-D^2}{a^2} + \eta\eta'\frac{b^2-D^2}{b^2} + \zeta\zeta'\frac{c^2-D^2}{c^2} = o$$

wo ξ', η', ζ' die laufenden Coordinaten sind. Diese Gleichung muß mit derjenigen des Centralschnitts identisch sein, also

18. $\frac{x'^2}{a^2(a^2-D^2)} + \frac{y'^2}{b^2(b^2-D^2)} + \frac{z'^2}{c^2(c^2-D^2)} = o$

Sie ist in Beziehung auf D^2 vom zweiten Grad und hat somit zwei Wurzeln, die wir mit D und D′ bezeichnen, und welche die Halbaxen des

Centralschnitts sind, der mit der Berührungsebene vom Punkt (x', y', z') parallel ist. Man kann diese Gleichung auch so schreiben, mit Hinweglassung des Index 2

$$x' bc(b-D)(c-D) + y' ac(a-D)(c-D) + z' ab(a-D)(b-D) = o$$

Der von D unabhängige Ausdruck ist

$$\frac{bbcc\,x' + aacc\,y' + aabb\,z'}{bc\,x' + ac\,y' + ab\,z'} = \frac{\frac{x'}{aa} + \frac{y'}{bb} + \frac{z'}{cc}}{\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b} + \frac{z'}{c}}\,abc$$

oder, wenn wir den Index 2 wieder setzen

$$= \frac{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}}{\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2}}\,a^2b^2c^2 = \frac{a^2b^2c^2}{P^2}$$

P ist das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene von (x', y', z') gefällte Perpendikel; mithin ist

$$D^2 D'^2 = \frac{a^2b^2c^2}{P^2}$$

Der Coefficient von $-D$ in jener Gleichung ist

$$\frac{x' bc(b+c) + y' ac(a+c) + z' ab(a+b)}{x' bc + y' ac + z' ab}$$

oder, mit Hinzufügung des Index 2

$$D^2 + D'^2 = \frac{x'^2}{a^2}(b^2+c^2) + \frac{y'^2}{b^2}(a^2+c^2) + \frac{z'^2}{c^2}(a^2+b^2)$$

Hieraus ergibt sich die Gleichung für die beiden Werthe D und D′

$$19.\quad D = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\frac{x'^2}{a^2}(b^2+c^2) + \frac{y'^2}{b^2}(a^2+c^2) + \frac{z'^2}{c^2}(a^2+b^2) \pm \sqrt{\left(\frac{x'^2}{a^2}(b^2+c^2) + \frac{y'^2}{c^2}(a^2+c^2) + \frac{z'^2}{c^2}(a^2+b^2)\right)^2 - 4\frac{a^2b^2c^2}{P^2}}\right\}}$$

D und D′ sind diejenigen 2 Semidiameter des Ellipsoids, welche dem Centralschnitte angehören, dessen Ebene parallel der Tangentialebene des Punkts (x', y', z') ist.

Man kann diesem Ausdruck noch eine andere Form geben; der nach dem Punkt (x', y', z') gezogene Semidiameter der Fläche sei H, so ist $H^2 = x^2 + y^2 + z^2$ mithin

$$D^2 + D'^2 + H^2 = \left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2}\right)(a^2+b^2+c^2) = a^2+b^2+c^2$$

$$D^2 + D'^2 = a^2 + b^2 + c^2 - H^2$$

$$20.\quad D = \sqrt{\frac{1}{2}\left(H^2 \pm \sqrt{H^4 - 4\frac{a^2b^2c^2}{P^2}}\right)}$$

Läßt man den Index ′ weg, und setzt für H^2 seinen Werth $x^2 + y^2 + z^2$ und für P^2 $\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$, so ist

$$21.\quad D = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{(x^2+y^2+z^2 \pm \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^2 - 4a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)}\right\}}$$

Beim zweimantligen Hyperboloid setzt man $-b^2$ und $-c^2$ statt b^2 und c^2, also hat D denselben Werth.

Behalten wir nun die ganze Deduktion bei, welche auf den Werth von D geführt hat, mit der einzigen Modifikation, daß wir annehmen, der Punkt $(x'y'z')$ liege außerhalb der Fläche, so ist $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1$ die Gleichung seiner Polarebene und $\frac{x'\xi}{a^2} + \frac{y'\eta}{b^2} + \frac{z'\zeta}{c^2} = o$ diejenige des mit dieser Polarebene parallelen Centralschnitts. Die Gleichungen bleiben also vollkommen ungeändert, mit der einzigen Ausnahme, daß, da $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ nun von 1 verschieden ist, etwa gleich $\frac{1}{m^2}$, der Werth von D mit m multiplicirt werden muß. Mithin haben wir dieses Resultat:

G e g e b e n i s t e i n P u n k t i m R a u m e, (x, y, z) u n d e i n e c e n t r i s c h e F l ä c h e z w e i t e n G r a d e s; d i e b e i d e n H a l b a x e n D u n d D' d e s j e n i g e n C e n t r a l s c h n i t t s d e r F l ä c h e, w e l c h e r m i t d e r P o l a r e b e n e d e s P u n k t s p a r a l l e l i s t, s i n d d u r c h d i e G l e i c h u n g a u s g e d r ü c k t

$$21.\text{ bis}\quad D = m\sqrt{\frac{1}{2}\left\{x^2+y^2+z^2 \pm \sqrt{(x^2+y^2+z^2)^2 - \frac{4a^2b^2c^2}{m^2}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)}\right\}}$$

Aus der Formel $P = \frac{1}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}}}$ haben wir oben geschlossen, daß, wenn sich ein Punkt auf der Fläche $\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4} = \frac{1}{k^2}$ bewegt, der Abstand des Mittelpunkts von seiner Polarebene konstant ist. Der Durchschnitt dieser Fläche mit dem Ellipsoid oder den Hyperboloiden in 1. hat sonach die Eigenschaft, daß die Entfernung seiner Tangentialebenen vom Ursprung konstant ist. D i e s e r D u r c h s c h n i t t ist also e i n e P o l o i d e. Sie wird dargestellt durch die Gleichungen 1 in Verbindung mit

$$22.\quad \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{k^2}$$

Man sieht daraus, daß diese e i n e Fläche die drei centrischen Flächen zweiten Grades in 1. zugleich in Poloiden schneidet.

Aus

$$23.\quad D\,.\,D' = \frac{abc}{P}$$

folgt, daß wenn P konstant ist, auch $D\,.\,D'$ und mithin $D\,.\,D'.\,\pi$ ebenfalls unverändert ist. Nun ist $D\,.\,D'.\,\pi$ der Inhalt desjenigen Diametralschnitts der Fläche, welcher mit der Tangentialebene parallel ist, deren Entfernung vom Mittelpunkte $= P$. Hieraus schließen wir:

B e w e g t s i c h e i n P u n k t a u f e i n e r P o l o i d e, s o i s t d e r I n h a l t d e s m i t s e i n e r T a n g e n t i a l e b e n e p a r a l l e l e n D i a m e t r a l s c h n i t t s e i n e r d e r d r e i c e n t r i s c h e n F l ä c h e n z w e i t e n G r a d e s i n 1. k o n s t a n t.

Ebenso schließt man:

Bewegt sich ein Punkt auf einer Poloide der Fläche $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = m$, so ist der Inhalt des Diametralschnitts der Fläche $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, welcher mit seiner Polarebene hinsichtlich dieser Fläche parallel ist, konstant.

§. 19. Zusammenstellung von Formeln für die Flächen zweiten Grades. Fortsetzung.

B. Der Kegel.

Die Gleichung eines Kegels, dessen Axen die Coordinatenaxen sind, und der also seine Spitze im Ursprung hat, ist:

1. $m^2x^2 + n^2y^2 = z^2$

Hieraus erhalten wir durch Differenziation die partiellen Ableitungen:

2. $p = m^2 \frac{x}{z}$; $q = n^2 \frac{y}{z}$; $r = m^2 \frac{z^2 - m^2x^2}{z^3} = \frac{m^2n^2y^2}{z^3}$;

$s = -\frac{m^2n^2xy}{z^3}$; $t = n^2 \frac{z^2 - n^2y^2}{z^2} = \frac{m^2n^2x^2}{z^3}$

Durch Substitution dieser Werthe in die allgemeine Gleichung der Tangentialebene

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y)$$

ergibt sich mit Berücksichtigung der Gleichung des Kegels

3. $z'z = m^2xx' + n^2yy'$

Dieselben Betrachtungen lassen sich hier anstellen, wie bei den centrischen Flächen zweiten Grades. Mithin stellt die Gleichung 3 die Tangentialebene vor, wenn der Punkt $(x'y'z')$ auf dem Kegel liegt, oder die Polarebene dieses Punkts, wenn er nicht auf dem Kegel liegt. Die Polarebene enthält die beiden Erzeugenden des Kegels, welche die zwei durch den gegebenen Punkt an den Kegel zu legenden Tangentialebenen mit demselben gemeinschaftlich haben.

Wir wollen nun annehmen, der Pol $(x'y'z')$ bewege sich auf einer Geraden, deren Gleichungen

4. $x' + \alpha z' = b$ und $y' + \beta z' = b$

sind. Durch Verbindung von 3. und 4. erhalten wir

$$m^2ax + n^2by - (m^2\alpha x + n^2\beta y + z)\, z' = 0$$

Soll diese Gleichung von x und y unabhängig sein, so müssen die Bedingungen erfüllt werden:

$$m^2ax + n^2by = 0 \qquad m^2\alpha x + n^2\beta y + z = 0$$

oder, was dasselbe ist

5. $x + \frac{b}{m^2(\alpha b - a\beta)} z = 0 \qquad y - \frac{a}{n^2(\alpha b - a\beta)} z = 0$

Dieß ist die Gleichung einer durch den Ursprung gehenden Geraden. Die Polarebenen aller Pole, welche auf einer solchen Geraden liegen, fallen in Eine zusammen, setzen wir also in 4. und 5. $a = b = 0$, so erhalten wir diese Formeln:

6. $x + \alpha z = 0$; $y + \beta z = 0$ und $m^2\alpha x + n^2\beta y + z = 0$

Die Gleichungen 4 und 5 beziehen sich auf zwei konjugirte Gerade; sie enthalten den Satz: Bewegt sich der Pol auf einer beliebigen Geraden, so schneiden sich die Polarebenen in einer durch den Ursprung gehenden Geraden.

Die allgemeine Gleichung der Normale einer Fläche ist

$$x' - x + p(z' - z) = o \qquad y' - y + q(z' - z) = o$$

Die Gleichungen der durch den Ursprung gehenden Normale der Kegelfläche sind mithin

$$xz' + m^2x'z = o \qquad yz' + n^2y'z = o$$

Durch Elimination von $x'\,y'\,z'$ aus diesen Gleichungen und aus $m^2x'^2 + n^2y'^2 = z'^2$ ergibt sich

$$7. \quad \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = z^2$$

Diese Gleichung gehört dem Ergänzungs- oder Supplementar-Kegel an. Seine Erzeugenden stehen senkrecht auf den Tangentialebenen des gegebenen Kegels und umgekehrt, denn die Gleichung seiner Berührungsebene ist

$$8. \quad z'z = \frac{xx'}{m^2} + \frac{yy'}{n^2}$$

Der Geraden $x + \alpha'z = o$ und $y + \beta'z = o$ entspricht bei dem Ergänzungskegel die Polarebene

$$\frac{\alpha'}{m^2}x + \frac{\beta'}{n^2}y + z = o$$

Wenn diese Linie auf der Geraden, deren Gleichung 6. ist, senkrecht stehen soll, so muß die Bedingung erfüllt sein $\alpha\alpha' + \beta\beta' + 1 = o$; dadurch wird aber auch der Winkel zwischen den betreffenden Polarebenen $m^2\alpha x + n^2\beta y + z = o$ und $\frac{\alpha'}{m^2} + \frac{\beta'}{n^2}y + z = o$ ein Rechter, worauf nachstehender Satz beruht:

Die Polarebenen von zwei durch den Ursprung gehenden zu einander rechtwinkligen Geraden hinsichtlich des gegebenen Kegels und seines Ergänzungskegels stehen auf einander senkrecht.

Man ziehe an den gegebenen Kegel eine Tangentialebene, so ist ihre durch den Ursprung gehende Senkrechte eine Erzeugende des Ergänzungskegels; diese Senkrechte bildet also auch mit der Erzeugenden, längs welcher die Tangentialebene den gegebenen Kegel berührt, einen rechten Winkel; mithin stehen nach dem vorigen Satz die Polarebenen beider Erzeugenden hinsichtlich des gegebenen und des Ergänzungskegels auf einander senkrecht; wir haben somit als speziellen Fall dieses Satzes den folgenden:

Die Tangentialebenen eines Kegels und seines Ergänzungskegels, welche durch zwei auf einander rechtwinklig stehende Erzeugende beider Kegel gehen, schneiden sich senkrecht.

Wir nehmen zwei durch den Ursprung gezogene Gerade an:

$x + \alpha z = o$; $y + \beta z = o$ und $x + \alpha'z = o$; $y + \beta'z = o$;

ihre Polarebenen hinsichtlich des gegebenen Kegels $m^2x^2 + n^2y^2 = z^2$ sind nach 6.

$$m^2\alpha x + n^2\beta y + z = o \qquad m^2\alpha'x + n^2\beta'y + z = o$$

Soll nun die erste Gerade auf der Polarebene der zweiten liegen, so muß die Bedingung erfüllt sein $m^2\alpha'\alpha + n^2\beta'\beta - 1 = o$; dieß ist aber auch die Bedingungsgleichung dafür, daß die zweite Gerade auf der Polarebene der ersten liegt:

Gegeben sind ein Kegel zweiten Grades und zwei Ebenen. Die Polare der ersten Ebene liegt auf der zweiten Ebene; dann liegt die Polare der zweiten Ebene auf der ersten. Die Polaren von allen Ebenen, die durch eine Gerade gehen, liegen auf der Polarebene der letzteren.

Dem Durchschnitt der Polarebenen $m^2\alpha x + n^2\beta y + z = o$ und $m^2\alpha' x + n^2\beta' y + z = o$ entsprechen die Gleichungen

$$9. \quad x + \frac{1}{m^2} \frac{\beta' - \beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} z = o \quad . \quad y - \frac{1}{n^2} \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} z = o$$

Diese Gerade und die beiden gegebenen Geraden $x + \alpha z = o$, $y + \beta z = o$; $x + \alpha' z = o$, $y + \beta' z = o$ bilden ein Polardreikant. Die letzteren Linien wollen wir mit A und B und die Linie der Gleichung 9 mit C bezeichnen. In der Gleichung der Projektion von C auf der xz Ebene fehlt die Größe n, also ist diese Projektion dieselbe für alle diejenigen Kegel $m^2x^2 + n^2y^2 = z^2$, bei welchen m konstant ist. Die Durchschnitte derselben mit der xz Ebene entsprechen der Gleichung $mx = \pm z$; ebenso ist die Projektion von C auf der yz Ebene konstant für solche Kegel, bei welchen n, oder die Durchschnitte mit der yz Ebene $ny = \pm z$ konstant sind. C ist die Polare der durch die Geraden A und B bestimmten Ebene. Wir haben somit den Satz:

Die Polaren einer durch den Ursprung gehenden Ebene in Beziehung auf alle Kegel, welche die Coordinatenaxen zu Hauptaxen haben und eine der Coordinatenebenen in denselben Linien schneiden, liegen in einer zu dieser Coordinatenebene senkrechten Ebene.

Durch B gehen die beiden Ebenen BA und BC; die erste ist die Polarebene von C und die zweite die Polarebene von B. Die Gleichungen dieser Ebenen sind also

$$(\beta' - \beta)\, x - (\alpha' - \alpha)\, y + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\, z = o \qquad m^2\alpha x + n^2\beta y + z = o$$

Der Cosinus des Winkels derselben ist nach dem Ausdruck

$$\frac{pp' + qq' + 1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}\sqrt{p'^2 + q'^2 + 1}},$$

welcher den Cosinus des Winkels der Ebenen $px + qy + z = o$ und $p'x + q'y + z = o$ vorstellt,

$$\frac{(\beta' - \beta)\, m^2\alpha - (\alpha' - \alpha)\, n^2\beta + \alpha\beta' - \alpha'\beta}{\sqrt{(\alpha' - \alpha)^2 + (\beta' - \beta)^2 + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2}\sqrt{m^4\alpha^2 + n^4\beta^2 + 1}}$$

Soll dieser Winkel gleich 90^0 sein, so muß die Bedingung erfüllt werden

$$(\beta' - \beta)\, m^2\alpha - (\alpha' - \alpha)\, n^2\beta + \alpha\beta' - \alpha'\beta = o$$

Hiebei ist jedoch zu berücksichtigen, daß $m^2\alpha'\alpha + n^2\beta'\beta - 1 = o$ sein muß, weil die Polare A auf der Polarebene von B liegen soll; der letzte Ausdruck gibt $\alpha = \dfrac{1 + n^2\beta'\beta}{m^2\alpha'}$.

Dieser Werth in die vorige Gleichung gesetzt, führt nach einigen Reduktionen zu

$$10. \quad (n^2 - m^2)(1 + n^2\beta'\beta) + (1 + m^2)(1 + n^2\beta')\beta' - (1 + n^2)\, m^2\alpha'^2 = o$$

Zwei solche Ebenen, wie BA und BC, welche die Eigenschaft haben, daß jede die Polarebene der auf der andern liegenden Polaren ist, heißen konjugirt. Wenn je zwei durch eine Gerade B gehende konjugirte Polarebenen auf einander senkrecht stehen sollen, so muß die Gleichung 10 für jeden Werth von β erfüllt werden; es müssen also darin die Ausdrücke mit β und ohne β einzeln gleich Null sein. Dieß gibt

$$(n^2 - m^2)\, n^2\beta'\beta = o \qquad n^2 - m^2 + (1 + m^2)(1 + n^2\beta')\beta' - (1 + n^2)\, m^2\alpha'^2 = o$$

Die erste Gleichung kann, außer im Fall des Drehungskegels, wo $m = n$ ist, nur dadurch befriedigt werden, daß $\beta' = 0$ gesetzt wird. Die Gerade B liegt also in der xz Ebene. Hiedurch verwandelt sich die zweite Gleichung in $n^2 - m^2 - (1 + n^2) m^2 \alpha'^2 = 0$, woraus man findet

$$\alpha' = \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + 1}}$$

und die Linie B oder $x + \alpha' z = 0 \quad y + \beta' z = 0$, welche die Eigenschaft hat, daß je zwei durch dieselbe gehende konjugirte Polarebenen senkrecht auf einander stehen, entspricht den Gleichungen:

$$11. \quad y = 0 \qquad x \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + 1}} = 0$$

Dieß sind die Gleichungen der Fokallinien; wir haben also den Satz (von Chasles):

Je zwei durch eine Fokallinie gehende konjugirte Polarebenen stehen senkrecht auf einander; mithin trifft eine Fokallinie den zu ihr senkrechten Schnitt des Kegels in seinem Brennpunkt.

Die Kreisschnitte des Kegels $m^2x^2 + n^2y = z^2$ sind durch die Gleichungen ausgedrückt:

$$12. \quad y \pm \sqrt{\frac{m^2 + 1}{n^2 - m^2}}\, z = 0$$

Aus 12. erhält man für den Ergänzungskegel $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = z^2$

$$13. \quad x \mp \sqrt{\frac{\frac{1}{n^2} + 1}{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}}}\, z = 0$$

Durch Vergleichung von 11. und 13. findet man den Satz:

Die Kreisschnitte des Ergänzungskegels stehen senkrecht auf den Fokallinien des gegebenen Kegels und umgekehrt.

Wenn die Gerade $x + \alpha z = 0 \quad y + \beta z = 0$ eine Erzeugende des Kegels $m^2x^2 + n^2y^2 = z^2$ sein soll, so muß sie die Bedingung erfüllen $m^2\alpha^2 + n^2\beta^2 - 1 = 0$. Diese Erzeugende trifft die Ebene des Kreisschnitts $y + \sqrt{\frac{m^2 + 1}{n^2 - m^2}}\, z = k$ im Punkt K; O ist der Ursprung.

$$O\overline{K}^2 = (1 + \alpha^2 + \beta^2) \frac{k^2}{\left(\beta - \sqrt{\frac{m^2 + 1}{n^2 - m^2}}\right)^2}$$

Die Ebene des Kreisschnitts $y - \sqrt{\frac{m^2 + 1}{n^2 - m^2}}\, z = k'$ wird in K' geschnitten,

$$\overline{OK'}^2 = (1+\alpha^2+\beta^2)\,\frac{k'^2}{\left(\beta+\sqrt{\frac{m^2+1}{n^2-m^2}}\right)^2}$$

$$\overline{OK}^2 \cdot \overline{OK'}^2 = (1+\alpha^2+\beta^2)^2\,\frac{k^2k'^2}{\left(\beta^2-\frac{m^2+1}{n^2-m^2}\right)^2}$$

oder wenn man für β^2 seinen Werth $\frac{1-m^2\alpha^2}{n^2}$ setzt

$$\overline{OK}\cdot\overline{OK'}^2 = \left(\frac{1+\alpha^2+\frac{1-m^2\alpha^2}{n^2}}{\frac{1-m^2\alpha^2}{n^2}-\frac{m^2+1}{n^2-m^2}}\right)^2 k^2k'^2$$

14. $$OK\,.\,OK' = \frac{n^2-m^2}{m^2}\,k\,.\,k'$$

Wenn man von der Spitze eines Kegels nach allen Punkten von zwei Kreisen, welche verschiedenen, unter sich nicht parallelen Systemen von Kreisschnitten angehören, Erzeugende zieht, so ist das Produkt der Entfernungen der Durchschnittspunkte auf jeder Erzeugenden von der Spitze konstant. Zwei Kreise eines Kegels, welche nicht parallel sind, liegen auf einer Kugel, und noch auf einem zweiten Kegel, dessen Axen parallel mit denjenigen des Hauptkegels sind.

Die Mittelpunkte aller Kugeln, auf welchen zwei Kreise des Kegels $m^2x^2 + n^2y^2 = z^2$ liegen, sind in der yz Ebene, wenn $n > m$ ist, und in der xz Ebene, wenn $m > n$ ist.

Alle Kugeln, welche eine cyclische Ebene (Chasles nennt diejenigen Ebenen cyclische, welche durch die Spitze des Kegels parallel mit den Kreisschnitten gelegt werden) in der Spitze des Kegels berühren, schneiden denselben in einem System von Kreisschnitten.

Man ziehe in der yz Ebene die Durchmesser von zwei Kreisschnitten, HK und H'K', so ist HKK'H' ein Kreisviereck, in welchem die Diagonalen HK' und H'K sich in J schneiden. J ist die Spitze des zweiten Kegels, auf dem beide Kreisschnitte liegen; die Axen dieses Kegels sind parallel mit den Coordinatenaxen, denn die Halbirungslinien der Winkel HOK, HJK sind nach einem bekannten Satze vom Kreisviereck unter sich parallel.

Eine durch O gehende Erzeugende des Kegels schneidet zwei nicht parallele Kreise in K und K'; die Tangenten der Kreise in K und K' bilden mit der Erzeugenden nach entgegengesetzten Seiten hin gleiche Winkel. Dieß gilt auch im Durchschnittspunkt, wenn die Kreise einen solchen haben; hieraus folgt unmittelbar der Satz von Chasles: Jede Berührungsebene schneidet die cyclischen Ebenen in zwei Geraden, welche mit der Berührungslinie gleiche Winkel machen; nun stehen eine Erzeugende und die Fokallinien des Ergänzungskegels beziehungsweise senkrecht auf einer Berührungsebene und auf den cyclischen Ebenen des gegebenen Kegels, also bilden die durch die Fokallinien und eine Erzeugende gelegten Ebenen beim Ergänzungskegel, und also auch bei jedem Kegel gleiche Winkel mit der Ebene, welche den Kegel längs der Erzeugenden berührt. Chasles: Académie de Bruxelles, tom VI, 1. 1830.

Zwei nicht parallele Kreise eines Kegels stehen in derjenigen Verwandtschaft zu einander, welche ein spezieller Fall der Transformation durch reciproke Radienvektoren ist. Wenn man von einem festen Punkt O nach allen Punkten einer Fläche oder Kurve Radien OK zieht, und auf ihrer Richtung die Punkte K′ so annimmt, daß

$$OK \, . \, OK' = \text{const.}$$

so liegen letztere Punkte auf der verwandelten Fläche oder Linie.

Für die Hauptkrümmungshalbmesser einer Fläche gilt folgende Gleichung:

$$R = \frac{-2k^3}{h + \sqrt{h^2 - 4k^2g}}$$

$$k^3 = (1 + p^2 + q^2)^{3/2}; \; h = (1 + q^2) r + (1 + p^2) t - 2pqs; \; g = rt - s^2$$

Mit Benützung der Gleichungen 2 finden wir $g = o$

$$R = \frac{-k^3}{h} \text{ oder } = \infty$$

$$R = -\frac{\frac{1}{z^3}(z^2 + m^4x^2 + n^4y^2)^{3/2}}{\frac{m^2n^2}{z^5}\left\{(z^2 + n^4y^2)y^2 + (z^2 + m^4x^2)x^2 + 2m^2n^2x^2y^2\right\}}$$

$$R = -\frac{z^2(z^2 + m^4x^2 + n^4y^2)^{3/2}}{m^2n^2\left\{z^2(x^2 + y^2) + (m^2x^2 + n^2y^2)^2\right\}}$$

$$15. \quad R = -\frac{\left\{z^2 + m^4x^2 + n^4y^2\right\}^{3/2}}{m^2n^2(x^2 + y^2 + z^2)}$$

da $m^2x^2 + n^2y^2 = z^2$ ist.

§. 20. Zusammenstellung von Formeln für die Flächen zweiten Grades. Schluß.

C. Die beiden Paraboloide.

$$1. \quad \frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = x \qquad \frac{y^2}{m} - \frac{z^2}{n} = z$$

Die erste Gleichung stellt das elliptische, die zweite das hyperbolische Paraboloid vor.

Die nachstehenden Formeln beziehen sich aber alle auf das elliptische Paraboloid. Will man sie auf die zweite Fläche anwenden, so darf man nur $-n$ statt $+n$ setzen.

$$2. \quad p = \frac{n}{2z}; \quad q = -\frac{n}{m}\frac{y}{z}; \quad r = -\frac{n^2}{4z^3}; \quad s = \frac{n^2y}{2mz^3};$$

$$t = -\frac{n^2x}{mz^3}$$

Die allgemeine Gleichung der Tangentialebene $z' - z = p(x' - x) + q(y' - y)$ wird

$$3. \quad \frac{y'}{m}y + \frac{z'}{n}z = \frac{x' + x}{2}$$

Dieß ist die Gleichung der Tangential- oder der Polarebene des Punkts

(x', y', z'), je nachdem er auf der Fläche liegt oder nicht. Bewegt er sich auf der Geraden

4. $x' + \alpha z' = a \qquad y' + \beta z' = b$

so erhalten wir durch die Verbindung von 3. und 4.

$$\frac{b}{m} y - \frac{x + a}{2} + \left(- \frac{\beta}{m} y + \frac{z}{n} + \frac{\alpha}{2}\right) z' = o$$

Soll dieser Ausdruck von z' unabhängig sein, so muß $\frac{b}{m} y - \frac{x + a}{2} = o$ und $- \frac{\beta}{m} y + \frac{z}{n} + \frac{\alpha}{2} = o$ werden, oder, was dasselbe ist,

5. $x - \frac{2b}{\beta n} z + \frac{\alpha b - \beta a}{\beta} = o \qquad y - \frac{m}{n\beta} x - \frac{\alpha m}{2\beta} = o$

4. und 5. sind konjugirte Polaren.

Der Cosinus des Winkels der Geraden $x + pz = o$ und $y + qz = o$; $x + p'z = o$ und $y + q'z = o$ ist $\frac{pp' + qq' + 1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}\sqrt{1 + p'^2 + q'^2}}$. Also ist der Cosinus der Polaren 4 und 5

6. $\frac{(n - m)\beta - 2b\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}\sqrt{n^2\beta^2 + 4b^2 + m^2}}$

Wenn dieser Winkel ein Rechter ist, so muß die Bedingung erfüllt werden

7. $(n - m)\beta - 2b\alpha = o$

In den Gleichungen 5 sind die Coefficienten von z unabhängig von α und a; hieraus folgt:

Die Polaren aller Geraden, welche in einer mit der xAxe parallelen Ebene liegen, sind unter sich parallel.

Der Ausdruck 6 ist unabhängig von a, woraus man schließt:

Alle Gerade, welche in einer auf der yzEbene senkrechten Ebene liegen und unter sich parallel sind, bilden mit ihren konjugirten Geraden denselben Winkel.

Angenommen, der Pol (x', y', z') bewege sich auf der Ebene

8. $\alpha x' + \beta y' + \gamma z' = 1$

so verbinden wir die Gleichungen 3 und 8 und erhalten

$$\left(\frac{y}{m} + \frac{\beta}{2\alpha}\right) y' + \left(\frac{z}{n} + \frac{\gamma}{2\alpha}\right) z' = \frac{1 + \alpha x}{2\alpha}$$

Wenn dieser Ausdruck von y' und z' unabhängig sein soll, so müssen die Relationen statt finden:

9. $x = - \frac{1}{\alpha}; \quad y = - \frac{m\beta}{2\alpha}; \quad z = - \frac{n\gamma}{2\alpha}$

Dieß sind die Gleichungen des Pols der Polarebene 8. Man kann die Gleichung 8 auch in dieser Form schreiben

$$x' + \frac{\beta}{\alpha} y' + \frac{\gamma}{\alpha} z' = \frac{1}{\alpha}$$

Wenn sich die Polarebene parallel mit sich selbst bewegt, so bleiben die Verhältnisse $\frac{\beta}{\alpha}$ und $\frac{\gamma}{\alpha}$, also auch die Werthe von y und z in 9. ungeändert; hieraus schließt man:

Die Pole aller unter sich parallelen Polarebenen liegen in einer mit der xAxe parallelen Geraden.

x, y, z sind die laufenden Coordinaten der Normale, deren Fußpunkt auf der Fläche (x′, y′, z′) ist. Die Gleichungen dieser Normale sind:

$$10. \quad x = -\frac{n}{2z'}z + x' + \frac{n}{2} \qquad y = \frac{n}{m}\frac{y'}{z'}z + \frac{m-n}{m}y'$$

Setzen wir $z = o$, so wird $x - x' = \frac{n}{2}$; $\frac{y}{y'} = \frac{m-n}{m}$, woraus folgt:

Bei einem Paraboloid ist die Differenz der Abstände des Fußpunkts einer Normale und ihres Durchschnittspunkts mit der xyEbene von der yzEbene konstant; wie auch das Verhältniß der Abstände dieser beiden Punkte von der xzEbene.

Setzen wir noch $x' = \text{const.}$, so ist auch x konstant; ebenso ist es bei y′ und y:

Die Normalen, deren Fußpunkte eine zu einer Hauptebene parallele Kurve bilden, schneiden eine andere Hauptebene in einer Geraden, die zur ersten parallel ist.

Die Entfernung der Ebene $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ vom Ursprung sei P, so ist $P = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$; die Gleichung 3 der Tangentialebene des Paraboloids können wir auch unter diese Form bringen:

$$-\frac{x}{x'} + \frac{2y'}{mx'}y + \frac{2z'}{nx'}z = 1;$$

die Entfernung P derselben vom Ursprung ist somit gleich

$$11. \quad P = \frac{x'}{\sqrt{1 + \frac{4y'^2}{m^2} + \frac{4z'^2}{n^2}}}$$

P ist die Entfernung der Tangential= oder der Polarebene des Punkts (x′, y′, z′) vom Ursprung oder Scheitel des Paraboloids, je nachdem dieser Punkt auf der Fläche liegt oder nicht. Bei den zwei Paraboloiden $\frac{y^2}{m} \pm \frac{z^2}{n} = x$, wo m und n gleiche absolute Werthe haben, sind also die Entfernungen der Polarebenen eines und desselben Punkts vom Scheitel gleich.

Bewegt sich der Pol auf der Fläche $\frac{x'}{\sqrt{1 + \frac{4y'^2}{m^2} + \frac{4z'^2}{n^2}}} = k$ oder

$$\frac{x'^2}{k^2} - \frac{y'^2}{\frac{m^2}{4}} - \frac{z'^2}{\frac{n^2}{4}} = 1$$

welche ein zweimantliges Hyperboloid ist, so berührt seine Polarebene die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = k^2$.

Die Formeln 29 und 30 des §. 4 heißen

$$\frac{1}{R \,.\, R'} = \frac{g}{k^4} \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{h}{k^3}$$

Mit Benützung der Gleichungen 2 erhalten wir

$$k^2 = 1 + p^2 + q^2 = \frac{1}{z^2}\left(z^2 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{m^2}y^2\right) = \frac{n^2}{4z^2}\left(1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}\right)$$

$$g = rt - s^2 = \frac{n^3}{4m\,z^4}$$

$$h = (1+q^2)r + (1+p^2)t - 2pqs = -\frac{n^2}{mz^3}\left(\frac{m+n}{4} + x\right) = -\frac{n^2}{4mz^3}(m+n+4x)$$

$$\frac{1}{R\,.\,R'} = \frac{n^3}{4m\left(z^2 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{m^2}y^2\right)^2}$$

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = -\frac{n^2\left(\frac{m+n}{4} + x\right)}{m\left(z^2 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^2}{m^2}y^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{1}{R} = -\frac{h \pm \sqrt{h^2 - 4k^2g}}{2k^3}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{m + n + 4x \pm \sqrt{(m+n+4x)^2 - 4mn\left(1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}\right)}}{\frac{mn}{4}\left(1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}\right)^{3/2}}$$

Die allgemeine Differenzialgleichung der Krümmungslinien ist

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\{(1+q^2)s - pqt)\} + \frac{dy}{dx}\{(1+q^2)r - (1+p^2)t\} - (1+p^2)s + pqr = o$$

Mit Hülfe der Gleichungen 2 erhält man für das elliptische Paraboloid

$$\frac{m-n}{n}y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{m-n-4x}{2}\frac{dy}{dx} + y = o$$

Durch Differenziation

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(2\frac{m-n}{n}y\frac{dy}{dx} + \frac{m-n-4x}{2}\right) + \frac{dy}{dx}\left(\frac{m-n}{n}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1\right) = o$$

Setzt man hier aus der vorigen Gleichung

$$\frac{m-n-4x}{2}\frac{dy}{dx} = -\frac{m-n}{n}y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y$$

so ergibt sich

$$\frac{d^2y}{dx^2}y\left(\frac{m-n}{n}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{m-n}{n}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1\right) = o$$

oder nach Weglassung des gemeinschaftlichen Faktors

$$\frac{d^2y}{dx^2}y + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

und durch Integration

$$y\frac{dy}{dx} = \beta$$

durch nochmalige Integration

12. $\frac{y^2}{2} = \beta x + \gamma$

Dieß ist die Gleichung der Krümmungslinien auf dem Paraboloid: β läßt sich bestimmen mit Hülfe der Differenzialgleichung der Krümmungslinien, und $y \frac{dy}{dx} = \beta$; wir erhalten dadurch

$$\frac{m-n}{n}\beta^2 + \frac{m-n-4x}{2}\beta + y^2 = o$$

und mit Hülfe von 12.

$$\left(\beta + \frac{n}{4}\right)^2 = -\frac{2n}{m-n}\gamma + \frac{n^2}{16}$$

Durch Verbindung von 11. mit der Gleichung 1 des Paraboloids erhalten wir ferner

$$13. \quad y^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{m}\right) - \frac{\beta}{n}z^2 = \gamma \qquad z^2 = \left(\frac{2n}{m}\beta + n\right)x + \frac{2n}{m}\gamma$$

Die Gleichungen 12 und 13 enthalten folgenden Satz:

Die Krümmungslinien des Paraboloids projiciren sich auf die beiden durch die x Axe gehenden Hauptebenen als Parabeln, und auf die dritte Hauptebene als Hyperbeln (Ellipsen).

Die Gleichung der Tangentialebene des Paraboloids können wir auch unter diese Form bringen:

$$-\frac{1}{x'}x + \frac{2y'}{mx'}y + \frac{2z'}{nx'}z = 1$$

Es sei P das vom Ursprung oder dem Scheitel des Paraboloids auf diese Tangentialebene gefällte Perpendikel, so ist nach der allgemeinen Formel $P = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$ für die auf die Ebene $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ herabgelassene Senkrechte

$$14. \quad P = \frac{x'}{\sqrt{1 + \frac{4y'^2}{m^2} + \frac{4z'^2}{n^2}}}$$

Mit Zugrundlegung dieses Werths können wir den Ausdruck für $\frac{1}{R}$ vereinfachen, indem wir in $\frac{1}{R} = \frac{-h \mp \sqrt{h^2 - 4k^2g}}{2k^3}$ setzen

$$k^2 = \frac{n^2}{4z^2}\left(1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}\right) = \frac{n^2}{4z^2}\,\frac{x^2}{P^2}$$

$$15. \quad \frac{1}{R} = \frac{\frac{m+n+4x}{m} \mp \sqrt{\left(\frac{m+n+4x}{m}\right)^2 - \frac{4nx^2}{mP^2}}}{\frac{nx^3}{P^3}}$$

$$R = \frac{mx}{4P}\left(\frac{m+n+4x}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{m+n+4x}{m}\right)^2 - \frac{4nx^2}{mP^2}}\right)$$

$$= \frac{x}{4P}\left(m + n + 4x + \sqrt{(m+n+4x)^2 - \frac{4mnx^2}{P^2}}\right)$$

Die Gleichung der geodätischen Linien auf irgend einer Fläche ist nach Joachimsthal:

$$\frac{dXd^2x + dYd^2y + dZd^2z}{dXdx + dYdy + dZdz} + \frac{Xdx + Ydy + Zdz}{X^2 + Y^2 + Z^2} - \frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = o$$

Bei der Fläche $\frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = z$ ist

$$X = 1; \quad Y = \frac{2y}{m}; \quad Z = \frac{2z}{n}$$

$$dX = o; \quad dY = \frac{2}{m} dy; \quad dZ = \frac{2}{n} dz$$

$$dX\,dx + dY\,dy + dZ\,dz = \frac{2}{m} dy^2 + \frac{2}{n} dz^2$$

$$dX\,d^2x + dY\,d^2y + dZ\,d^2z = \frac{2}{m} dy\,d^2y + \frac{2}{n} dz\,d^2z$$

$$\int \frac{dXd^2x + dYd^2y + dZd^2z}{dXdx + dYdy + dZdz} = \int \frac{\frac{dy\,d^2y}{m} + \frac{dz\,d^2z}{n}}{\frac{dy^2}{m} + \frac{dz^2}{n}} = \frac{1}{2} \log\left(\frac{dy^2}{m} + \frac{dz^2}{n}\right)$$

$$\int \frac{Xdx + Ydy + Zdz}{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{1}{2} \log(X^2 + Y^2 + Z^2) = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}\right)$$

$$\int \frac{dxd^2x + dyd^2y + dz\,d^2z}{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{1}{2} \log(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

Man erhält somit für die Gleichung der geodätischen Linien auf dem Paraboloid ein erstes Integral:

$$16. \quad 1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2} = C \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\frac{dy^2}{m} + \frac{dz^2}{n}}$$

indem man die Konstante mit C bezeichnet. $dx^2 + dy^2 + dz^2$ ist $= ds^2$, ds ist das Element der geodätischen Linie, $1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2} = \frac{x^2}{P^2}$ nach 14.; $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\frac{dy^2}{m} + \frac{dz^2}{n}} = \frac{1}{\frac{dy^2}{m\,ds^2} + \frac{dz^2}{n\,ds^2}} = \frac{1}{\frac{\cos^2\beta}{m} + \frac{\cos^2\gamma}{n}}$;

wenn die Winkel, welche die Tangente der geodätischen Linie, oder das Element ds mit den y und z Axen bildet, durch β und γ bezeichnet werden.

Die Gleichung 16 verwandelt sich also in

$$17. \quad C = \frac{x^2}{P^2}\left(\frac{\cos^2\beta}{m} + \frac{\cos^2\gamma}{n}\right)$$

$$\frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = x + \varrho$$

Wenn die Gleichung des Paraboloids in dieser Form gegeben ist, so hat man

$$p = \frac{n}{2z}; \; q = -\frac{n}{m}\frac{y}{z}; \; r = -\frac{n^2}{4z^3}; \; s = \frac{n^2 y}{2mz^3}; \; t = -\frac{n^2(x + \varrho)}{mz^3}$$

$$\frac{y'}{m} y + \frac{z'}{n} z = \frac{x' + x}{2} + \varrho \text{ oder } -\frac{x}{2\varrho + x'} + \frac{2y'}{m(2\varrho + x')} y + \frac{2z'}{n(2\varrho + x')} = 1$$

Dieß sind die Gleichungen der Tangentialebene im Punkt (x′, y′, z′).

Das vom Ursprung auf die Tangentialebene des Punkts (x, y, z) gefällte Perpendikel P hat den Werth

$$P = \frac{x + 2\varrho}{\sqrt{1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}}}$$

In der Gleichung $\frac{1}{R} = -\frac{h \pm \sqrt{h^2 - 4k^2 g}}{2k^3}$ haben wir

$$k^2 = \frac{n^2}{4z^2}\left(1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}\right)$$

$$g = rt - s^2 = \frac{n^3}{4mz^4}$$

$$h = (1 + q^2)r + (1 + p^2)t - 2pqs = -\frac{n^2}{4mz^3}(m + n + 4x + 4\varrho)$$

$$20.\ \frac{1}{R} = \frac{m+n+4x+4\varrho \pm \sqrt{(m+n+4x+4\varrho)^2 - 4mn\left(1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}\right)}}{\frac{mn}{4}\left(1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}\right)^{3/2}}$$

§. 21. Die homofokalen centrischen Flächen zweiten Grads.

Das Ellipsoid und die beiden Hyperboloide.

Wir nehmen drei zu einander rechtwinklige Axen an. Die Lage eines Punkts im Raum läßt sich mittelst dieser Axen auf sehr verschiedene Weise bestimmen. Die gewöhnlichste und einfachste besteht darin, daß man durch denselben drei zu einander und zu den Coordinatenaxen senkrechte Ebenen legt, welche die Axen in drei Punkten schneiden, deren Abstände vom Ursprung beziehungsweise gleich x, y, z sind. Diese Größen sind die rechtwinkligen Coordinaten des Punkts im Raum. Bewegt sich derselbe auf einer dieser drei Ebenen, z. B. auf derjenigen, die auf der z Axe senkrecht steht, so hat man die Gleichung

$$z = \text{const.}$$

für die genannte Ebene. Für jede beliebige Linie, die der Punkt auf dieser Fläche beschreibt, gilt die Gleichung z = const. Ferner sind

$$z = \text{const.} \quad y = \text{const.}$$

Die Gleichungen des Durchschnitts von zwei Ebenen, die auf den Axen der z und y senkrecht stehen. Will man von einem Punkt (x, y, z) des Raums zu einem beliebigen andern übergehen, so gibt man den Coordinaten x, y, z die Veränderungen l, m, n und nennt den zweiten Punkt (x + l, y + m, z + n).

Eine zweite Art, die Lage eines Punkts im Raum zu bestimmen, besteht darin, daß man durch denselben nicht drei zu den Axen rechtwinklige Ebenen oder Flächen ersten Grades legt, sondern drei zu den Axen rechtwinklige Flächen zweiten Grades, nämlich ein Ellipsoid, ein einmantliges und ein zweimantliges Hyperboloid. Diese Flächen bezeichnen wir mit (ϱ); (μ); (ν); ihre Gleichungen sind

$$1.\quad \frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1 \quad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1$$

b und c sind zwei konstante Größen, die als gegeben angenommen werden müssen; und die Betrachtung vorstehender Gleichungen führt sogleich darauf, daß diese Größen nichts anders sind, als die Distanzen der Brennpunkte vom Mittelpunkt bei denjenigen zwei Diametralschnitten der drei Flächen, die in der xy Ebene und in der xz Ebene liegen. Bei dem dritten Diametral- oder Hauptschnitt, welcher in der yz Ebene liegt, ist die Entfernung des Brennpunkts vom Mittelpunkt $= \sqrt{c^2 - b^2}$. Es ist $c > b$ angenommen. Da die durch die Gleichungen 1 repräsentirten Flächen die Eigenschaft haben, daß bei ihren Hauptschnitten die Brennpunkte gemeinschaftlich sind, so nennt man sie homofokal.

Die großen Halbaxen der centrischen homofokalen Flächen zweiten Grades, des Ellipsoids (ϱ), des einmantligen Hyperboloids (μ) und des zweimantligen Hyperboloids (ν) sind ϱ, μ und ν. ϱ ist $> c > b$ und kann jeden beliebigen Werth zwischen c und ∞ annehmen. μ ist eingeschlossen zwischen den Grenzen c und b, es müssen also immer die Ungleichungen stattfinden

$$c > \mu > b$$

endlich bewegt sich ν zwischen den Grenzen b und o, d. h.

$$c > b > \nu > o$$

Es ist nun klar, daß ein Punkt im Raum bestimmt ist, wenn die Größen ϱ, μ und ν gegeben sind, d. h. wenn man die großen Halbaxen der drei durch ihn gelegten homofokalen Flächen kennt. Denn, da b und c unter allen Umständen als gegebene Parameter angenommen werden, so sind durch Bestimmung von ϱ, μ und ν auch die übrigen Axen der homofokalen Flächen (ϱ), (μ) und (ν) gegeben. Wir bezeichnen den Punkt, bei welchem die großen Halbaxen der drei durch ihn gehenden homofokalen Flächen beziehungsweise gleich ϱ, μ und ν sind, mit (ϱ,μ,ν) und nennen ϱ, μ und ν die elliptischen Coordinaten dieses Punkts, ganz ähnlich, wie man x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten des Punkts (x,y,z) heißt, welche die Abstände vom Ursprung der drei durch ihn gehenden auf den Coordinatenaxen senkrecht stehenden Ebenen sind.

Bewegt sich der Punkt auf dem Ellipsoid (ϱ), so ist seine Gleichung in elliptischen Coordinaten:

$$\varrho = \text{const.}$$

bewegt er sich aber auf den Flächen (ϱ) und (μ) zugleich, so bestehen die Relationen

$$\varrho = \text{const.} \quad \mu = \text{const.}$$

Da nun, wie dieß später gezeigt werden wird, die homofokalen Flächen sich gegenseitig in ihren Krümmungslinien schneiden, so sieht man schon hier, welche einfache Form die Gleichungen dieser Linien bei Zugrundelegung elliptischer Coordinaten bekommen. Wenn wir die Gleichungen der Krümmungslinien des andern Systems haben wollen, so dürfen wir nur annehmen, daß sich der Punkt auf dem Durchschnitt des Ellipsoids (ϱ) und des zweimantligen Hyperboloids (ν) bewege, und erhalten alsdann

$$\varrho = \text{const.} \quad \nu = \text{const.}$$

Es handelt sich jetzt zunächst darum, den Uebergang von den gewöhnlichen Coordinaten x, y, z zu den elliptischen ϱ, μ, ν zu finden. Zu diesem Zweck bemerken wir, daß sich die Gleichungen 1 auch so schreiben lassen:

$$2.\quad \frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1 \quad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{\nu^2} + \frac{y^2}{\nu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\nu^2 - c^2} = 1$$

wobei immer vorausgesetzt ist, daß die Grenzen $\varrho > c > b$, $c > \mu > b$, $c > b > \nu$ eingehalten werden. Aus den Formeln 2 lassen sich die Werthe von ϱ, μ, ν als Funktion von b, c, x, y, z ausdrücken. Da aber diese Gleichungen eine und dieselbe Form haben, so können wir ϱ, μ, ν als die drei Wurzeln von $\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1$ ansehen, welche Gleichung sich auch unter diese Form bringen läßt

$$3.\quad \varrho^6 - \varrho^4(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2) + \varrho^2\{(b^2 + c^2)x^2 + c^2y^2 + b^2z^2 + b^2c^2\} - b^2c^2x^2 = 0$$

sie ist in Beziehung auf ϱ^2 vom dritten Grade; wir betrachten also ϱ^2 als die Variabele. Nun ist nach den bekannten Sätzen über die Coefficienten der Gleichungen mit einer Variabelen der Coefficient von ϱ^4 gleich der Summe der drei Wurzeln, derjenige von ϱ^2 gleich der Summe der Produkte von je zweien der Wurzeln, und endlich der Ausdruck ohne ϱ gleich dem Produkt der drei Wurzeln. Letztere bezeichnen wir mit ϱ^2, μ^2, ν^2 und erhalten demnach

$$4.\quad \varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 = x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2$$
$$5.\quad \varrho^2\mu^2 + \varrho^2\nu^2 + \mu^2\nu^2 = (b^2 + c^2)x^2 + c^2y^2 + b^2z^2 + b^2c^2$$
$$6.\quad \varrho^2\mu^2\nu^2 = b^2c^2x^2$$

Hieraus ergibt sich sogleich

$$7.\quad bcx = \varrho\mu\nu$$
$$8.\quad b\sqrt{c^2 - b^2}\,.\,y = \sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}$$
$$9.\quad c\sqrt{c^2 - b^2}\,.\,z = \sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}$$

Die vom Mittelpunkt O nach einem Punkt M oder (ϱ, μ, ν) gezogene Gerade bezeichnen wir mit H, so ist $H^2 = x^2 + y^2 + z^2$ oder nach 4. in elliptischen Coordinaten

$$10.\quad H^2 = \varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2$$

Die Gleichung einer Kugel, deren Mittelpunkt O ist, in elliptischen Coordinaten heißt somit

$$11.\quad \varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 = \text{const.}$$

Die Gleichungen des Durchschnitts dieser Kugel mit dem Ellipsoid (ϱ) oder einer sphärischen Kurve auf dieser Fläche sind

$$12.\quad \mu^2 + \nu^2 = \text{const.} \qquad \varrho = \text{const.}$$

Aus 11. erhalten wir folgenden Satz:

Bewegt sich ein Punkt im Raume so, daß seine Entfernung vom Mittelpunkt oder Ursprung des Coordinatensystems konstant ist, so ist die Quadratsumme der drei großen Halbaxen von den durch ihn gehenden homofokalen Flächen konstant.

In der Gleichung 5 setzen wir $(b^2 + c^2)x^2 + c^2y^2 + b^2z^2 = \text{const.}$, d. h. wir lassen den Punkt (x, y, z) sich auf einem Ellipsoid bewegen; dann erhalten wir aus 5.

$$\varrho^2\mu^2 + \varrho^2\nu^2 + \mu^2\nu^2 = \text{const.}$$

Diese Gleichung enthält den Satz:

Bewegt sich ein Punkt auf der Fläche $(b^2 + c^2)x^2 + c^2y^2 + b^2z^2 = \text{const.}$, so ist die Quadratsumme der drei Rechtecke, welche sich aus je zwei großen Halbaxen der drei durch ihn gelegten homofokalen Flächen bilden lassen, konstant.

Die Gleichungen 6 und 7 sind identisch. Setzen wir in 7., 8. und 9. der Reihe nach x, y, z konstant, so ergeben sich die Resultate

$$\varrho\mu\nu = \text{const.}$$
$$\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2} = \text{const.}$$
$$\sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2} = \text{const.}$$

Hierin ist dieser Satz ausgesprochen:

Bewegt sich ein Punkt in einer Ebene, die parallel mit einer der drei Coordinatenebenen ist, so ist das Produkt der drei auf dieser Coordinatenebene senkrechten Halbaxen von den homofokalen Flächen, welche sich durch den Punkt legen lassen, konstant.

In 7. können wir sowohl x als auch ϱ konstant annehmen, und erhalten sofort

$$\mu\nu = \text{const.}$$

In diesem Fall bewegt sich der Punkt auf einem Schnitte von (ϱ), welcher parallel der yz Ebene ist; ein ganz ähnliches Resultat würden wir aus den zwei andern Gleichungen erhalten haben, indem wir irgend zwei von den sechs Größen, $x, y, z, \varrho, \mu, \nu$ in einer derselben als konstant annehmen. Hiedurch erhalten wir den Satz:

Gegeben ist eine centrische Fläche zweiten Grades und ein Schnitt parallel einer der Hauptebenen; durch alle Punkte des Schnitts lassen sich zwei homofokale Flächen legen; diejenigen Scheitel dieser Flächen, die auf einer Axe liegen, senkrecht auf jener Hauptebene, bilden eine Involution.

Das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene einer centrischen Fläche zweiten Grades gefällte Perpendikel bezeichnen wir im folgenden stets mit P; man hat dafür den Ausdruck (§. 18, 14)

$$P = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^2}{b^4} + \dfrac{z^2}{c^4}}}$$

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ ist die Gleichung der Fläche. Wenn wir den Werth von P in elliptischen Coordinaten haben wollen, so müssen wir statt a^2, b^2, c^2 bei dem Ellipsoid $\varrho^2, \varrho^2 - b^2, \varrho^2 - c^2$ setzen, und für x, y, z ihre Werthe aus den Gleichungen 7, 8, 9 substituiren, dadurch erhalten wir für den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen

$$\frac{\mu^2\nu^2}{\varrho^2 b^2 c^2} + \frac{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}{(\varrho^2 - b^2)\,b^2\,(c^2 - b^2)} + \frac{(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)}{(\varrho^2 - c^2)\,c^2\,(c^2 - b^2)}$$

Wenn wir der Einfachheit wegen den Index 2 weglassen, und die Brüche gleichnamig machen, so ergibt sich

$$\frac{\mu\nu(\varrho - b)(\varrho - c)(c - b) + (\mu - b)(b - \nu)\varrho(\varrho - c)c + (c - \mu)(c - \nu)\varrho(\varrho - b)b}{\varrho(\varrho - b)(\varrho - c)\,bc\,(c - b)}$$

Die drei Summanden des Nenners bezeichnen wir der Reihe nach mit A, B, C und erhalten

$$A = \mu\nu \{\varrho\varrho c - \varrho\varrho b - \varrho c c + \varrho b c - b\varrho c + b\varrho b + b c c - b c b\}$$
$$B = \varrho c \{\mu b\varrho - \mu b c - \mu\nu\varrho + \mu\nu c - b b\varrho + b b c + b\nu\varrho - b\nu c\}$$
$$C = \varrho b \{c c\varrho - c c b - c\nu\varrho + c\nu b - \mu c\varrho + \mu c b + \mu\nu\varrho - \mu\nu b\}$$

Nachdem man in der Summe $A + B + C$ die sich gegenseitig aufhebenden Glieder gestrichen hat, bleibt noch

$$A + B + C = \mu\nu(bcc - bcb) + \varrho\varrho(bcc - bbc) - \varrho\mu(cbc - bcb) - \varrho\nu(cbc - bcb)$$
$$= bc(c - b)(\varrho\varrho + \mu\nu - \varrho\mu - \varrho\nu)$$
$$= bc(c - b)(\varrho - \mu)(\varrho - \nu)$$

Mit Hülfe dieses Werths von $A + B + C$ reducirt sich der Bruch auf

$$\frac{(\varrho - \mu)(\varrho - \nu)}{\varrho(\varrho - b)(\varrho - c)}$$

Wenn wir den Index 2 wieder setzen, so erhalten wir den Ausdruck

$$13.\quad P = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$

Dieß ist einer der häufigen Fälle, wo sich bei Anwendung elliptischer Coordinaten anscheinend zusammengesetzte Ausdrücke, die aus mehreren zu summirenden Brüchen bestehen, in Produkte auflösen, welche für viele algebraische Operationen sehr bequem sind.

P ist das vom Mittelpunkt auf diejenige Ebene gefällte Perpendikel, welche das Ellipsoid (ϱ) in dem Punkte berührt, wo es von dem einmantligen Hyperboloid (μ) und von dem zweimantligen Hyperboloid (ν) geschnitten wird, oder was dasselbe ist, wo sich die Krümmungslinien $\varrho = \text{const.}$ $\mu = \text{const.}$ und $\varrho = \text{const.}$ $\nu = \text{const.}$ schneiden. Will man das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene von (μ) im Punkt (ϱ, μ, ν) gefällte Perpendikel finden, so hat man in 13. nur μ statt ϱ und ϱ statt μ zu setzen, und erhält

$$\frac{\mu\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - c^2}}{\sqrt{\mu^2 - \varrho^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}} = \frac{\mu\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}$$

Durch Verwechslung der Buchstaben ϱ und ν gegen einander in 13. erhalten wir für das auf die Tangentialebene von (ν) im Punkt (ϱ, μ, ν) herabgelassene Perpendikel

$$\frac{\nu\sqrt{\nu^2 - b^2}\sqrt{\nu^2 - c^2}}{\sqrt{\nu^2 - \varrho^2}\sqrt{\nu^2 - \mu^2}} = \frac{\nu\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}$$

Eine solche Verwechslung der Buchstaben ϱ und μ oder ϱ und ν ist darum zuläßig, weil die Gleichungen der homofokalen Flächen (ϱ), (μ) und (ν), wie sie in 2. dargestellt sind, gleich lauten.

Im Punkt (ϱ, μ, ν) schneiden sich die homofokalen Flächen (ϱ), (μ), (ν); im Punkt $(\varrho + d\varrho, \mu, \nu)$ schneiden sich die Flächen $(\varrho + d\varrho)$, (μ), (ν); die Verbindungslinie beider Punkte ist ein Element der Durchschnittslinie der Hyperboloide (μ) und (ν). Wir bezeichnen dieses Element mit ds und erhalten in rechtwinkligen Coordinaten die bekannte Formel

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

dx, dy und dz sind die Projektionen von ds auf den Axen der x, y und z. Diese Projektionen kann man sogleich aus den Formeln 7, 8, 9 ableiten, indem man darin die Größen x, y, z und ϱ als die einzigen Variabeln betrachtet. Durch Differenziation dieser Formeln ergibt sich

$$bc\,dx = \mu\nu\,d\varrho$$

$$b\sqrt{c^2 - b^2}\,dy = \frac{\varrho\,d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - b^2}}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}$$

$$c\sqrt{c^2 - b^2}.\,dz = \frac{\varrho\,d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - c^2}}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}$$

also $ds^2 = \left\{\frac{\mu^2\nu^2}{b^2c^2} + \frac{\varrho^2(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}{(\varrho^2-b^2)b^2(c^2-b^2)} + \frac{\varrho^2(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}{(\varrho^2-c^2)c^2(c^2-b^2)}\right\}d\varrho^2$

$= \frac{\varrho^2}{P^2}d\varrho^2$ (siehe die Entwicklung von P)

Hieraus erhält man mit Hülfe von 13. folgenden Werth für ds

$$14.\quad ds = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}\,d\varrho$$

Auf ähnliche Weise läßt sich der Werth des Abstands ds' der Punkte (ϱ, μ, ν) und $(\varrho, \mu + d\mu, \nu)$ ableiten, indem man in den Formeln 7, 8, 9 die Größen x, y, z und μ als variabel ansieht und differenziirt, oder einfacher, wenn man in 14. blos μ statt ϱ und ϱ statt μ setzt

$$15.\quad ds' = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}}\,d\mu$$

und der Werth des Abstands ds'' der Punkte (ϱ, μ, ν) und $(\varrho, \mu, \nu + d\nu)$, wenn man in 7., 8., 9. die Größen x, y, z und ν als variabel ansieht und differenziirt, oder indem man blos die Buchstaben ϱ und ν in 14. gegenseitig vertauscht

$$16.\quad ds'' = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}\,d\nu$$

Durch Verbindung der Gleichungen 14 und 13 ergibt sich

$$17.\quad P\,.\,ds = \varrho\,.\,d\varrho$$

Das Produkt $P\,.\,ds$ ist somit unabhängig von μ und ν und also für das Ellipsoid (ϱ) konstant. Wir können nach dem Vorhergehenden leicht die Winkel a, a′, a″ bestimmen, welche das Element ds oder die Richtung der Tangente der Durchschnittslinie von (μ) und (ν) mit den Axen der x, y und z bildet. Es ist nämlich

$$\cos a = \frac{dx}{ds};\quad \cos a' = \frac{dy}{ds};\quad \cos a'' = \frac{dz}{ds}\ \text{also}$$

$$18.\ \cos a = \frac{\mu\nu\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{bc\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}\quad \cos a' = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$

$$\cos a'' = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$

Auf ganz gleichem Wege erhalten wir für die Cosinus der Winkel $\alpha, \alpha', \alpha''$, welche das Element ds' oder der Durchschnitt der Flächen (ϱ) und (ν) mit den Axen bildet

$$19.\ \cos\alpha = \frac{\varrho\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}.\nu}{bc\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}\quad \cos\alpha' = \frac{\sqrt{\varrho^2 - b^2}.\mu.\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}$$

$$\cos\alpha'' = -\frac{\sqrt{\varrho^2 - c^2}.\mu.\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}$$

und für die Cosinus der Winkel α, α', α'', welche das Element ds'' oder der Durchschnitt der Flächen (ϱ) und (μ) mit den Axen macht

$$20.\quad \cos\alpha = \frac{\varrho\,\mu\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{b\,c\sqrt{\varrho^2-\nu^2}\sqrt{\mu^2-\nu^2}}$$

$$\cos\alpha' = -\frac{\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\,.\,\nu}{b\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-\nu^2}\sqrt{\mu^2-\nu^2}}$$

$$\cos\alpha'' = -\frac{\sqrt{\varrho^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\,.\,\nu}{c\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-\nu^2}\sqrt{\mu^2-\nu^2}}$$

Chasles hat die vorstehenden Formeln auf synthetischem Wege ermittelt, dessen Kenntniß gleichfalls von Werth ist. Das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene des Ellipsoids (ϱ) im Punkte (ϱ, μ, ν) gefällte Perpendikel haben wir mit P bezeichnet; es ist parallel mit ds; die Winkel, welche dasselbe mit den Axen bildet, sind somit gleich α, α', α'' und nach einem synthetisch sehr leicht zu beweisenden Satze besteht die Relation

$$P^2 = \varrho^2\cos^2\alpha + (\varrho^2 - b^2)\cos^2\alpha' + (\varrho^2 - c^2)\cos^2\alpha''$$

Das vom Mittelpunkt auf eine parallele Tangentialebene von (μ) gefällte Perpendikel sei $= P'$, so ist

$$P'^2 = \mu^2\cos^2\alpha + (\mu^2 - b^2)\cos^2\alpha' - (c^2 - \mu^2)\cos^2\alpha''$$

$$P^2 - P'^2 = \varrho^2 - \mu^2$$

Hierin ist der bekannte Satz von Chasles enthalten:

Gegeben sind zwei homofokale Flächen. Die Differenz der Quadrate der vom Mittelpunkt auf irgend zwei parallele Tangentialebenen dieser Flächen gefällten Perpendikel ist konstant.

In dem Punkt (ϱ, μ, ν) ziehe man die Tangentialebene von (μ) und eine parallele Tangentialebene von (ϱ), so ist

$$P^2 - P'^2 = \varrho^2 - \mu^2$$

Derjenige Semidiameter von (ϱ), welcher senkrecht auf diesen Tangentialebenen steht, ist gleich $\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}$. Denn wenn man drei beliebige konjugirte Semidiameter auf P projicirt, so ist die Quadratsumme ihrer Projektionen gleich P^2. Man nehme nun für diese Semidiameter denjenigen, welcher in (ϱ, μ, ν) endigt, so ist das Quadrat seiner Projektion gleich $P_{,}^2$. Der zweite Semidiameter D ist parallel der Normale von (μ) in (ϱ, μ, ν), also ist er selbst seine Projektion, der dritte D′ ist senkrecht auf D, also ist seine Projektion $= o$, mithin ist $P'^2 + D^2 = P^2$ oder $D^2 = P^2 - P'^2$

$$D = \sqrt{\varrho^2 - \mu^2}$$

$$D' = \sqrt{\varrho^2 - \nu^2}$$

P . D . D′ ist das Volumen des aus drei konjugirten Semidiametern des des Ellipsoids (ϱ) konstruirten Parallelepipeds. Dieses Volumen ist konstant und gleich dem Parallelepiped der drei Halbaxen, also

$$P = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$

Bei dem unendlich nahen Ellipsoid ($\varrho + d\varrho$) sei das auf die Tangentialebene des Punkts ($\varrho + d\varrho, \mu, \nu$) gefällte Perpendikel $= P + dP$, so ist

$$(P + dP)^2 - P^2 = (\varrho + d\varrho)^2 - \varrho^2$$

$$P\,dP = \varrho\,d\varrho$$

dP ist aber gleich ds, also

$$ds = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}\, d\varrho \quad \text{(Journal v. Liouville. 1846.)}$$

Die Werthe von D und D′ können wir leicht analytisch entwickeln; man hat nämlich die bekannten Gleichungen

$$D^2 D'^2 = \frac{a^2b^2c^2}{P^2} \qquad D^2 + D'^2 = a^2 + b^2 + c^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

P ist das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene im Punkt (x, y, z) des Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ gefällte Perpendikel; D und D′ sind die Halbaxen desjenigen Diametralschnitts, welcher dieser Tangentialebene parallel ist. Durch Anwendung elliptischer Coordinaten erhalten wir

$$a^2b^2c^2 = \varrho^2(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2) \qquad P^2 = \frac{\varrho^2(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}{(\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - \nu^2)}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3\varrho^2 - b^2 - c^2 \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2 \quad (4)$$

$$D^2 D'^2 = (\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - \nu^2) \qquad D^2 + D'^2 = (\varrho^2 - \mu^2) + (\varrho^2 - \nu^2)$$

21. $D = \sqrt{\varrho^2 - \mu^2}$

22. $D' = \sqrt{\varrho^2 - \nu^2}$

Aus 18., 19. und 20. findet man

$$\cos a \,.\, \cos\alpha + \cos a' \,.\, \cos\alpha' + \cos a'' \,.\, \cos\alpha''$$

$$= \frac{\varrho\mu\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}}{b^2c^2(c^2-b^2)(\varrho^2-\mu^2)\sqrt{\varrho^2-\nu^2}\sqrt{\mu^2-\nu^2}}\left\{\nu^2(c^2-b^2)+c^2(b^2-\nu^2)-b^2(c^2-\nu^2)\right\}$$

$$= 0$$

ebenso

$$\cos a \,.\, \cos \mathfrak{a} + \cos a' \,.\, \cos \mathfrak{a}' + \cos a'' \,.\, \cos \mathfrak{a}'' = 0$$

$$\cos\alpha \,.\, \cos \mathfrak{a} + \cos\alpha' \,.\, \cos \mathfrak{a}' + \cos\alpha'' \,.\, \cos \mathfrak{a}'' = 0$$

D i e c e n t r i s c h e n h o m o f o k a l e n F l ä c h e n s c h n e i d e n s i c h o r t h o g o n a l , u n d m i t h i n n a c h d e m S a t z v o n D u p i n i n i h r e n K r ü m m u n g s l i n i e n.

Dieses Theorem wird später noch auf andere Art bewiesen werden.

An die angeführten Formeln knüpfen sich verschiedene Betrachtungen an. Es sei A B C D ein von vier Krümmungslinien auf einer Fläche zweiten Grads, z. B. auf dem Ellipsoid (ϱ) gebildetes Viereck. Wir ziehen in den Punkten A, B, C, D die Tangentialebenen von (ϱ) und bezeichnen die vom Mittelpunkt auf dieselben gefällten Perpendikel der Reihe nach mit P_a, P_b, P_c, P_d. In dem Punkt A schneiden sich die homofokalen Hyperboloide (μ) und (ν), dieser Punkt werde also durch ($\varrho\mu\nu$) bezeichnet. In B schneiden sich die homofokalen Hyperboloide (μ) und (ν'), also bezeichnen wir ihn mit ($\varrho\mu\nu'$); ebenso bezeichnen wir C mit ($\varrho\mu'\nu'$) und D mit ($\varrho\mu'\nu$), weil sich in diesen Punkten die homofokalen Hyperboloide (μ'), (ν') und (μ'), (ν) schneiden. Wir haben nun zufolge der Gleichung 16 folgende Relationen:

$$P_a = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}} \qquad P_b = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu'^2}}$$

$$P_c = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu'^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu'^2}} \qquad P_d = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu'^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$

Hieraus läßt sich sogleich ableiten:

23. $P_a \,.\, P_c = P_b \,.\, P_d$ oder $P_a : P_b = P_d : P_c$

Wenn man auf einer centrischen Fläche zweiten Grads ein Viereck bildet aus vier Krümmungslinien, und auf die Tangentialebenen in den vier Ecken vom Mittelpunkt aus Perpendikel fällt, so bilden diese Perpendikel eine Proportion.

Zwei Gegenseiten des Vierecks gehören dem einen System der Krümmungslinien an, und die beiden andern Seiten dem andern System.

Aus der Gleichung 14 läßt sich eine ganz ähnliche Folgerung ziehen. Es seien die Abstände der Ecken A, B, C, D von dem unendlich nahen Ellipsoid ($\varrho + d\varrho$) beziehungsweise gleich ds_a, ds_b, ds_c, ds_d, so haben wir die Gleichungen

$$ds_a = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}\, d\varrho \qquad ds_b = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu'^2}}{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}\, d\varrho$$

$$ds_c = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu'^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu'^2}}{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}\, d\varrho \qquad ds_d = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu'^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}\, d\varrho$$

24. $ds_a \,.\, ds_c = ds_b \,.\, ds_d$ oder $ds_a : ds_b = ds_d : ds_c$

Die Abstände der Ecken eines von vier Krümmungslinien auf einer Fläche zweiten Grads gebildeten Vierecks von der unendlich nahen einschließenden homofokalen Fläche bilden eine Proportion (Satz von Bertrand).

Durch den Punkt A auf dem Ellipsoid (ϱ) gehen die beiden Krümmungslinien $\mu = \text{const.}$ und $\nu = \text{const.}$ Derjenige Semidiameter des Ellipsoids, welcher der Tangente der ersten Krümmungslinie parallel ist, hat den Ausdruck $\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}$. Dieser Werth bleibt aber konstant längs aller Punkte der zweiten Krümmungslinie, da sich hier weder ϱ noch ν verändert; somit haben wir den Satz:

Alle Semidiameter einer centrischen Fläche zweiten Grads, welche mit den konjugirten Tangenten einer Krümmungslinie parallel sind, sind gleich lang; sie bilden also auf der Fläche eine sphärische Kurve. Wenn man auf solche Art die Semidiameter zieht, welche den konjugirten Tangenten der übrigen Krümmungslinien parallel sind, so erhält man auf der Fläche zwei Systeme von sphärischen Kurven.

In dem Viereck ABCD schneiden sich in jeder Ecke zwei Krümmungslinien; zieht man ihre Tangenten, so ergeben sich acht Tangenten. Die beiden Semidiameter, welche den Tangenten der Linie AB und AD parallel sind, seien D_a und D'_a so ist

$$D_a = \sqrt{\varrho^2 - \nu^2} \qquad D'_a = \sqrt{\varrho^2 - \mu^2}$$

Ebenso erhalten wir für die Semidiameter, welche den in den Ecken B, C, D zusammenstoßenden Tangenten parallel sind

$$D_b = \sqrt{\varrho^2 - \mu^2} \qquad D_c = \sqrt{\varrho^2 - \nu'^2} \qquad D_d = \sqrt{\varrho^2 - \mu'^2}$$

$$D'_b = \sqrt{\varrho^2 - \nu'^2} \qquad D_c = \sqrt{\varrho^2 - \mu'^2} \qquad D_d = \sqrt{\varrho^2 - \nu^2}$$

25. $D_a \,.\, D_b \,.\, D_c \,.\, D_d = D'_a \,.\, D'_b \,.\, D'_c \,.\, D'_d$

Hierin liegt der Satz:

Die acht Semidiameter einer centrischen Fläche zweiten Grads, welche den acht Tangenten in den Ecken eines von vier

Krümmungslinien gebildeten Vierecks parallel sind, bilden zwei Gruppen; das Produkt der vier Semidiameter der einen Art ist gleich dem Produkt der vier Semidiameter der andern Art.

Die Gleichungen 4 geben die Werthe der Coordinaten x, y, z eines Punkts (xyz) oder ($\varrho\mu\nu$) ausgedrückt durch die großen Halbaxen der drei durch ihn gehenden homofokalen Flächen (ϱ), (μ), (ν). Die Linie, welche vom Mittelpunkt nach diesem Punkt gezogen ist, bezeichnen wir mit H, so ist $H = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ oder nach 10.

26. $H = \sqrt{\varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2}$

Es seien H_a, H_b, H_c, H_d die vier Halbmesser, welche sich vom Mittelpunkt nach den vier Ecken des auf dem Ellipsoid (ϱ) von vier Krümmungslinien gebildeten Vierecks ziehen lassen, so haben wir nach dem Obigen folgende Relationen:

$H_a = \sqrt{\varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2}$ $\quad$ $H_b = \sqrt{\varrho^2 + \mu^2 + \nu'^2 - b^2 - c^2}$

$H_c = \sqrt{\varrho^2 + \mu'^2 + \nu'^2 - b^2 - c^2}$ $\quad$ $H_d = \sqrt{\varrho^2 + \mu'^2 + \nu^2 - b^2 - c^2}$

27. $H^2_a + H^2_c = H^2_b + H^2_d$

Die Quadratsumme der nach zwei Gegenecken eines von vier Krümmungslinien auf einer centrischen Fläche zweiten Grads gebildeten Vierecks gezogenen Halbmesser ist gleich der Quadratsumme der nach den beiden andern Gegenecken gezogenen Halbmesser.

Man denke sich noch ein zweites homofokales Ellipsoid (ϱ'), so bilden die Flächen (μ), (μ') und (ν), (ν') auf demselben das Krümmungslinienviereck A'B'C'D', bezeichnen wir die vom Mittelpunkt aus nach den Ecken desselben gezogenen Halbmesser mit H'_a, H'_b, H'_c, H'_d, so haben wir

$H'_a = \sqrt{\varrho'^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2}$ $\quad$ $H'_b = \sqrt{\varrho'^2 + \mu^2 + \nu'^2 - b^2 - c^2}$

$H'_c = \sqrt{\varrho'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 - b^2 - c^2}$ $\quad$ $H'_d = \sqrt{\varrho'^2 + \mu'^2 + \nu^2 - b^2 - c^2}$

28. $H^2_a + H'^2_c = H^2_b + H'^2_d = H^2_c + H'^2_a = H^2_d + H'^2_b$

Die Quadratsummen von je zwei Halbmessern, welche nach zwei Gegenecken eines von sechs homofokalen Flächen gebildeten Parallelepipeds gezogen werden, sind einander gleich.

Es sei O der Mittelpunkt der homofokalen Flächen, oder der Anfangspunkt des Coordinatensystems. M ist ein beliebiger Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind. Die Cosinus der drei Winkel, welche die Linie OM mit den Axen bildet, sind

$$\frac{x}{OM}, \frac{y}{OM}, \frac{z}{OM}$$

Ebenso sind die Cosinus der drei Winkel, welche die nach einem andern Punkt M' gezogene Linie OM' mit den Axen bildet

$$\frac{x'}{OM'}, \frac{y'}{OM'}, \frac{z'}{OM'}$$

mithin ist

$$\cos MOM' = \frac{xx'}{OM \,.\, OM'} + \frac{yy'}{OM \,.\, OM'} + \frac{zz'}{OM \,.\, OM'}$$

Die Halbaxen der drei durch M gehenden homofokalen Flächen sind ϱ, μ, ν; ebenso die Halbaxen der drei durch M' gehenden homofokalen Flächen ϱ', μ', ν'.

Zufolge der Gleichung 26 ist

$$OM = \sqrt{\varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2} \qquad OM' = \sqrt{\varrho'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 - b^2 - c^2}$$

Die Werthe von x, y, z; x', y', z' erhalten wir aus den Gleichungen 7, 8, 9; mithin ist

$$29.\ \cos MOM' = \frac{1}{OM . OM'}\left\{\frac{\varrho\mu\nu\varrho'\mu'\nu'}{b^2c^2} + \frac{\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{\varrho'^2-b^2}\sqrt{\mu'^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu'^2}}{b^2(c^2-b^2)} + \frac{\sqrt{\varrho^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{\varrho'^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu'^2}\sqrt{c^2-\nu'^2}}{c^2(c^2-b^2)}\right\}$$

Wir betrachten wieder das Viereck ABCD, welches durch Krümmungslinien auf dem Ellipsoid (ϱ) gebildet ist. Die Punkte A B C D sind nach den durch sie gehenden homofokalen Flächen zu bezeichnen mit ($\varrho\mu\nu$), ($\varrho\mu\nu'$), ($\varrho\mu'\nu'$), ($\varrho\mu'\nu$).

Die Gleichung 29 führt nun sogleich auf die Formel

$$OA . OC . \cos AOC = OB . OD . \cos BOD$$

Nach einem bekannten geometrischen Lehrsatz ist:

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2\,OA . OC . \cos AOC$$
$$BD^2 = OB^2 + OD^2 - 2\,OB . OD . \cos BOD$$

Da nun nach 27. $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$ ist, so haben wir auch $AC^2 = BD^2$ oder

30. $AC = BD$

In jedem von vier Krümmungslinien auf einer centrischen Fläche zweiten Grads gebildeten Viereck ist die Entfernung von zwei Gegenecken gleich der Entfernung der beiden andern.

Sind z. B. A, B, C die Endpunkte der drei Axen eines Ellipsoids, und ist D ein Nabelpunkt, so ist ABCD ein spezielles Krümmungslinienviereck. Nun haben wir $AC^2 = \varrho^2 + \varrho^2 - c^2$ Die Coordinaten von D sind

$$x = \varrho\frac{b}{c} \qquad y = o \qquad z = \frac{1}{c}\sqrt{(\varrho^2 - c^2)(c^2 - b^2)} \quad \text{also}$$

$$BD^2 = \varrho^2 - b^2 + \varrho^2\frac{b^2}{c^2} + \frac{1}{c^2}(\varrho^2 - c^2)(c^2 - b^2) = \varrho^2 + \varrho^2 - c^2 \quad \text{oder}$$

$$AC = BD$$

Sechs homofokale Flächen schließen ein Parallelepiped ein, nämlich zwei Ellipsoide (ϱ) und (ϱ'); zwei einmantlige Hyperboloide (μ) und (μ'); zwei zweimantlige Hyperboloide (ν) und (ν'). Die Ecken A, B, C, D; A', B', C', D, sind nach den großen Halbaxen der drei durch jede derselben gehenden Flächen zu bezeichnen mit

$$(\varrho\mu\nu) \quad (\varrho\mu\nu') \quad (\varrho\mu'\nu') \quad (\varrho\mu'\nu)$$
$$(\varrho'\mu\nu) \quad (\varrho'\mu\nu') \quad (\varrho'\mu'\nu') \quad (\varrho'\mu'\nu)$$

Da nun nach 28.

$OA^2 + OC'^2 = OB^2 + OD'^2 = OC^2 + OA'^2 = OD^2 + OB'^2$ ist,

ferner nach 29.

$$OA . OC' . \cos AOC' = OB . OD' . \cos BOD' = OC . OA' . \cos COA'$$
$$= OD . OB' . \cos DOB'$$

so ergibt sich bei Anwendung des genannten geometrischen Lehrsatzes auf die Dreiecke AOC', BOD', COA', DOB'

31. $AC' = BD' = CA' = DB'$

In jedem von sechs homofokalen Flächen eingeschlossenen Parallelepiped sind je zwei Gegenecken gleichweit von einander entfernt.

Es seien A, B, C die Endpunkte von drei Axen und D der Nabelpunkt auf dem Ellipsoid (ϱ), die gleiche Bedeutung haben die Buchstaben A′ B′ C′ D′ für das Ellipsoid (ϱ'), so ist ABCD A′B′C′D′ ein von sechs homofokalen Flächen eingeschlossenes Parallelepiped. Nun haben wir

$$AC'^2 = \varrho^2 + \varrho'^2 - c^2$$

Die Coordinaten von D′ sind

$$x' = \varrho' \frac{b}{c} \qquad y' = o \qquad z' = \frac{1}{c}\sqrt{(\varrho^2 - c^2)(c^2 - b^2)} \text{ also}$$

$$BD'^2 = \varrho^2 - b^2 + \varrho'^2 \frac{b^2}{c^2} + \frac{1}{c^2}(\varrho'^2 - c^2)(c^2 - b^2) \text{ oder}$$

$$AC' = BD'$$

Dieser Satz stammt von Ivory, und ist bekannt unter der Form: die Entfernung zweier Punkte im Raum (zweier Gegenecken unseres Parallelepipeds) ist gleich der Entfernung ihrer korrespondirenden Punkte (zweier andern Gegenecken dieses Parallelepipeds) (recueil des savants étrangers; Chasles: sur l' attraction des ellipsoides, IX. S. 629).

Der allgemeine Ausdruck für die beiden Hauptkrümmungshalbmesser auf einer centrischen Fläche zweiten Grades, deren Halbaxen a, b, c sind, im Punkt x, y, z ist (§. 18, 15)

$$\frac{1}{R} = \tfrac{1}{2}\frac{P^2}{a^2 b^2 c^2}\Big\{(a^2 + b^2 + c^2 - x^2 - y^2 - z^2) P$$
$$\pm \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 - x^2 - y^2 - z^2)^2 P^2 - 4 a^2 b^2 c^2}\Big\}$$

P ist das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene im Punkt (xyz) gefällte Perpendikel. Wenden wir diese Formel auf das Ellipsoid (ϱ) an, so haben wir folgende Werthe zu setzen:

$$P = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2$$

$$a = \varrho \qquad b = \sqrt{\varrho^2 - b^2} \qquad c = \sqrt{\varrho^2 - c^2}$$

Dadurch verwandelt sich obige Formel in

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2}\frac{1}{(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-\nu^2)}\Big\{(\varrho^2 - \mu^2 + \varrho^2 - \nu^2)\frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$
$$\pm\sqrt{(\varrho^2 - \mu^2 + \varrho^2 - \nu^2)^2\frac{\varrho^2(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}{(\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - \nu^2)} - 4\varrho^2(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}\Big\}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2}\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}\left(\frac{\varrho^2 - \mu^2 + \varrho^2 - \nu^2}{(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{3/2}} \pm \frac{\mu^2 - \nu^2}{(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{3/2}}\right)$$

oder, wenn wir die beiden Hauptkrümmungshalbmesser mit R und R′ bezeichnen, $R > R'$, d. h. R entspricht den Krümmungslinien μ und R′ den Krümmungslinien ν, so ist

$$32. \quad R = \frac{(\varrho^2 - \mu^2)^{1/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{3/2}}{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}} \qquad R' = \frac{(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{1/2}}{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}$$

In dem Krümmungslinienviereck ABCD sind im Ganzen für die vier Ecken acht Hauptkrümmungshalbmesser anzuführen. Wir bezeichnen diejenigen, welche den Krümmungslinien μ entsprechen, d. h. den durch die Hyperboloide

(μ) und (μ') auf dem Ellipsoid hervorgebrachten Schnitten, mit R_a, R_b, R_c, R_d. Ebenso bezeichnen wir die andern vier Hauptkrümmungshalbmesser, welche den Krümmungslinien ν entsprechen, oder den auf dem Ellipsoid durch die Hyperboloide (ν) und (ν') hervorgebrachten Schnitten mit R'_a, R'_b, R'_c, R'_d, so bestehen nachstehende Gleichungen, indem der Kürze wegen

$$\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2} = \lambda$$

gesetzt wird,

$$R_a = \frac{1}{\lambda}(\varrho^2 - \mu^2)^{1/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{3/2} \qquad R_b = \frac{1}{\lambda}(\varrho^2 - \mu^2)^{1/2}(\varrho^2 - \nu'^2)^{3/2}$$

$$R_c = \frac{1}{\lambda}(\varrho^2 - \mu'^2)^{1/2}(\varrho^2 - \nu'^2)^{3/2} \qquad R_d = \frac{1}{\lambda}(\varrho^2 - \mu'^2)^{1/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{3/2}$$

33. $R_a \,.\, R_c = R_b \,.\, R_d$

$$R'_a = \frac{1}{\lambda}(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{1/2} \qquad R_b = \frac{1}{\lambda}(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}(\varrho^2 - \nu'^2)^{1/2}$$

$$R'_c = \frac{1}{\lambda}(\varrho^2 - \mu'^2)^{3/2}(\varrho^2 - \nu'^2)^{1/2} \qquad R_d = \frac{1}{\lambda}(\varrho^2 - \mu'^2)^{3/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{1/2}$$

34. $R'_a \,.\, R'_c = R'_b \,.\, R'_d$

oder auch

$$R_a : R_b = R_d : R_c$$
$$R'_a : R'_b = R'_d : R'_c$$

In einem Krümmungslinienviereck auf einer centrischen Fläche zweiten Grades sind die vier Hauptkrümmungshalbmesser der einen Art in Proportion, sowie auch die vier Hauptkrümmungshalbmesser der andern Art. Diesen Satz hat zuerst Bertrand für das Ellipsoid aufgestellt.

In dem Punkt A treffen die drei homofokalen Flächen (ϱ), (μ), (ν) zusammen. Wir bezeichnen die beiden Hauptkrümmungshalbmesser des Ellipsoids (ϱ) wie oben mit $R > R'$; diejenigen des einmantligen Hyperboloids (μ) mit M (positiv) M' (negativ); und endlich diejenigen des zweimantligen Hyperboloids (ν) mit $N > N'$, so haben wir nachstehende Relationen, wo der Kürze wegen

$$\lambda' = \mu\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2} \qquad \lambda'' = \nu\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}$$

gesetzt wird:

$$R = \frac{1}{\lambda}(\varrho^2 - \mu^2)^{1/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{3/2} \qquad R' = \frac{1}{\lambda}(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{1/2}$$

$$M = \frac{1}{\lambda'}(\varrho^2 - \mu^2)^{1/2}(\mu^2 - \nu^2)^{3/2} \qquad M' = -\frac{1}{\lambda'}(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}(\mu^2 - \nu^2)^{1/2}$$

$$N = \frac{1}{\lambda''}(\varrho^2 - \nu^2)^{3/2}(\mu^2 - \nu^2)^{1/2} \qquad N' = \frac{1}{\lambda''}(\varrho^2 - \nu^2)^{1/2}(\mu^2 - \nu^2)^{3/2}$$

35. $R' \,.\, M \,.\, N = - R \,.\, M' \,.\, N'$

Wenn sich in einem Punkte drei homofokale Flächen schneiden, so bilden die sechs Hauptkrümmungshalbmesser der Flächen in diesem Punkte zwei Gruppen; das Produkt der drei Halbmesser der ersten Gruppe vermehrt um das Produkt der Halbmesser der zweiten Gruppe ist gleich Null.

$$\frac{R}{R'} = \frac{\varrho^2 - \nu^2}{\varrho^2 - \mu^2} \qquad \frac{M}{M'} = -\frac{\mu^2 - \nu^2}{\varrho^2 - \mu^2} \qquad \frac{N}{N'} = \frac{\varrho^2 - \nu^2}{\mu^2 - \nu^2}$$

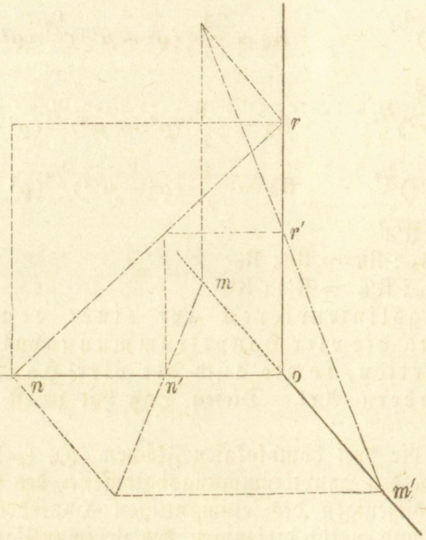
Aus diesen Gleichungen lassen sich noch folgende weitere ableiten:

$$36. \quad \frac{R}{R'} + \frac{M}{M'} = 1 \qquad \frac{R'}{R} + \frac{N'}{N} = 1 \qquad \frac{M'}{M} + \frac{N}{N'} = 1$$

35. hat zuerst Lamé aufgestellt; die Relationen 36 rühren von Bertrand her.

Es sei o der Punkt, in welchem sich die drei homofokalen Flächen schneiden; man ziehe durch o die drei Normalen dieser Flächen und bestimme auf jeder die beiden Krümmungsmittelpunkte; r und r′ seien die Krümmungsmittelpunkte des Ellipsoids (ϱ), m und m′ diejenigen des Hyperboloids (μ) und n und n′ diejenigen des zweimantligen Hyperboloids (ν). or = R, or′ = R′, om = M, om′ = M′, on = N, on′ = N′.

Fig. 9.



Die Gleichungen 36 lassen sich nun in folgender Weise geometrisch darstellen, wobei zu bemerken ist, daß die Punkte m und m′ auf entgegengesetzten Seiten von o liegen, während die Punkte r und r′ sich auf der nämlichen Seite dieses Punkts befinden, wie auch n und n′. Die durch r mit mm′ und durch m mit rr′ gezogenen Parallelen schneiden sich auf der Verlängerung der Geraden m′r′; die durch r′ mit nn′ und durch n′ mit rr′ gezogenen Parallelen treffen sich auf der Linie rn; endlich liegt der Durchschnittspunkt der Geraden, welche durch m′ parallel mit nn′ und durch n parallel mit mm′ gezogen werden, auf der Verlängerung der Geraden mn′. Wir haben somit folgenden Lehrsatz:

Wenn man von den sechs Krümmungsmittelpunkten, welche drei in einem Punkt sich schneidenden homofokalen Flächen entsprechen, drei Paare verbindet, und durch die andern drei Paare Parallelen mit den Normalen zieht, so liegen die Durchschnittspunkte der Parallelen auf den Verbindungslinien.

Die Gleichungen 4 enthalten die Werthe der Coordinaten x, y, z eines Punkts im Raum, ausgedrückt durch die großen Halbaxen ϱ, μ, ν der drei homofokalen Flächen, (ϱ), (μ), (ν), welche sich durch diesen Punkt legen lassen. Es ist dabei, wie immer, vorausgesetzt, daß die Entfernungen der Brennpunkte, b und c, gegeben sind. Wir wollen die Coordinaten der Eckpunkte des Krümmungslinienvierecks ABCD mit

$$x_a, \; y_a, \; z_a; \; x_b, \; y_b, \; z_b; \; x_c, \; y_c, \; z_c; \; x_d, \; y_d, \; z_d$$

bezeichnen, so haben wir aus den Gleichungen 7, 8, 9 folgende Werthe:

$$x_a = \frac{\varrho\mu\nu}{bc} \qquad y_a = \frac{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}$$

$$z_a = \frac{\sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}$$

$$x_b = \frac{\varrho\mu\nu'}{bc} \qquad y_b = \frac{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu'^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}$$

$$z_b = \frac{\sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu'^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}$$

$$x_c = \frac{\varrho\mu'\nu'}{bc} \qquad y_c = \frac{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\mu'^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu'^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}$$

$$z_c = \frac{\sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu'^2}\sqrt{c^2 - \nu'^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}$$

$$x_d = \frac{\varrho\mu'\nu}{bc} \qquad y_d = \frac{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\mu'^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \nu'^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}$$

$$z_d = \frac{\sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu'^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}$$

Hieraus lassen sich die Relationen ableiten

37. $x_a \,.\, x_c = x_b \,.\, x_d$ oder $x_a : x_b = x_d : x_c$
$y_a \,.\, y_c = y_b \,.\, y_d$ oder $y_a : y_b = y_d : y_c$
$z_a \,.\, z_c = z_b \,.\, z_d$ oder $z_a : z_b = z_d : z_c$

worin folgender Satz ausgesprochen ist:

Die Projektionen der vom Mittelpunkt einer centrischen Fläche zweiten Grades nach den vier Ecken eines Krümmungslinienvierecks gezogenen Halbmesser auf irgend einer der drei Axen bilden eine Proportion.

Der Cosinus des Winkels, welchen die Normale des Ellipsoids im Punkt x', y', z' mit der x Axe macht, läßt sich auch aus den Gleichungen dieser Normale ableiten:

$$x - x' = \frac{x'}{z'}\,\frac{\varrho^2 - c^2}{\varrho^2}(z - z') \qquad y - y' = \frac{y'}{z'}\,\frac{\varrho^2 - c^2}{\varrho^2 - b^2}(z - z')$$

man erhält daraus:

$$\frac{\frac{x'}{z'}\,\frac{\varrho^2 - c^2}{\varrho^2}}{\sqrt{\frac{x'^2}{z'^2}\,\frac{(\varrho^2 - c^2)^2}{\varrho^4} + \frac{y'^2}{z'^2}\,\frac{(\varrho^2 - c^2)^2}{(\varrho^2 - b^2)^2} + 1}} \quad \text{oder gleich}$$

$$\frac{x'}{\varrho^2\sqrt{\frac{x'^2}{\varrho^4} + \frac{y'^2}{(\varrho^2 - b^2)^2} + \frac{z'^2}{(\varrho^2 - c^2)^2}}} = \frac{x'P}{\varrho^2}$$

Setzen wir nun für x' und P ihre Werthe aus 7. und 13., so erhalten wir

$$\frac{\mu\nu\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}}{bc\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\sqrt{\varrho^2-\nu^2}}$$

Ebenso sind die Cosinus der Winkel, welche diese Normale mit den y und z Axen bildet, gleich

$$\frac{\varrho\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\sqrt{\varrho^2-\nu^2}} \quad \text{und} \quad \frac{\varrho\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{\varrho^2-b^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\sqrt{\varrho^2-\nu^2}}$$

Wir nennen die Winkel, welche die Normalen in den Ecken des Krümmungslinienvierecks ABCD mit den drei Axen bilden, a a' a''; b, b', b''; c, c', c''; d, d', d''; und erhalten nach dem Vorhergehenden folgende Zusammenstellung:

$$38. \quad \cos a = \frac{\mu\nu\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}}{bc\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\sqrt{\varrho^2-\nu^2}}$$

$$\cos a' = \frac{\varrho\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\sqrt{\varrho^2-\nu^2}}$$

$$\cos a'' = \frac{\varrho\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{\varrho^2-b^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\sqrt{\varrho^2-\nu^2}}$$

Die Werthe der Cosinus der übrigen Winkel lassen sich aus diesen Gleichungen ohne Mühe ableiten; bei cos b, cos b', cos b'' ist statt ν ν' zu setzen; bei cos c, cos c', cos c'' ersetzt man μ und ν durch μ' und ν' und endlich bei cos d, cos d', cos d'' μ durch μ'. Hieraus erhalten wir folgende Gleichungen:

$$39. \quad \cos a \,.\, \cos c = \cos b \,.\, \cos d; \quad \cos a' \,.\, \cos c' = \cos b' \,.\, \cos d';$$
$$\cos a'' \,.\, \cos c'' = \cos b'' \,.\, \cos d''$$

Die Cosinus der Winkel, welche die Normalen in den vier Ecken eines Krümmungslinienvierecks einer centrischen Fläche zweiten Grads mit irgend einer von den drei Axen bilden, sind in Proportion.

Durch Vergleichung der Formeln 39 mit 13. und 32. ergeben sich folgende Sätze:

Wenn man auf die vier Tangentialebenen in den Ecken eines Krümmungslinienvierecks einer centrischen Fläche zweiten Grads vom Mittelpunkt aus Perpendikel fällt, so sind die Projektionen der Abschnitte dieser Perpendikel zwischen dem Mittelpunkt und ihrem Fußpunkt auf irgend einer der drei Axen in Proportion.

Wir haben oben gesehen, daß in jedem Punkt einer Fläche zwei Hauptkrümmungshalbmesser zu unterscheiden sind. Diejenigen, welche dem einen System der Krümmungslinien entsprechen, wollen wir Hauptkrümmungshalbmesser der ersten Art, und die andern Hauptkrümmungshalbmesser der zweiten Art nennen.

Die Projektionen der vier Hauptkrümmungshalbmesser der ersten oder der zweiten Art in den Ecken eines Krümmungslinienvierecks einer centrischen Fläche zweiten Grads auf den Axen sind in Proportion.

Wir eliminiren aus den beiden ersten von den Gleichungen 1 der Reihe nach z, y und x, und erhalten dann folgende Ausdrücke:

$$40.\quad \frac{\dfrac{x^2}{\varrho^2\mu^2}}{c^2} + \frac{\dfrac{y^2}{(\varrho^2-b^2)(\mu^2-b^2)}}{c^2-b^2} = 1 \quad \frac{\dfrac{x^2}{\varrho^2\mu^2}}{b^2} + \frac{\dfrac{z^2}{(\varrho^2-c^2)(c^2-\mu^2)}}{c^2-b^2} = 1$$

$$-\frac{y^2}{\frac{1}{b^2}(\varrho^2-b^2)(\mu^2-b^2)} + \frac{z^2}{\frac{1}{c^2}(\varrho^2-c^2)(c^2-\mu^2)} = 1$$

welche den Projektionen der Durchschnittslinie des Ellipsoids (ϱ) und des einmantligen Hyperboloids (μ) auf den xy, xz und yz Ebenen entsprechen. Die zwei ersten Gleichungen stellen Ellipsen vor, und die letzte ist eine Hyperbel. Durch Differenziation derselben nach ν erhalten wir mit Benützung der bekannten Relationen

$$b c x = \varrho\mu\nu$$
$$b\sqrt{c^2-b^2}.y = \sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}$$
$$c\sqrt{c^2-b^2}.z = \sqrt{\varrho^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}$$

$$41.\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}.\nu.c}{\varrho\mu\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-b^2}} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\sqrt{\varrho^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\nu.b}{\varrho\mu\sqrt{c^2-\nu^2}.\sqrt{c^2-b^2}}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\sqrt{\varrho^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\,b}{\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}\,c}$$

Diese Gleichungen geben die Werthe der trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Projektionen der Tangente einer Krümmungslinie des Ellipsoids auf den xy, xz und yz Ebenen mit den Axen der x und y bilden. Diese Krümmungslinie ist der Durchschnitt der Flächen (ϱ) und (μ); die Tangente berührt sie im Punkt (xyz) oder ($\varrho\mu\nu$).

Wenn auf dem Ellipsoid ein Krümmungslinienviereck ABCD gezeichnet ist, so enthält die erste der Gleichungen 41 den Werth von $\frac{dy}{dx}$ für die Projektion der Geraden, welche die Krümmungslinie AB in A berührt. Setzt man in diesem Ausdruck der Reihe nach ν statt ν', μ' und ν' statt μ und ν, μ' für μ, so erhält man drei weitere Werthe von $\frac{dy}{dx}$, welche wir mit $\frac{dy}{dx_b}$, $\frac{dy}{dx_c}$, $\frac{dy}{dx_d}$ bezeichnen, während der erste Werth, worin die Buchstaben $\varrho\,\mu\,\nu$ ohne Accente enthalten sind, gleich $\frac{dy}{dx_a}$ gesetzt werden soll. Man findet nun ohne Mühe nachstehende Relationen:

$$42.\quad \frac{dy}{dx_a}\cdot\frac{dy}{dx_c} = \frac{dy}{dx_b}\cdot\frac{dy}{dx_d} \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx_a} : \frac{dy}{dx_b} = \frac{dy}{dx_d} : \frac{dy}{dx_c}$$

$\frac{dy}{dx_a}$, $\frac{dy}{dx_b}$, $\frac{dy}{dx_c}$, $\frac{dy}{dx_d}$ sind aber die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Projektionen der Tangenten von AB in A und B und der

Tangenten von CD in C und D auf der xy Ebene mit der x Axe bilden. Wir haben somit nachstehenden Lehrsatz:

Die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Projektionen der Tangenten der Krümmungslinien des einen Systems in den vier Ecken eines Krümmungslinienvierecks auf einer Coordinatenebene mit einer Axe bilden, sind in Proportion.

Aus 42. lassen sich die Ausdrücke für die Cosinus der drei Winkel a, a′, a″ entwickeln, welche die Tangente einer Krümmungslinie des Ellipsoids (ϱ) mit den Axen der x, y und z bildet. Wir haben zunächst die Formel

$$\cos a = \frac{+\dfrac{1}{\dfrac{dz}{dx}}}{\sqrt{\dfrac{1}{\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{dz}{dy}\right)^2} + 1}}$$

anzuwenden. Indem wir die Werthe von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ hier aus 42. einsetzen, erhalten wir

$$\cos a = \frac{\varrho\mu\sqrt{c^2-\nu^2}\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{\sqrt{\left\{\varrho^2\mu^2(c^2-\nu^2)(c^2-b^2)(b^2-\nu^2)+c^2(\varrho^2-b^2)(\mu^2-b^2)(c^2-\nu^2)\nu^2+b^2(\varrho^2-c^2)(c^2-\mu^2)(b^2-\nu^2)\nu^2\right\}}}$$

Die drei Summanden unter dem Wurzelzeichen des Nenners bezeichnen wir mit A, B, C, und führen die Multiplikationen aus, so ergeben sich die Gleichungen:

$$A = \varrho\mu\,(ccb - cc\nu - cbb + cb\nu - \nu cb + \nu c\nu + \nu bb - \nu b\nu)$$
$$B = c\nu\,(\varrho\mu c - \varrho\mu\nu - \varrho bc + \varrho b\nu - b\mu c + b\mu\nu + bbc - bb\nu)$$
$$C = b\nu\,(\varrho cb - \varrho c\nu - \varrho\mu b + \varrho\mu\nu - ccb + cc\nu + c\mu b - c\mu\nu)$$

Der Einfachheit wegen sind die Zahlen 2, welche die Quadrate angeben, nicht gesetzt worden. Nachdem diejenigen Ausdrücke, welche in der Summe A + B + C sich aufheben, weggelassen worden sind, bleibt noch

$$A + B + C = (\varrho\mu bc - \varrho\nu bc - c\nu b\mu + c\nu b\nu)\,(c - b)$$
$$A + B + C = bc\,(c - b)\,(\varrho\mu - \varrho\nu - \mu\nu + \nu\nu)$$
$$= bc\,(c - b)\,(\mu - \nu)\,(\varrho - \nu)$$

Wir erhalten auf solche Art, indem die Zahlen 2, welche die Quadrate angeben, wieder gesetzt werden:

$$\cos a = \frac{\varrho\mu\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{bc\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}$$

Für $\nu = b$ wird $\cos a = o$, $a = 90^0$. Die Tangente der Durchschnittslinie der Flächen (ϱ) und (μ) in dem Punkte, wo sie die zx Ebene trifft, ist senkrecht auf der x Axe.

Für $\nu = o$ wird $\cos a = 1$, $a = o$. Die Tangente in dem Punkte dieser Durchschnittslinie, wo sie die zy Ebene trifft, ist parallel zur x Axe. Mit Benützung der bekannten Gleichungen

$$\cos a' = \frac{+\frac{1}{\frac{dz}{dy}}}{\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} + 1}} \quad \text{und}$$

$$\cos a'' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} + 1}}$$

erhalten wir auf analoge Weise $\cos a'$ und $\cos a''$ durch die fünf Größen ϱ, μ, ν, b, c ausgedrückt; man kann auf diese Art die Werthe aller Cosinus in den Formeln 18 — 20 finden.

Durch die Gleichungen 1 mit den Konstanten b und c ist ein System homofokaler Flächen bestimmt. Wir nehmen an, der Punkt (ϱ, μ, ν) nähere sich mehr und mehr dem Mittelpunkt und falle endlich mit ihm zusammen. Dann ist die kleine Axe des Ellipsoids (ϱ) gleich Null geworden, also $\varrho = c$ und die Gleichung desselben hat sich verwandelt in

43. $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1$

Ebenso ist die mittlere Axe von (μ) gleich Null, $\mu = b$, und statt des einmantligen Hyperboloids hat man die Hyperbel

44. $\frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1$

Endlich ist auch die x Axe von (ν) verschwunden, $\nu = 0$, und das zweimantlige Hyperboloid geht in die imaginäre Kurve über

45. $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$

43., 44., 45. sind die Gleichungen der **Fokallinien**, und zwar stellen die beiden ersten insbesondere die **Fokalellipse** und die **Fokalhyperbel** vor. Sie verhalten sich zu den Flächen zweiten Grades wie die Brennpunkte zu den Kegelschnitten.

Setzt man aber in 1. $\varrho = b = c$, so erhält man

$$z = 0 \quad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} = 1$$

welche Gleichungen sich auf homofokale Kegelschnitte beziehen. Sehr viele von den in diesem Paragraph und in den folgenden angeführten Sätzen können unmittelbar auf die analytische Geometrie der Ebene übertragen werden.

§. 22. Die homofokalen centrischen Flächen zweiten Grades. Fortsetzung.

Die Gleichung $\frac{\xi x}{\varrho^2} + \frac{\eta y}{\varrho^2 - b^2} + \frac{\zeta z}{\varrho^2 - c^2} = 1$ stellt die Polarebene des Punkts $(\xi \eta \zeta)$ in Beziehung auf die Fläche $\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2}$

$= 1$ dar. Bewegt sich der Pol auf der Ebene $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 1$, so erhält man durch Elimination

$$\left(\frac{\alpha y}{\varrho^2 - b^2} - \frac{\beta x}{\varrho^2}\right)\eta + \left(\frac{\alpha z}{\varrho^2 - c^2} - \frac{\gamma x}{\varrho^2}\right)\zeta + \frac{x}{\varrho^2} - \alpha = o$$

Soll diese Gleichung von η und ζ unabhängig sein, so muß

$$\frac{\alpha y}{\varrho^2 - b^2} - \frac{\beta x}{\varrho^2} = o \qquad \frac{\alpha z}{\varrho^2 - c^2} - \frac{\gamma x}{\varrho^2} = o$$

werden, mithin auch $\frac{x}{\varrho^2} - \alpha = o$

Hieraus erhalten wir

$$1.\quad x = \alpha\varrho^2 \qquad y = \beta(\varrho^2 - b^2) \qquad z = \gamma(\varrho^2 - c^2)$$

Dieß sind die Coordinaten des Pols (xyz) der Ebene $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 1$ hinsichtlich der gegebenen Fläche $\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1$

Durch Elimination von ϱ^2 aus 1. ergeben sich die Formeln

$$2.\quad x - \frac{\alpha}{\gamma} z = \alpha c^2 \qquad y - \frac{\beta}{\gamma} z = \beta(c^2 - b^2)$$

$$x - \frac{\alpha}{\beta} y = \alpha b^2$$

Diese stellen eine Gerade vor, welche senkrecht steht auf der Polarebene $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 1$. Würde man statt des Ellipsoids (ϱ) die beiden homofokalen Hyperboloide (μ) und (ν)

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1$$

angewendet haben, so wäre man ebenfalls auf die Gleichungen 2 gekommen. Wir haben somit den Satz:

Die Pole einer Ebene in Beziehung auf alle homofokalen Flächen liegen in einer zu dieser Ebene senkrechten Geraden. Wenn man also ein System von homofokalen Flächen durch eine Transversalebene schneidet, und jede der dadurch hervorgebrachten Schnittkurven als die Basis eines Berührungskegels der betreffenden Fläche ansieht, so liegen die Spitzen dieser Kegel auf einer zu der Transversalebene senkrechten Geraden. (Aperçu historique v. Chasles, übers. v. Sohnke S. 432.)

Der Punkt, in welchem diese Transversalebene eine der homofokalen Flächen des Systems berührt, ist ihr Pol; errichtet man also im Berührungspunkt eine Senkrechte auf dieser Ebene, so liegen die Pole der letzteren hinsichtlich aller übrigen homofokalen Flächen auf der Senkrechten; oder

Zieht man in einem Punkt einer centrischen Fläche zweiten Grades eine Tangentialebene und eine Normale, so liegen auf der Normale die Pole der Ebene hinsichtlich aller übrigen homofokalen Flächen.

An zwei homofokale Flächen läßt sich nie eine gemeinschaftliche Tangentialebene ziehen; denn wenn dieß der Fall wäre, so würden die Pole der Ebene hinsichtlich der homofokalen Flächen auf den beiden Normalen liegen, welche in den zwei Berührungspunkten gezogen werden können. Der Tangentialebene würden also zwei Pollinien entsprechen, was zufolge der Gleichungen 2 nicht sein kann.

In jedem Punkt des Raums schneiden sich drei homofokale Flächen senkrecht; zieht man in diesem Punkt die Tangentialebene und die Normale der einen Fläche, so ist letztere die Tangente der Durchschnittslinie der beiden andern Flächen. Hierin ist ein Satz ausgesprochen, den wir gleich nachher auf einem andern Wege finden werden:

Die Tangenten der Durchschnittslinien von homofokalen Flächen sind Pollinien, d. h. sie enthalten die Pole von einer und derselben Transversalebene.

Es seien (xyz), (x′y′z′), (x″y″z″) die Coordinaten der Pole von der Ebene $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 1$ hinsichtlich der drei in einem Punkt zusammenstoßenden homofokalen Flächen (ϱ), (μ), (ν), so haben wir nach 1. die Ausdrücke

$$\begin{array}{lll} x = \alpha\varrho^2 & y = \beta(\varrho^2 - b^2) & z = \gamma(\varrho^2 - c^2) \\ x' = \alpha\mu^2 & y' = \beta(\mu^2 - b^2) & z' = -\gamma(c^2 - \mu^2) \\ x'' = \alpha\nu^2 & y'' = -\beta(b^2 - \nu^2) & z'' = -\gamma(c^2 - \nu^2) \end{array}$$

$$x - x' : y - y' : z - z' = x - x'' : y - y'' : z - z'' = x' - x'' : y' - y'' : z' - z''$$

Bezeichnen wir die Entfernung der Ebene $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 1$ vom Ursprung mit P und diejenige der Geraden 2 mit p, so ist (§. 1)

$$P = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

$$p = \beta\gamma \sqrt{\frac{\frac{\alpha^2}{\gamma^2} b^4 + \frac{a^2}{\beta^2} c^4 + (c^2 - b^2)^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

$$3.\quad Pp = \frac{\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}}{1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\gamma^2}{\alpha^2}} \sqrt{\frac{\alpha^2}{\gamma^2} b^4 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} c^4 + (c^2 - b^2)^2}$$

Wenn die Transversalebene sich so bewegt, daß sie immer mit sich selbst parallel bleibt, so ist dieß auch bei der zu ihr senkrechten Geraden, auf welcher ihre Pole hinsichtlich der homofokalen Flächen liegen, der Fall. Die Größen $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\gamma}$ bleiben während dieser Bewegung ungeändert. Die rechte Seite der Gleichung 3 enthält aber blos die konstanten Größen b und c, und die nun gleichfalls konstanten Verhältnisse $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$, mithin ist auch das Produkt Pp unveränderlich. Wir haben somit folgenden Lehrsatz:

Wenn ein System von homofokalen Flächen von mehreren unter sich parallelen Transversalebenen geschnitten wird, so ist das Produkt der Abstände des Mittelpunkts von einer dieser Ebenen und der ihr zugehörigen Pollinie konstant.

Der Pol der Ebene $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ hinsichtlich der Fläche $\frac{x^2}{\varrho_0{}^2} + \frac{y^2}{\varrho_0{}^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho_0{}^2 - c^2} = 1$ ist gegeben durch die Gleichungen $x = \alpha\varrho_0{}^2$, $y = \beta(\varrho_0{}^2 - b^2)$, $z = \gamma(\varrho_0{}^2 - c^2)$; die Entfernung dieser Ebene vom Mittelpunkt ist $= P$, während ihre Entfernung vom Pol mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet werden soll.

$$P = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$

$$\mathfrak{P} = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}\left(\frac{\alpha^2\varrho_0{}^2}{\gamma}+\frac{\beta^2(\varrho_0{}^2-b^2)}{\gamma}+\gamma(\varrho_0{}^2-c^2)-\frac{1}{\gamma}\right)$$

$$P.\mathfrak{P} = \varrho_0{}^2 - \frac{\beta^2b^2+\gamma^2c^2+1}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

Wenn dieses Produkt konstant sein soll, so ist, indem wir die Konstante $\varrho_0{}^2 - \varrho^2$ nennen

$$P.\mathfrak{P} = \varrho_0{}^2 - \frac{\beta^2b^2+\gamma^2c^2+1}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} = \varrho_0{}^2 - \varrho^2$$

$$\varrho^2\alpha^2 + (\varrho^2 - b^2)\beta^2 + (\varrho^2 - c^2)\gamma^2 = 1$$

Wenn wir diese Gleichung näher betrachten (siehe unten 4.), so finden wir, daß in diesem Falle die Polarebene $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ die homofokale Fläche (ϱ) tangirt, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1$$

ist. Hiemit ist folgender Satz (von Joachimsthal) bewiesen:

Wenn eine Ebene sich so bewegt, daß sie fortwährend eine centrische Fläche zweiten Grades berührt, so ist das Produkt ihrer Abstände vom Mittelpunkt und von ihrem Pol hinsichtlich einer zweiten homofokalen Fläche konstant und gleich der Differenz der Quadrate der großen Halbaxen beider homofokalen Flächen.

Ist der Abstand der Tangentialebene vom Mittelpunkt konstant, so ist es auch der Abstand derselben vom Pol; der Berührungspunkt beschreibt auf der Fläche eine Linie, welche in der Mechanik unter dem Namen Poloide vorkommt.

Wir haben oben den Satz bewiesen, daß die vier Perpendikel P_a, P_b, P_c, P_d, welche vom Mittelpunkt einer Fläche zweiten Grades auf die vier Ebenen gefällt werden können, die sie in den Ecken eines Krümmungslinienvierecks berühren, in Proportion stehen; oder daß

$$P_a . P_c = P_b . P_d$$

ist. Wir bezeichnen die Abstände der vier Tangentialebenen von ihren betreffenden Polen hinsichtlich einer zweiten homofokalen Fläche mit $\mathfrak{P}_a$, $\mathfrak{P}_b$, $\mathfrak{P}_c$, $\mathfrak{P}_d$, so ist nach dem Obigen

$$P_a . \mathfrak{P}_a = P_b . \mathfrak{P}_b = P_c . \mathfrak{P}_c = P_d . \mathfrak{P}_d$$

also

$$\mathfrak{P}_a . \mathfrak{P}_c = \mathfrak{P}_b . \mathfrak{P}_d \text{ oder } \mathfrak{P}_a : \mathfrak{P}_b = \mathfrak{P}_d : \mathfrak{P}_c$$

In dieser Gleichung ist der Lehrsatz enthalten:

Die Abstände der vier Ebenen, welche eine centrische Fläche zweiten Grades in den vier Ecken eines Krümmungslinienvierecks berühren, von ihren betreffenden Polen hinsichtlich einer zweiten homofokalen Fläche bilden eine Proportion.

Wir wollen nun annehmen, daß die Transversalebene $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 1$ sich so bewege, daß sie stets die homofokale Fläche $\frac{x^2}{\varrho_0{}^2} + \frac{y^2}{\varrho_0{}^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho_0{}^2 - c^2} = 1$ berührt. Die Tangentialebene dieser Fläche hat die Gleichung $\frac{\xi x}{\varrho_0{}^2} + \frac{\eta y}{\varrho_0{}^2 - b^2} + \frac{\zeta z}{\varrho_0{}^2 - c^2} = 1$; wo ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten dieser Ebene sind. Die Coordinaten der Durchschnittspunkte derselben mit den Axen bezeichnen wir mit x', y', z', so erhalten wir

$$x' = \frac{\varrho_0{}^2}{x} \qquad y' = \frac{\varrho_0{}^2 - b^2}{y} \qquad z' = \frac{\varrho_0{}^2 - c^2}{z}$$

Mithin vermöge der Gleichung der homofokalen Fläche

$$\frac{\varrho_0{}^2}{x,{}^2} + \frac{\varrho_0{}^2 - b^2}{y,{}^2} + \frac{\varrho_0{}^2 - c^2}{z,{}^2} = 1$$

Da die Transversalebene und die Tangentialebene zusammen fallen sollen, so sind die Coordinaten der Durchschnittspunkte der ersteren mit den Axen ebenfalls gleich x', y', z'; aus ihrer Gleichung ergeben sich also die Werthe

$$x' = \frac{1}{\alpha} \qquad y' = \frac{1}{\beta} \qquad z' = \frac{1}{\gamma}$$

Mithin durch Verbindung mit der vorigen Gleichung

$$4. \quad \varrho_0{}^2\alpha^2 + (\varrho_0{}^2 - b^2)\,\beta^2 + (\varrho_0{}^2 - c^2)\,\gamma^2 = 1$$

Dieß ist die Bedingungsgleichung dafür, daß die Transversalebene die gegebene homofokale Fläche (ϱ_0) berühren soll. Wir können aus 1. die Werthe von α, β, γ in 4. einsetzen, und erhalten dann

$$5. \quad \frac{\varrho_0{}^2}{\varrho^4}\,x^2 + \frac{\varrho_0{}^2 - b^2}{(\varrho^2 - b^2)^2}\,y^2 + \frac{\varrho_0{}^2 - c^2}{(\varrho^2 - c^2)^2}\,z^2 = 1$$

Auf dieser Fläche bewegt sich der Pol (x y z) der Transversalebene in Beziehung auf die Fläche (ϱ), wenn diese die homofokale Fläche (ϱ_0) tangirt. Wir bezeichnen die Halbaxen der Polarfläche durch A, B, C, so ist

$$A^2 = \frac{\varrho^4}{\varrho_0{}^2} \qquad B^2 = \frac{(\varrho^2 - b^2)^2}{\varrho_0{}^2 - b^2} \qquad C^2 = \frac{(\varrho^2 - c^2)^2}{\varrho_0{}^2 - c^2}$$

Die Zeichen der Quadrate A^2, B^2, C^2 sind unabhängig von den Zeichen der Größen ϱ^2, $\varrho^2 - b^2$, $\varrho^2 - c^2$, weil nur die Quadrate dieser Größen vorkommen; dagegen richten sie sich ganz nach den Zeichen von $\varrho_0{}^2$, $\varrho_0{}^2 - b^2$, $\varrho_0{}^2 - c^2$; die Fläche (ϱ) ist ein Ellipsoid, wenn diese drei Größen positiv, ein einmantliges Hyperboloid, wenn nur die letzte, und ein zweimantliges Hyperboloid, wenn die zwei letzten dieser Größen negativ sind. In jedem dieser drei Fälle hat die Polarfläche 5 dieselbe Gestalt, wie die Fläche (ϱ_0). Auf der andern Seite sind die Differenzen $A^2 - B^2$ und $A^2 - C^2$ nicht gleich b^2 und c^2, mithin ist die Polarfläche der Flächen (ϱ) und (ϱ_0) nicht homofokal, was nothwendig ist, zu bemerken, da man leicht auf die Vermuthung kommen konnte, daß die Polarfläche auch zum System der homofokalen Flächen gehöre. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich der Satz:

Der Pol der Tangentialebene eines Ellipsoids, eines einmantligen oder eines zweimantligen Hyperboloids in Beziehung auf eine homofokale Fläche (ϱ) bewegt sich wieder auf einem Ellipsoid, einem einmantligen oder einem zweimantligen Hyperboloid. Die Polarfläche ist mit der von der Polarebene berührten Fläche nicht homofokal, aber von gleicher Gattung, und diese Gattung ist unabhängig von der Natur der Fläche (ϱ).

Wir wollen nun die Beziehungen untersuchen, die bei konjugirten Geraden hinsichtlich homofokaler Flächen stattfinden. Gegeben ist der Punkt ($\xi\,\eta\,\zeta$) und die Fläche (ϱ)

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1$$

Die Polarebene des Punkts ($\xi\,\eta\,\zeta$) in Beziehung auf (ϱ) hat die Gleichung

$$\frac{\xi x}{\varrho^2} + \frac{\eta y}{\varrho^2 - b^2} + \frac{\zeta z}{\varrho^2 - c^2} = 1$$

Hier sind x, y, z die Coordinaten der Polarebene. Bewegt sich nun der Punkt auf der Geraden

6. $\xi + \alpha\zeta = m \qquad \eta + \beta\zeta = n$

so erhält man durch Verbindung dieser Gleichungen mit der unmittelbar vorhergehenden

$$\frac{mx}{\varrho^2} + \frac{ny}{\varrho^2 - b^2} - \left(\frac{\alpha x}{\varrho^2} + \frac{\beta y}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z}{\varrho^2 - c^2}\right)\zeta = 1$$

Soll diese Gleichung von ζ unabhängig sein, so müssen die Relationen statt haben:

$$\frac{\alpha x}{\varrho^2} + \frac{\beta y}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z}{\varrho^2 - c^2} = 0 \qquad \frac{mx}{\varrho^2} + \frac{ny}{\varrho^2 - b^2} = 1$$

oder auch

7. $$x + \frac{n\dfrac{\varrho^2}{\varrho^2 - c^2}}{\alpha n - \beta m} z = -\frac{\beta\varrho^2}{\alpha n - \beta m} \qquad y + \frac{m\dfrac{\varrho^2 - b^2}{\varrho^2 - c^2}}{\alpha n - \beta m} z = \frac{\alpha(\varrho^2 - b^2)}{\alpha n - \beta m}$$

Gegeben ist die Fläche (ϱ) $\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1$; es sollen die Relationen gesucht werden, welche zwischen den Konstanten der Ebene $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ stattfinden müssen, damit sie die Fläche in einer Krümmungslinie berühre. Wir wollen annehmen, es sei dieß die Krümmungslinie, welche auf der Fläche (ϱ) durch das homofokale Hyperboloid (μ) $\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1$ hervorgebracht wird. Die Projektionen dieser Linie auf den xy und xz Ebenen sind

$$\frac{x^2}{\dfrac{\varrho^2\mu^2}{c^2}} + \frac{y^2}{\dfrac{(\varrho^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)}{c^2 - b^2}} = 1 \qquad \frac{x^2}{\dfrac{\varrho^2\mu^2}{b^2}} + \frac{z^2}{\dfrac{(\varrho^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}{c^2 - b^2}} = 1$$

die Coordinaten der Durchschnittspunkte mit den Axen von der Ebene $\frac{\xi x}{\varrho^2} + \frac{\eta y}{\varrho^2 - b^2} + \frac{\zeta z}{\varrho^2 - c^2} = 1$, welche das Ellipsoid ($\varrho$) im Punkt ($x\,y\,z$) berührt, bezeichnen wir wieder, wie oben, mit x′, y′, z′ und erhalten

$$x' = \frac{\varrho^2}{x}, \quad y' = \frac{\varrho^2 - b^2}{y}, \quad z' = \frac{\varrho^2 - c^2}{z}$$

Durch Substitution der Werthe der Coordinaten des Berührungspunkts x, y, z in den vorhergehenden beiden Gleichungen findet man

$$\frac{\varrho^2}{x'^2\dfrac{\mu^2}{c^2}} + \frac{\varrho^2 - b^2}{y'^2\dfrac{\mu^2 - b^2}{c^2 - b^2}} = 1 \qquad \frac{\varrho^2}{x'^2\dfrac{\mu^2}{b^2}} + \frac{\varrho^2 - c^2}{z'^2\dfrac{c^2 - \mu^2}{c^2 - b^2}} = 1$$

Da die Ebene $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ mit der Tangentialebene zusammenfallen soll, so sind die Coordinaten ihrer Durchschnittspunkte mit den Axen auch gleich x', y' und z'; aus der Gleichung $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ erhalten wir $x' = \frac{1}{\alpha}$, $y' = \frac{1}{\beta}$, $z' = \frac{1}{\gamma}$ und mit Benützung der beiden vorhergehenden Formeln

$$\frac{\varrho^2\alpha^2}{\frac{\mu^2}{c^2}} + \frac{(\varrho^2 - b^2)\beta^2}{\frac{\mu^2 - b^2}{c^2 - b^2}} = 1 \qquad \frac{\varrho^2\alpha^2}{\frac{\mu^2}{b^2}} + \frac{(\varrho^2 - c^2)\gamma^2}{\frac{c^2 - \mu^2}{c^2 - b^2}} = 1$$

Dieß ist die Bedingungsgleichung, welche zwischen den Konstanten der Ebene $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ stattfinden muß, damit sie das Ellipsoid (ϱ) in einer Krümmungslinie tangire. Soll die Berührung auf der andern Krümmungslinie stattfinden, welche durch den Schnitt der Fläche (ϱ) und des zweimantligen Hyperboloids (ν) $\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1$ entsteht, so müssen die Bedingungsgleichungen

$$\frac{\varrho^2\alpha^2}{\frac{\nu^2}{c^2}} - \frac{(\varrho^2 - b^2)\beta^2}{\frac{b^2 - \nu^2}{c^2 - b^2}} = 1 \qquad \frac{\varrho^2\alpha^2}{\frac{\nu^2}{b^2}} + \frac{(\varrho^2 - c^2)\gamma^2}{\frac{c^2 - \nu^2}{c^2 - b^2}} = 1$$

erfüllt werden.

Es ist nun noch eine zweite homofokale Fläche (ϱ_0)

$$\frac{x^2}{\varrho_0{}^2} + \frac{y^2}{\varrho_0{}^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho_0{}^2 - c^2} = 1$$

gegeben. Die Coordinaten des Pols der Ebene $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ in Beziehung auf diese Fläche sind nach 1.

$$x = \alpha\varrho_0{}^2 \quad y = \beta(\varrho_0{}^2 - b^2) \quad z = \gamma(\varrho_0{}^2 - c^2)$$

Substituiren wir hieraus die Werthe von α, β und γ in die vier Bedingungsgleichungen, so erhalten wir

$$8. \quad \frac{x^2}{\frac{\varrho_0{}^4}{\varrho^2}\,\frac{\mu^2}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{(\varrho_0{}^2-b^2)^2}{\varrho^2 - b^2}\,\frac{\mu^2 - b^2}{c^2 - b^2}} = 1 \qquad \frac{x^2}{\frac{\varrho_0{}^4}{\varrho^2}\,\frac{\mu^2}{b^2}} + \frac{z^2}{\frac{(\varrho_0{}^2-c^2)^2}{\varrho^2 - c^2}\,\frac{c^2 - \mu^2}{c^2 - b^2}} = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{\varrho_0{}^4}{\varrho^2}\,\frac{\nu^2}{c^2}} - \frac{y^2}{\frac{(\varrho_0{}^2-b^2)^2}{\varrho^2 - b^2}\,\frac{b^2 - \nu^2}{c^2 - b^2}} = 1 \qquad \frac{x^2}{\frac{\varrho_0{}^4}{\varrho^2}\,\frac{\nu^2}{b^2}} + \frac{z^2}{\frac{(\varrho_0{}^2-c^2)^2}{\varrho^2 - c^2}\,\frac{c^2 - \nu^2}{c^2 - b^2}} = 1$$

Diese Gleichungen gehören der Linie an, welche der Pol in Beziehung auf das Ellipsoid (ϱ_0) derjenigen Ebene beschreibt, welche das homofokale Ellipsoid (ϱ) in einer Krümmungslinie tangirt. Diese Kurve liegt also auf dem Durchschnitt elliptischer oder hyperbolischer Cylinder mit der Fläche

$$\frac{x^2}{\frac{\varrho_0{}^4}{\varrho^2}} + \frac{y^2}{\frac{(\varrho_0{}^2 - b^2)^2}{\varrho^2 - b^2}} + \frac{z^2}{\frac{(\varrho_0{}^2 - c^2)^2}{\varrho^2 - c^2}} = 1$$

welche die Polarfläche von (ϱ) in Beziehung auf (ϱ_0) ist. Wir haben somit den Satz:

Gegeben sind zwei homofokale centrische Flächen zweiten Grades, und eine Ebene, welche die erste Fläche in einer Krümmungslinie tangirt. Der Pol dieser Ebene hinsichtlich der zweiten Fläche beschreibt eine Kurve, die sich auf den Hauptebenen in concentrischen Kegelschnitten projicirt.

Die Gleichungen 6 und 7 sind diejenigen von zwei konjugirten Geraden hinsichtlich der Fläche (ϱ). Der Cosinus des Winkels derselben ist gegeben durch den Ausdruck

$$9. \quad \frac{\alpha n \varrho^2 - \beta m (\varrho^2 - b^2) + (\beta m - \alpha n)(\varrho^2 - c^2)}{\sqrt{1^2 + \alpha^2 + \beta^2}\,\sqrt{n^2 \varrho^2 + m^2(\varrho^2 - b^2)^2 + (\beta m - \alpha n)(\varrho^2 - c^2)^2}}$$

Soll dieser Winkel ein Rechter sein, so muß

$$\alpha n \varrho^2 - \beta m (\varrho^2 - b^2) + (\beta m - \alpha n)(\varrho^2 - c^2) = o$$

werden, oder nach einigen Reduktionen

$$10. \quad \alpha n c^2 - \beta m (c^2 - b^2) = o$$

Dieser Ausdruck ist von ϱ unabhängig; würde man den Winkel gesucht haben, welchen die Gerade 6 mit ihrer konjugirten Geraden hinsichtlich einer der beiden Flächen

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1$$

bildet, so wäre man auf einen ähnlichen Ausdruck gekommen, wie 9., und die Bedingung, daß dieser Winkel ein Rechter sein soll, ist gleichfalls in der Gleichung 10 enthalten. Wenn nun eine Gerade $\xi + \alpha\zeta = m$ und $\eta + \beta\zeta = n$ und ein System von homofokalen Flächen durch die Konstanten b und c gegeben ist, so müssen die vier Konstanten in der Gleichung der Geraden der Relation 10 genügen, wenn ihre konjugirten Geraden in Beziehung auf die homofokalen Flächen rechte Winkel mit ihr bilden sollen. Wir haben somit folgenden Satz:

Wenn eine Gerade auf ihrer konjugirten hinsichtlich einer centrischen Fläche zweiten Grades senkrecht steht, so steht sie auch senkrecht auf ihren konjugirten Geraden hinsichtlich aller übrigen homofokalen Flächen.

Die Tangente einer Krümmungslinie steht senkrecht auf ihrer konjugirten Tangente; mithin stehen die Tangenten einer Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades senkrecht auf allen ihren konjugirten Geraden.

Da sich zu jeder Geraden, die nicht durch den Mittelpunkt eines Systems von homofokalen Flächen geht, wenigstens eine unter diesen Flächen finden läßt, welche sie berührt, so folgt daraus, daß diese Gerade eine Tangente der Krümmungslinie auf dieser Fläche sein muß, wenn sie die Eigenschaft haben soll, auf ihren konjugirten Geraden hinsichtlich der homofokalen Flächen senkrecht zu stehen:

Die Tangenten der Krümmungslinien sind die einzigen Geraden, welche auf ihren konjugirten Geraden senkrecht stehen.

Wenn man die Relationen 2, 6 und 10 vergleicht, so findet man, daß die Gerade $x - \frac{\alpha}{\gamma} z = \alpha c^2 \quad y - \frac{\beta}{\gamma} z = \beta(c^2 - b^2)$, welche die Pollinie der Ebene $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 1$ ist, vermöge der in ihren Gleichungen vorkommenden Konstanten der Bedingung 10 Genüge leistet, wir haben somit den Satz:

Wenn man ein System von homofokalen Flächen durch eine Transversalebene schneidet, so ist die Gerade, auf welcher die Pole dieser Ebene hinsichtlich der homofokalen Flächen liegen, die Tangente einer Krümmungslinie, und steht demgemäß auf ihren sämmtlichen konjugirten Geraden senkrecht.

Wir wollen nun annehmen, daß die Tangente einer Krümmungslinie auf einer Fläche zweiten Grades noch eine zweite homofokale Fläche berühre; da diese Tangente auf allen ihren konjugirten Geraden hinsichtlich der homofokalen Flächen des Systems senkrecht steht, so steht sie auch senkrecht auf ihrer konjugirten Geraden hinsichtlich der zweiten homofokalen Fläche, die sie berührt. Diese Gerade ist aber ebenfalls eine Tangente der Fläche, mithin ist sie eine Tangente der zweiten durch den Berührungspunkt gehenden Krümmungslinie; denn wenn zwei durch einen Punkt einer Fläche gehende konjugirte Tangenten sich rechtwinklig kreuzen, so sind sie die Tangenten der Krümmungslinien. Hieraus folgt also:

Wenn die Tangente einer Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades eine zweite homofokale Fläche berührt, so berührt sie dieselbe gleichfalls in einer Krümmungslinie.

Die Tangente einer Krümmungslinie ist zugleich Pollinie, d. h. sie enthält nach dem früheren die Pole derjenigen Transversalebene, welche im Berührungspunkt senkrecht auf die Tangente gezogen wird. Da aber einer Pollinie nur eine einzige solche Transversal- oder Polarebene entspricht, so müssen die Berührungspunkte einer gemeinschaftlichen Tangente von zwei Krümmungslinien zweier homofokaler Flächen zusammenfallen; der Berührungspunkt ist also beiden Flächen gemeinschaftlich, oder er gehört ihrer Durchschnittslinie an. Mithin ist diese Durchschnittslinie die Krümmungslinie von beiden homofokalen Flächen; somit wäre das bekannte Theorem bewiesen:

Zwei homofokale Flächen verschiedener Art schneiden sich in ihren Krümmungslinien.

Nachdem dieses nachgewiesen ist, so läßt sich mit Hülfe des vorigen Satzes leicht zeigen, daß es unmöglich ist, wenn eine Gerade zwei homofokale Flächen in ihren Krümmungslinien berührt, daß der Berührungspunkt nicht zugleich der Durchschnittspunkt ist. Denn im andern Fall hätte man zwei verschiedene Berührungspunkte, und da sich in jeder Krümmungslinie zwei homofokale Flächen schneiden, so müßte die genannte Tangente im Ganzen vier homofokale Flächen berühren. Nun schließen die homofokalen Flächen einer Art, z. B. die Ellipsoide, einander gegenseitig ein, können also keine gemeinschaftliche Tangente haben. Da es nur drei verschiedene Arten im Ganzen gibt, so müßten unter den vier genannten Flächen mindestens zwei gleichartige sein. Die Tangente einer Krümmungslinie kann also nur zwei homofokale Flächen zugleich berühren. Die Eigenschaft homofokaler Flächen, sich in ihren Krümmungslinien zu schneiden, ist ein spezieller Fall eines allgemeinen Theorems, welches Dupin aufstellte (§. 16):

Drei Flächen, welche sich in allen Punkten ihrer Durchschnittslinie senkrecht treffen, schneiden sich in ihren Krümmungslinien.

§. 23. Die Krümmungslinien der centrischen homofokalen Flächen.

Die Gleichungen der Krümmungslinien auf den homofokalen Flächen lassen sich auf sehr verschiedene Arten darstellen. Zunächst erhält man durch Elimination von z, y, x aus je zwei der Gleichungen

$$\frac{x^2}{\varrho^2}+\frac{y^2}{\varrho^2-b^2}+\frac{z^2}{\varrho^2-c^2}=1 \quad \frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\mu^2}=1$$

$$\frac{x^2}{\nu^2}-\frac{y^2}{b^2-\nu^2}-\frac{z^2}{c^2-\nu^2}=1$$

$$1.\quad \frac{x^2}{\frac{\varrho^2\mu^2}{c^2}}+\frac{y^2}{\frac{(\varrho^2-b^2)(\mu^2-b^2)}{c^2-b^2}}=1 \quad \frac{x^2}{\frac{\varrho^2\mu^2}{b^2}}+\frac{z^2}{\frac{(\varrho^2-c^2)(c^2-\mu^2)}{c^2-b^2}}=1$$

$$-\frac{y^2}{\frac{1}{b^2}(\varrho^2-b^2)(\mu^2-b^2)}+\frac{z^2}{\frac{1}{c^2}(\varrho^2-c^2)(c^2-\mu^2)}=1$$

$$2.\quad \frac{x^2}{\frac{\varrho^2\nu^2}{c^2}}-\frac{y^2}{\frac{(\varrho^2-b^2)(b^2-\nu^2)}{c^2-b^2}}=1 \quad \frac{x^2}{\frac{\varrho^2\nu^2}{b^2}}+\frac{z^2}{\frac{(\varrho^2-c^2)(c^2-\nu^2)}{c^2-b^2}}=1$$

$$+\frac{y^2}{\frac{1}{b^2}(\varrho^2-b^2)(b^2-\nu^2)}+\frac{z^2}{\frac{1}{c^2}(\varrho^2-c^2)(c^2-\nu^2)}=1$$

$$3.\quad \frac{x}{\frac{\mu^2\nu^2}{c^2}}-\frac{y^2}{\frac{(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}{c^2-b^2}}=1 \quad \frac{x^2}{\frac{\mu^2\nu^2}{b^2}}-\frac{z^2}{\frac{(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}{c^2-b^2}}=1$$

$$+\frac{y^2}{\frac{1}{b^2}(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}-\frac{z^2}{\frac{1}{c^2}(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}=1$$

Die Gleichungen 1, 2 und 3 beziehen sich auf die Projektionen der Krümmungslinien der Flächen (ϱ), (μ) und (ν) auf den xy, xz und zy Ebenen; 1. und 2. sind die Krümmungslinien der Fläche (ϱ), 1. und 3. diejenigen der Fläche (μ), 2. und 3. diejenigen der Fläche (ν). Diese Kurven sind entweder Ellipsen oder Hyperbeln. Die Halbaxen derselben, welche mit den Coordinatenaxen zusammenfallen, bezeichnen wir mit X, Y; X′, Z; Y′, Z′; setzen also $X^2=\frac{\varrho^2\mu^2}{c^2}$, $Y^2=\frac{(\varrho^2-b^2)(\mu^2-b^2)}{c^2-b^2}$; $X'^2=\frac{\varrho^2\mu^2}{b^2}$,

$Z^2=\frac{(\varrho^2-c^2)(c^2-\mu^2)}{c^2-b^2}$; $Y'^2=\frac{1}{b^2}(\varrho^2-b^2)(\mu^2-b^2)$,

$Z'^2=\frac{1}{c^2}(\varrho^2-c^2)(c^2-\mu^2)$, so erhalten wir durch Elimination von μ folgende Gleichungen:

$$4.\quad \frac{X^2}{\frac{\varrho^2 b^2}{c^2}}-\frac{Y^2}{\frac{\varrho^2-b^2}{c^2-b^2}b^2}=1 \quad \frac{X'^2}{\varrho^2\frac{c^2}{b^2}}+\frac{Z^2}{\frac{\varrho^2-c^2}{c^2-b^2}c^2}=1$$

$$\frac{Y'^2}{\frac{(\varrho^2-b^2)(c^2-b^2)}{b^2}}+\frac{Z'^2}{\frac{(\varrho^2-c^2)(c^2-b^2)}{c^2}}=1$$

Diese Kurven, welche **Monge** hyerboles et ellipses auxiliaires nennt, dienen zur Construction der Axen derjenigen Ellipsen und Hyperbeln, in welchen sich die Krümmungslinien des Elipsoids (ϱ) auf den xy, xz und zy Ebenen projiciren. Für die hyperboles et ellipses auxiliaires, welche zur

Construktion der Projektion der Krümmungslinien des einmantligen Hyperboloids (μ) und des zweimantligen (ν) auf den Coordinatenebenen dienen, ergeben sich dieselben Gleichungen.

Gleichwie bei rechtwinkligen Coordinaten ein Punkt im Raum als der Durchschnitt von drei Ebenen angesehen wird, die mit den Coordinatenaxen parallel sind und sich rechtwinklig schneiden, so wird bei elliptischen Coordinaten ein Punkt im Raum als der Durchschnitt von drei homofokalen Flächen betrachtet, die sich ebenfalls rechtwinklig schneiden. Die elliptischen Coordinaten sind die großen Halbaxen ϱ, μ, ν der Flächen (ϱ), (μ), (ν). Bewegt sich der Punkt so, daß er immer auf dem Ellipsoid (ϱ) bleibt, so findet die Gleichung statt $\varrho = \text{const.}$; bleibt er zugleich auf dem Hyperboloid (ν), so muß er außerdem noch die Gleichung $\mu = \text{const.}$ befriedigen. Diese zwei Relationen entsprechen also dem Durchschnitt beider Flächen, d. h. einer Krümmungslinie entweder des Ellipsoids oder des Hyperboloids. Wir haben nun für die Krümmungslinien des Ellipsoids, des ein- und des zweimantligen Hyperboloids die nachstehenden drei Paare von Gleichungen:

5. $\mu = \text{const.} \qquad \nu = \text{const.}$
   $\varrho = \text{const.} \qquad \varrho = \text{const.}$

6. $\varrho = \text{const.} \qquad \nu = \text{const.}$
   $\mu = \text{const.} \qquad \mu = \text{const.}$

7. $\varrho = \text{const.} \qquad \mu = \text{const.}$
   $\nu = \text{const.} \qquad \nu = \text{const.}$

$D = \sqrt{\varrho^2 - \mu^2}$ und $D' = \sqrt{\varrho^2 - \nu^2}$ sind die Semidiameter des Ellipsoids, welche den Tangenten der beiden durch den Punkt (ϱ, μ, ν) auf dem Ellipsoid (ϱ) gehenden Krümmungslinien parallel sind, und zwar ist D parallel der Tangente der Krümmungslinie $\varrho = \text{const.}$ $\nu = \text{const.}$, und D' parallel der Tangente der Krümmungslinie $\varrho = \text{const.}$ $\mu = \text{const.}$ Das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene von (ϱ) gefällte Perpendikel wurde P genannt. Die Gleichung 13 des §. 21 gibt den Werth

$$P = \frac{\varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2} \sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2} \sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$

Hieraus findet man nun sogleich, daß bei der Krümmungslinie $\varrho = \text{const.}$ $\mu = \text{const.}$ das Produkt $P . D' = \dfrac{\varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2} \sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}}$ auch konstant ist, und daß bei der Krümmungslinie $\varrho = \text{const.}$ $\nu = \text{const.}$ das Produkt $P . D = \dfrac{\varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2} \sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$ konstant ist. Aehnliche Resultate würde man für die Krümmungslinien der beiden andern homofokalen Flächen gefunden haben.

8. $P . D = \text{const.}$

Diese weitere Form für die Gleichung der Krümmungslinien enthält folgendes Theorem (von Joachimsthal, de curvis curvaturae et lineis brevissimis in superficiebus secundi gradus, Crelle XXVI. S. 155):

Längs einer Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Produkt des vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene gefällten Perpendikels und desjenigen Semidiameters, welcher der Tangente der Krümmungslinie parallel ist, konstant.

Derjenige Hauptkrümmungshalbmesser des Ellipsoids (ϱ), welcher der Krümmungslinie $\varrho = \text{const.}$ $\mu = \text{const.}$ entspricht, hat den Werth

$$R = \frac{(\varrho^2 - \mu^2)^{1/2} (\varrho^2 - \nu^2)^{3/2}}{\varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2} \sqrt{\varrho^2 - c^2}} \quad \frac{R}{D'^3} = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}}{\varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2} \sqrt{\varrho^2 - c^2}} = \text{const.}$$

Für die Krümmungslinien $\varrho = \text{const.}$ $\nu = \text{const.}$ würde man gefunden haben

$$\frac{R'}{D^3} = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}}{\varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2} \sqrt{\varrho^2 - c^2}}$$

9. $\frac{R}{D^3} = \text{const.}$

Der Satz, welcher in dieser Krümmungsliniengleichung enthalten ist, läßt sich so aussprechen:

Längs einer Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Verhältniß des Hauptkrümmungshalbmessers zur dritten Potenz des der Tangente parallelen Semidiameters konstant.

Aus den angeführten Formeln finden wir ohne Mühe die weitern

$$R \,.\, P^3 = \frac{\varrho^2 (\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}{\varrho^2 - \mu^2} \qquad R' \,.\, P^3 = \frac{\varrho^2 (\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}{\varrho^2 - \nu^2},$$

also sind auch diese Produkte für die Krümmungslinien ϱ und $\mu = \text{const.}$ ϱ und $\nu = \text{const.}$ konstant.

10. $R \,.\, P^3 = \text{const.}$

Diese Formel kann ebenfalls als die Gleichung der Krümmungslinien angesehen werden und führt demgemäß zu dem Satz:

Längs einer Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Produkt des derselben entsprechenden Hauptkrümmungshalbmessers und der dritten Potenz des Abstandes der Tangentialebene vom Mittelpunkt konstant.

11. $\frac{R}{R'} = \frac{\varrho^2 - \nu^2}{\varrho^2 - \mu^2} = \frac{D'^2}{D^2}$

In jedem Punkt einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Verhältniß der beiden Hauptkrümmungshalbmesser gleich dem reciproken Werth des Verhältnisses der Quadrate von den Semidiametern, welche den entsprechenden Krümmungslinien parallel sind.

Der vom Mittelpunkt nach dem Punkt (ϱ, μ, ν) gezogene Halbmesser hat zufolge der Gleichung 10 des §. 21 den Werth $H = \sqrt{\varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2}$ also

$$H^2 - \nu^2 = \varrho^2 + \mu^2 - b^2 - c^2$$

Der Ausdruck rechts ist längs der Krümmungslinie $\varrho = \text{const.}$ $\mu = \text{const.}$ konstant; also haben wir die Formel:

12. $H^2 - \nu^2 = \text{const.}$

Bei einer Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist die Differenz der Quadrate des nach einem Punkt derselben gezogenen Halbmessers und der großen Halbaxe von derjenigen homofokalen Fläche, welche die Krümmungslinie in dem Punkte senkrecht schneidet, konstant.

Die Gleichungen 7, 8, 9 des §. 21 führen noch zu einem weiteren Satze; man erhält daraus

$$13.\quad \frac{x}{\nu} = \frac{\varrho\mu}{bc};\quad \frac{y}{\sqrt{b^2-\nu^2}} = \frac{\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}};$$

$$\frac{z}{\sqrt{c^2-\nu^2}} = \frac{\sqrt{\varrho^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}}$$

Die Ausdrücke rechts von diesen Gleichungen sind konstant längs der Krümmungslinien $\varrho = \text{const.}$ $\mu = \text{const.}$, also sind es auch die linken Ausdrücke:

Bei einer Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Verhältniß der Abscisse eines Punktes zu derjenigen Halbaxe der die Krümmungslinie in diesem Punkte senkrecht schneidenden homofokalen Fläche, welche mit dieser Abscisse gleiche Richtung hat, konstant.

Eine andere Form für die Gleichung der Krümmungslinien läßt sich noch auf folgende Art finden: Man nehme eine weitere homofokale Fläche (ϱ_0) an, $\frac{x^2}{\varrho_0{}^2} + \frac{y^2}{\varrho_0{}^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho_0{}^2 - c^2} = 1$, und nenne wie oben den Abstand der Tangentialebene von (ϱ) von ihrem Pol hinsichtlich dieser neuen Fläche $\mathfrak{P}$, so ist nach §. 22

$$P \cdot \mathfrak{P} = \varrho_0{}^2 - \varrho^2 \qquad \mathfrak{P} = \frac{\varrho_0{}^2 - \varrho^2}{P} \text{ oder}$$

$$\mathfrak{P} = \frac{\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\sqrt{\varrho^2-\nu^2}\,(\varrho_0{}^2-\varrho^2)}{\varrho\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}}$$

$$\frac{\mathfrak{P}}{D} = \frac{\sqrt{\varrho^2-\nu^2}\,(\varrho_0{}^2-\varrho^2)}{\varrho\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}} \qquad \frac{\mathfrak{P}}{D'} = \frac{\sqrt{\varrho^2-\mu^2}\,(\varrho_0{}^2-\varrho^2)}{\varrho\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}}$$

Bei einer Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Verhältniß des Abstandes der Tangentialebene von ihrem Pol hinsichtlich einer homofokalen Fläche zu dem Semidiameter der gegebenen Fläche, welcher der Tangente der Krümmungslinie parallel ist, konstant.

Bei der Wahl der homofokalen Fläche (ϱ_0) ist man unbeschränkt; man kann auch die Flächen (μ) und (ν) nehmen; der obige Ausdruck für $\mathfrak{P}$ gibt alsdann die Werthe

$$\mathfrak{P} = -\frac{(\varrho^2-\mu^2)^{3/2}\,(\varrho^2-\nu^2)^{1/2}}{\varrho\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}} \qquad \mathfrak{P}' = -\frac{(\varrho^2-\mu^2)^{1/2}\,(\varrho^2-\nu^2)^{3/2}}{\varrho\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}}$$

$$\mathfrak{P} = -R' \text{ und } \mathfrak{P}' = -R$$

Wir wollen nun an das Ellipsoid (ϱ) eine Tangentialebene legen im Punkt (ϱ, μ, ν). Die Abstände der Pole dieser Ebene hinsichtlich der Flächen (μ) und (ν) sind so groß nach den vorstehenden Gleichungen, als die beiden Hauptkrümmungshalbmesser von (ϱ). Es läßt sich weiter zeigen, daß die Pole, π und π', auf der Normale von (ϱ) liegen, und daß sie mithin mit den beiden Krümmungsmittelpunkten zusammenfallen.

Der Beweis beruht auf dem Satz, daß wenn man einer beliebigen Fläche einen Berührungskegel umschreibt, die Tangente der Berührungskurve und die durch den Berührungspunkt gehende Erzeugende des Kegels konjugirte Tangenten der Fläche sind. Die durch (ϱ, μ, ν) gehende Tangentialebene von (ϱ) schneide das Hyperboloid (μ) in einer Kurve C, und das andere Hyperboloid (ν) in der Kurve C′. Die Tangenten von C und C′ im Punkt (ϱ, μ, ν) stehen auf einander senkrecht, weil die Flächen (μ) und (ν) sich senkrecht schneiden. Diese Tangenten berühren zugleich die Krümmungslinien von (μ) und (ν), mithin stehen sie senkrecht auf der konjugirten Tangente dieser Flächen, welche die Normale von (ϱ) ist; nach dem angeführten Satz fällt diese Normale also mit den Erzeugenden der Berührungskegel zusammen, somit liegen die Spitzen dieser Berührungskegel, oder die Pole π und π' der Tangentialebene von (ϱ) hinsichtlich der Flächen (μ) und (ν) auf der genannten Normale. Auf andere Art wurde die gleiche Eigenschaft im vorigen §. nachgewiesen. Wir haben also folgenden Satz:

Die beiden Krümmungsmittelpunkte, welche den Hauptkrümmungshalbmessern in einem Punkt einer centrischen Fläche zweiten Grades entsprechen, sind die Pole der Tangentialebene dieses Punkts hinsichtlich der zwei durch denselben gehenden homofokalen Flächen.

Die Pole aller Ebenen, welche eine centrische Fläche zweiten Grades in einer Krümmungslinie berühren, hinsichtlich der durch diese Krümmungslinie gehenden homofokalen Fläche, liegen auf der Fläche der Krümmungsmittelpunkte der ersteren Fläche; ferner liegen sie noch auf der Polarfläche und endlich auf elliptischen oder hyperbolischen Cylindern. Die Pole in Beziehung auf (μ) der Tangentialebenen, welche (ϱ) in der Durchschnittslinie mit (μ) berühren, haben nach 8. des vorigen §. diese Gleichungen:

$$14.\quad \frac{\dfrac{x^2}{\mu^6}}{\varrho^2 c^2} + \frac{\dfrac{y^2}{(\mu^2 - b^2)^3}}{(\varrho^2 - b^2)(c^2 - b^2)} = 1 \qquad \frac{\dfrac{x^2}{\mu^6}}{\varrho^2 b^2} - \frac{\dfrac{z^2}{(c^2 - \mu^2)^3}}{(\varrho^2 - c^2)(c^2 - b^2)} = 1$$

$$\frac{\dfrac{x^2}{\nu^6}}{\varrho^2 c^2} + \frac{\dfrac{y^2}{(b^2 - \nu^2)^3}}{(\varrho^2 - b^2)(c^2 - b^2)} = 1 \qquad \frac{\dfrac{x^2}{\nu^6}}{\varrho^2 b^2} - \frac{\dfrac{z^2}{(c^2 - \nu^2)^3}}{(\varrho^2 - c^2)(c^2 - b^2)} = 1$$

Die zwei letzten Gleichungen gehören den Polen der Ebenen an, welche (ϱ) in der Durchschnittslinie mit (ν) berühren.

Diese Formeln haben noch eine weitere und interessante Bedeutung. Die Krümmungsmittelpunkte irgend einer Fläche liegen auf einer besondern aus zwei Mänteln bestehenden Fläche. Wenn die Normale der gegebenen Fläche auf einer Krümmungslinie des ersten Systems fortschreitet, so berührt sie beide Mäntel zugleich, indem sie auf dem ersten eine geodätische Linie beschreibt, und auf dem zweiten eine Linie von besonderer Gattung, deren Natur mit der geodätischen Linie eng zusammenhängt, und welche wir aus diesem Grunde **konjugirte geodätische Linie** genannt haben. Bewegt sich dagegen die Normale auf einer Krümmungslinie des zweiten Systems, so beschreibt sie auf dem zweiten Mantel eine geodätische Linie und auf dem ersten eine konjugirte geodätische Linie. Gegeben ist nun ein Ellipsoid (ϱ) und eine Krümmungslinie $\varrho = \text{const.}$ $\mu = \text{const.}$ auf demselben. Wenn die Normale auf derselben fortschreitet, so zieht sie eine geodätische Linie auf dem ersten Mantel der Krümmungsmittelpunktenfläche, welchen wir mit (m) bezeichnen; auf dem zweiten Mantel (n), welcher ebenfalls von der Normale tangirt wird, beschreibt sie eine konjugirte geodätische Linie, und die Gleichungen der letzteren sind die zwei ersten in 14. Bewegt sich aber die Normale auf der Krümmungslinie $\varrho = \text{const.}\ \nu = \text{const.}$, so berührt sie (n) in einer geodätischen und (m) in einer konjugirten geodätischen Linie; die Gleichungen derselben sind die zwei letzten in 14. Wir können dieß in folgendem Satz zusammenfassen:

Auf einem Mantel der Fläche, welche die Krümmungsmittelpunkte einer centrischen Fläche zweiten Grades enthält, lassen sich geodätische Linien ziehen, deren Tangenten den zweiten Mantel in einer konjugirten geodätischen Linie berühren, welche sich auf den Hauptebenen in concentrischen Kegelschnitten projicirt.

Die Gleichung der geodätischen Linien auf dem Mantel (m) läßt sich auf diese Art finden:

Die Coordinaten der beiden Krümmungsmittelpunkte auf der Normale des Punkts (ϱ, μ, ν), welche mit den Axen die Winkel a, a′, a″ bildet, bezeichnen wir mit x, y, z und x′, y′, z′; so ist $\frac{x' - x}{R' - R} = \cos a$ $\frac{y' - y}{R' - R} = \cos a'$ $\frac{z' - z}{R' - R} = \cos a''$ oder mit Benützung der bekannten Werthe von R, R′, cos a, cos a′, cos a″

$$x' - x = \frac{\mu\nu}{\varrho b c}(\mu^2 - \nu^2) \qquad y' - y = \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - b^2}}(\mu^2 - \nu^2)$$

$$z' - z = \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}(\mu^2 - \nu^2)$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit den zwei ersten von 14. dienen zur Elimination von x, y, z und ν; die übrig bleibende Bedingungsgleichung enthält nur noch die Variabelen x′, y′, z′ und ist die gesuchte Gleichung der geodätischen Linie.

Wir haben oben die drei Winkel, welche die Normale im Punkt $(\varrho\,\mu\,\nu)$ auf dem Ellipsoid (ϱ) mit den Axen der x, y, z bildet, a, a′, a″ genannt und folgende Werthe gefunden:

$$\cos a = \frac{\mu\nu\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{b c\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}} \qquad \cos a' = \frac{\varrho\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$

$$\cos a'' = \frac{\varrho\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}\sqrt{\varrho^2 - b^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$

Man ziehe durch den Ursprung eine Linie parallel mit der Normale; die Coordinaten eines Punkts auf dieser Parallele seien x, y, z, so besteht die Relation:

$$x : y : z = \cos a : \cos a' : \cos a'' \text{ oder}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\mu\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - b^2}}{\varrho\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}\,.\,c} \cdot \frac{\nu}{\sqrt{b^2 - \nu^2}}$$

$$\frac{x}{z} = \frac{\mu\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - b^2}}{\varrho\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - b^2}\,.\,b} \cdot \frac{\nu}{\sqrt{c^2 - \nu^2}}$$

Wenn man aus diesen beiden Gleichungen ν eliminirt, so erhält man

15. $$\frac{x^2}{\mu^2(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)} + \frac{y^2}{(\mu^2-b^2)\varrho^2(\varrho^2-c^2)} - \frac{z^2}{(c^2-\mu^2)\varrho^2(\varrho^2-b^2)} = 0$$

Dieß ist die Gleichung des Kegels, der seine Spitze im Mittelpunkt hat, und dessen Erzeugende parallel mit den Normalen des Ellipsoids (ϱ) sind, deren Fußpunkte die Krümmungslinien $\varrho = \text{const.}$ $\mu = \text{const.}$ dieser Fläche bilden.

Würde man aber aus den Werthen von $\frac{x}{y}$ und $\frac{x}{z}$ μ statt ν eliminiren, so erhielte man nachstehende Gleichung:

16. $$\frac{x^2}{\nu^2(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)} - \frac{y^2}{(b^2-\nu^2)\varrho^2(\varrho^2-c^2)} - \frac{z^2}{(c^2-\nu^2)\varrho^2(\varrho^2-b^2)} = 0$$

Der hiedurch vorgestellte Kegel hat seine Spitze auch im Mittelpunkt und seine Erzeugenden sind parallel mit denjenigen Normalen des Ellipsoids (ϱ), deren Fußpunkte die Krümmungslinien $\varrho = \text{const.}$ $\nu = \text{const.}$ sind.

Diese Kegel sind homofokal; denn man kann, wenn die Nenner der Brüche in 15. A, B, C heißen, statt dieser Gleichung auch

$$\frac{x^2}{\frac{A}{\varrho^2 - \mu^2}} + \frac{y^2}{\frac{B}{\varrho^2 - \mu^2}} + \frac{z^2}{\frac{C}{\varrho^2 - \mu^2}} = 0$$

schreiben; nun ist

$$\frac{A}{\varrho^2 - \mu^2} - \frac{B}{\varrho^2 - \mu^2} = b^2(\varrho^2 - c^2); \quad \frac{A}{\varrho^2 - \mu^2} + \frac{B}{\varrho^2 - \mu^2} = (c^2 - b^2)\varrho^2$$

$$\frac{A}{\varrho^2 - \mu^2} + \frac{C}{\varrho^2 - \mu^2} = c^2(\varrho^2 - b^2)$$

Mithin sind die Gleichungen der Fokallinien

17. $$x = \pm\frac{b\,.\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}\,\varrho}\,z$$

Wir sind hiedurch auf das bekannte Theorem gekommen:

Wenn man durch den Mittelpunkt einer Fläche zweiten Grades (oder durch einen Punkt im Raum) Parallelen mit denjenigen Normalen zieht, deren Fußpunkte die Krümmungslinien sind, so entstehen zwei Systeme von homofokalen Kegeln. Zieht man also durch den Mittelpunkt Ebenen parallel mit denjenigen, welche die Fläche in einer Krümmungslinie berühren, so umhüllen diese Ebenen die Ergänzungskegel der genannten homofokalen Kegel.

Man lege durch die mittlere Axe des Ellipsoids (ϱ) eine Ebene, welche mit der xy Ebene einen Winkel α bildet, so daß

$$\cos^2\alpha = \frac{\varrho^2}{c^2}\,\frac{c^2 - b^2}{\varrho^2 - b^2}$$

ist, so schneidet diese Ebene (ϱ) in einem Kreis. Wir nehmen die Krümmungslinie $\varrho = \text{const.}$ $\mu = \text{const.}$, welche nach 1. auf dem Cylinder

$$\frac{x^2}{\varrho^2\,\frac{\mu^2}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{(\varrho^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)}{c^2 - b^2}} = 1$$

liegt. Dieser Cylinder schneidet die Kreisschnittebene in einer Ellipse, deren Halbaxen gleich $\frac{\varrho\mu}{c}\,\frac{1}{\cos a}$ und $\frac{\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}}{\sqrt{c^2-b^2}}$, die Gleichung derselben ist also

$$18.\quad \frac{x^2}{\frac{\varrho^2-b^2}{c^2-b^2}\mu^2}+\frac{y^2}{\frac{\varrho^2-b^2}{c^2-b^2}(\mu^2-b^2)}=1$$

Die Differenz der Quadrate der Halbaxen ist $\frac{\varrho^2-b^2}{c^2-b^2}b^2$, mithin unabhängig von μ, demnach ist sie dieselbe für alle Krümmungslinien $\mu=\text{const.}$, oder die Ellipsen auf der Kreisschnittebene sind homofokal, d. h. sie haben die Brennpunkte gemein; hierauf beruht dieser bekannte Satz:

Die Krümmungslinien einer centrischen Fläche zweiten Grades projiciren sich auf einer Kreisschnittebene in homofokalen Kegelschnitten. Die Projektionslinien sind parallel der kleinen Axe der Fläche zu ziehen.

§. 24. Die geodätischen Linien auf den homofokalen centrischen Flächen.

Es sei $f(x, y, z)=o$ die Gleichung einer Fläche; wir setzen $\frac{df}{dx}=X$, $\frac{df}{dy}=Y$, $\frac{df}{dz}=Z$, so ist die Gleichung einer geodätischen Linie dieser Fläche

$$X(dy\,d^2z-dz\,d^2y)+Y(dz\,d^2x-dx\,d^2z)+Z(dx\,d^2y-dy\,d^2x)=o$$

welcher Joachimsthal nachstehende Form gegeben hat:

$$\frac{dX d^2x+dY d^2y+dZ d^2z}{dX dx+dY dy+dZ dz}+\frac{X dx+Y dy+Z dz}{X^2+Y^2+Z^2}-\frac{dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z}{dx^2+dy^2+dz^2}=o$$

Wenden wir diese Gleichung auf die Fläche

$$\frac{x^2}{\varrho^2}+\frac{y^2}{\varrho^2-b^2}+\frac{z^2}{\varrho^2-c^2}=1$$

an, so finden wir

$$X=\frac{x}{\varrho^2};\ Y=\frac{y}{\varrho^2-b^2};\ Z=\frac{z}{\varrho^2-c^2};$$

$$dX=\frac{dx}{\varrho^2};\ dY=\frac{dy}{\varrho^2-b^2};\ dZ=\frac{dz}{\varrho^2-c^2};$$

$$dX dx+dY dy+dZ dz=\frac{dx^2}{\varrho^2}+\frac{dy^2}{\varrho^2-b^2}+\frac{dz^2}{\varrho^2-c^2}$$

$$dX d^2x+dY d^2y+dZ d^2z=\frac{1}{2}\,d\left(\frac{dx^2}{\varrho^2}+\frac{dy^2}{\varrho^2-b^2}+\frac{dz^2}{\varrho^2-c^2}\right)$$

Dadurch verwandelt sich die allgemeine Gleichung der geodätischen Linie in folgende:

$$d\log\left(\frac{dx^2}{\varrho^2}+\frac{dy^2}{\varrho^2-b^2}+\frac{dz^2}{\varrho^2-c^2}\right)-d\log(dx^2+dy^2+dz^2)$$
$$+\,d\log\left(\frac{x^2}{\varrho^4}+\frac{y^2}{(\varrho^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\varrho^2-c^2)^2}\right)=o$$

woraus man durch Integration erhält:

$$1.\quad \frac{x^2}{\varrho^4} + \frac{y^2}{(\varrho^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\varrho^2 - c^2)^2} = C \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\frac{dx^2}{\varrho^2} + \frac{dy^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{dz^2}{\varrho^2 - c^2}}$$

Die durch den Mittelpunkt parallel mit der Tangente der geodätischen Linie gezogene Gerade hat die Gleichung

$$x : y : z = dx : dy : dz$$

Die Coordinaten des Durchschnittspunkts dieser Parallele mit dem Ellipsoid sind also

$$x^2 = \frac{dx^2}{dx^2 + dy^2 + dz^2}(x^2 + y^2 + z^2);\; y^2 = \frac{dy^2}{dx^2 + dy^2 + dz^2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$z^2 = \frac{dz^2}{dx^2 + dy^2 + dz^2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Da diese Werthe auch der Gleichung $\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1$ genügen müssen, so ist

$$\frac{dx^2}{\varrho^2} + \frac{dy^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{dz^2}{\varrho^2 - c^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

mithin

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\frac{dx^2}{\varrho^2} + \frac{dy^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{dz^2}{\varrho^2 - c^2}}$$

$x^2 + y^2 + z^2$ ist aber das Quadrat des Semidiameters δ, welcher der Tangente der geodätischen Linie parallel ist, und

$$\frac{x^2}{\varrho^4} + \frac{y^2}{(\varrho^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\varrho^2 - c^2)^2}$$

ist, wie bekannt, gleich $\frac{1}{P^2}$, P ist die Länge des vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene der geodätischen Linie gefällten Perpendikels, mithin verwandelt sich die Gleichung 1 in folgende

$$2.\quad C = \frac{1}{P\,.\,\delta}$$

Hierin ist das Theorem (von Jochimsthal) enthalten:

Längs einer geodätischen Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Produkt des vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene gefällten Perpendikels und des der Tangente der geodätischen Linie parallelen Semidiameters der Fläche konstant.

Wir haben oben gesehen, daß bei einer Krümmungslinie das Produkt P.D konstant ist, D ist derjenige Semidiameter, welcher der Tangente der Krümmungslinie parallel ist. Wenn eine geodätische Linie eine Krümmungslinie berührt, so ist im Berührungspunkt $D = \delta$, mithin $PD = P\delta$; hieraus folgt:

Für alle geodätischen Linien einer centrischen Fläche zweiten Grades, welche eine Krümmungslinie berühren, hat das Produkt P.δ denselben Werth.

Wir wollen auf dem Ellipsoid (ϱ) zwei symmetrische Krümmungslinien, welche die Durchschnitte des einmantligen Hyperboloids (μ) mit (ϱ) sind, betrachten. Die Gleichungen dieser Linien sind also in elliptischen Coordinaten

$$\varrho = \text{const.} \quad \mu = \text{const.}$$

Sie theilen die Fläche in drei Theile; den mittleren wollen wir A, die zwei äußern oder getrennten Theile B und C nennen. Für diese Krümmungslinien gilt die Gleichung

$$P \,.\, D = \frac{\varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2} \sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}}$$

Zwei weitere Krümmungslinien, wovon die erste im Raum A und die zweite in einem der andern Räume B oder C liegt, haben die Gleichungen

$$P'.D' = \frac{\varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2} \sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu'^2}} \qquad P''.\,D'' = \frac{\varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2} \sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu''^2}}$$

Nun ist offenbar $\mu' > \mu > \mu''$ also $P'.D' > P.D > P''.D''$; daraus folgt, daß die geodätische Linie, welche die Krümmungslinien $\varrho = \text{const.}$ $\mu = \text{const.}$ berührt, ganz in dem Raum A liegen muß, und in keinen von den beiden andern Räumen, B oder C, übergehen kann. Denn würde sie z. B. die Krümmungslinie $\varrho = \text{const.}$ $\mu'' = \text{const.}$ berühren, so wäre $P.\,\delta = P''.\,D''$, was mit der Bedingung $P.\,\delta = P.\,D$ nicht übereinstimmt; würde sie aber diese Krümmungslinie schneiden, so wäre im Durchschnittspunkt zwar $P = P''$, aber $\delta < D''$, da D'' die größere Halbaxe derjenigen Centralellipse ist, deren Ebene mit der Tangentialebene parallel ist, mithin $P\delta < P''D''$, was noch weniger mit der Bedingung $P.\,\delta = P.\,D$ harmonirt. Wir haben hiemit nachstehendes Gesetz hinsichtlich des Laufs, welchen die geodätischen Linien auf den centrischen Flächen zweiten Grades im allgemeinen befolgen, gefunden:

Eine geodätische Linie bewegt sich immer zwischen zwei symmetrischen Krümmungslinien, hat sie die eine derselben berührt, so wendet sie sich wieder gegen die andere; und so zieht sie sich in unendlich vielen Windungen im allgemeinen in der von beiden Krümmungslinien eingeschlossenen Zone um die Fläche herum.

Die Nabelpunkte können als die Gränzen der Krümmungslinien angesehen werden; in diesem speziellen Fall führt das Vorhergehende auf den Satz:

Wenn eine geodätische Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades von einem Nabelpunkt ausgeht, so kann sie keine Krümmungslinie berühren, sondern sie geht zu dem entgegengesetzten Nabelpunkt über. Alle geodätischen Linien, welche von einem Nabelpunkt ausgehen, bilden einen Strahl von Linien, welche zum zweitenmal im entgegengesetzten Nabelpunkt convergiren.

Zwei geodätische Linien, welche eine Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades berühren, schneiden eine zweite Krümmungslinie in den Punkten A und B. Die vom Mittelpunkt auf die Tangentialebenen von A und B gefällten Perpendikel sollen P und P' heißen, während die Semidiameter der Fläche, welche den Tangenten der Krümmungslinien in diesen Punkten parallel sind, mit D und D' und diejenigen Semidiameter, welche den Tangenten der geodätischen Linien in A und B parallel sind, mit δ und δ' bezeichnet werden. Dem früheren zufolge ist

$$P . D = P' . D' \quad P . \delta = P' . \delta'$$

mithin

3. $D : D' = \delta : \delta'$

Wenn zwei, eine Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades berührende oder durch zwei Nabelpunkte gehende, geodätische Linien eine zweite Krümmungslinie schneiden, so sind die vier Semidiameter der Fläche, welche den Tangenten der geodätischen Linien und der zweiten Krümmungslinie parallel gezogen werden, in Proportion.

Eine geodätische Linie schneidet eine Krümmungslinie in den Punkten B und C, die vom Mittelpunkt auf die Tangentialebenen in B und C gefällten Perpendikel seien gleich P' und P''; die den Tangenten der Krümmungslinie in B und C parallelen Semidiameter gleich D' und D'' und die den Tangenten der geodätischen Linie parallelen Semidiameter gleich δ' und δ''.

$$P' . D' = P'' . D''; \; P' . \delta' = P'' . \delta''$$

4. $D' : D'' = \delta' : \delta''$

Wenn eine geodätische Linie eine Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades in zwei Punkten schneidet, so sind die vier Semidiameter der Fläche, welche den Tangenten dieser beiden Linien in ihren zwei Durchschnittspunkten parallel sind, in Proportion.

Dieser Satz läßt sich leicht ausdehnen auf den Fall, wo eine geodätische Linie eine Krümmungslinie in mehr als zwei Punkten schneidet, oder wo letztere von mehreren eine Krümmungslinie berührenden oder durch einen Nabelpunkt gehenden geodätischen Linien getroffen wird.

Es sei ABCD ein von vier Krümmungslinien gebildetes Viereck.

P, P', P'', P''' sind die vier vom Mittelpunkt auf die Tangentialebenen der Ecken des Vierecks gefällten Perpendikel. Man verbinde nun die Punkte A und D durch eine geodätische Linie, wie auch die Punkte B und C; die den Tangenten der ersten Verbindungslinie in A und D parallelen Semidiameter sind gleich δ und δ'''; die zwei andern Semidiameter der Fläche, welche den Tangenten von der zweiten Verbindungslinie in B und C parallel sind, sollen mit δ' und δ'' bezeichnet werden. Nun ist

$$P . \delta = P''' . \delta'''; \; P' . \delta' = P'' . \delta''$$

$$P . P'' . \delta . \delta'' = P' . P''' . \delta' . \delta'''$$

aber nach einem Satz des §. 21 haben wir

$$P . P'' = P' . P''' \text{ also auch}$$

5. $\delta . \delta'' = \delta' . \delta'''$ oder $\delta : \delta' = \delta''' : \delta''$

Die vier Semidiameter einer centrischen Fläche zweiten Grades, welche den vier Tangenten von zwei geodätischen Linien parallel sind, wovon jede zwei Ecken eines Krümmungslinienvierecks verbindet, sind in Proportion.

In dem Krümmungslinienviereck ABCD sind die genannten zwei geodätischen Linien entweder AB und CD, oder AD und BC, oder endlich auch die Diagonalen AC und BD.

Vier geodätische Linien, welche eine Krümmungslinie berühren, bilden ein geodätisches Viereck 𝔄𝔅ℭ𝔇. Die vom Mittelpunkt auf die Tangentialebenen von 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 gefällten Perpendikel sollen wieder mit P, P', P'', P'''

bezeichnet werden. Die vier Semidiameter, welche den Tangenten der geodätischen Linien AB und CD in den Punkten A, B, C, D parallel sind, nennen wir δ, δ', δ'', δ''' und die andern vier Semidiameter, welche den Tangenten der geodätischen Linien AC und BD in den Punkten A, B, C, D parallel sind, d, d', d'', d''', so ist

$$P \, . \, \delta = P' \, . \, \delta' = P'' \, . \, \delta'' = P''' \, . \, \delta''' = P \, . \, d = P' \, . \, d' = P'' \, . \, d'' = P''' \, . \, d'''$$

$$\delta = d, \; \delta' = d', \; \delta'' = d'', \; \delta''' = d'''$$

In einem Punkt A einer Krümmungslinie laufen zwei geodätische Linien zusammen, welche eine zweite Krümmungslinie berühren. Man ziehe durch den Mittelpunkt der Fläche eine Ebene parallel der Tangentialebene von A. Die Durchschnittskurve ist ein Kegelschnitt, dessen Halbaxen wir mit D und D' bezeichnen wollen; diejenigen Semidiameter desselben, welche den Tangenten der geodätischen Linien in ihrem Durchschnittspunkt A parallel sind, seien δ und δ'; so hat man, wenn P das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene gefällte Perpendikel ist, $P \, . \, \delta = P \, . \, \delta'$, weil beide geodätische Linien eine Krümmungslinie tangiren, also $\delta = \delta'$, mithin wird der Winkel und der Nebenwinkel der Semidiameter δ und δ' von den Halbaxen D und D' des Kegelschnitts halbirt; letztere Halbaxen sind aber den Tangenten der sich in A schneidenden Krümmungslinien parallel, somit haben wir folgenden Satz:

Wenn sich in einem Punkt auf einer centrischen Fläche zweiten Grades zwei geodätische Linien, die eine Krümmungslinie berühren oder durch zwei Nabelpunkte gehen, schneiden, so wird der Winkel, den sie im Durchschnittspunkt bilden, von den beiden Krümmungslinien halbirt, die durch diesen Durchschnittspunkt gehen.

Es seien A und B zwei symmetrische Punkte einer Krümmungslinie hinsichtlich einer der Hauptebenen der Fläche. Man ziehe durch A und B zwei geodätische Linien, welche eine zweite Krümmungslinie berühren, so besteht die Gleichung $P \, . \, \delta = P \, . \, \delta'$; da offenbar die Abstände der Tangentialebene der Punkte A und B vom Mittelpunkt einander gleich sind; mithin ist $\delta = \delta'$; die beiden Diametralschnitte, welche diesen Tangentialebenen parallel durch den Mittelpunkt gelegt werden, sind kongruent, also sind die Winkel, welche ihre Semidiameter δ und δ' mit den Axen der Schnitte machen, gleich, und da letztere Axen parallel den Tangenten der Krümmungslinie in A und B sind, so schneiden auch die geodätischen Linien die Krümmungslinie AB unter demselben Winkel; hierauf beruht der Satz:

Zwei geodätische Linien einer centrischen Fläche zweiten Grades, welche eine Krümmungslinie berühren, oder durch einen Nabelpunkt gehen, schneiden eine zweite Krümmungslinie in zwei zu einer der Hauptebenen der Fläche symmetrischen Punkten unter gleichem Winkel.

Die geradlinigen Erzeugenden eines einmantligen Hyperboloids sind zwei geodätische Linien, welche die genannte Eigenschaft haben; also halbiren die Krümmungslinien in einem Punkt eines einmantligen Hyperboloids die Winkel der durch diesen Punkt gehenden geradlinigen Erzeugenden.

Dieser Satz wurde zuerst von Dupin aufgestellt, und läßt sich noch auf viele andere Arten beweisen.

Wenn man durch einen Punkt auf einer Fläche zwei Tangenten zieht, so daß sie gleiche Winkel mit den Tangenten der durch diesen Punkt gehenden

Krümmungslinien bilden, so haben die beiden durch jene Tangenten gehenden Normalschnitte der Fläche gleiche Krümmungshalbmesser. Hieraus läßt sich der Satz ableiten:

Die Krümmungshalbmesser von zwei geodätischen Linien auf einer centrischen Fläche zweiten Grades, welche eine Krümmungslinie berühren, oder durch zwei Nabelpunkte gehen, in dem Punkt, wo sie sich kreuzen, sind einander gleich.

Nach dem Satze von Dupin sind die Krümmungshalbmesser in einem Punkt einer centrischen Fläche zweiten Grades den Quadraten der Semidiameter desjenigen Diametralschnitts der Fläche proportional, welcher der Tangentialebene dieses Punkts parallel ist.

Wir haben in §. 21 die Gleichungen gefunden

$$R = \frac{(\varrho^2 - \mu^2)^{1/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{3/2}}{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}} > R' = \frac{(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{1/2}}{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}$$

$$P = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}} \quad D' = \sqrt{\varrho^2 - \mu^2} \quad D = \sqrt{\varrho^2 - \nu^2}$$

$$R = \frac{D^2}{P} \quad R' = \frac{D'^2}{P}, \quad R : R' = D^2 : D'^2$$

Weil nun D und D′ die Halbaxen dieses Diametralschnitts sind, welche den Tangenten der Krümmungslinien parallel laufen, so folgt daraus unmittelbar

$$6. \quad r = \frac{\delta^2}{P}$$

hier bezeichnet r den Krümmungshalbmesser der durch den Punkt auf der Fläche gehenden geodätischen Linie, deren Tangente parallel dem Semidiameter δ des Diametralschnitts ist. Da längs einer geodätischen Linie das Produkt $P.\delta$ konstant ist, so haben wir nach 6.

$$7. \quad \frac{\delta^3}{r} = \text{constante}$$

Diese zweite Gleichung der geodätischen Linie enthält folgendes Theorem:

Längs einer geodätischen Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Verhältniß der dritten Potenz des der Tangente parallelen Semidiameters der Fläche zum Krümmungshalbmesser dieser Linie konstant.

Zwei geodätische Linien, welche eine Krümmungslinie berühren, schneiden eine zweite Krümmungslinie in den Punkten A und B; ihre Krümmungshalbmesser seien in $A = r$ und in $B = r'$. Die Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche, welche den durch die Tangenten der Krümmungslinie in A und B gelegten Normalschnitten entsprechen, bezeichnen wir mit R und R′ und die vom Mittelpunkt auf die Tangentialebenen dieser Punkte gefällten Perpendikel mit P und P′, endlich seien die den Tangenten der sich in A und B kreuzenden Linien parallelen Semidiameter D und δ, D′ und δ', so ist

$$R = \frac{D^2}{P}; \; R' = \frac{D'^2}{P'}; \quad r = \frac{\delta^2}{P}; \; r' = \frac{\delta'^2}{P'} \text{ also}$$

$$\frac{D^2}{R} = \frac{\delta^2}{r} \qquad \frac{\delta'^2}{r'} = \frac{D'^2}{R'}$$

Nach der Gleichung 3 dieses Paragraphs ist $D^2 . \delta'^2 = D'^2 . \delta^2$ also

$$8. \quad R : R' = r : r'$$

Wenn zwei, eine Krümmungslinie berührende oder durch zwei Nabelpunkte gehende, geodätische Linien einer centrischen Fläche zweiten Grades eine zweite Krümmungslinie schneiden, so sind die Krümmungshalbmesser der den Tangenten der geodätischen Linien und der Krümmungslinie in den Durchschnittspunkten entsprechenden Normalschnitte der Fläche in Proportion.

Eine solche Proportionalität der Krümmungshalbmesser findet in allen Punkten statt, wo eine Krümmungslinie von mehreren geodätischen Linien getroffen wird, für welche $P \cdot \delta$ denselben Werth hat.

Ganz analog wird mittelst der Gleichung 4 dieses Paragraphs der Beweis des Satzes geführt:

Wenn eine geodätische Linie eine Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades in zwei Punkten schneidet, so sind die Krümmungshalbmesser der den Tangenten der geodätischen und der Krümmungslinie in den Durchschnittspunkten entsprechenden Normalschnitte der Fläche in Proportion.

Aus der Gleichung 6 folgt

9. $r \cdot P^3 = P^2 \cdot \delta^2 = \text{const.}$

Hierauf beruht der Satz (von Joachimsthal):

Längs einer geodätischen Linie verhalten sich die Krümmungshalbmesser der Linie umgekehrt wie die dritten Potenzen der vom Mittelpunkt der Fläche auf die Tangentialebenen gefällten Perpendikel.

Wenn man zwei geodätische Linien auf einer centrischen Fläche zweiten Grades zieht, wovon jede zwei Ecken eines Krümmungslinienvierecks verbindet, so sind die vier Krümmungshalbmesser der geodätischen Linien in den Ecken des Vierecks proportionirt.

ABC ist ein geodätisches Dreieck. Die beiden Krümmungshalbmesser der in den Ecken A, B, C zusammenstoßenden geodätischen Linien bezeichnen wir der Reihe nach mit r_a, r'_a; r_b, r'_b; r_c, r'_c; die vom Mittelpunkt der Fläche auf die Tangentialebenen von A, B und C gefällten Perpendikel mit P_a, P_b, P_c, so ist zufolge der Gleichung 9

$$r_a \cdot P^3_a = r'_b \cdot P^3_b\,;\; r_b \cdot P^3_b = r'_c \cdot P^3_c\,;\; r_c \cdot P^3_c = r'_a \cdot P^3_a$$

10. $r_a \cdot r_b \cdot r_c = r'_a \cdot r'_b \cdot r'_c$

Die sechs Krümmungshalbmesser in den Ecken eines geodätischen Dreiecks auf einer Fläche zweiten Grades bilden zwei Gruppen; das Produkt der drei in der ersten Gruppe enthaltenen ist gleich dem Produkt der drei andern.

Dieses Theorem von Joachimsthal ist folgender Erweiterung fähig:

Wir nehmen auf einer solchen Fläche ein beliebiges geodätisches Vieleck an, z. B. das Fünfeck ABCDE, und führen ganz analoge Bezeichnungen ein, so bestehen die Gleichungen:

$$r_a \cdot P^3_a = r'_b \cdot P^3_b\,;\; r_b \cdot P^3_b = r'_c \cdot P^3_c\,;\; r_c \cdot P^3_c = r'_d \cdot P^3_d\,;$$
$$r_d \cdot P^3_d = r'_e \cdot P^3_e\,;\; r_e \cdot P^3_e = r'_a \cdot P^3_a$$

11. $r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot r_d \cdot r_e = r'_a \cdot r'_b \cdot r'_c \cdot r'_d \cdot r'_e$

Die Krümmungshalbmesser in den Ecken eines geodätischen Vielecks von n Seiten bilden zwei Gruppen. Das Produkt der n Krümmungshalbmesser, welche in der ersten Gruppe enthalten sind, ist gleich dem Produkt der n andern.

Da für eine geodätische Linie das Produkt $P . \delta$ konstant ist, so wollen wir die zehn Semidiameter der Fläche, welche den Tangenten des geodätischen Fünfecks in den Ecken ABCDE parallel sind, der Reihe nach bezeichnen mit δ_a, δ'_a; δ_b, δ'_b; δ_c, δ'_c; δ_d, δ'_d; δ_e, δ'_e und erhalten folgende Gleichungen:

$$\delta_a . P_a = \delta'_b . P_b ; \ \delta_b . P_b = \delta'_c . P_c ; \ \delta_c . P_c = \delta'_d . P_d$$

$$\delta_d . P_d = \delta'_e . P_e ; \ \delta_e . P_e = \delta'_a . P_a$$

12. $\delta_a . \delta_b . \delta_c . \delta_d . \delta_e = \delta'_a . \delta'_b . \delta'_c . \delta'_d . \delta'_e$

Die Semidiameter einer centrischen Fläche zweiten Grades, welche den Tangenten in den Ecken eines geodätischen nEcks parallel sind, theilen sich in zwei Gruppen; das Produkt der n Semidiameter der einen Gruppe ist gleich dem Produkt der n Semidiameter der andern Gruppe.

Durch einen Punkt A auf dem Ellipsoid (ϱ) ziehen wir die beiden Krümmungslinien, deren Gleichungen in elliptischen Coordinaten sind,

$$\varrho = \text{const.} \quad \mu = \text{const. und } \varrho = \text{const.} \quad \nu = \text{const.}$$

Ferner gehe durch A eine geodätische Linie, welche mit der ersten Krümmungslinie den Winkel i bildet. Durch den Mittelpunkt der Fläche geht eine Ebene, welche dieselbe in einer Ellipse schneidet, deren Halbaxen D und D′ heißen. Der Semidiameter dieser Ellipse, welcher der Tangente der geodätischen Linie in A parallel ist, sei gleich δ, so ist der Winkel zwischen δ und $D = i$, da D der Tangente der ersten Krümmungslinie ($\mu = \text{const.}$) parallel ist. Wir haben nun die bekannte Gleichung

$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{\cos^2 i}{D^2} + \frac{\sin^2 i}{D'^2}$$

Nach 21. und 22. in §. 21 ist

$$D^2 = \varrho^2 - \nu^2 \text{ und } D'^2 = \varrho^2 - \mu^2$$

also

$$\frac{(\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - \nu^2)}{\delta^2} = \varrho^2 - (\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i)$$

Nun haben wir für die geodätische Linie $P . \delta = \text{constante} = C$; ferner

$$P = \frac{\varrho \sqrt{\varrho^2 - b^2} \sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2} \sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die vorige Gleichung ist

$$\frac{\varrho^2 (\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}{C^2} = \varrho^2 - (\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i)$$

13. $\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = C'$

C' ist $= \varrho^2 - \dfrac{\varrho^2 (\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}{C^2} = \text{constante}$. Den Werth dieser neuen Konstante C′ können wir leicht bestimmen. Es seien $\varrho = \text{const.}$ und $\alpha = \text{const.}$ die Gleichungen in elliptischen Coordinaten derjenigen Krümmungslinie von (ϱ), welche die geodätische Linie tangirt, d. h. α ist die große Halbaxe desjenigen homofokalen Hyperboloids, dessen Durchschnitt mit (ϱ) die genannte Krümmungslinie ist. Im Berührungspunkt ist $i = 0$ Grad, also $\cos i = 1$; $\sin i = 0$, ferner ist $\mu = \alpha$; die Gleichung 13 verwandelt sich somit in

$$\alpha^2 = C'$$

Da nun der Werth der Konstanten bestimmt ist, so schreiben wir die Gleichung der geodätischen Linie in dieser, von Liouville zuerst gefundenen, Form:

14. $\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \alpha^2$

Wenn die Linie durch einen Nabelpunkt geht, so ist $\alpha = b$, man erhält dann

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = b^2$$

Aus dieser Gleichung lassen sich, wie aus derjenigen von Joachimsthal, viele Eigenschaften der geodätischen Linien ableiten. Schneiden sich z. B. zwei geodätische Linien, welche eine Krümmungslinie berühren, im Punkt A des Ellipsoids, wo die Krümmungslinien $\mu = \text{const.}$ und $\nu = \text{const.}$ zusammentreffen, so ist $\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \alpha^2 \quad \mu^2 \cos^2 i' + \nu^2 \sin^2 i' = \alpha^2$

$$\mu^2 - (\mu^2 - \nu^2) \sin^2 i = \mu^2 - (\mu^2 - \nu^2) \sin^2 i'$$
$$i = i'$$

welchen Satz wir schon oben gefunden haben.

Aus 14. erhalten wir

$$15. \quad \cos i = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \nu^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}} \qquad \sin i = \frac{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}} \qquad \operatorname{tg} i = \frac{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2 - \nu^2}}$$

Wir ziehen durch den Punkt A des Ellipsoids zwei geodätische Linien, welche die Krümmungslinien $\varrho = \text{const.}\ \alpha = \text{const.}$ und $\varrho = \text{const.}\ \beta = \text{const.}$ berühren; diese geodätischen Linien bilden im Punkt A mit der Krümmungslinie $\mu = \text{const.}$ die Winkel i und i'; die Gleichungen 15 führen nun auf folgende:

$$\sin i = \frac{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}} \qquad \sin i' = \frac{\sqrt{\mu^2 - \beta^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}$$

$$16. \quad \frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}{\sqrt{\mu^2 - \beta^2}}$$

So lange sich der Punkt A auf der Krümmungslinie $\mu = \text{const.}$ bewegt, bleibt μ unveränderlich und da die geodätischen Linien, welche von A ausgehen, immer die Krümmungslinien $\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$ berühren, so haben wir folgendes Theorem (von Liouville):

Wenn sich die Spitze eines von zwei geodätischen Linien auf einer centrischen Fläche zweiten Grades gebildeten Winkels, welche zwei bestimmte Krümmungslinien berühren, auf einer dritten Krümmungslinie bewegt, so ist das Verhältniß der Sinus der Winkel, welche die geodätischen Linien mit der letzteren Krümmungslinie bilden, konstant.

Nehmen wir aber an, daß sich die durch den Punkt A gezogenen geodätischen Linien, welche die Krümmungslinien $\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$ berühren, unter rechtem Winkel schneiden, so haben wir die Gleichungen

$$\cos i = \sin i' \quad \text{oder} \quad \frac{\sqrt{\alpha^2 - \nu^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}} = \frac{\sqrt{\mu^2 - \beta^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}$$

17. $\mu^2 + \nu^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \text{const.}$

Nun ist die Länge des nach dem Punkte A oder (ϱ, μ, ν) gezogenen Semidiameters der Fläche $= \sqrt{\varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2}$, mithin ist auch dieser Semidiameter konstant. Hierin liegt nachstehender Satz (von Michael Roberts):

Die Spitze eines von zwei geodätischen Linien auf einer centrischen Fläche zweiten Grades gebildeten rechten Winkels, welche zwei bestimmte Krümmungslinien berühren, bewegt sich auf einer sphärischen Kurve, oder auch auf einer solchen Kurve, welche die Eigenschaft hat, daß die nach ihren Punkten gezogenen Semidiameter der Fläche den konjugirten Tangenten einer dritten Krümmungslinie parallel sind.

Dieser Satz hat natürlich auch noch seine Geltung, wenn die beiden geodätischen Linien nur eine Krümmungslinie berühren, oder wenn sie durch zwei Nabelpunkte gehen; in allen drei Fällen bietet die Geometrie der Ebene merkwürdige Analogieen dar.

Auch das vorhin angeführte Theorem von Liouville ist eine Verallgemeinerung des Satzes, nach dem zwei geodätische Linien, welche eine Krümmungslinie berühren, eine zweite Krümmungslinie unter gleichen Winkeln schneiden; denn man erhält aus 16., wenn $\alpha = \beta$ gesetzt wird,

$$\sin i = \sin i'$$

Man nehme auf einer Krümmungslinie fünf Punkte an, ABCDE, und verbinde dieselben durch geodätische Linien. Die Winkel, welche je zwei in A, B, C, D, E zusammenstoßende Seiten des Fünfecks mit der Krümmungslinie bilden, bezeichnen wir der Reihe nach mit $i, J;\ i^1, J^1;\ i^2, J^2;\ i^3, J^3;\ i^4, J^4$; die geodätischen Linien AB, BC, CD, DE, EA berühren die Krümmungslinien $\alpha = \text{const.}$; $\beta = \text{const.}$; $\gamma = \text{const.}$; $\delta = \text{const.}$; $\varepsilon = \text{const.}$

Wir haben somit folgende zehn Gleichungen, indem wir bemerken, daß die Krümmungslinie ABCDE oder $\mu = \text{const.}$ in A, B, C, D, E von den Krümmungslinien $\nu = \text{const.}$; $\nu' = \text{const.}$; $\nu'' = \text{const.}$; $\nu''' = \text{const.}$; $\nu'''' = \text{const.}$ geschnitten wird:

$$\sin i = \frac{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}};\quad \sin i^1 = \frac{\sqrt{\mu^2 - \beta^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu'^2}};\quad \sin i^2 = \frac{\sqrt{\mu^2 - \gamma^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu''^2}}$$

$$\sin i^3 = \frac{\sqrt{\mu^2 - \delta^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu'''^2}};\quad \sin i^4 = \frac{\sqrt{\mu^2 - \varepsilon^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu''''^2}}$$

$$\sin J = \frac{\sqrt{\mu^2 - \varepsilon^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}};\quad \sin J^1 = \frac{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu'^2}};\quad \sin J^2 = \frac{\sqrt{\mu^2 - \beta^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu''^2}}$$

$$\sin J^3 = \frac{\sqrt{\mu^2 - \gamma^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu'''^2}};\quad \sin J^4 = \frac{\sqrt{\mu^2 - \delta^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu''''^2}}$$

$$18.\quad \sin i \,.\, \sin i^1 \,.\, \sin i^2 \,.\, \sin i^3 \,.\, \sin i^4 = \sin J \,.\, \sin J^1 \,.\, \sin J^2 \,.\, \sin J^3 \,.\, \sin J^4$$

Diese Schlußweise läßt sich auf ein beliebiges, einer Krümmungslinie einbeschriebenes geodätisches Vieleck ausdehnen. Die Gleichung 18 gibt uns den Lehrsatz:

Wenn man einer Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ein geodätisches Vieleck von n Seiten einbeschreibt, so lassen sich die Winkel, welche jede Seite des Vielecks mit der Krümmungslinie bildet, in zwei Gruppen bringen. Das Produkt der Sinus der n Winkel in der ersten Gruppe ist gleich dem Produkt der Sinus der n Winkel in der andern Gruppe.

Man kann auch einer Krümmungslinie ein geodätisches Vieleck von der Art einbeschreiben, daß dessen Seiten sämmtlich wieder eine zweite Krümmungslinie berühren; alsdann bilden je zwei anstoßende Seiten mit der ersten

Krümmungslinie gleiche Winkel. Wir wollen diese Winkel für ein geodätisches Dreieck ABC i, i^1, i^2 nennen. Die erste Krümmungslinie sei $\mu = \text{const.}$ die zweite $\alpha = \text{const.}$ Nun finden die drei Gleichungen statt

$$\sin i = \frac{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}; \quad \sin i' = \frac{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu'^2}}; \quad \sin i'' = \frac{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu''^2}}$$

Diese drei Relationen enthalten zwei Konstante, μ und α, und sechs Variabeln, $\sin i$, $\sin i^1$, $\sin i^2$; ν, ν', ν'', mithin kann denselben auf unendlich viele Arten Genüge geleistet werden; wenn also allgemein eine Krümmungslinie auf einer Fläche zweiten Grades gegeben ist, so gibt es unendlich viele Dreiecke (oder Vielecke von bestimmter Seitenzahl), welche derselben so einbeschrieben werden können, daß ihre Seiten zugleich alle eine zweite Krümmungslinie berühren.

Nach dem Theorem von Euler besteht die Gleichung

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\cos^2 i + \frac{1}{R'}\sin^2 i$$

Wenden wir dieselbe auf die geodätischen Linien der Flächen zweiten Grades an. R und R′ sind die Hauptkrümmungshalbmesser des Ellipsoids (ϱ) in dem Punkte, wo es von den homofokalen Hyperboloiden (μ) und (ν) geschnitten wird, also

$$R = \frac{(\varrho^2 - \mu^2)^{1/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{3/2}}{\varrho(\varrho^2 - b^2)^{1/2}(\varrho^2 - c^2)^{1/2}} \qquad R' = \frac{(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{1/2}}{\varrho(\varrho^2 - b^2)^{1/2}(\varrho^2 - c^2)^{1/2}}$$

i ist der Winkel, welchen die Tangente der geodätischen Linie mit der Krümmungslinie (μ) macht; r ist der Krümmungshalbmesser der geodätischen Linie, und also zugleich des durch die Tangente gehenden Normalschnitts der Fläche. Durch Substitution der Werthe von R und R′ in die obige Gleichung erhalten wir

$$19. \quad \frac{1}{r} = \frac{\varrho(\varrho^2 - b^2)^{1/2}(\varrho^2 - c^2)^{1/2}}{(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{3/2}}\left\{\varrho^2 - (\mu^2\cos^2 i + \nu^2\sin^2 i\right\}$$

Nach dem Satze von Liouville ist die Größe $\mu^2\cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \text{const.}$ längs aller geodätischen Linien des Ellipsoids (ϱ), welche eine Krümmungslinie dieser Fläche tangiren; also haben wir auch für solche geodätische Linien

$$20. \quad \frac{(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}(\varrho^2 - \nu^2)^{3/2}}{r} = \text{const.} \quad \text{oder} \quad \frac{D^3 . D'^3}{r} = \text{const.}$$

$D . D' . \pi$ ist der Inhalt desjenigen Diametralschnitts von dem Ellipsoid (ϱ), welcher der Tangentialebene der geodätischen Linie parallel ist. Die Gleichungen 20 enthalten somit diesen Satz:

Längs aller geodätischen Linien einer centrischen Fläche zweiten Grades, welche eine Krümmungslinie berühren, ist das Verhältniß der dritten Potenz des Inhalts von dem der Tangentialebene parallelen Diametralschnitt der Fläche zum Krümmungshalbmesser der geodätischen Linie konstant.

Wir können auch die frühere Gleichung (9) $r . P^3 = \text{const.}$ ableiten aus 19., da $P = \dfrac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$ und finden dann weiter, daß die Krümmungshalbmesser aller, eine Krümmungslinie berührenden, oder durch einen Nabelpunkt gehenden geodätischen Linien einer centrischen Fläche zweiten Grades da, wo sie eine

Poloide treffen, oder eine Linie, für welche die vom Mittelpunkt der Fläche auf ihre Tangentialebenen gefällten Perpendikel einen konstanten Werth haben, einander gleich sind.

Setzen wir aber umgekehrt die Gleichung $r \, . \, P^3 = \text{const.}$ für geodätische Linien als bekannt voraus, so führt die Gleichung 19 auf die Liouville'sche Form $\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \text{const.}$, und wir haben somit einen weiteren Beweis dieser letzteren Relation.

Die Gleichung 15 des §. 4 heißt

$$\triangle = \frac{\frac{1}{R}\cos^2 i + \frac{1}{R'}\sin^2 i}{\frac{1}{R^2}\cos^2 i + \frac{1}{R_,^2}\sin^2 i}$$

Hier ist $\triangle$ die Poldistanz des Elements einer Linie auf einer Fläche, welches mit einer Krümmungslinie den Winkel i bildet. Es sei z. B. MM' ein solches Element. Die beiden Normalen der Fläche, deren Fußpunkte M und M' sind, schneiden sich nicht, vorausgesetzt, daß MM' keiner Krümmungslinie angehört; dagegen gibt es zwei Punkte auf den Normalen, welche ihre kürzeste Entfernung angeben; die Verbindungslinie derselben steht senkrecht auf beiden Normalen, und der Punkt, wo diese Verbindungslinie die erste Normale trifft, heißt nach Joachimsthal der Pol des Elements MM', die Entfernung des Pols von der Fläche ist die Poldistanz dieses Elements. Wir wollen nun annehmen, MM' sei ein Element einer geodätischen Linie auf dem Ellipsoid (ϱ) und i sei der Winkel, welchen MM' mit der durch M gehenden Krümmungslinie (μ) bildet, so haben wir, mit Benützung der bekannten Werthe von R und R', und indem wir annehmen, daß sich in M die beiden Krümmungslinien (μ) und (ν) schneiden,

$$\triangle = \frac{1}{\varrho\sqrt{\varrho^2-b^2}\sqrt{\varrho^2-c^2}} \cdot \frac{\frac{\cos^2 i}{(\varrho^2-\mu^2)^{1/2}(\varrho^2-\nu^2)^{3/2}} + \frac{\sin^2 i}{(\varrho^2-\mu^2)^{3/2}(\varrho^2-\nu^2)^{1/2}}}{\frac{\cos^2 i}{(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-\nu^2)^3} + \frac{\sin^2 i}{(\varrho^2-\mu^2)^3(\varrho^2-\nu^2)}}$$

$$= \frac{(\varrho^2-\mu^2)^{1/2}(\varrho^2-\nu^2)^{1/2}}{\varrho(\varrho^2-b^2)^{1/2}(\varrho^2-\nu^2)^{1/2}} \cdot \frac{\frac{\cos^2 i}{\varrho^2-\nu^2} + \frac{\sin^2 i}{\varrho^2-\mu^2}}{\frac{\cos^2 i}{(\varrho^2-\nu^2)^2} + \frac{\sin^2 i}{(\varrho^2-\mu^2)^2}}$$

Bezeichnen wir den mit der Tangente MM' der geodätischen Linie parallelen Semidiameter des Ellipsoids (ϱ) mit d, so ist $\frac{1}{d^2} = \frac{\cos^2 i}{D^2} + \frac{\sin^2 i}{D_,^2}$; $D > D_,$ sind die Halbaxen des der Tangentialebene von M parallelen Diametralschnitts; ferner ist $D^2 = \varrho^2 - \nu^2$ und $D_,^2 = \varrho^2 - \mu^2$, also

$$\frac{\cos^2 i}{\varrho^2 - \nu^2} + \frac{\sin^2 i}{\varrho^2 - \mu^2} = \frac{1}{d^2}$$

Wir fällen vom Mittelpunkt dieses Diametralschnitts auf diejenige Tangente desselben, welche durch den Endpunkt des Semidiameters d geht, ein Perpendikel, welches wir mit p bezeichnen, so ist einer bekannten Eigenschaft der Ellipse zufolge

$$\frac{\cos^2 i}{(\varrho^2 - \nu^2)^2} + \frac{\sin^2 i}{(\varrho^2 - \mu^2)^2} = \frac{1}{p^2 . d^2}$$

Durch Verbindung der letzten drei Gleichungen erhalten wir folgenden einfachen Ausdruck für $\triangle$:

$$21. \quad \triangle = p^2 \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}$$

Das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene von M gefällte Perpendikel nennen wir, wie früher, P,

$$P = \frac{\varrho\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}$$

$$22. \quad \triangle = \frac{p^2}{P}$$

In dieser Gleichung ist der Lehrsatz enthalten:

Auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist ein Linienelement gegeben; man ziehe in dem Diametralschnitt der Fläche, welcher der durch dieses Element gehenden Tangentialebene parallel ist, einen Semidiameter parallel dem Element, so ist das Quadrat des Perpendikels, welches vom Mittelpunkt auf die durch den Endpunkt dieses Semidiameters gehende Tangente des Schnitts gefällt wird, gleich der Poldistanz des Elements mal dem vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene herabgelassenen Perpendikel.

Dieser Satz gilt allgemein für irgend eine Linie auf den centrischen Flächen zweiten Grades. Bei den Krümmungslinien wird die Poldistanz gleich dem Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche, und p fällt zusammen mit einer Halbaxe des der Tangentialebene parallelen Diametralschnitts, also verwandelt sich die Gleichung 22 in

$$R = \frac{D^2}{P} \qquad R' = \frac{D_,^2}{P} \qquad R : R' = D^2 : D_,^2$$

welches der Satz von Dupin ist. Bei den geodätischen Linien haben wir die Gleichungen

$$P \,.\, \delta = \text{const.} \qquad \delta' \,.\, \sin\alpha = \text{const.}$$

δ und δ' sind diejenigen zwei Semidiameter der Fläche, welche parallel sind einer Tangente und der konjugirten Tangente der geodätischen Linie. $\delta' \,.\, \sin\alpha$ ist somit das vom Endpunkt des Semidiameters δ', der mit der konjugirten Tangente parallel ist, auf den Semidiameter δ herabgelassene Perpendikel; oder auch es ist das vom Mittelpunkt auf diejenige Tangente des durch δ und δ' bestimmten Diametralschnitts der Fläche gefällte Perpendikel, welche durch den Endpunkt von δ' geht. Wir ziehen nun in einem Punkt einer geodätischen Linie das konjugirte Element; die Poldistanz desselben bezeichnen wir mit $\triangle'$, und den ensprechenden Werth von p für dieses Element mit p', so ist nach 22.

$$\triangle' = \frac{p_,^2}{P}$$

Nun ist offenbar $p_, = \delta' \,.\, \sin\alpha$; und $\delta' \,.\, \sin\alpha$ längs der geodätischen Linie konstant; also

$$23. \quad \triangle' \,.\, P = \text{const.}$$

Längs einer geodätischen Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Produkt der Poldistanz des konjugirten

Linienelements und des vom Mittelpunkt auf die durch dieses Element gehende Tangentialebene der Fläche gefällten Perpendikels konstant.

Die Konstante in 23. hat denselben Werth für alle geodätische Linien, welche eine Krümmungslinie berühren oder durch einen Nabelpunkt gehen. Da bei einer Poloide $P = \text{const.}$ ist, so haben wir noch dieses Corollar:

Bei allen geodätischen Linien, welche eine Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades berühren, oder durch einen Nabelpunkt gehen, sind in denjenigen Punkten, wo sie von einer Poloide getroffen werden, die Poldistanzen der konjugirten Elemente einander gleich.

In einem geodätischen Dreieck ABC bezeichnen wir die vom Mittelpunkt auf die Tangentialebenen der Ecken A, B, C gefällten Perpendikel mit P_a, P_b, P_c und die Poldistanzen der konjugirten Elemente in der Ecke A mit $\triangle'_a$; $\triangle''_a$ in der Ecke B mit $\triangle'_b$; $\triangle''_b$ in der Ecke C mit $\triangle'_c$; $\triangle''_c$, so ist nach 23.

$$\triangle''_a \,.\, P_a = \triangle'_b \,.\, P_b \,;\; \triangle''_b \,.\, P_b = \triangle'_c \,.\, P_c \,;\; \triangle''_c \,.\, P_c = \triangle'_a \,.\, P_a$$

$$24. \quad \triangle'_a \,.\, \triangle'_b \,.\, \triangle'_c = \triangle''_a \,.\, \triangle''_b \,.\, \triangle''_c$$

Es ist klar, daß wir die gleiche Schlußweise auf ein beliebiges geodätisches Vieleck hätten anwenden können, woraus sich der Satz ergibt:

Auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist ein geodätisches nEck gegeben. In jeder Ecke stoßen zwei Elemente der geodätischen Seiten zusammen. Die Poldistanzen ihrer konjugirten Elemente sind also im Ganzen von der Zahl 2n und theilen sich in zwei Gruppen: das Produkt der n Poldistanzen der einen Gruppe ist gleich dem Produkt der n Poldistanzen der andern Gruppe.

Durch jeden Punkt einer Fläche lassen sich unendlich viele Paare konjugirter Elemente ziehen; es seien z. B. MM′ und MM″ zwei konjugirte Elemente. Nach dem früheren läßt sich hierüber eine doppelte Definition geben. Die erste ist abgeleitet aus der Theorie der trajectoires und caractéristiques von Monge, und nach derselben schneiden sich die Tangentialebenen der Fläche für die Punkte M und M′ in der Linie MM″; oder umgekehrt, die Tangentialebenen der Punkte M und M″ schneiden sich in der Linie MM′. Die zweite Definition beruht auf der Lehre von den indicatrices des Dupin, von welchem auch die Benennung „konjugirte Tangenten“ stammt. Zieht man nämlich in der Tangentialebene des Punkts M die Tangenten der Krümmungslinien von M und betrachtet dieselben als Axen eines Kegelschnitts, dessen Mittelpunkt M und deren Größe $\sqrt{R}$ und $\sqrt{R'}$ ist, so ist dieser Kegelschnitt die indicatrice des Punkts M; je zwei konjugirte Tangenten (oder die Richtungen von zwei konjugirten Elementen) dieses Punkts coincidiren mit zwei konjugirten Durchmessern der indicatrice.

Die neunte Gleichung dieses Paragraphen für geodätische Linien heißt

$$r \,.\, P^3 = \text{const.}$$

r ist der Krümmungshalbmesser der Linie. Durch Verbindung dieser Relation mit 23. erhalten wir

$$25. \quad \frac{\triangle'^3}{r} = \text{const.}$$

Hierin ist folgendes Theorem ausgesprochen:

Längs einer geodätischen Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Verhältniß der dritten Potenz der Poldistanz des konjugirten Elements der Linie zum Krümmungshalbmesser der letzteren konstant. Die Konstante hat für alle solche geodätische Linien, welche eine Krümmungslinie berühren, denselben Werth; im Berührungspunkt verwandelt sich $\triangle'$ in den einen Hauptkrümmungshalbmesser R' der Fläche, r in den andern Hauptkrümmungshalbmesser R, mithin ist bei dieser Krümmungslinie

$$\frac{R_{,}^{3}}{R} = \text{const.}$$

Diese Gleichung der Krümmungslinien, welche sich als Corollar unseres Satzes ergibt, hätte man auch auf viel einfacherem Wege aus den bekannten Werthen von R und $R_,$ in elliptischen Coordinaten direkt ableiten können.

Der Gleichung 7 dieses Paragraphen zufolge ist $\frac{\delta^3}{r} = \text{const.}$, mithin nach 25.

26. $\quad \frac{\triangle'}{\delta} = \text{const.}$

Bei einer geodätischen Linie ist das Verhältniß desjenigen Semidiameters der Fläche, welcher einem Element der Linie parallel ist, zur Poldistanz des konjugirten Elements konstant.

Die Linien, welche die Tangenten einer geodätischen Linie von einer centrischen Fläche zweiten Grades auf einer homofokalen Fläche berühren, haben wir konjugirte geodätische Linien genannt. Die allgemeine Gleichung aller Linien auf diesen Flächen ist

$$P \,.\, \delta \,.\, \delta' \,.\, \sin\alpha = \text{const.}$$

Bei den konjugirten geodätischen Linien ist

$$P \,.\, \delta' = \text{const.} \qquad \delta \,.\, \sin\alpha = \text{const.}$$

Da nun $\delta \,.\, \sin\alpha = p$ und nach 22. $\triangle = \frac{p^2}{P}$, so haben wir die Gleichung

27. $\quad \triangle \,.\, P = \text{const.}$

welche diesen Lehrsatz enthält:

Bei einer konjugirten geodätischen Linie ist das Produkt der Poldistanz eines Elements der Linie und des vom Mittelpunkt auf die durch dieses Element gehende Tangentialebene der Fläche gefällten Perpendikels konstant.

Bei allen konjugirten geodätischen Linien auf einer centrischen Fläche zweiten Grades, welche auf einer Krümmungslinie senkrecht stehen, sind die Poldistanzen der an eine Poloide stoßenden Elemente einander gleich.

In einem von konjugirten geodätischen Linien gebildeten Vieleck von n Seiten theilen sich die Poldistanzen der n Paare von zwei in jeder Ecke zusammenstoßenden Elementen in zwei Gruppen; das Produkt der n Poldistanzen der einen Gruppe ist gleich dem der n andern. Der Beweis dieser Sätze ist so analog den früheren Beweisen, daß er weggelassen worden ist.

Bei den konjugirten geodätischen Linien ist $P \,.\, \delta' = \text{const.}$, mithin haben wir durch Benützung von 27. folgende weitere Formel

28. $\frac{\triangle}{\delta'} = \text{const.}$

Längs einer konjugirten geodätischen Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Verhältniß der Poldistanz eines Elements der Linie zum Semidiameter der Fläche, welcher dem konjugirten Element parallel ist, konstant.

Eine konjugirte geodätische Linie hat die Eigenschaft, daß bei ihr $P^3 . r' = \text{const.}$ ist; r' ist der Krümmungshalbmesser des durch die konjugirte Tangente der Linie gehenden Normalschnitts der Fläche; da nun auch $\triangle . P = \text{const.}$ ist, so haben wir durch Elimination von P

29. $\frac{\triangle^3}{r'} = \text{const.}$

Bei einer konjugirten geodätischen Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Verhältniß der dritten Potenz der Poldistanz eines Elements zum Krümmungshalbmesser des durch die konjugirte Tangente der Linie gehenden Normalschnitts der Fläche konstant.

Die Gleichung 22 $\triangle = \frac{p^2}{P}$ gilt allgemein für alle Linien auf den centrischen Flächen zweiten Grades; bei jeder besondern Gattung von Linien nimmt sie eine andere Form an, bei den Poloiden z. B. ist $P = \text{const.}$, also

30. $\frac{\triangle}{p^2} = \text{const.}$

Bei einer Poloide auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Verhältniß der Poldistanz eines Elements der Linie zu p^2 konstant. p hat die oben angegebene Bedeutung.

§. 25. Die geodätischen Linien auf den homofokalen centrischen Flächen. Fortsetzung.

Um weitere Eigenschaften dieser Linien zu finden, wollen wir wieder auf die ursprünglichen Gleichungen zurückgehen. Aus

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1$$

finden wir

$$\varrho^6 - (b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2)\varrho^4 + \left\{b^2c^2 + b^2(x^2 + z^2) + c^2(x^2 + y^2)\right\}\varrho^2 - b^2c^2x^2 = 0$$

Betrachten wir hier ϱ^2 als einzige Variabele, und nennen die drei Wurzeln dieser Gleichung, welche in Beziehung auf ϱ^2 vom dritten Grade ist, ϱ^2, μ^2, ν^2, so haben wir nach den bekannten Sätzen, welche der Theorie der Gleichungen zu Grunde liegen, diese Relationen:

1. $\varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 = b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2$
2. $\varrho^2\mu^2 + \varrho^2\nu^2 + \mu^2\nu^2 = b^2c^2 + b^2(x^2 + z^2) + c^2(x^2 + y^2)$
3. $\varrho^2\mu^2\nu^2 = b^2c^2x^2$

In dem Punkt A im Raum, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, z sind, schneiden sich die drei homofokalen Flächen (ϱ), (μ), (ν), deren Gleichungen

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1\,; \quad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1\,;$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1$$

sind. Die elliptischen Coordinaten von A sind also ϱ, μ, ν. Wir ziehen durch A die drei Normalen dieser Flächen, und tragen auf denselben von A aus Stücke ab gleich den Halbaxen ϱ, μ, ν der Flächen, auf welchen sie senkrecht stehen. Dadurch erhalten wir drei auf einander senkrechte Linien, die wir als die Halbaxen eines Ellipsoids (ε) betrachten können, dessen Mittelpunkt A ist.

Wir ziehen durch A eine Linie $= b$, parallel der y Axe und eine andere Linie $= c$ parallel der z Axe, und betrachten die drei Geraden OA, b und c als drei konjugirte Semidiameter eines Ellipsoids, dessen Halbaxen wir einstweilen ϱ', μ', ν' nennen wollen; nach einem bekannten Lehrsatze ist bei einer centrischen Fläche zweiten Grades die Summe der Quadrate von drei konjugirten Semidiametern gleich der Quadratsumme der Halbaxen; also ist

$$\varrho'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

Ferner ist bei jeder solchen Fläche die Quadratsumme der drei Parallelogramme, welche sich aus je zwei von drei konjugirten Semidiametern konstruiren lassen, gleich der Quadratsumme der drei Rechtecke über je zwei von den drei Halbaxen; mithin

$$\varrho'^2\mu'^2 + \varrho'^2\nu'^2 + \mu'^2\nu'^2 = b^2c^2 + b^2(x^2 + z^2) + c^2(x^2 + y^2)$$

Endlich ist das Rechteck aus drei konjugirten Semidiametern gleich dem Rechteck aus den drei Halbaxen, also $\varrho'\mu'\nu' = bcx$ oder

$$\varrho'^2\mu'^2\nu'^2 = b^2c^2x^2$$

Vergleicht man diese drei Formeln mit den Relationen 1, 2, 3, so ergibt sich sogleich, daß

$$\varrho' = \varrho;\ \mu' = \mu;\ \nu' = \nu \text{ ist.}$$

Das zweite Ellipsoid ist demnach identisch mit dem ersten; wir haben also nachstehenden Lehrsatz gefunden:

Wenn man durch einen beliebigen Punkt A im Raum drei homofokale Flächen legt, (ϱ), (μ), (ν), und auf den Normalen von A aus Stücke abschneidet, gleich den Halbaxen von diesen Flächen, so sind diese drei Stücke die Halbaxen eines Ellipsoids, welches die yz Ebene im Ursprung O berührt, und dessen parallel mit dieser Ebene gelegter Diametralschnitt die konstanten Halbaxen b und c und also auch einen konstanten Inhalt hat.

Durch die Konstanten b und c ist ein System von homofokalen Flächen bestimmt. Wo man auch den Punkt A im Raum annehmen mag, so hat diese Ellipse immer die Halbaxen b und c und ihre Ebene ist stets parallel der yz Ebene.

Dieser wichtige Satz von Chasles ist die Grundlage für die Auffindung einer Menge von Eigenschaften der homofokalen Flächen. Wir wollen ihn zunächst benützen, um die Gleichung der gemeinschaftlichen Tangenten von zwei solchen Flächen darzustellen. Man lege durch den Punkt A eine beliebige Ebene L, welche mit den Normalen der drei durch A gehenden homofokalen Flächen (ϱ), (μ), (ν) die Winkel i, i′, i″ bildet. Die Perpendikel, welche von den Endpunkten der Halbaxen des Ellipsoids (ε) auf die Ebene L herabgelassen werden, sind gleich $\varrho \sin i$, $\mu \sin i'$, $\nu \sin i''$; und da die Quadratsumme der von den Endpunkten dreier konjugirter Semidiameter einer centrischen Fläche zweiten Grades auf eine Diametralebene gefällten Perpendikel konstant und gleich der Quadratsumme der von den Endpunkten der Halbaxen herabgelassenen Perpendikel ist, so haben wir

4. $\varrho^2 \sin i^2 + \mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2$

Hier bedeutet α^2 die Quadratsumme der von den Endpunkten der konjugirten Semidiameter OA, b und c auf L gefällten Perpendikel; bewegt sich nun der Punkt A auf der Ebene L und wird für jede Lage von A die bisherige Konstruktion beibehalten, so ist α^2 eine Konstante, weil die Semidiameter b und c stets mit sich parallel bleiben, also mit L fortwährend die gleichen Winkel bilden, und das von O auf L gefällte Perpendikel ebenfalls unveränderlich bleibt, so lange die Ebene L ihre Lage nicht ändert. Wir wählen nun den Punkt A so auf der Ebene L, daß eine der drei durch ihn gelegten homofokalen Flächen (ϱ), (μ), (ν) diese Ebene tangirt. Dieß ist immer möglich, so lange L nicht durch den Mittelpunkt geht, auch gibt es nur eine solche Lage des Punkts A, weil wir früher (§. 22) den Satz gefunden haben, daß sich an zwei homofokale Flächen nie eine gemeinschaftliche Tangentialebene legen läßt. Es sei bei dieser Lage von A, α die große Halbaxe der tangirenden Fläche und also auch des Ellipsoids (ε); da die letztere senkrecht steht auf L, so ist das von ihrem Endpunkt auf diese Ebene gefällte Perpendikel gleich α, während die beiden andern Halbaxen von (ε) in der Ebene L liegen, weßwegen die von ihren Endpunkten auf L gefällten Perpendikel gleich Null sind. Durch diese Auseinandersetzungen, welche Chasles zuerst angegeben hat, sind wir auf den Satz gekommen:

Wenn man durch einen Punkt A im Raum, der sich auf einer festen Ebene L bewegt, drei homofokale Flächen legt, deren große Halbaxen ϱ, μ, ν sind, und deren Normalen mit der Ebene L die Winkel i, i', i'' bilden, so ist $\varrho^2 \sin^2 i + \mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2$; wo α die große Halbaxe derjenigen homofokalen Fläche ist, welche L berührt.

Wir betrachten die Fläche (α), deren große Halbaxe $= \alpha$ ist, als gegeben, wie auch den Punkt A oder (ϱ, μ, ν). Dann sind in der Gleichung 4 die Größen i, i', i'' die Variabelen, und gelten für die Winkel, welche irgend eine durch A gelegte und die Fläche (α) tangirende Ebene L mit den drei Normalen der Flächen (ϱ), (μ), (ν) in A macht. Alle diese Ebenen L hüllen aber einen Kegel ein, den wir K nennen wollen, und dessen Gleichung sich sehr leicht angeben läßt, wenn diese drei Normalen als Coordinatenaxen angenommen werden, und zwar sollen die Normalen von (ϱ), (μ), (ν) die Axen der ξ, η, ζ sein. Für irgend einen auf der Linie, die in A senkrecht auf L gezogen wird, liegenden Punkt (ξ, η, ζ) ist

$$\sin i^2 = \frac{\xi^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}; \quad \sin^2 i' = \frac{\eta^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}; \quad \sin^2 i'' = \frac{\zeta^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

Durch Vergleichung mit 4. erhalten wir

$$\varrho^2 \xi^2 + \mu^2 \eta^2 + \nu^2 \zeta^2 = \alpha^2 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

oder

5. $(\varrho^2 - \alpha^2)\, \xi^2 + (\mu^2 - \alpha^2)\, \eta^2 + (\nu^2 - \alpha^2)\, \zeta^2 = 0$

Dieß ist die Gleichung des Ergänzungskegels von demjenigen, welchen die Berührungsebenen L einhüllen; mithin ist die Gleichung des Kegels K

6. $\dfrac{\xi^2}{\varrho^2 - \alpha^2} + \dfrac{\eta^2}{\mu^2 - \alpha^2} + \dfrac{\zeta^2}{\nu^2 - \alpha^2} = 0$

Aus dieser Gleichung ließen sich eine Menge von Consequenzen ziehen; es folgt z. B. unmittelbar daraus der zuerst von Chasles (Aperçu historique) später von Jakobi (Crelle's Journal) gefundene Satz, daß alle concentrischen Berührungskegel eines Systems von homofokalen Flächen dieselben Fokallinien haben, allein wir wollen nicht weiter darauf beharren. Ein zweiter Kegel K', welcher die homofokale Fläche (β) berührt, hat hinsichtlich der genannten durch A gehenden Coordinatenaxen diese Gleichung

$$7. \quad \frac{\xi^2}{\varrho^2 - \beta^2} + \frac{\eta^2}{\mu^2 - \beta^2} + \frac{\zeta^2}{\nu^2 - \beta^2} = 0$$

Das System der Gleichungen 6 und 7 gilt also für den Durchschnitt beider homofokalen Kegel, oder für die gemeinsame Tangente der homofokalen Flächen (α) und (β).

Zwei homofokale Kegel schneiden sich entweder gar nicht oder in vier Linien, welche symmetrisch liegen in Beziehung auf die Axen der Kegel, d. h. je zwei dieser Durchschnittslinien sind in gleicher Ebene mit einer Axe und bilden gleiche Winkel mit ihr; betrachtet man eine derselben als den einfallenden Strahl, so sind die drei andern die auf den drei Hauptebenen zurückgeworfenen Strahlen. Wir haben somit den Satz:

Gegeben sind zwei homofokale Flächen und ein Punkt. Von diesem Punkt aus lassen sich entweder keine oder vier gemeinschaftliche Tangenten an die Flächen ziehen. Je zwei derselben bilden mit einer Normale der drei durch den Punkt gehenden homofokalen Flächen gleiche Winkel. Betrachtet man eine der Tangenten als einfallenden Strahl, so sind die drei andern die auf den Tangentialebenen dieser drei Flächen zurückgeworfenen Strahlen.

Wir wollen nun annehmen, die Ebene L, auf welcher sich der Punkt A bewegt, gehe durch die Normale der Fläche (ϱ), dann ist $\sin i = 0$; aus der Gleichung 4 wird also

$$\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2$$

In dem unendlich nahen Punkt A' der Durchschnittslinie findet die Relation statt:

$$\varrho^2 \sin^2 i_, + \mu_,^2 \sin^2 i_,' + \nu_,^2 \sin^2 i_{,,}'' = \alpha^2$$

Nun differirt die Größe $\sin i_,$ nur um ein unendlich Kleines der ersten Ordnung von $\sin i'$ oder 0, oder $\sin^2 i_,$ differirt nur um ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung von 0, also kann man setzen

$$\mu_,^2 \sin^2 i_,' + \nu_,^2 \sin^2 i_{,,}'' = \alpha^2$$

andererseits sind die Winkel $i_,'$ und $i_{,,}''$ um unendlich wenig verschieden von denjenigen, welche die Krümmungslinien von (ϱ) im Punkt A' mit dem folgenden Element A'A'' bilden, welches ebenfalls in der Normalebene L liegt. AA'A'' sind aber drei auf einander folgende Punkte einer geodätischen Linie auf (ϱ), mithin entspricht einer solchen Linie die Gleichung

$$\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2 = \mu^2 \sin^2 i_,' + \nu^2 \sin^2 i_{,,}''$$

oder

$$\mu^2 \sin^2 i + \nu^2 \cos^2 i = \alpha^2$$

Dieser Chasles'sche Beweis der Liouville'schen Gleichung führt aber noch zu weiteren Consequenzen. Die Ebene AA'A'' ist die Oskulationsebene der geodätischen Linie, und identisch mit der Ebene L, welche die homofokale Fläche (α) berührt; hieraus folgt:

Alle Oskulationsebenen einer geodätischen Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades berühren eine homofokale Fläche. Die Durchschnitte von je zwei auf einander folgenden Oskulationsebenen oder alle Tangenten der geodätischen Linien berühren die erste homofokale Fläche. Diese Durchschnitte sind die konjugirten Tangenten der Linie der Berührungspunkte auf der zweiten Fläche.

Die geodätische Linie berührt eine Krümmungslinie; hier fallen also die Tangenten beider zusammen. Da aber die Tangente einer Krümmungslinie keine andere als die durch diese Krümmungslinie selbst bestimmte homofokale Fläche berühren kann, so folgt daraus:

Die Tangenten aller geodätischen Linien, welche eine Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades berühren, berühren sämmtlich eine, durch diese Krümmungslinie gehende homofokale Fläche.

Wir haben drei Flächen, (α), (ϱ) und (p); die beiden ersten sind homofokal und verschiedener Gattung, d. h. sie schneiden einander; die letzte ist die Polarfläche von (α) in Beziehung auf (ϱ). Auf (α) ist eine Linie gezeichnet, welche die Eigenschaft hat, daß alle ihre konjugirten Tangenten die Fläche (ϱ) berühren, und zwar in einer geodätischen Linie. Drei auf einander folgende Berührungspunkte, $A A' A''$, liegen in einer Ebene, deren Pol demgemäß auf (p) liegt. Die den Elementen AA' und $A'A''$ entsprechenden konjugirten Tangenten von (ϱ), d. h. die Durchschnittslinien der drei Ebenen, welche (ϱ) in A, A' und A'' berühren, schneiden sich ebenfalls in einem Punkt auf (p), weil dieser Punkt die Spitze des Kegels ist, welcher (ϱ) in der Linie $A A' A''$ berührt; also schneiden sich je zwei auf einander folgende Tangenten der geodätischen Linie von (ϱ) auf der Polarfläche (p), oder was dasselbe ist, die der Fläche (ϱ) längs der geodätischen Linie umschriebene entwickelbare Fläche hat ihre Rückkehrkante auf (p):

Die Tangenten einer geodätischen Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades berühren eine zweite homofokale Fläche und die konjugirten Tangenten derselben schneiden sich auf einer concentrischen nicht homofokalen Fläche zweiten Grades; diese letztere Fläche ist die nämliche für alle geodätische Linien, welche auf der gegebenen Fläche eine Krümmungslinie berühren.

Dieß führt uns auf eine weitere Eigenschaft derjenigen geodätischen Linien, die durch einen Nabelpunkt gehen. Die homofokale Fläche, welche die Tangenten dieser Linien berühren, verwandelt sich in diesem speziellen Fall offenbar in die Fokale, welche durch den gleichen Nabelpunkt geht.

Wir können also folgenden Satz aufstellen:

Die Tangenten aller durch einen Nabelpunkt gehenden geodätischen Linien schneiden sich auf einem Kegelschnitt, der Fokale.

Zieht man sämmtliche Oskulationsebenen einer geodätischen Linie auf einer Fläche zweiten Grades, so liegen die Spitzen der Kegel, welche die Fläche in den durch diese Ebenen hervorgebrachten Schnittkurven tangiren, auf einer Fläche zweiten Grades. In einem Satz des §. 22 haben wir noch näher angegeben, daß die Gattung dieser zweiten Fläche unabhängig ist von derjenigen der ersten Fläche; eine geodätische Linie auf einem Ellipsoid berührt z. B. die Krümmungslinie $\mu = \text{const.}$, welche der Durchschnitt des Ellipsoids mit einem einmantligen Hyperboloid ist, dann liegen die Spitzen der Kegel, welche das Ellipsoid in den durch die Oskulationsebenen dieser geodätischen Linie hervorgebrachten Schnittkurven berühren, wieder auf einem einmantligen concentrischen Hyperboloid von gleicher Axenrichtung. Dieses letztere Hyperboloid ist der geometrische Ort der Spitzen aller Kegel, welche das Ellipsoid in den durch die Oskulationsebenen von irgend einer geodätischen Linie hervorgebrachten Schnittkurven berühren, welche die genannte Krümmungslinie tangiren. Ganz analog findet man ein zweimantliges Hyperboloid für die Spitzen derjenigen Berührungskegel, die sich auf die geodätischen Linien beziehen, welche die Krümmungslinien $\nu =$ const. tangiren. Somit können wir den Chasles'schen Satz näher fassen:

Die Spitzen sämmtlicher Kegel, die eine centrische Fläche zweiten Grades in solchen Schnittkurven berühren, welche den Oskulationsebenen der, eine Krümmungslinie tangirenden, geodätischen Linien entsprechen, liegen auf einer concentrischen Fläche zweiten Grades mit derselben Axenrichtung und von derselben Gattung, wie diejenige homofokale Fläche, welche die gegebene Fläche in der genannten Krümmungslinie schneidet.

Unmittelbar hier anschließend kann man weiter sagen:

Die Pole aller Normalebenen, welche eine Krümmungslinie berühren, liegen auf einer Fläche zweiten Grades.

Dieser Satz folgt übrigens auch daraus, daß diese Normalebenen eine Fläche zweiten Grades — die durch die Krümmungslinie gehende homofokale Fläche — tangiren.

Es schließen sich hier noch einige allgemeinere Betrachtungen an: Wenn auf einer Fläche eine beliebige Linie gegeben ist, so schneiden sich je zwei auf einander folgende konjugirte Tangenten derselben; sind z. B. M, M', M'', M''' vier auf einander folgende Punkte der Linie, so schneiden sich die drei Ebenen, welche die Fläche in MM', M'M'' und M''M''' berühren, in den beiden Geraden M'P und M''P, welche die konjugirten Tangenten der Elemente MM' und M'M'' sind. Den Punkt P können wir Pol und die Gerade M'P Poldistanz der Oskulationsebene MM'M'' nennen. Gehen durch einen Punkt auf einer Fläche beliebig viele Linien, so entspricht der Oskulationsebene von jeder Linie in diesem Punkt ein Pol; sämmtliche Pole bilden eine Kurve, welche in der Tangentialebene der Fläche liegt. Bei den Flächen zweiten Grades haben wir nun folgendes allgemeine Theorem:

Die Pole aller derjenigen Linien auf einer Fläche zweiten Grades, welche durch einen Punkt gehen, und deren Oskulationsebenen in diesem Punkt eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie haben, liegen auf einer Geraden, welche die konjugirte Polare dieser Durchschnittslinie ist.

Der Beweis dieses Satzes beruht darauf, daß die genannten Pole, nach dem Satze von Dupin, zugleich die Spitzen der Kegel sind, welche die Fläche in den durch die Oskulationsebenen hervorgebrachten Schnitten berühren, und daß die Spitzen aller Kegel, deren Berührungskurven mit einer Fläche zweiten Grades in Ebenen liegen, die eine gemeinsame Durchschnittslinie haben, eine Gerade bilden.

Die Oskulationsebenen aller geodätischen Linien, welche durch einen Punkt auf einer Fläche gehen, haben die Normale der Fläche zur gemeinschaftlichen Durchschnittslinie; wir schließen somit weiter:

Die Pole der Oskulationsebenen aller geodätischen Linien auf einer Fläche zweiten Grades, welche durch einen Punkt gehen, liegen in einer Geraden.

Es sei M dieser Punkt; er liege auf dem Ellipsoid (ϱ), wo sich die Hyperboloide (μ) und (ν) schneiden. Wir ziehen in der Tangentialebene die Geraden Mm und Mn, welche die Krümmungslinien $\mu = \text{const.}$ und $\nu = \text{const.}$ auf (ϱ) senkrecht schneiden. Mm ist der Hauptkrümmungshalbmesser von (μ) und Mn derjenige von (ν), und zwar gehen die Ebenen ihrer Krümmungskreise durch die Normale von (ϱ), so ist

$$\mathrm{Mm} = \frac{(\varrho^2 - \mu^2)^{3/2}(\mu^2 - \nu^2)^{1/2}}{\mu\sqrt{\mu^2 - \mathrm{b}^2}\sqrt{\mathrm{c}^2 - \mu^2}} \qquad \mathrm{Mn} = \frac{(\varrho^2 - \nu^2)^{3/2}(\mu^2 - \nu^2)^{1/2}}{\nu\sqrt{\mathrm{b}^2 - \nu^2}\sqrt{\mathrm{c}^2 - \nu^2}}$$

Nun sind dem Früheren zufolge (§. 23) m und n die Spitzen der Kegel, welche (ϱ) in solchen Kurven berühren, deren Ebenen durch die Normale von (ϱ) gehen, und die Krümmungslinien $\mu = \text{const.}$ und $\nu = \text{const.}$ auf (ϱ) tangiren. Mithin sind auch unserer Erklärung gemäß m und n die Pole der Oskulationsebenen der beiden durch M gehenden geodätischen Linien auf (ϱ), deren Tangenten Mm und Mn sind. Die Pole der Oskulationsebenen aller durch M gehenden geodätischen Linien liegen somit auf der Geraden mn; es sei Mg die Tangente einer solchen geodätischen Linie, welche mit der Linie Mm den Winkel i bildet, so besteht die Gleichung

$$\mu^2 \cos^2 \mathrm{i} + \nu^2 \sin^2 \mathrm{i} = \alpha^2$$

Man ziehe die konjugirte Tangente von Mg, welche mn in h trifft, so ist h der Pol der geodätischen Linie Mg. Winkel hMm = i'. Man hat nun zur Bestimmung von Mh

$$\frac{\cos \mathrm{i}'}{\mathrm{Mm}} + \frac{\sin \mathrm{i}'}{\mathrm{Mn}} = \frac{1}{\mathrm{Mh}}$$

Wir ziehen in dem Diametralschnitt von (ϱ), welcher parallel der Tangentialebene von M ist, die Halbaxen, so sind diese parallel Mm und Mn und gleich $\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}$ und $\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}$; zwei Semidiameter parallel Mg und Mh bilden mit der ersteren Axe die Winkel i und i'. Diese Semidiameter sind nach dem Satze von Dupin konjugirte Semidiameter der Ellipse; also ist

$$\mathrm{cotg\,i} \,.\, \mathrm{cotg\,i}' = \frac{\varrho^2 - \mu^2}{\varrho^2 - \nu^2}$$

Wir haben nun drei Gleichungen, aus welchen wir die Winkel i und i' eliminiren können; aus $\mu^2 \cos^2 \mathrm{i} + \nu^2 \sin^2 \mathrm{i} = \alpha^2$ ergibt sich $\mathrm{cotg\,i} = \dfrac{\sqrt{\alpha^2 - \nu^2}}{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}$; also $\mathrm{cotg\,i}' = \dfrac{(\varrho^2 - \mu^2)\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}{(\varrho^2 - \nu^2)\sqrt{\alpha^2 - \nu^2}}$; hieraus

$$\cos \mathrm{i}' = \frac{(\varrho^2 - \mu^2)\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}{\sqrt{(\varrho^2 - \mu^2)^2(\mu^2 - \alpha^2) + (\varrho^2 - \nu^2)^2(\alpha^2 - \nu^2)}}$$

$$\sin \mathrm{i}' = \frac{(\varrho^2 - \nu^2)\sqrt{\alpha^2 - \nu^2}}{\sqrt{(\varrho^2 - \mu^2)^2(\mu^2 - \alpha^2) + (\varrho^2 - \nu^2)^2(\alpha^2 - \nu^2)}}$$

7. bis. $$\frac{1}{\mathrm{Mh}} = \frac{\mu\sqrt{\mu^2 - \mathrm{b}^2}\sqrt{\mathrm{c}^2 - \mu^2}\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}\sqrt{(\varrho^2 - \mu^2)^2(\mu^2 - \alpha^2) + (\varrho^2 - \nu^2)^2(\alpha^2 - \nu^2)}}$$
$$+ \frac{\nu\sqrt{\mathrm{b}^2 - \nu^2}\sqrt{\mathrm{c}^2 - \nu^2}\sqrt{\alpha^2 - \nu^2}}{\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}\sqrt{(\varrho^2 - \mu^2)^2(\mu^2 - \alpha^2) + (\varrho^2 - \nu^2)^2(\alpha^2 - \nu^2)}}$$

Diese Gleichung gibt den Werth der Poldistanz Mh für alle durch M gehenden geodätischen Linien an; die Größe α ist die einzige Variabele, welche für jede geodätische Linie wieder einen besonderen Werth annimmt.

Die Tangenten aller geodätischen Linien einer centrischen Fläche zweiten Grades (ϱ) berühren eine zweite homofokale Fläche (α); es ist nun noch Einiges zu sagen über die Natur der Kurve auf (α), welche die auf einander folgenden Berührungspunkte der Tangenten enthält.

In §. 24 haben wir die Gleichung 13 aufgestellt, $\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = C'$ $\quad C' = \varrho^2 - \frac{\varrho^2 (\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}{P^2 \cdot \delta^2}$ oder

$$8. \quad \mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \varrho^2 - \frac{\varrho^2 (\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}{P^2 \cdot \delta^2}$$

Diese Relation gilt für eine beliebige Tangente der Fläche (ϱ), welche mit den Krümmungslinien im Berührungspunkt die Winkel i und $90^0 - i$ bildet. P ist das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene gefällte Perpendikel, und δ ist der mit der Tangente parallele Semidiameter der Fläche. Die Gleichung 14 des §. 24 gibt $\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \alpha^2$, also durch Verbindung mit 8.

$$9. \quad P^2 \cdot \delta^2 = \frac{\varrho^2 (\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}{\varrho^2 - \alpha^2}$$

So gut nun die vorstehenden Schlüsse sich auf die Fläche (ϱ) anwenden lassen, ebenso passen sie auch für die Fläche (α); setzen wir also das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene von (α) gefällte Perpendikel $= P_,$ und den mit der gemeinschaftlichen Tangente parallelen Semidiameter der Fläche gleich $\delta_,$, so finden wir ganz auf demselben Wege, der von der Gleichung 8 auf 9 geführt hat,

$$P_,^2 \cdot \delta_,^2 = \frac{\alpha^2 (\alpha^2 - b^2)(\alpha^2 - c^2)}{\alpha^2 - \varrho^2}$$

Wenn man an zwei homofokale Flächen irgend eine gemeinschaftliche Tangente zieht, so ist das Produkt des vom Mittelpunkt auf die durch die Tangente gelegte Tangentialebene gefällten Perpendikels und des der Tangente parallelen Semidiameters bei beiden Flächen eine konstante Größe.

Bei (ϱ) hat also das Produkt $P \cdot \delta$ und bei (α) $P_, \cdot \delta_,$ einen konstanten Werth. Für die Fläche (α) ist im Berührungspunkt

$$\mu_,^2 \cos^2 i_, + \nu_,^2 \sin^2 i_, = \alpha^2 - \frac{\alpha^2 (\alpha^2 - b^2)(\alpha^2 - c^2)}{P_,^2 \cdot \delta_,^2}$$

Der Ausdruck links hat also gleichfalls bei beiden Flächen für jede gemeinschaftliche Tangente je einen konstanten Werth.

Wir können obigen Satz auch so darstellen:

Gegeben ist eine centrische Fläche zweiten Grades und eine Konstante. Wenn man in irgend einem Punkt der Fläche eine Tangente zieht, und einen derselben parallelen Semidiameter, so daß das Produkt $P \cdot \delta$ gleich der Konstante ist, so umhüllen alle solche Tangenten eine zweite homofokale Fläche.

Aus diesem Satz, den wir gleich nachher auf die Linien anwenden wollen, welche die auf einander folgenden Berührungspunkte der Tangenten einer geodätischen Linie auf einer zweiten homofokalen Fläche beschreiben, können wir zunächst einige Consequenzen ziehen.

Die Poloide hat bekanntlich die Eigenschaft, daß alle Perpendikel, welche vom Mittelpunkt auf die durch ihre Punkte gelegten Tangentialebenen des Ellipsoids herabgelassen werden, einander gleich sind. Solche Poloiden lassen sich auf allen centrischen Flächen zweiten Grades ziehen. Der letzte Satz führt sogleich auf folgende weitere Eigenschaft dieser Linie:

Wenn man durch alle Punkte einer Poloide auf einer centrischen Fläche zweiten Grades an diese und an eine homofokale Fläche gemeinschaftliche Tangenten legt, so sind die den Tangenten parallelen Semidiameter der ersten Fläche einander gleich, ihre Endpunkte liegen auf einer sphärischen Kurve; diese Semidiameter bilden einen Kegel zweiten Grades und sind den konjugirten Tangenten einer Krümmungslinie der ersten Fläche parallel.

Hinsichtlich der Berührungskurve, welche die gemeinschaftlichen, durch die einzelnen Punkte der Poloide gehenden Tangenten auf der zweiten homofokalen Fläche beschreiben, ist zu bemerken, daß diejenigen Normalebenen der letzteren, welche durch diese Geraden, d. h. durch die von allen Punkten der Berührungslinie an die erste homofokale Fläche gezogenen gemeinschaftlichen Tangenten, sich legen lassen, eine der Fläche concentrische Kugel tangiren. Denn die durch die gemeinsame Tangente von zwei homofokalen Flächen gehende Berührungsebene der einen Fläche ist eine Normalebene der andern.

Wir haben oben gefunden, daß die gemeinsamen Tangenten, welche sich an zwei homofokale Flächen durch einen nicht auf denselben liegenden Punkt ziehen lassen, die Durchschnitte von zwei homofokalen Kegeln sind; also gibt es entweder vier oder keine solche Tangenten. In dem speziellen Fall, wo der Punkt auf einer dieser Flächen liegt, verwandelt sich einer der beiden Kegel in eine Ebene und es fallen die vier Tangenten in zwei zusammen; mithin lassen sich von jedem Punkt einer Fläche zwei gemeinsame Tangenten an die andere ziehen. Dieß geht schon daraus hervor, daß der Gleichung $P \cdot \delta = \text{const.}$ durch zwei verschieden gerichtete, unter sich gleiche Semidiameter genügt werden kann. Wenn also eine beliebige Kurve auf einer centrischen Fläche zweiten Grades gegeben ist, so bilden die von ihr an eine homofokale Fläche gezogenen gemeinsamen Tangenten zwei verschiedene Systeme und zwei verschiedene Flächen. Diese beiden Systeme fallen bei der Krümmungslinien in eines zusammen.

Wenn vier beliebige Punkte auf einer centrischen Fläche zweiten Grades gegeben sind, welche die Eigenschaft haben, daß die vom Mittelpunkt auf ihre Tangentialebenen gefällten Perpendikel eine Proportion bilden, so sind auch je vier Semidiameter, welche den durch diese Punkte an eine zweite homofokale Fläche zu ziehenden gemeinschaftlichen Tangenten parallel sind, proportionirt.

Auf den vier Poloiden, welche durch die Ecken eines Krümmungsliniendvierecks gehen, lassen sich unendlich viele Punkte von der genannten Eigenschaft finden.

Auf der Fläche liegt eine Anzahl von Punkten, bei welchen die vom Mittelpunkt auf ihre Tangentialebenen gefällten Perpendikel eine gewisse Reihe bilden, z. B. eine geometrische Progression, oder eine arithmetische, da

$P = \frac{C}{\delta}$; $P' = \frac{C}{\delta'}$; $P'' = \frac{C}{\delta''}$ u. s. f., so findet man sogleich, daß im ersten Fall die Semidiameter der Fläche, welche den durch diese Punkte an eine zweite homofokale Fläche zu ziehenden gemeinschaftlichen Tangenten parallel sind, eine geometrische Progression, im andern Fall eine harmonische Reihe bilden.

Wenn auf einer centrischen Fläche zweiten Grades irgend eine Kurve A gegeben ist, so lassen sich von allen Punkten derselben an eine zweite homofokale Fläche gemeinschaftliche Tangenten ziehen; die Berührungspunkte beschreiben auf der zweiten Fläche eine Kurve B, welche mit A in einer gewissen Verwandtschaft steht. Diese Verwandtschaft ist in den Gleichungen $P . \delta = \text{const.}$ $P' . \delta' = \text{const.}$ ausgedrückt. Ist z. B. A eine geodätische Linie auf der ersten Fläche, und sind A und A′ zwei auf einander folgende Punkte von A, so berühren die Oskulationsebenen dieser Linien in A und A′ eine zweite homofokale Fläche in den Punkten B und B′; mithin ist der Durchschnitt der Oskulationsebenen eine konjugirte Tangente des Elements BB′ und zugleich eine Tangente der geodätischen Linie AA′. Bei letzterer hat die Gleichung $P . \delta = \text{const.}$ die Bedeutung, daß δ der mit der Tangente der Linie parallele Semidiameter ist, und bei der Linie BB′ ist in $P' . \delta' = \text{const.}$ δ' der mit der konjugirten Tangente der Linie parallele Semidiameter. Wir haben also den Satz von Chasles:

Die Tangenten einer geodätischen Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades sind zugleich die konjugirten Tangenten der Kurve, welche ihre auf einander folgenden Berührungspunkte auf einer zweiten homofokalen Fläche bilden. Für letztere Kurve hat die Gleichung $P' . \delta' = \text{const.}$ die Bedeutung, daß δ' der mit der konjugirten Tangente parallele Semidiameter der Fläche ist.

Wir nehmen nun zwei homofokale Flächen an, (α) und (β). Auf der ersten ist der Punkt A, auf der zweiten der Punkt B. AB ist eine gemeinschaftliche Tangente beider Flächen, und zwar berührt diese Tangente eine der beiden von A aus auf (α) an die Durchschnittslinie von (α) und (β) zu ziehenden geodätischen Linien. Dann ist BA die konjugirte Tangente einer von B aus auf (β) zu ziehenden Linie, $P' . \delta' = \text{const.}$, die wir so eben betrachtet haben. Da sich nun durch den Mittelpunkt zwei gleiche Semidiameter δ' in dem mit der Tangentialebene von B parallelen Diametralschnitt der Fläche (β) ziehen lassen, so kreuzt in B noch eine zweite Linie $P' . \delta' = \text{const.}$, welche die Eigenschaft hat, daß alle ihre konjugirten Tangenten eine geodätische Linie auf (α) berühren. Da zwei gleiche Semidiameter δ' mit den Axen ihres Diametralschnitts gleiche Winkel bilden, so bilden auch zwei mit ihnen parallele Tangenten der Fläche mit den Krümmungslinien gleiche Winkel, welche durch ihren Durchschnittspunkt gehen; also kann man den Satz aufstellen:

Gegeben sind zwei homofokale Flächen verschiedener Art, die gemeinschaftliche Tangenten zulassen. In jedem Punkt einer solchen Fläche kreuzen sich zwei Linien $P' . \delta' = \text{const.}$, oder solche, deren konjugirte Tangenten je eine geodätische Linie auf der andern Fläche berühren. Der Winkel dieser Linien in ihrem Durchschnittspunkt wird von den Krümmungslinien desselben Punkts auf der ersten Fläche halbirt.

Die Linien $P' . \delta' =$ const., welchen die Eigenschaft zukommt, daß ihre konjugirten Tangenten eine geodätische Linie auf einer zweiten homofokalen Fläche berühren, werden nach §. 15 „konjugirte geodätische Linien" genannt. Zwei homofokale Flächen, z. B. ein Ellipsoid (α) und ein einmantliges Hyperboloid (β) schneiden sich in zwei, in Beziehung auf die Hauptebenen symmetrisch gelegenen Krümmungslinien C und C'. Die Zone der Fläche (α), welche von C und C' begrenzt ist, enthält zwei Systeme von geodätischen Linien, welche C und C' berühren; denn von jedem Punkt auf (α) lassen sich sowohl an C als auch an C' zwei tangirende geodätische Linien ziehen. Die Krümmungslinien C und C' theilen andererseits das einmantlige Hyperboloid (β) in drei Zonen; die mittlere ist von dem Ellipsoid eingeschlossen; die beiden äußeren enthalten die konjugirten geodätischen Linien, welche der ellipsoidischen Zone zwischen C und C' entsprechen. Von jedem Punkte auf C gehen zwei solche konjugirte geodätische Linien unter rechten Winkeln aus, und verlaufen auf dem einmantligen Hyperboloid ins Unendliche, kommen dann auf dem von C' begrenzten Mantel wieder zum Vorschein, nähern sich dieser Kurve und schneiden sie ebenfalls rechtwinklig. Die konjugirten geodätischen Linien auf (β) bilden Vierecke, von welchen je zwei Gegenseiten zu einem System gehören. Die Winkel eines solchen Vierecks werden halbirt durch die Krümmungslinien der Fläche. Also sind auch je zwei Semidiameter gleich, welche den Tangenten von zwei in einer Ecke zusammenstoßenden Seiten parallel sind.

Wir wollen nun auf einer centrischen Fläche zweiten Grades eine beliebige Anzahl von Punkten annehmen, z. B. fünf Punkte, A, B, C, D, E. Je zwei dieser Punkte lassen sich durch eine konjugirte geodätische Linie verbinden. Dadurch erhält man das Fünfeck ABCDE. Die konjugirten Tangenten der einzelnen Seiten berühren aber jetzt nicht mehr eine homofokale Fläche, sondern verschiedene; jede der konjugirten geodätischen Linien AB, BC . . . schneidet also gehörig verlängert, wieder eine andere Krümmungslinie auf der gegebenen Fläche senkrecht. Auch werden die Winkel des Fünfecks nicht mehr von den Krümmungslinien halbirt. Für die Punkte A und B haben wir z. B. die Gleichung $P_a . \delta_a = P_b . \delta'_b$; P_a und P_b sind die vom Mittelpunkt auf die Tangentialebenen von A und B gefällten Perpendikel, δ_a und δ'_b sind zwei Semidiameter der Fläche, welche zwei durch B und C gezogenen Tangenten der Fläche parallel laufen, die den Tangenten der Linie BC in den Punkten B und C konjugirt sind. Indem wir diese Bezeichnungsweise auf die übrigen Ecken und Seiten des Fünfecks ausdehnen, erhalten wir die weiteren Gleichungen
$P_b . \delta_b = P_c . \delta'_c$; $P_c . \delta_c = P_d . \delta'_d$; $P_d . \delta_d = P_e . \delta'_e$; $P_e . \delta_e = P_a . \delta'_a$

$$10. \quad \delta_a . \delta_b . \delta_c . \delta_d . \delta_e = \delta'_a . \delta'_b . \delta'_c . \delta'_d . \delta'_e$$

In der Gleichung $r = \frac{\delta^2}{P}$ bedeutet r den Krümmungshalbmesser des durch eine beliebige Tangente in einem Punkte gelegten Normalschnitts der Fläche, δ den dieser Tangente parallelen Semidiameter. Längs der konjugirten geodätischen Linie AB in dem Fünfeck ABCDE ist das Produkt $P . \delta$ konstant, also auch $P^3 . r$, wo r der Krümmungshalbmesser des durch eine konjugirte Tangente der Linie gelegten Normalschnitts der Fläche ist. Eine ganz ähnliche Schlußweise, wie diejenige, welche auf die Gleichung 10 geführt hat, ergibt dieses Resultat:

$$11. \quad r_a . r_b . r_c . r_d . r_e = r'_a . r'_b . r'_c . r'_d . r'_e$$

Die Formeln 10 und 11 gelten für Vielecke von beliebig vielen Seiten; sie enthalten folgenden Satz:

In einem von konjugirten geodätischen Linien auf einer centrischen Fläche zweiten Grades gebildeten Vieleck von n Seiten theilen sich sowohl die zwei n Semidiameter der Fläche, welche den konjugirten Tangenten von je zwei in einer Ecke zusammenstoßenden Seiten parallel sind, als auch die zwei n Krümmungshalbmesser der durch diese konjugirten Tangenten gelegten Normalschnitte in zwei Gruppen; das Produkt der n Semidiameter oder der n Krümmungshalbmesser der einen Gruppe ist gleich dem Produkt der n andern.

Wir haben oben den Ausdruck gefunden

$$\mu_,^2 \cos^2 i_, + \nu_,^2 \sin^2 i_, = \alpha^2 - \frac{\alpha^2 (\alpha^2 - b^2)(\alpha^2 - c^2)}{P_,^2 \,.\, \delta_,^2}$$

Dieser gilt für eine auf der Fläche (α) gezogene konjugirte geodätische Linie, $\mu_,$ und $\nu_,$ sind die großen Halbaxen der zwei durch einen Punkt dieser Linie gehenden homofokalen Flächen ($\mu_,$) und ($\nu_,$); $i_,$ ist der Winkel, welchen die konjugirte Tangente der Linie in diesem Punkt mit der Krümmungslinie bildet, die der Durchschnitt zwischen (α) und ($\mu_,$) ist; $\delta_,$ ist der mit dieser konjugirten Tangente parallele Semidiameter der Fläche, und $P_,$ das vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene des Punkts gefällte Perpendikel. Da für eine konjugirte geodätische Linie $P_, . \delta_,$ konstant ist, so entspricht eine solche Linie auch dieser Gleichung

12. $\mu_,^2 \cos^2 i_, + \nu_,^2 \sin^2 i_, = \text{const.}$

Man ziehe durch einen Punkt auf (α) zwei konjugirte geodätische Linien, die mit einander einen rechten Winkel bilden, so bestehen die Relationen:

$$\mu_,^2 \cos^2 i_, + \nu_,^2 \sin^2 i_, = \text{const.} \qquad \mu_,^2 \sin^2 i_, + \nu_,^2 \cos^2 i_, = \text{const.}$$
$$\mu_,^2 + \nu_,^2 = \text{const.}$$

Nun ist der vom Mittelpunkt nach dem Punkt auf (α) gezogene Halbmesser gleich $\sqrt{\alpha^2 + \mu_,^2 + \nu_,^2 - b^2 - c^2}$, also konstant:

Diejenigen Punkte auf einer centrischen Fläche zweiten Grades, von welchen aus zwei sich rechtwinklig schneidende konjugirte geodätische Linien gezogen werden können, wovon jede, gehörig verlängert, auf einer bestimmten Krümmungslinie senkrecht steht, liegen auf einer sphärischen Kurve.

Denn in der Gleichung $\mu_,^2 \cos^2 i_, + \nu_,^2 \sin^2 i_, = \text{const.}$ bedeutet die Konstante das Quadrat der großen Halbaxe von derjenigen homofokalen Fläche, auf deren Durchschnittslinie mit (α) die konjugirte geodätische Linie senkrecht ist, weil für $i_, = o$, die Konstante $= \mu_,^2$ wird.

Die Gleichung 18 des §. 24 enthält einen Satz, der sich ohne Mühe und durch ganz ähnliche Schlüsse auf die konjugirten geodätischen Linien ausdehnen läßt, und so lautet:

Wenn man einer Krümmungslinie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades ein Vieleck von n konjugirten geodätischen Linien einbeschreibt, so lassen sich die Winkel, welche die konjugirte Tangente jeder Seite des Vielecks mit der Krümmungslinie bildet, in zwei Gruppen bringen; das Produkt der Sinus der n Winkel in der ersten Gruppe ist gleich dem Produkt der Sinus der n Winkel in der andern.

Auf der Fläche (α) ist ein Viereck ABCD gegeben; AB und CD sind geodätische Linien, welche, gehörig verlängert, eine Krümmungslinie von (α)

berühren, BC und DA sind konjugirte geodätische Linien, welche auf der nämlichen Krümmungslinie senkrecht stehen. Durch diese Krümmungslinie geht die homofokale Fläche (β). Die Tangenten von AB und CD beschreiben auf (β) zwei konjugirte geodätische Linien A′B′ und C′D′; die konjugirten Tangenten von BC und DA beschreiben auf (β) zwei geodätische Linien B′C′ und D′A′. Eine gemeinschaftliche Tangente von (α) und (β) kann also in einem ununterbrochenen Zuge über beide Flächen hingleiten, indem die zwei Berührungspunkte stets auf den Vierecken ABCD und A′B′C′D′ liegen. Wenn sie auf dem einen Viereck eine Tangente ist, so ist sie auf dem andern Viereck eine konjugirte Tangente.

Wir wollen nun das in §. 15 über die Flächen (α) und (β) Gesagte auf die homofokalen Flächen anwenden. Wir setzen also statt (α) ein Ellipsoid (ϱ), und statt (β) ein homofokales einmantliges Hyperboloid (μ). Alle Tangenten einer geodätischen Linie auf (ϱ) berühren die Fläche (μ), wofern nämlich die geodätische Linie die Durchschnittskurve von (ϱ) und (μ) tangirt. Eine Ebene, durch die gemeinschaftliche Tangente gelegt, welche eine der beiden Flächen (ϱ) oder (μ) berührt, steht normal auf der andern; mithin sind (ϱ) und (μ) die Flächen der Krümmungsmittelpunkte einer dritten Fläche (λ); wir können zunächst diesen Satz aufstellen:

Zwei homofokale Flächen verschiedener Art, die sich also nicht gegenseitig einschließen, haben die Eigenschaft, daß ihre scheinbaren Umrisse von irgend einem Punkt des Raums aus gesehen, auf einander senkrecht stehen; sie sind also die Flächen der Krümmungsmittelpunkte einer dritten Fläche (λ) (s. o.).

Die Tangenten einer geodätischen Linie von (ϱ) bilden eine Krümmungslinie des ersten Systems von (λ) und die Tangenten einer geodätischen Linie von (μ) eine Krümmungslinie des zweiten Systems von (λ). Man kann sich hieraus schon einige Vorstellungen ableiten in Beziehung auf die Form der Krümmungslinien von (λ). Da sich von jedem Punkt auf einem Ellipsoid, der sich außerhalb des von einer Krümmungslinie eingeschlossenen Raums befindet, zwei geodätische Linien an diese Krümmungslinie ziehen lassen, so geht daraus hervor, daß es zu jedem Punkt auf der Fläche (λ) noch einen zweiten gibt, so daß die Normalen beider Punkte sich auf der Fläche (ϱ) schneiden, und mit der durch den Durchschnittspunkt gehenden Krümmungslinie von (ϱ) gleiche Winkel bilden. Wenn man mit den Normalen zweier auf solche Art zusammengehörigen Punkte von (λ) parallele Semidiameter von (ϱ) zieht, so sind diese einander gleich. Wir haben oben gesehen, daß sich durch jeden Punkt im allgemeinen vier gemeinschaftliche Tangenten an zwei homofokale Flächen verschiedener Art ziehen lassen, und daß diese Tangenten die Durchschnitte von zwei homofokalen Kegeln sind, also eine symmetrische Lage in Beziehung auf die Axen der Kegel haben. Hieraus folgt der Satz:

Von jedem Punkt des Raums lassen sich an die Fläche (λ), deren Normalen zwei homofokale Fächen berühren, im allgemeinen vier, jedenfalls nicht mehr, Normalen ziehen, welche eine symmetrische Lage in Beziehung auf drei durch diesen Punkt gehende rechtwinklige Axen haben. Diese Normalen sind die Durchschnitte von zwei concentrischen homofokalen Kegeln, welche die Flächen der Krümmungsmittelpunkte von (λ) tangiren.

Man nehme auf (λ) selbst einen Punkt an; da sich durch denselben vier gemeinschaftliche Tangenten an die homofokalen Flächen (ϱ) und (μ) ziehen lassen, welche zugleich Normalen von (λ) sind, so folgt daraus unmittelbar, daß sich in jedem Punkt des Raums vier Flächen (λ) kreuzen, von deren Tangentialebenen sich zwei und zwei in Geraden schneiden, die auf einander senkrecht stehen. Es lassen sich durch den Punkt drei zu einander senkrechte Ebenen legen, von welchen jede den Winkel zwischen zwei Tangentialebenen halbirt. Diese Ebenen berühren die durch denselben Punkt gehenden drei homofokalen Flächen von (ϱ) und (μ).

Die Differenzialgleichung der Fläche (λ), deren Krümmungsmittelpunkte auf zwei homofokalen Flächen liegen, läßt sich auf folgende Art erhalten.

Wir haben schon in §. 21, 14. 15. und 16. diese Formeln gefunden

$$ds' = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}\,d\varrho; \quad ds'' = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}}\,d\mu$$

$$ds''' = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}\,d\nu$$

Die drei homofokalen Flächen (ϱ), (μ), (ν) deren Gleichungen sind

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1$$

schneiden sich im Punkt (ϱ, μ, ν). Will man durch elliptische Coordinaten zu einem zweiten Punkt des Raums ($\varrho + d\varrho, \mu, \nu$) übergehen, so erhält man aus

$$\begin{aligned} bcx &= \varrho\mu\nu \\ b\sqrt{c^2 - b^2}\,.\,y &= \sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2} \\ c\sqrt{c^2 - b^2}\,.\,z &= \sqrt{\varrho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2} \end{aligned}$$

durch Differenziation

$$\begin{aligned} bc\,dx &= \mu\nu\,d\varrho \\ b\sqrt{c^2 - b^2}\,.\,dy &= \frac{\varrho\,d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - b^2}}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2} \\ c\sqrt{c^2 - b^2}\,.\,dz &= \frac{\varrho\,d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - c^2}}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2} \end{aligned}$$

Hieraus

$$ds'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{\mu^2\nu^2}{b^2c^2} + \frac{\varrho^2(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}{b^2(\varrho^2 - b^2)(c^2 - b^2)} + \frac{\varrho^2(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)}{c^2(\varrho^2 - c^2)(c^2 - b^2)}\right) d\varrho^2$$

oder

$$ds' = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \mu^2}\sqrt{\varrho^2 - \nu^2}}{\sqrt{\varrho^2 - b^2}\sqrt{\varrho^2 - c^2}}\,d\varrho$$

Ebenso findet man durch Differenziation nach μ und nach ν die Werthe von ds'' und ds'''; indem man vom Punkt (ϱ, μ, ν) zuerst zum Punkte ($\varrho, \mu + d\mu, \nu$) und dann zum Punkte ($\varrho, \mu, \nu + d\nu$) übergeht. Die Linien ds', ds'', ds''' bilden drei anstoßende Kanten eines unendlich kleinen rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen Diagonale wir mit ds bezeichnen. Diese Diagonale verbindet die zwei Gegenecken des Parallelepipeds (ϱ, μ, ν) und ($\varrho + d\varrho, \mu + d\mu, \nu + d\nu$). Man könnte den Werth von ds aus der Gleichung $ds = \sqrt{ds'^2 + ds''^2 + ds'''^2}$ entwickeln, allein man erhielte auf diese Art kein für die Rechnung günstiges

Resultat. Wir wählen daher einen andern Weg, indem wir annehmen wollen, daß die Diagonale ds, gehörig verlängert, die beiden homofokalen Flächen (α) und (β) berühre. Die Gleichungen 6 und 7 dieses §. gelten also für ds. Diese Gleichungen sind, indem wir die Winkel, welche ds mit ds', ds'', ds''' bildet, der Reihe nach i', i'', i''' nennen

$$13. \quad \frac{\cos^2 i'}{\varrho^2 - \alpha^2} + \frac{\cos^2 i''}{\mu^2 - \alpha^2} + \frac{\cos^2 i'''}{\nu^2 - \alpha^2} = 0$$
$$\frac{\cos^2 i'}{\varrho^2 - \beta^2} + \frac{\cos^2 i''}{\mu^2 - \beta^2} + \frac{\cos^2 i'''}{\nu^2 - \beta^2} = 0$$

Durch Verbindung mit $\cos^2 i' + \cos^2 i'' + \cos^2 i''' = 1$ erhält man

$$14. \quad \cos^2 i' = \frac{(\varrho^2 - \alpha^2)(\varrho^2 - \beta^2)}{(\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - \nu^2)} \quad \cos^2 i'' = \frac{(\alpha^2 - \mu^2)(\mu^2 - \beta^2)}{(\varrho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}$$
$$\cos^2 i''' = \frac{(\alpha^2 - \nu^2)(\beta^2 - \nu^2)}{(\varrho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}$$

Nun ist offenbar, wie sich aus einer sehr einfachen geometrischen Betrachtung ergibt, die Projektion von den drei Kanten ds', ds'', ds''' des obengenannten Parallelepipeds auf die Diagonale ds gleich ds, oder

$$ds = ds' \,.\, \cos i' + ds'' \,.\, \cos i'' + ds''' \,.\, \cos i'''$$

Durch Benützung unserer Werthe für ds', ds'', ds''', cos i', cos i'', cos i''' erhalten wir

$$15. \quad ds = d\varrho \sqrt{\frac{(\varrho^2 - \alpha^2)(\varrho^2 - \beta^2)}{(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}} + d\mu \sqrt{\frac{(\alpha^2 - \mu^2)(\mu^2 - \beta^2)}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}}$$
$$+ d\nu \sqrt{\frac{(\alpha^2 - \nu^2)(\beta^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}}$$

Es seien die Flächen (α) und (β) gegeben, also in 15. nicht blos b und c, sondern auch α und β konstant, dagegen ϱ, μ, ν die einzigen Variabeln; so bezeichnet offenbar ds die Zunahme der gemeinschaftlichen Tangente von (α) und (β), indem man von einem Punkte (ϱ, μ, ν) des Raums, welcher auf dieser Tangente liegt, zu einem unendlich nahen Punkt ($\varrho + d\varrho$, $\mu + d\mu$, $\nu + d\nu$) übergeht. Wir nehmen nun an, diese beiden Punkte liegen auf der Fläche (λ), dann sind die durch dieselben gezogenen gemeinschaftlichen Tangenten von (α) und (β) Normalen von (λ) und schneiden sich auf einer der beiden Flächen, (α) oder (β), mithin ist ds = o und

$$16. \quad d\varrho \sqrt{\frac{(\varrho^2 - \alpha^2)(\varrho^2 - \beta^2)}{(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}} + d\mu \sqrt{\frac{(\alpha^2 - \mu^2)(\mu^2 - \beta^2)}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}}$$
$$+ d\nu \sqrt{\frac{(\alpha^2 - \nu^2)(\beta^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}} = 0$$

die Differenzialgleichung der Fläche (λ), und wenn wir das Integral derselben mit L (ϱ, μ, ν) bezeichnen

17. $L(\varrho, \mu, \nu) = \text{const.}$

die Gleichung derjenigen Fläche (λ), deren Krümmungsmittelpunkte auf zwei homofokalen Flächen liegen. Liouville hat dieselbe zuerst angegeben, aber auf andere Art bewiesen.

Man hat aber auch $ds = \frac{ds'}{\cos i'} = \frac{ds''}{\cos i''} = \frac{ds'''}{\cos i'''}$ oder durch Substitution obiger Werthe

18. $$ds = \frac{(\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - \nu^2)}{\triangle(\varrho^2)} d\varrho; \quad ds = -\frac{(\varrho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{\triangle(\mu^2)} d\mu;$$

$$ds = \frac{(\varrho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{\triangle(\nu^2)} d\nu$$

indem wir der Einfachheit wegen setzen

19. $$\triangle(\varrho^2) = \sqrt{(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)(\varrho^2 - \alpha^2)(\varrho^2 - \beta^2)}$$
$$\triangle(\mu^2) = \sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)(\mu^2 - \alpha^2)(\beta^2 - \mu^2)}$$
$$\triangle(\nu^2) = \sqrt{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)(\alpha^2 - \nu^2)(\beta^2 - \nu^2)}$$

Aus 18. finden wir

$$\frac{d\varrho}{\triangle(\varrho^2)} + \frac{d\mu}{\triangle(\mu^2)} + \frac{d\nu}{\triangle(\nu^2)}$$
$$= ds\left(\frac{1}{(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-\nu^2)} - \frac{1}{(\varrho^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)} + \frac{1}{(\varrho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}\right) = 0$$

$$\frac{\varrho^2\, d\varrho}{\triangle(\varrho^2)} + \frac{\mu^2\, d\mu}{\triangle(\mu^2)} + \frac{\nu^2\, d\nu}{\triangle(\nu^2)}$$
$$= ds\left(\frac{\varrho^2}{(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-\nu^2)} - \frac{\mu^2}{(\varrho^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)} + \frac{\nu^2}{(\varrho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}\right) = 0$$

$$\frac{\varrho^4\, d\varrho}{\triangle(\varrho^2)} + \frac{\mu^4\, d\mu}{\triangle(\mu^2)} + \frac{\nu^4\, d\nu}{\triangle(\nu^2)}$$
$$= ds\left(\frac{\varrho^4}{(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-\nu^2)} - \frac{\mu^4}{(\varrho^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)} + \frac{\nu^4}{(\varrho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}\right) = ds$$

oder

20. $$\frac{d\varrho}{\triangle(\varrho^2)} + \frac{d\mu}{\triangle(\mu^2)} + \frac{d\nu}{\triangle(\nu^2)} = 0$$

21. $$\frac{\varrho^2\, d\varrho}{\triangle(\varrho^2)} + \frac{\mu^2\, d\mu}{\triangle(\mu^2)} + \frac{\nu^2\, d\nu}{\triangle(\nu^2)} = 0$$

22. $$\frac{\varrho^4\, d\varrho}{\triangle(\varrho^2)} + \frac{\mu^4\, d\mu}{\triangle(\mu^2)} + \frac{\nu^4\, d\nu}{\triangle(\nu^2)} = ds$$

20. und 21. sind die einfachsten unter denjenigen Differenzialgleichungen, welchen Jakobi den Namen „Abelianische Differenzialgleichungen“ gegeben hat. Wir haben sie hier ganz auf elementarem Wege, durch Hülfe der Eigenschaften von konjugirten Tangenten homofokaler Flächen gefunden. Liouville leitete dieselben aus den Gleichungen über die Bewegung eines materiellen Punktes ab. Sie folgen unmittelbar aus den Formeln 13 und sind nur eine andere Form derselben; mithin können die Gleichungen 20 und 21 als diejenigen der gemeinschaftlichen Tangenten von zwei homofokalen Flächen betrachtet werden. Man erhält aus ihnen

$$(\varrho^2 - \mu^2)\frac{d\varrho}{\triangle(\varrho^2)} = (\mu^2 - \nu^2)\frac{d\nu}{\triangle(\nu^2)}$$

$$(\varrho^2 - \mu^2)\frac{d\mu}{\triangle(\mu^2)} = -(\varrho^2 - \nu^2)\frac{d\nu}{\triangle(\nu^2)}$$

Es ist aus dem Vorhergehenden einleuchtend, daß die Formeln 20, 21, 22 auf 15. führen müssen, weil nach den Eigenschaften des Parallelepipeds, welches wir betrachtet haben, die Ausdrücke

$$ds = \frac{ds'}{\cos i'}, \quad ds = \frac{ds''}{\cos i''}, \quad ds = \frac{ds'''}{\cos i'''}$$

eng zusammenhängen mit der Gleichung

$$ds = ds' \cos i' + ds'' \cos i'' + ds''' \cos i'''$$

Dieser Uebergang läßt sich algebraisch, wie folgt, herstellen; statt 22. kann man auch schreiben

$$ds = \frac{\varrho^4 - (\alpha^2 + \beta^2)\,\varrho^2 + \alpha^2\beta^2}{\triangle\,(\varrho^2)}\, d\varrho + \frac{\mu^2 - (\alpha^2 + \beta^2)\,\mu^2 + \alpha^2\beta^2}{\triangle\,(\mu^2)}\, d\mu$$
$$+ \frac{\nu^4 - (\alpha^2 + \beta^2)\,\nu^2 + \alpha^2\beta^2}{\triangle\,(\nu^2)}\, d\nu$$

Da nun $\varrho^4 - (\alpha^2 + \beta^2)\,\varrho^2 + \alpha^2\beta^2 = (\varrho^2 - \alpha^2)\,(\varrho^2 - \beta^2)$ und $\triangle\varrho^2 = \sqrt{(\varrho^2 - b^2)\,(\varrho^2 - c^2)\,(\varrho^2 - \alpha^2)\,(\varrho - \beta^2)}$, so ist

$$\frac{\varrho^4 - (\alpha^2 + \beta^2)\,\varrho^2 + \alpha^2\beta^2}{\triangle\,(\varrho^2)} = \sqrt{\frac{(\varrho^2 - \alpha^2)\,(\varrho^2 - \beta^2)}{(\varrho^2 - b^2)\,(\varrho^2 - c^2)}}$$

ebenso lassen sich die beiden andern Brüche transformiren, wodurch man die Formel 15 erhält.

In der Gleichung der Fläche (λ) $L\,(\varrho, \mu, \nu) = \text{const.}$ können wir der Konstante nach und nach verschiedene Werthe beilegen, C, C′ . . . und erhalten dadurch eine Reihe von parallelen Flächen (λ), deren Normalen dieselben homofokalen Flächen berühren. C — C′ ist die Entfernung von zwei solchen Flächen.

$\frac{dL}{d\alpha} = A$, wo A eine Konstante ist, ist die Gleichung der entwickelbaren Fläche, welche diejenigen Normalen von (λ) bilden, die (α) in einer konjugirten geodätischen Linie und (β) in einer geodätischen Linie berühren. Die beiden Gleichungen $\frac{dL}{d\alpha} = A$ und $\frac{dL}{d\beta} = B$ gehören also einer Normale von (λ) an, und endlich ist $f\,(A, B) = 0$ eine Kegelfläche, die von Normalen der Fläche (λ) gebildet wird, deren Fußpunkte auf (λ) eine beliebige Linie, aber keine Krümmungslinie, bilden.

Auf einer Kurve liegt ein Punkt (ϱ, μ, ν). Die Tangente der Kurve berührt zwei homofokale Flächen (α) und (β); die Natur dieser Kurve ist bestimmt, wenn für jeden einzelnen Punkt (ϱ, μ, ν) die Beziehung zwischen den Größen ϱ, μ, ν und α, β gegeben ist, oder mit andern Worten, wenn in den Gleichungen

$$\alpha = \varphi\,(\varrho, \mu, \nu) \text{ und } \beta = \psi\,(\varrho, \mu, \nu)$$

die Funktionen φ und ψ spezialisirt sind. Setzen wir also diese Werthe von α und β in 15. ein, so haben wir einen Ausdruck für das Bogendifferenzial jeder beliebigen Kurve im Raum in elliptischen Coordinaten. Will man den entsprechenden Ausdruck für eine Kurve, welche auf einer der homofokalen Flächen liegt, z. B. auf (ϱ), so hat man in 15. zu setzen $d\varrho = 0$; $\alpha = \varrho$; $\beta = \psi\,(\varrho, \mu, \nu)$ und erhält

$$23. \quad ds = d\mu \sqrt{\frac{(\varrho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \psi^2)}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}} + d\nu \sqrt{\frac{(\varrho^2 - \nu^2)\,(\psi^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)\,(c^2 - \nu^2)}}$$

Vorstehende Gleichung gilt für alle Kurven auf dem Ellipsoid; gehen wir noch weiter und setzen $\psi(\varrho, \mu, \nu) = \beta = \text{const.}$, so erhalten wir

$$24.\quad ds = d\mu \sqrt{\frac{(\varrho^2-\mu^2)(\mu^2-\beta^2)}{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}} + d\nu \sqrt{\frac{(\varrho^2-\nu^2)(\beta^2-\nu^2)}{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}$$

Diese Relation entspricht den geodätischen Linien auf dem Ellipsoid (ϱ), deren Tangenten die homofokale Fläche (β) berühren. Setzen wir hier $\beta = b$, so ergibt sich

$$25.\quad ds = d\mu \sqrt{\frac{\varrho^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2}} + d\nu \sqrt{\frac{(\varrho^2 - \nu^2)}{(c^2 - \nu^2)}}$$

Dieß ist die Formel für die geodätischen Linien auf (ϱ), welche durch einen Nabelpunkt gehen.

Wollen wir endlich die Gleichung für den Bogen der Krümmungslinie $\varrho = \text{const.}$ $\mu = \text{const.}$ haben, welche der Durchschnitt des Ellipsoids (ϱ) und des einmantligen Hyperboloids (μ) ist, so setzen wir in 15. $d\varrho = d\mu = o$, und da die Tangenten dieser Krümmungslinie die homofokalen Flächen (ϱ) und (μ) zugleich berühren, so ist $\alpha = \varrho$ und $\beta = \mu$; mithin ist

$$26.\quad ds = d\nu \sqrt{\frac{(\varrho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}}$$

die Gleichung für das Differenzial des Bogens der Krümmungslinie $\mu = \text{const.}$ auf dem Ellipsoid (ϱ). Man sieht, daß die Rektifikation dieser Bögen auf elliptische beziehungsweise hyperelliptische (Abel'sche) Integrale zurückgeführt werden kann.

§. 26. Allgemeine Gleichung der Linien auf den centrischen Flächen zweiten Grades.

Jede Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades entspricht der Gleichung

$$1.\quad P \,.\, \delta \,.\, \delta' \,.\, \sin\alpha = \text{const.}$$

P ist das vom Mittelpunkt der Fläche auf die Tangentialebene in einem Punkt der Linie gefällte Perpendikel, δ und δ' sind zwei Semidiameter der Fläche, wovon der erste mit der Tangente der Linie, und der zweite mit der konjugirten Tangente derselben parallel ist, und α ist der Winkel zwischen beiden Tangenten.

Der Beweis dieses Satzes beruht ganz einfach auf der bekannten Eigenschaft der centrischen Flächen zweiten Grades, daß der Inhalt aus je drei konjugirten Semidiametern konstant ist, denn dieser Inhalt ist, wie man sich durch einige sehr leichte geometrische Betrachtungen überzeugen kann, gleich $P \,.\, \delta \,.\, \delta' \,.\, \sin\alpha$. Bei solchen Linien, wo der Winkel α konstant ist, verwandelt sich die Gleichung 1 in folgende:

$$2.\quad P \,.\, \delta \,.\, \delta' = \text{const.}$$

Bei den Krümmungslinien ist $\alpha = 90^0$ also $\sin\alpha = 1$. Man ziehe an zwei auf einander folgende Punkte der Krümmungslinie Tangentialebenen und lege durch den Mittelpunkt der Fläche zwei denselben parallele Diametralschnitte. Weil die konjugirten Tangenten einer Krümmungslinie senkrecht auf einander stehen, so sind δ und δ' Halbaxen, und zwar sind δ, δ' die Halbaxen des ersten, δ'' und δ' die Halbaxen des zweiten Diametralschnitts. Beide haben die Gerade δ' gemeinschaftlich, welche dem Durchschnitt der Tangentialebenen parallel ist. Da nun sowohl δ als auch δ'' auf δ' senkrecht stehen, so ist das vom Endpunkt des Semidiameters δ' auf die Ebene, in welcher δ und δ'' liegen, gefällte Perpendikel konstant. Dieses Perpendikel ist aber gleich δ'. Die Gleichung 1 verwandelt sich also bei den Krümmungslinien in folgende zwei:

3. $P \,.\, \delta = \text{const.} \quad \delta' = \text{const.}$

Bei den geodätischen Linien ist der Ausdruck $\delta' \,.\, \sin \alpha = \text{const.}$, wie sich aus folgender Betrachtung ergibt.

Es seien A, B, C drei auf einander folgende Punkte der Linie, und die durch die Elemente AB und BC gelegten Tangentialebenen schneiden sich in der Geraden BB'. Wenn man die Ebene ABB' um BB' als Axe dreht, bis sie mit CBB' eine Ebene bildet, so muß vermöge der Natur geodätischer Linien AB in die Verlängerung von BC fallen. Es seien nun wieder δ, δ', δ'' diejenigen Semidiameter der Fläche, welche den Tangenten AB, BB, BC parallel sind. Dreht man den Diametralschnitt, in welchem δ und δ' konjugirte Semidiameter sind, um δ' als Axe, bis er mit dem Diametralschnitt von δ' und δ'' zusammenfällt, so werden auch δ und δ'' koincidiren. Hieraus geht hervor, daß bei der ursprünglichen Lage vom ersten Diametralschnitt die vom Endpunkt des Semidiameters δ' auf die beiden Semidiameter δ und δ'' oder ihre Verlängerung gefällten Perpendikel gleich sind. Diese Perpendikel sind also gleich $\delta' \,.\, \sin \alpha$. Hieraus geht der Satz hervor:

Längs einer geodätischen Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades finden die Gleichungen statt:

4. $P \,.\, \delta = \text{const.} \quad \delta' \,.\, \sin \alpha = \text{const.}$

In dem Punkt, wo eine geodätische Linie eine Krümmungslinie berührt, ist $\alpha = 90^0$, also sind δ und δ' zwei Halbaxen eines Diametralschnitts. Die zweite der Gleichungen 4 enthält folgenden Satz (von Liouville):

Wenn man parallel der Tangente in einem Punkt einer geodätischen Linie auf einem Ellipsoid (auf jeder centrischen Fläche zweiten Grades) und der konjugirten Tangente zwei Semidiameter der Fläche zieht, so ist die Größe des vom Endpunkt des zweiten dieser Semidiameter auf den ersten herabgelassenen Perpendikels konstant.

Eine weitere Gattung von Linien ist durch die Relationen charakterisirt:

5. $P \,.\, \delta' = \text{const.} \quad \delta \sin \alpha = \text{const.}$

Diese Linien haben wir schon oben §. 24 unter dem Namen konjugirte geodätische Linien betrachtet; sie haben die Eigenschaft, daß ihre Tangenten noch eine zweite homofokale Fläche berühren, und daß die Berührungspunkte auf letzterer eine geodätische Linie beschreiben. Die zweite der Gleichungen 5 läßt sich also in Worte fassen:

Wenn man parallel der Tangente einer solchen Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades, welche die Eigenschaft hat, daß ihre Tangenten eine zweite homofokale Fläche längs einer geodätischen Linie berühren, und der konjugirten Tangente zwei Semidiameter der ersten Fläche zieht, so ist die Größe des vom Endpunkt des ersten dieser Semidiameter auf den zweiten herabgelassenen Perpendikels konstant.

Eine weitere Linie auf den centrischen Flächen zweiten Grades ist die Poloide, für welche $P = \text{const.}$ ist. Die beiden Gleichungen dieser Linie sind also nach 1.

6. $P = \text{const.} \quad \delta \,.\, \delta' \,.\, \sin\alpha = \text{const.}$

Die letzte Formel enthält diesen Lehrsatz:

Bei einer Poloide haben alle Diametralschnitte, welche den Tangentialebenen der einzelnen Punkte dieser Linie parallel sind, einen konstanten Inhalt.

Jede Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades entspricht der Gleichung

7. $P^2 \,.\, \sqrt{r \,.\, r'} \,.\, \sin\alpha = \text{const.}$

r und r' sind die Krümmungshalbmesser der durch die Tangente der Linie und ihre konjugirte Tangente gelegten Normalschnitte der Fläche.

Dieß folgt aus unserer früheren Formel $r = \frac{\delta^2}{P}$ (§. 24, 6)

Bei einer Krümmungslinie modificirt sich diese Gleichung dahin, daß $\sin\alpha = 1$ wird, und statt r und r' die beiden Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche gesetzt werden müssen:

8. $P^2 \,.\, \sqrt{R \,.\, R'} = \text{const.}$

Bei einer geodätischen Linie hat man statt $P^2 . \delta^2 = \text{const.}$ und $\delta'^2 . \sin^2\alpha = \text{const.}$

9. $P^3 \,.\, r = \text{const.}; \quad P \,.\, r' \,.\, \sin^2\alpha = \text{const.}; \quad \frac{r}{r'^3 . \sin^6\alpha} = \text{const.}$

Die dritte dieser Gleichungen erhält man durch Elimination von P aus den beiden ersten.

Bei einer solchen Linie auf einer centrischen Fläche zweiten Grades, deren Tangenten eine zweite homofokale Fläche in einer geodätischen Linie berühren, ist

10. $P^3 \,.\, r' = \text{const.}; \quad P \,.\, r \,.\, \sin^2\alpha = \text{const.}; \quad \frac{r'}{r^3 . \sin^6\alpha} = \text{const.}$

Bei der Poloide finden diese Relationen statt:

11. $P = \text{const.} \qquad r r' \,.\, \sin^2\alpha = \text{const.} \qquad R \,.\, R' = \text{const.}$

Die letzte Gleichung geht daraus hervor, daß $\delta \,.\, \delta' \sin\alpha$ gleich dem Produkt der beiden Halbaxen des Diametralschnitts ist, von welchem δ und δ' konjugirte Semidiameter sind. Diese Halbaxen sind gleich $\sqrt{P \,.\, R}$ und $\sqrt{P \,.\, R'}$.

Bei einer Poloide ist das Krümmungsmaß $\frac{1}{R \,.\, R'}$ konstant (s. §. 18).

§. 27. Die homofokalen Flächen zweiten Grades.

Homofokale Kegel.

Wir nehmen ein rechtwinkliges Coordinatensystem an, dessen Ursprung der Mittelpunkt von zwei Kegeln und einer Kugel ist, die durch folgende Gleichungen gegeben sind:

$$1.\quad x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2 \qquad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = o$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = o$$

Die Kugel bezeichnen wir mit (ϱ), den ersten Kegel mit (μ) und den zweiten mit (ν); irgend ein Punkt im Raum kann auf zweierlei Art bestimmt werden, entweder durch seine rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, oder durch die Variabeln ϱ, μ, ν; letztere gehören in die Gattung der elliptischen Coordinaten. Den Uebergang von den einen zu den andern findet man durch Bestimmung der Werthe von x, y, z aus den Gleichungen 1; man erhält dadurch

$$2.\quad bcx = \varrho\mu\nu; \quad b\sqrt{c^2 - b^2}\,.\,y = \varrho\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}$$

$$c\sqrt{c^2 - b^2}\,.\,z = \varrho\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}$$

Die Gleichungen der Berührungsebenen von diesen drei Flächen sind, wenn der Berührungspunkt (x, y, z) ist, und die laufenden Coordinaten der Berührungsebenen mit x′ y′ z′ bezeichnet werden:

$$3.\quad xx' + yy' + zz' = \varrho^2 \qquad \frac{xx'}{\mu^2} + \frac{yy'}{\mu^2 - b^2} - \frac{zz'}{c^2 - \mu^2} = o$$

$$\frac{xx'}{\nu^2} - \frac{yy'}{b^2 - \nu^2} - \frac{zz'}{c^2 - \nu^2} = o$$

b und c sind konstant; $c > \mu > b$; $c > b > \nu$. Wenn man den Größen μ und ν verschiedene Werthe beilegt, so erhält man eben so viele Kegel; in den Grenzfällen ist $\mu = b$ und $\nu = b$; dann verwandeln sich die Gleichungen 2 in folgende:

$$4.\quad x = \pm \frac{b}{\sqrt{c^2 - b^2}}\,z \qquad y = o$$

welche zwei durch den Ursprung gehende Gerade, die Fokallinien, vorstellen; beide machen sowohl mit der x als auch mit der z Axe gleiche Winkel.

Wenn die Ebenen $z = px + qy$ und $z = p'x + q'y$ auf einander senkrecht stehen sollen, so muß die Bedingung erfüllt werden $pp' + qq' + 1 = o$; aus den zwei ersten der Gleichungen 3 erhalten wir

$$pp' + qq' + 1 = -\frac{y^2}{z^2}\,\frac{c^2 - \mu^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{x^2}{z^2}\,\frac{c^2 - \mu^2}{\mu^2} + 1$$

Der rechte Theil verschwindet hier, wenn für x, y, z ihre Werthe aus 2. gesetzt werden. Ebenso findet man, daß überhaupt je zwei der drei Tangentialebenen, welche an die Flächen in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt sich ziehen lassen, die Bedingung $pp' + qq' + 1 = o$ erfüllen, und also auf einander senkrecht stehen. Die Durchschnitte der Tangentialebenen sind mithin die Normalen der Flächen; die Gleichungen für die Projektionen der Normalen auf den xy, xz und yz Ebenen ergeben sich durch Elimination aus 3.

$$5.\quad xx' \frac{c^2}{\mu^2} + yy' \frac{c^2 - b^2}{\mu^2 - b^2} = \varrho^2 \quad xx' \frac{b^2}{\mu^2} + zz' \frac{c^2 - b^2}{c^2 - \mu^2} = \varrho^2$$

$$yy' \frac{b^2}{\mu^2 - b^2} - zz' \frac{c^2}{c^2 - \mu^2} = \varrho^2$$

$$6.\quad xx' \frac{c^2}{\nu^2} - yy' \frac{c^2 - b^2}{b^2 - \nu^2} = \varrho^2 \quad xx' \frac{b^2}{\nu^2} + zz' \frac{c^2 - b^2}{c^2 - \nu^2} = \varrho^2$$

$$yy' \frac{b^2}{b^2 - \nu^2} + zz' \frac{c^2}{c^2 - \nu^2} = \varrho^2$$

$$7.\quad xx' \frac{c^2}{\mu^2 - \nu^2} - yy' \frac{(c^2 - b^2)}{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)} = o$$

$$xx' \frac{b^2}{\mu^2 - \nu^2} - zz' \frac{(c^2 - b^2)}{(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)} = o$$

$$yy' \frac{b^2}{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)} - zz' \frac{c^2}{(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)} = o$$

Die Gleichungen 5, 6 und 7 beziehen sich auf die Normalen von (ν), (μ), (ϱ); die Winkel, welche die Normale von (ϱ) mit den Axen x, y, z bildet, nennen wir a, a′, a″; die Winkel der Normale von (μ): α, α', α'' und diejenigen der Normalen von (ν): a, a′, a″. Betrachten wir in 2. die Größen x, y, z und ϱ als Variabele, so erhalten wir durch Differenziation:

$$dx = \frac{\mu\nu}{bc} d\varrho;\quad dy = \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}} d\varrho;\quad dz = \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}} d\varrho$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\varrho^2$$

$$\cos a = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} \qquad \cos a' = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

$$\cos a'' \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

$$8.\quad \cos a = \frac{\mu\nu}{bc};\qquad \cos a' = \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}};$$

$$\cos a'' = \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}$$

Sind aber in 2. x, y, z und μ die Variabelen, so ist

$$dx = \frac{\varrho\nu}{bc} d\mu;\quad dy = \frac{\varrho\mu\sqrt{b^2 - \nu^2}\, d\mu}{b\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}};$$

$$dz = -\frac{\varrho\mu\sqrt{c^2 - \nu^2}\, d\mu}{c\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}}$$

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{\varrho\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}} d\mu$$

$$\cos\alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}; \quad \cos\alpha' = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}};$$

$$\cos\alpha'' = \frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

9. $$\cos\alpha = \frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}.\nu}{bc\sqrt{\mu^2-\nu^2}}; \quad \cos\alpha' = \frac{\mu\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\mu^2-\nu^2}}$$

$$\cos\alpha'' = -\frac{\mu\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\mu^2-\nu^2}}$$

Sind endlich in 2. x, y, z und ν die Variabelen, so ist

$$dx = \frac{\varrho\mu}{bc}d\nu; \quad dy = -\frac{\varrho\sqrt{\mu^2-b^2}.\nu d\nu}{b\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}$$

$$dz = -\frac{\varrho\sqrt{c^2-\mu^2}\,\nu.d\nu}{c\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}$$

$$\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = \frac{\varrho\sqrt{\mu^2-\nu^2}}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}d\nu$$

$$\cos\mathfrak{a} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}; \quad \cos\mathfrak{a}' = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

$$\cos\mathfrak{a}'' = \frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

10. $$\cos\mathfrak{a} = \frac{\mu\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{bc\sqrt{\mu^2-\nu^2}}$$

$$\cos\mathfrak{a}' = -\frac{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\nu^2}.\nu}{c\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\mu^2-\nu^2}}$$

$$\cos\mathfrak{a}'' = -\frac{\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{b^2-\nu^2}.\nu}{c\sqrt{c^2-b^2}\sqrt{\mu^2-\nu^2}}$$

Aus den vorstehenden Formeln können wir schon einige Consequenzen ziehen: Die homofokalen Kegel (μ) und (ν) schneiden die Kugel in sphärischen Kegelschnitten, welche man gleichfalls homofokal nennt. Es sei ABCD ein von vier homofokalen sphärischen Kegelschnitten auf einer Kugel gebildetes Viereck; die Seiten AB und CD sind die Durchschnitte der Kegel (μ) und (μ') und die zwei andern Gegenseiten AC und BD sind die Durchschnitte der Kegel (ν) und (ν') mit der Kugel. Die Betrachtung der Gleichungen 2 oder 8 ergibt nun sogleich den Satz:

Die Projektionen von vier Halbmessern einer Kugel, welche nach den Ecken eines von homofokalen sphärischen Kegelschnitten gebildeten Vierecks gezogen werden, auf irgend einer der drei Coordinatenaxen bilden eine Proportion.

Aus 5. und 6. läßt sich ableiten:

Zieht man die acht Tangenten in den Ecken eines von vier homofokalen sphärischen Kegelschnitten gebildeten Vierecks, so theilen sich dieselben in zwei Gruppen; die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Projektionen einer Gruppe auf irgend einer Coordinatenebene mit einer Axe machen, sind in Proportion.

Es sei O der Coordinatenursprung; man ziehe nach den vier Ecken des Vierecks die Halbmesser OA, OB, OC, OD. OA bildet mit den Axen die Winkel a, a′, a″; OB die Winkel b, b′, b″; OC und OD bilden die Winkel c, c′, c″ und d, d′, d″. Die Gleichungen 8 führen nun, mit Benützung der Formeln $\cos AOC = \cos a \,.\, \cos c + \cos a' \,.\, \cos c' + \cos a'' \,.\, \cos c''$ und $\cos BOD = \cos b \,.\, \cos d + \cos b' \,.\, \cos d' + \cos b'' \,.\, \cos d''$ auf nachstehende

$$\cos AOC = \frac{\mu\nu\mu'\nu'}{b^2c^2} + \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{\mu'^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu'^2}}{b^2(c^2 - b^2)} + \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \mu'^2}\sqrt{c^2 - \nu'^2}}{c^2(c^2 - b^2)}$$

$$\cos BOD = \frac{\mu\nu'\mu'\nu}{b^2c^2} + \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu'^2}\sqrt{\mu'^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b^2(c^2 - b^2)} + \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu'^2}\sqrt{c^2 - \mu'^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c^2(c^2 - b^2)}$$

$$\cos AOC = \cos BOD$$

Wenn man vom Mittelpunkt einer Kugel nach den vier Ecken eines von homofokalen Kegelschnitten auf derselben gebildeten Vierecks Halbmesser zieht, so schließen zwei, nach den Gegenecken gezogene Halbmesser den nämlichen Winkel ein, wie die nach zwei andern Gegenecken gezogenen. In einem solchen Viereck sind also beide Diagonalen gleich.

Ganz analog dem Vorigen läßt sich der Beweis dieses Satzes führen:

In einem von vier homofokalen Kegeln und zwei concentrischen Kugeln gebildeten Parallelepiped sind die Entfernungen von je zwei Gegenecken einander gleich.

Der Hauptkrümmungshalbmesser in einem Punkt einer Kegelfläche zweiten Grades ist durch diese Gleichung gegeben:

$$R = \frac{(z^2 + m^4x^2 + n^4y^2)^{3/2}}{m^2n^2(x^2 + y^2 + z^2)} \quad (\S.\ 19,\ 15)$$

$z^2 = m^2x^2 + n^2y^2$ ist die Gleichung der Kegelfläche. Um auf elliptische Coordinaten überzugehen, dürfen wir hier nur für x, y, z ihre Werthe aus den Gleichungen 2 setzen, nämlich

$$x = \frac{\varrho\mu\nu}{bc} \qquad y = \frac{\varrho\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}} \qquad z = \frac{\varrho\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}$$

Wir erhalten für die Kegelfläche $\dfrac{x^2}{\mu^2} + \dfrac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \dfrac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 0$

$$m^2 = \frac{c^2 - \mu^2}{\mu^2} \qquad n^2 = \frac{c^2 - \mu^2}{\mu^2 - b^2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2 \left(\frac{\mu^2 \nu^2}{b^2 c^2} + \frac{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}{b^2 (c^2 - b^2)} + \frac{(c^2 - \mu^2) \cdot (c^2 - \nu^2)}{c^2 (c^2 - b^2)} \right) = \varrho^2$$

$$z^2 + m^4 x^2 + n^4 y^2 = \frac{\varrho^2 (c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)}{c^2 (c^2 - b^2)} + \frac{\varrho^2 (c^2 - \mu^2)^2 \nu^2}{\mu^2 b^2 c^2}$$
$$+ \frac{\varrho^2 (c^2 - \mu^2)^2 (b^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - b^2) b^2 (c^2 - b^2)}$$
$$= \frac{\varrho^2 (c^2 - \mu^2)}{\mu^2 (\mu^2 - b^2) b^2 c^2 (c^2 - b^2)} \Big((c^2 - \nu^2) \mu^2 (\mu^2 - b^2) b^2$$
$$+ \nu^2 (c^2 - \mu^2)(\mu^2 - b^2)(c^2 - b^2) + (b^2 - \nu^2)(c^2 - \mu^2) \mu^2 c^2 \Big)$$

Der Ausdruck in der Klammer verwandelt sich nach einigen Reduktionen in $(\mu^2 - \nu^2) b^2 c^2 (c^2 - b^2)$, also ist

$$z^2 + m^4 x^2 + n^4 y^2 = \varrho^2 \frac{(c^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{\mu^2 (\mu^2 - b^2)}$$

$$R = \frac{\left\{ \varrho^2 \dfrac{(c^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{\mu^2 (\mu^2 - b^2)} \right\}^{3/2}}{\dfrac{(c^2 - \mu^2)^2}{\mu^2 (\mu^2 - b^2)} \varrho^2} = \varrho \frac{(\mu^2 - \nu^2)^{3/2}}{\mu (c^2 - \mu^2)^{1/2} (\mu^2 - b^2)^{1/2}}$$

Die beiden Hauptkrümmungshalbmesser der im Punkt (μ, ν) der Kugel (ϱ) sich schneidenden homofokalen Kegel (μ) und (ν) sind nun

11. $$R_\mu = \varrho \frac{(\mu^2 - \nu^2)^{3/2}}{\mu (\mu^2 - b^2)^{1/2} (c^2 - \mu^2)^{1/2}} \qquad R_\nu = - \varrho \frac{(\mu^2 - \nu^2)^{3/2}}{\nu (b^2 - \nu^2)^{1/2} (c^2 - \nu^2)^{1/2}}$$

Vier homofokale Kegel (μ) und (μ'), (ν) und (ν') schneiden eine Kugel (ϱ) in einem von vier sphärischen Kegelschnitten gebildeten Viereck ABCD. Wir bezeichnen die Hauptkrümmungshalbmesser der in den Punkten A, B, C, D zusammenstoßenden Kegel der Reihe nach mit R_a, R'_a; R_b, R'_b; R_c, R'_c; R_d, R'_d, so haben wir

$$\frac{R_a}{R'_a} = - \frac{\nu (b^2 - \nu^2)^{1/2} (c^2 - \nu^2)^{1/2}}{\mu (b^2 - \mu^2)^{1/2} (c^2 - \mu^2)^{1/2}} \qquad \frac{R_b}{R'_b} = - \frac{\nu' (b^2 - \nu'^2)^{1/2} (c^2 - \nu'^2)^{1/2}}{\mu (b^2 - \mu^2)^{1/2} (c^2 - \mu^2)^{1/2}}$$

$$\frac{R_c}{R'_c} = - \frac{\nu' (b^2 - \nu'^2)^{1/2} (c^2 - \nu'^2)^{1/2}}{\mu' (b^2 - \mu'^2)^{1/2} (c^2 - \mu'^2)^{1/2}} \qquad \frac{R_d}{R'_d} = - \frac{\nu (b^2 - \nu^2)^{1/2} (c^2 - \nu^2)^{1/2}}{\mu' (b^2 - \mu'^2)^{1/2} (c^2 - \mu'^2)^{1/2}}$$

$$\frac{R_a}{R'_a} : \frac{R_b}{R'_b} = \frac{R_d}{R'_d} : \frac{R_c}{R'_c}$$

12. $$R_a \,.\, R_c \,.\, R'_b \,.\, R'_d = R'_a \,.\, R'_c \,.\, R_b \,.\, R_d \,.$$

In einem von vier homofokalen sphärischen Kegelschnitten auf einer Kugel gebildeten Viereck theilen sich die acht Krümmungshalbmesser der Kegel in den Ecken in zwei Gruppen; das Produkt der Halbmesser der einen Gruppe ist gleich dem Produkt der vier andern.

Die Polare der Ebene $Ax + By + z = 0$ hinsichtlich des Kegels $m^2 x^2 + n^2 y^2 = z$ genügt den Gleichungen:

$$x + \frac{A}{m^2} z = 0 \qquad y + \frac{B}{n^2} z = 0$$

Wenden wir dieß auf den Kegel $\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 0$ an, so erhalten wir für die Gleichungen der Polare

$$x + A \frac{\mu^2}{c^2 - \mu^2} z = 0 \qquad y + B \frac{\mu^2 - b^2}{c^2 - \mu^2} z = 0$$

Durch Elimination von μ ergibt sich

$$13. \quad \frac{c^2 - b^2}{b^2} \frac{1}{A} x - \frac{c^2}{b^2} \frac{1}{B} y + z = 0$$

Dieß ist die Gleichung einer Ebene, welche die Polaren von $Ax + By + z = 0$ hinsichtlich aller homofokalen Kegel enthält. Beide Ebenen stehen auf einander senkrecht, weil

$$\frac{c^2 - b^2}{b^2} \frac{1}{A} A - \frac{c^2}{b^2} \frac{1}{B} . B + 1 = 0$$

ist. Wir haben somit den Satz:

Die Polaren einer Ebene hinsichtlich zweier Systeme von homofokalen Kegeln liegen in einer zu der gegebenen senkrechten Ebene. Beide Ebenen schneiden sich da, wo die erste einen der homofokalen Kegel berührt.

Wir wollen annehmen, daß die Ebene $Ax + By + z = 0$ den homofokalen Kegel

$$\frac{x_0^2}{\mu_0^2} + \frac{y_0^2}{\mu_0^2 - b^2} - \frac{z_0^2}{c^2 - \mu_0^2} = 0$$

berührt, so muß $A = -\frac{c^2 - \mu_0^2}{\mu_0^2} \frac{x_0}{z_0}$ und $B = -\frac{c^2 - \mu_0^2}{\mu_0^2 - b^2} \frac{y_0}{z_0}$ sein; setzt man diese Werthe von A und B in die Gleichungen der Polare

$$x + A \frac{\mu^2}{c^2 - \mu^2} z = 0 \text{ und } y + B \frac{\mu^2 - b^2}{c^2 - \mu^2} z = 0$$

und eliminirt x_0, y_0, z_0, so entsteht

$$14. \quad \frac{\mu_0^2}{\mu^4} x^2 + \frac{\mu_0^2 - b^2}{(\mu^2 - b^2)^2} y^2 - \frac{c^2 - \mu_0^2}{(c^2 - \mu^2)^2} z^2 = 0$$

Gegeben sind zwei homofokale Kegel; die Polaren der Tangentialebenen des einen Kegels in Beziehung auf den andern liegen auf einem dritten, nicht homofokalen Kegel.

Die Gleichung für die geodätischen Linien auf der Fläche $\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1$ haben wir schon in §. 24, 1 entwickelt. Die dortige Ausführung zeigt, daß man auf ein ganz ähnliches Resultat gekommen wäre, wenn man die Fläche $\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 0$ genommen hätte, indem in beiden Fällen die Differenzialien X, Y, Z; dX, dY, dZ dieselben Werthe haben. Somit ist

$$15. \quad \frac{x^2}{\mu^4} + \frac{y^2}{(\mu^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(c^2 - \mu^2)^2} C = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\frac{dx^2}{\mu^2} + \frac{dy^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{dz^2}{c^2 - \mu^2}}$$

die Gleichung der geodätischen Linien auf dem Kegel (μ).

Wir wollen nun dieselbe in elliptische Coordinaten umsetzen, indem wir zunächst aus 2. die Werthe von x, y, z in die linke Seite von der Gleichung einsetzen; wir erhalten dann

$$\frac{x^2}{\mu^4}+\frac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(c^2-\mu^2)^2}=\frac{\varrho^2\nu^2}{b^2c^2\mu^2}+\frac{\varrho^2(b^2-\nu^2)}{b^2(c^2-b^2)(\mu^2-b^2)}$$
$$+\frac{\varrho^2(c^2-\nu^2)}{c^2(c^2-b^2)(c^2-\mu^2)}$$

oder mit Hinweglassung des Index 2

$$=\varrho\frac{\nu(c-b)(\mu-b)(c-\mu)+(b-\nu)c\mu(c-\mu)+(c-\nu)b\mu(\mu-b)}{bc(c-b)\mu(\mu-b)(c-\mu)}$$

Die drei Summanden des Zählers geben entwickelt:

$$\nu c(\mu c-\mu\mu-bc+b\mu)-\nu b(\mu c-\mu\mu-bc+b\mu)$$
$$+c\mu(bc-b\mu-\nu c+\mu\nu)+\mu b(c\mu-bc-\mu\nu+\nu b)$$
$$=bc(c-b)(\mu-\nu)$$

somit ist

$$16.\quad \frac{x^2}{\mu^4}+\frac{y^2}{(\mu^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(c^2-\mu^2)^2}=\frac{\varrho^2(\mu^2-\nu^2)}{\mu^2(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}$$

Die Werthe von dx, dy, dz ergeben sich aus 2. durch Differenziation, indem man μ als konstant ansieht, weil die geodätische Linie auf dem Kegel (μ) liegt:

$$dx=\frac{\mu}{bc}(\nu d\varrho+\varrho d\nu)$$
$$dy=\frac{\sqrt{\mu^2-b^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}}\left(\sqrt{b^2-\nu^2}\,d\varrho-\frac{\varrho\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}}d\nu\right)$$
$$dz=\frac{\sqrt{c^2-\mu^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}}\left(\sqrt{c^2-\nu^2}\,d\varrho-\frac{\varrho\nu}{\sqrt{c^2-\nu^2}}d\nu\right)$$

Hieraus erhalten wir

$$\frac{dx^2}{\mu^2}+\frac{dy^2}{\mu^2-b^2}-\frac{dz^2}{c^2-\mu^2}=\frac{(\nu d\varrho+\varrho d\nu)^2}{b^2c^2}+\frac{\left(\sqrt{b^2-\nu^2}\,d\varrho-\frac{\varrho\nu}{\sqrt{b^2-\nu^2}}d\nu\right)^2}{b^2(c^2-b^2)}$$
$$-\frac{\left(\sqrt{c^2-\nu^2}\,d\varrho-\frac{\varrho\nu}{\sqrt{c^2-\nu^2}}d\nu\right)^2}{c^2(c^2-b^2)}$$

Bei der Entwicklung des rechten Theils der Gleichung findet man, daß die Coefficienten von $d\varrho^2$ und von $d\varrho\,.\,d\nu$ verschwinden; der Coefficient von $d\nu^2$ ist, mit Hinweglassung der Zahl ^{2},

$$\varrho\left(\frac{1}{bc}+\frac{\nu}{b(c-b)(b-\nu)}-\frac{\nu}{c(c-b)(c-\nu)}\right)$$
$$=\varrho\frac{(c-b)(b-\nu)(c-\nu)+c\nu(c-\nu)-b\nu(b-\nu)}{bc(c-b)(b-\nu)(c-\nu)}$$
$$=\varrho\frac{bc(c-b)}{bc(c-b)(b-\nu)(c-\nu)}$$

mithin ist

$$17.\quad \frac{dx^2}{\mu^2}+\frac{dy^2}{\mu^2-b^2}-\frac{dz^2}{c^2-\mu^2}=\frac{\varrho^2d\nu^2}{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}$$

Die Gleichung der geodätischen Linien auf dem Kegel (μ) verwandelt sich nun, wenn der Kürze wegen $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ gesetzt wird, in folgende:

$$C = \frac{\varrho^4 (\mu^2 - \nu^2)\, d\nu^2}{\mu^2 (\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)\, ds^2}$$

Wir nehmen zwei Punkte auf dem Kegel (μ) an, (x, y, z) und ($x + dx$, $y + dy$, $z + dz$); die Verbindungslinie dieser Punkte ist eine Tangente des Kegels; das vom Ursprung auf dieselbe gefällte Perpendikel hat den Werth

$$P = \frac{\sqrt{\{(ydx - xdy)^2 + (xdz - zdx)^2 + (zdy - ydz)^2\}}}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

Mit Benützung der Gleichungen 2 und der Werthe von dx, dy, dz ergibt sich

$$\begin{aligned}
ydx - xdy &= \frac{\varrho\mu\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b^2 c\sqrt{c^2 - b^2}}(\nu d\varrho + \varrho d\nu) \\
&\quad - \frac{\varrho\mu\sqrt{\mu^2 - b^2}\,\nu}{b^2 c\sqrt{c^2 - b^2}}\left(\sqrt{b^2 - \nu^2}\, d\varrho - \frac{\varrho\nu d\nu}{\sqrt{b^2 - \nu^2}}\right) \\
&= \frac{\varrho^2\mu\sqrt{\mu^2 - b^2}\, d\nu}{c\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
zdx - xdz &= \frac{\varrho\mu\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{bc^2\sqrt{c^2 - b^2}}(\nu d\varrho + \varrho d\nu) \\
&\quad - \frac{\varrho\mu\sqrt{c^2 - \mu^2}\,\nu}{bc^2\sqrt{c^2 - b^2}}\left(\sqrt{c^2 - \nu^2}\, d\varrho - \frac{\varrho\nu d\nu}{\sqrt{c^2 - \nu^2}}\right) \\
&= \frac{\varrho^2\mu\sqrt{c^2 - \mu^2}\, d\nu}{b\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
zdy - ydz &= \frac{\varrho\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{bc(c^2 - b^2)}\left(\sqrt{b^2 - \nu^2}\, d\varrho - \frac{\varrho\nu d\nu}{\sqrt{b^2 - \nu^2}}\right) \\
&\quad - \frac{\varrho\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{bc(c^2 - b^2)}\left(\sqrt{c^2 - \nu^2}\, d\varrho - \frac{\varrho\nu d\nu}{\sqrt{c^2 - \nu^2}}\right) \\
&= -\frac{\varrho^2\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\,\nu d\nu}{bc\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}
\end{aligned}$$

Mithin ist $(ydx - xdy)^2 + (xdz - zdx)^2 + (zdy - ydz)^2$, wenn wir den Index 2 weglassen,

$$= \varrho\varrho\, d\nu \left(\frac{\mu(\mu - b)}{c(c - b)(b - \nu)} + \frac{\mu(c - \mu)}{b(c - b)(c - \nu)} + \frac{(\mu - b)(c - \mu)\nu}{bc(b - \nu)(c - \nu)}\right)$$

Durch Addition dieser drei Brüche erhält man im Zähler (siehe die Entwicklung von 16.)

$$bc(c - b)(\mu - \nu)$$

Also ist die Summe der drei Brüche gleich $\frac{\mu - \nu}{(b - \nu)(c - \nu)}$, oder, wenn man den Index 2 wieder setzt und $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$,

$$18.\quad P = \frac{\varrho^2 \sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}} \frac{d\nu}{ds}$$

Hiedurch verwandelt sich die Gleichung der geodätischen Linien auf dem Kegel (μ) in folgende:

$$19.\quad C = \frac{P^2}{\mu^2 (\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}$$

P ist das vom Ursprung auf die Tangente der geodätischen Linie gefällte Perpendikel; die vorstehende Gleichung enthält den Satz:

Bei einer geodätischen Linie auf einem Kegel zweiten Grades ist das von der Spitze auf die Tangente gefällte Perpendikel von konstanter Länge. Alle Tangenten einer solchen Linie berühren also eine concentrische Kugel. Diesen Satz, welcher sich durch Abwickeln des Kegelmantels auf eine Ebene sehr leicht auf geometrischem Wege für jeden beliebigen Kegel beweisen läßt, werden wir später noch Gelegenheit haben, anzuwenden.

Wir nennen den Winkel zwischen der Tangente der geodätischen Linie im Punkt (ϱ, μ, ν) und der Durchschnittslinie der Flächen (ϱ) und (μ) i, so ist offenbar

$$20.\quad \cos i = \frac{P}{\varrho} = \frac{\varrho \sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}} \frac{d\nu}{ds}$$

Dieser Ausdruck läßt sich aber noch auf einem andern Wege ableiten. Wir haben nach den Formeln, die auf die Gleichungen 10 geführt haben, wo x, y, z und ν als die Variabelen betrachtet werden, $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \frac{\varrho \sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}} d\nu = ds'$. Nun ist offenbar ds' ein Element der Durchschnittslinie zwischen der Kugel (ϱ) und dem Kegel (μ), mithin die Cathete des rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse ds, oder das Element der geodätischen Linie, ist. Der Winkel zwischen ds' und ds ist gleich i, also

$$\cos i = \frac{ds'}{ds} = \frac{\varrho \sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}} \frac{d\nu}{ds}$$

Hieraus könnte man direkt die Gleichung 18 finden.

Der Hauptkrümmungshalbmesser von (μ), dessen Krümmungskreis diesen Kegel in der Durchschnittslinie mit (ϱ) tangirt, hat nach 11. den Werth

$$R_\mu = \varrho \frac{(\mu^2 - \nu^2)^{3/2}}{\mu (\mu^2 - b^2)^{1/2} (c^2 - \mu^2)^{1/2}}$$

Nun ist nach dem Satze von Euler $\frac{1}{r} = \frac{\cos^2 i}{R}$, da der andere Hauptkrümmungshalbmesser unendlich ist, also in der Euler'schen Gleichung der Summand $\frac{\sin^2 i}{R'}$ bei Kegeln wegfällt. Mit Hülfe des Werths von R_μ und von 20. erhalten wir für den Krümmungshalbmesser der geodätischen Linie

$$21.\quad r = \frac{R_\mu}{\cos^2 i} = \frac{(\mu^2 - \nu^2)^{1/2} (b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}{\varrho\mu (\mu^2 - b^2)^{1/2} (c^2 - \mu^2)^{1/2}} \frac{ds^2}{d\nu^2}$$

oder nach 18.

$$22.\quad r = \frac{\varrho^3 (\mu^2 - \nu^2)^{3/2}}{P^2 \mu (\mu^2 - b^2)^{1/2} (c^2 - \mu^2)^{1/2}}$$

Es sei ABCD ein von vier Krümmungslinien auf (μ) gebildetes Viereck, d. h. AB und CD sind die Durchschnitte des Kegels mit den Kugeln (ϱ) und (ϱ'); BC und DA sind zwei Erzeugende von (μ) oder die Durchschnitte dieses Kegels mit den homofokalen Kegeln (ν) und (ν'). Durch die vier Ecken ziehen wir vier geodätische Linien auf (μ), welche eine Krümmungslinie berühren, oder solche, deren Tangenten eine Kugel berühren, und bezeichnen die Krümmungshalbmesser derselben in den Ecken A, B, C und D mit r_a, r_b, r_c, r_d, so ist nach 22., wenn wir der Kürze wegen den konstanten Ausdruck $P^2\mu (\mu^2 - b^2)^{1/2} (c^2 - \mu^2)^{1/2} = \frac{1}{\lambda}$ setzen

$$r_a = \lambda \, . \, \varrho^3 (\mu^2 - \nu^2)^{3/2} \qquad r_b = \lambda \, . \, \varrho^3 (\mu^2 - \nu'^2)^{3/2}$$
$$r_c = \lambda \, . \, \varrho'^3 (\mu^2 - \nu'^2)^{3/2} \qquad r_d = \lambda \, . \, \varrho'^3 (\mu^2 - \nu^2)^{3/2}$$

$$23.\quad r_a \, . \, r_c = r_b \, . \, r_d$$

Zieht man auf einem Kegel zweiten Grades durch die Ecken eines Krümmungslinienvierecks vier geodätische Linien, deren Tangenten eine Kugel berühren, so bilden die Krümmungshalbmesser dieser Linien in den Ecken eine Proportion.

Man könnte diesen Satz auch erweitern, insofern als die Gleichung 23 selbst dann noch stattfindet, wenn die Tangenten der geodätischen Linien vier verschiedene Kugeln berühren, deren Halbmesser proportionirt sind.

Wenn in einem Punkt auf (μ) zwei geodätische Linien, deren Tangenten eine Kugel berühren, zusammentreffen, so haben hier in 22. die Größen P, μ, ϱ und ν für beide Linien denselben Werth; also auch r:

Zwei geodätische Linien auf einem Kegel zweiten Grades, deren Tangenten eine Kugel berühren, haben in ihrem Durchschnittspunkt gleiche Krümmungshalbmesser und mithin bilden sie auch mit den Krümmungslinien gleiche Winkel.

Die Gleichung 20 kann auch so geschrieben werden:

$$\varrho \, . \cos i = P$$

In dieser Form entspricht sie der Liouville'schen Gleichung für die centrischen Flächen,

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \alpha^2$$

denn P ist konstant längs einer geodätischen Linie auf dem Kegel.

Aus $\cos i = \frac{P}{\varrho}$ folgt, daß der Winkel i konstant ist, wenn P und ϱ zugleich konstant sind, oder wenn blos das Verhältniß $\frac{P}{\varrho}$ konstant ist, mit andern Worten:

Alle geodätischen Linien auf einem Kegel zweiten Grades, welche eine Krümmungslinie berühren, treffen eine andere Krümmungslinie desselben Systems unter dem gleichen Winkel.

Gegeben sind 1.: Ein Punkt im Raum, durch welchen die Kugel (ϱ) und die beiden homofokalen Kegel (μ) und (ν) gehen, und den wir also durch (ϱ, μ, ν) bezeichnen; 2.: Eine Kugel (α), deren Halbmesser α ist, und ein weiterer homofokaler Kegel (β). Der Punkt (ϱ, μ, ν) und der unendlich nahe Punkt ($\varrho + d\varrho, \mu + d\mu, \nu + d\nu$) sind zwei Gegenecken eines Parallelepipeds, und wir nehmen an, daß die Verbindungslinie dieser Gegenecken eine gemeinsame Tangente von (α) und (β) sei. Indem wir die Diagonale des Parallelepipeds ds nennen, und die drei im Punkt (ϱ, μ, ν) zusammenstoßenden Kanten desselben mit ds', ds'', ds''' bezeichnen, haben wir nach 8., 9. und 10. diese Gleichungen:

$$ds' = d\varrho;\ ds'' = \frac{\varrho\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}}\, d\mu;\ ds''' = \frac{\varrho\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}\, d\nu$$

Hieraus ließe sich $ds = \sqrt{ds'^2 + ds''^2 + ds'''^2}$ direkt bestimmen; allein ein leichterer Weg ist der nachstehende:

Der Berührungskegel von (α), dessen Spitze (ϱ, μ, ν) ist, entspricht der Gleichung

$$24.\quad \cos^2 i' = \frac{\varrho^2 - \alpha^2}{\varrho^2}$$

i' ist der Winkel, zwischen der Erzeugenden des Kegels und dem vom Ursprung nach (ϱ, μ, ν) gezogenen Halbmesser von (ϱ); denn offenbar ist der letztere die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Catheten der Halbmesser von (α) und die genannte Erzeugende $= \sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}$ sind.

$$25.\quad \frac{\cos^2 i''}{\mu^2 - \beta^2} + \frac{\cos^2 i'''}{\nu^2 - \beta^2} = 0$$

Durch die Verbindungslinie des Ursprungs mit (ϱ, μ, ν) lassen sich zwei Ebenen legen, welche den Kegel (β) tangiren; ihre Gleichung ist in 25. dargestellt. i'' ist der Winkel irgend einer durch (ϱ, μ, ν) in einer solchen Ebene gezogenen Geraden mit dem Durchschnitt von (ϱ) und (ν) und i''' der Winkel derselben Geraden mit der Durchschnittslinie von (ϱ) und (μ). Das System der Gleichungen 24 und 25 bezieht sich also auf die durch (ϱ, μ, ν) gelegte gemeinschaftliche Tangente von (α) und (β). Da nun ds eine solche gemeinsame Tangente sein soll, so folgt daraus, daß die Winkel zwischen ds und den Kanten ds', ds'', ds''', beziehungsweise gleich i', i'' und i''' sind. Nun besteht zufolge einer auf geometrischem Wege sehr leicht nachzuweisenden Eigenschaft des Parallelepipeds diese Gleichung:

$$ds = ds' . \cos i' + ds'' . \cos i'' + ds''' . \cos i'''$$

Aus 24. und 25. erhalten wir mit Berücksichtigung der Bedingungsgleichung $\cos^2 i' + \cos^2 i'' + \cos^2 i''' = 1$

$$\cos i' = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}}{\varrho};\ \cos i'' = \frac{\alpha}{\varrho}\,\frac{\sqrt{\mu^2 - \beta^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}};\ \cos i''' = \frac{\alpha}{\varrho}\,\frac{\sqrt{\beta^2 - \nu^2}}{\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}$$

somit

$$26.\quad ds = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}}{\varrho}\, d\varrho + \frac{\alpha\sqrt{\mu^2 - \beta^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}\, d\mu$$
$$\frac{\alpha\sqrt{\beta^2 - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}\, d\nu$$

Setzt man hier $ds = 0$, so erhält man

$$27.\quad 0 = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}}{\varrho}\, d\varrho + \frac{\alpha\sqrt{\mu^2 - \beta^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}}\, d\mu$$
$$+ \frac{\alpha\sqrt{\beta^2 - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}\, d\nu$$

Dieß ist die Differenzialgleichung der Fläche, deren Normalen eine Kugel (α) und einen Kegel zweiten Grades (β) berühren, in elliptischen Coordinaten.

Die Größen b, c; α, β sind die Konstanten, ϱ, μ, ν die Variabelen.

In dem unendlich kleinen Parallelepiped, welches wir soeben betrachteten, ist übrigens auch $ds = \frac{ds'}{\cos i'} = \frac{ds''}{\cos i''} = \frac{ds'''}{\cos i'''}$ oder

$$ds = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}} d\varrho; \quad ds = \frac{\varrho^2 (\mu^2 - \nu^2)}{\alpha \sqrt{\mu^2 - \beta^2} \sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{c^2 - \mu^2}} d\mu;$$

$$ds = \frac{\varrho^2 (\mu^2 - \nu^2)}{\alpha \sqrt{\beta^2 - \nu^2} \sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{c^2 - \nu^2}} d\nu$$

Hieraus ergibt sich, wenn wir der Analogie mit früheren Gleichungen wegen (§. 25) $\sqrt{\mu^2 - \beta^2} \sqrt{\mu^2 - b^2} \sqrt{c^2 - \mu^2} = - \triangle (\mu^2)$ und $\sqrt{\beta^2 - \nu^2} \sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{c^2 - \nu^2} = \triangle (\nu^2)$ setzen,

$$28. \quad \frac{d\mu}{\triangle (\mu^2)} + \frac{d\nu}{\triangle (\nu^2)} = 0$$

Dieß ist eine Differenzialgleichung mit zwei Variabelen, welche in die Klasse der Abelianischen Differenzialgleichungen gehört (s. §. 25, 20—22).

Die Gleichung 26 hat noch eine weitere Bedeutung: sie gibt das Element ds einer beliebigen Kurve im Raum für den Punkt (ϱ, μ, ν) an, welches verlängert die Kugel (α) und den homofokalen Kegel (β) berührt. Im Allgemeinen sind α und β Funktionen von ϱ, μ, ν, welche von der Natur der Kurve abhängen. Für geodätische Linien auf (μ) hat man $d\mu = 0$, $\alpha = \text{const.}$ $\beta = \mu = \text{const.}$

$$29. \quad ds = \frac{\sqrt{\varrho^2 - \alpha^2}}{\varrho} d\varrho + \frac{\alpha \sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{c^2 - \nu^2}} d\nu$$

Die Rektifikation der Krümmungslinien auf (μ) oder der sphärischen Kegelschnitte beruht auf der Integration der Gleichung

$$30. \quad ds = \frac{\alpha \sqrt{\mu^2 - \nu^2}}{\sqrt{b^2 - \nu^2} \sqrt{c^2 - \nu^2}} d\nu$$

α ist der Halbmesser der Kugel, $\mu = \text{const.}$

§. 28. Die homofokalen Flächen zweiten Grades.

Homofokale Paraboloide.

$$1. \quad \frac{y^2}{2p + 4\varrho} + \frac{z^2}{2q + 4\varrho} = x + \varrho \qquad \frac{y^2}{2p + 4\mu} + \frac{z^2}{2q + 4\mu} = x + \mu$$

$$\frac{y^2}{2p + 4\nu} + \frac{z^2}{2q + 4\nu} = x + \nu$$

Diese Gleichungen stellen drei Paraboloide vor, die wir mit (ϱ), (μ) und (ν) bezeichnen. p und q sind Konstante, welche als gegeben angenommen werden. Gleichwie ein Punkt im Raum bestimmt ist, wenn die Halbaxen der drei durch ihn gelegten centrischen homofokalen Flächen gegeben sind, so ist die Lage dieses Punktes auch bestimmt durch die Größen ϱ, μ, und ν, oder durch die Scheiteldistanzen (Abstände der Scheitel vom Ursprung) der drei durch ihn gehenden homofokalen Paraboloide (ϱ), (μ) und (ν). Setzen wir z. B. in der ersten Gleichung $z = o$, so ist $y^2 = (2p + 4\varrho)(x + \varrho)$. Der Abstand des Brennpunkts dieser Parabel vom Ursprung ist $= 2p$, also unabhängig von ϱ; ebenso findet man für den Abstand des Brennpunkts der Parabel $z^2 = (2q + 4\varrho)(x + \varrho)$ vom Ursprung den Werth $2q$. Die drei Paraboloide (ϱ), (μ), (ν) sind demnach homofokal, d. h. ihre Hauptschnitte, welche in den xy und xz Ebenen liegen, haben dieselben Brennpunkte. Da die Gleichungen 1 in der Form übereinstimmen, so nehmen wir die erste derselben und entwickeln sie nach Potenzen von ϱ,

$$\varrho^3 + \left(\frac{p}{2} + \frac{q}{2} + x\right)\varrho^2 + \left\{\frac{pq}{4} + \left(\frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right)x - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4}\right\}\varrho$$
$$+ \frac{pqx}{4} - \frac{qy^2}{8} - \frac{pz^2}{8} = o$$

Die drei Wurzeln dieser Gleichung sind ϱ, μ, ν, und nach der bekannten Theorie der Gleichungen ist

$$2.\quad \varrho + \mu + \nu = -\frac{p}{2} - \frac{q}{2} - x$$

$$3.\quad \varrho\mu + \varrho\nu + \mu\nu = \frac{pq}{4} + \left(\frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right)x - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4}$$

$$4.\quad \varrho\mu\nu = -\frac{pqx}{4} + \frac{qy^2}{8} + \frac{pz^2}{8}$$

Aus 2. erhalten wir

$$x = -\varrho - \mu - \nu - \frac{p}{2} - \frac{q}{2}$$

Die Werthe von y und z können wir durch Elimination aus 1. bekommen. Durch Subtraktion der zweiten und dritten von der ersten unter den Gleichungen 1 ergibt sich

$$\frac{y^2}{(p + 2\varrho)(p + 2\mu)} + \frac{z^2}{(q + 2\varrho)(q + 2\mu)} = -1$$

$$\frac{y^2}{(p + 2\varrho)(p + 2\nu)} + \frac{z^2}{(q + 2\varrho)(q + 2\nu)} = -1$$

Hieraus

$$\frac{y^2}{(p + 2\varrho)(p + 2\mu)(q + 2\nu)} - \frac{y^2}{(p + 2\varrho)(p + 2\nu)(q + 2\mu)}$$
$$= \frac{1}{q + 2\mu} - \frac{1}{q + 2\nu}$$

$$y^2 = \frac{2(\nu - \mu)(p + 2\varrho)(p + 2\mu)(p + 2\nu)}{(p+2\nu)(q+2\mu) - (p+2\mu)(q+2\nu)} = -\frac{1}{p-q}(p+2\varrho)(p+2\mu)(p+2\nu)$$

$$\frac{z^2}{(q + 2\varrho)(q + 2\mu)(p + 2\nu)} - \frac{z^2}{(q + 2\varrho)(q + 2\nu)(p + 2\mu)}$$
$$= \frac{1}{p + 2\mu} - \frac{1}{p + 2\nu}$$

$$z^2 = \frac{2(\nu - \mu)(q + 2\varrho)(q + 2\mu)(q + 2\nu)}{(q+2\nu)(p+2\mu) - (q+2\mu)(p+2\nu)} = \frac{1}{p-q}(q + 2\varrho)(q + 2\mu)(q + 2\nu)$$

Wir haben somit diese Zusammenstellung:

$$5.\quad x = -\varrho - \mu - \nu - \frac{p}{2} - \frac{q}{2}$$

$$6.\quad y^2 = -\frac{1}{p-q}(p+2\varrho)(p+2\mu)(p+2\nu)$$

$$7.\quad z^2 = \frac{1}{p-q}(q+2\varrho)(q+2\mu)(q+2\nu)$$

Hieraus können wir sogleich folgenden Satz ableiten: Wenn in 5. x konstant ist, so ist es auch die Summe $\varrho + \mu + \nu$, oder

Bewegt sich ein Punkt in einer Ebene, welche senkrecht ist zur x Axe, so ist die Summe der Scheitelabstände der drei durch ihn gehenden homofokalen Paraboloide, deren Axe die x Axe ist, konstant.

Für das Perpendikel P, welches vom Scheitel des Paraboloids $\frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = x$ auf die Tangentialebene des Punkts (x, y, z) gefällt wird, hat man den Werth

$$P = \frac{x}{\sqrt{1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}}}$$

Das Perpendikel, welches vom Ursprung auf die Tangentialebene des Paraboloids $\frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = x + \varrho$ im Punkt (x, y, z) gefällt wird, ist gegeben durch die Gleichung

$$P = \frac{x + 2\varrho}{\sqrt{1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}}}$$

Wir wollen nun die Größe unter dem Wurzelzeichen $1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}$ in elliptischen Coordinaten ausdrücken, indem wir nach 1. setzen

$$m = 2p + 4\varrho \qquad n = 2q + 4\varrho$$

und nach 6. und 7. die Werthe von y^2 und z^2 substituiren, wodurch wir erhalten

$$1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2} = 1 - \frac{(p+2\mu)(p+2\nu)}{(p-q)(p+2\varrho)} + \frac{(q+2\mu)(q+2\nu)}{(p-q)(q+2\varrho)}$$

$$= \frac{(p-q)(p+2\varrho)(q+2\varrho) - (p+2\mu)(p+2\nu)(q+2\varrho) + (q+2\mu)(q+2\nu)(p+2\varrho)}{(p-q)(p+2\varrho)(q+2\varrho)}$$

Die drei Summanden im Zähler entwickelt, geben

$$+ p^2q + 2p^2\varrho + 2pq\varrho + 4p\varrho^2 - pq^2 - 2pq\varrho - 2q^2\varrho - 4q\varrho^2$$
$$- (p^2q + 2p^2\varrho + 2pq\nu + 4p\varrho\nu + 2pq\mu + 4p\varrho\mu + 4q\mu\nu + 8\varrho\mu\nu)$$
$$+ pq^2 + 2q^2\varrho + 2pq\nu + 4q\varrho\nu + 2pq\mu + 4q\varrho\mu + 4p\mu\nu + 8\varrho\mu\nu$$

Wenn man diejenigen Größen wegläßt, die sich aufheben, so bleibt

$$4\varrho^2(p-q) - 4\varrho\nu(p-q) - 4\varrho\mu(p-q) + 4\mu\nu(p-q)$$
$$= 4(p-q)(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)$$

$$8.\quad 1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2} = 4\frac{(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)}{(p+2\varrho)(q+2\varrho)}$$

Hiedurch ergibt sich folgender Ausdruck für das vom Ursprung auf die Tangentialebene des Punkts (x, y, z) der Fläche $\frac{y^2}{2p+4\varrho} + \frac{z^2}{2q+4\varrho} = x + \varrho$ gefällte Perpendikel:

$$9. \quad P = \frac{(x + 2\varrho)\sqrt{p + 2\varrho}\sqrt{q + 2\varrho}}{2\sqrt{\varrho - \mu}\sqrt{\varrho - \nu}}$$

Aus den Gleichungen 5, 6 und 7 erhalten wir durch Differenziation, indem wir x, y, z und ϱ als die Variabelen betrachten

$$10. \quad dx = -d\varrho \quad dy = \frac{\sqrt{p + 2\mu}\sqrt{p + 2\nu}}{\sqrt{-(p - q)}} \frac{d\varrho}{\sqrt{p + 2\varrho}}$$

$$dz = \frac{\sqrt{q + 2\mu}\sqrt{q + 2\nu}}{\sqrt{p - q}} \frac{d\varrho}{\sqrt{q + 2\varrho}}$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\varrho^2 \left(1 - \frac{(p + 2\mu)(p + 2\nu)}{(p + 2\varrho)(p - q)} + \frac{(q + 2\mu)(q + 2\nu)}{(q + 2\varrho)(p - q)}\right)$$

also (siehe die Entwicklung der Gleichung 8)

$$ds'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = 4\,d\varrho^2 \frac{(p - q)(\varrho - \mu)(\varrho - \nu)}{(p - q)(p + 2\varrho)(q + 2\varrho)}$$

$$11. \quad ds' = 2\,d\varrho \frac{\sqrt{\varrho - \mu}\sqrt{\varrho - \nu}}{\sqrt{p + 2\varrho}\sqrt{q + 2\varrho}}$$

Wir bezeichnen die Winkel, welche das Element ds' oder die Normale des Paraboloids (ϱ) mit den Axen der x, y, z bildet, durch a, a', a'', so ist

$$\cos a = \frac{dx}{ds'}; \quad \cos a' = \frac{dy}{ds'}; \quad \cos a'' = \frac{dz}{ds'},$$

oder

$$12. \quad \cos a = -\tfrac{1}{2} \frac{\sqrt{p + 2\varrho}\sqrt{q + 2\varrho}}{\sqrt{\varrho - \mu}\sqrt{\varrho - \nu}}$$

$$\cos a' = \tfrac{1}{2} \frac{\sqrt{p + 2\mu}\sqrt{p + 2\nu}\sqrt{q + 2\varrho}}{\sqrt{-(p - q)}\sqrt{\varrho - \mu}\sqrt{\varrho - \nu}}$$

$$\cos a'' = \tfrac{1}{2} \frac{\sqrt{q + 2\mu}\sqrt{q + 2\nu}\sqrt{p + 2\varrho}}{\sqrt{p - q}\sqrt{\varrho - \mu}\sqrt{\varrho - \nu}}$$

Wenn man aber in 5., 6. und 7. die Größen x, y, z und μ als Variabele ansieht, so erhält man auf ganz analoge Weise für den unendlich kleinen Abstand ds'' der beiden Punkte (ϱ, μ, ν) und ($\varrho, \mu + d\mu, \nu$)

$$13. \quad ds'' = 2\,d\mu \frac{\sqrt{-(\varrho - \mu)}\sqrt{\mu - \nu}}{\sqrt{p + 2\mu}\sqrt{q + 2\mu}}$$

ds'' ist die Normale des Paraboloids (μ); die Winkel, welche sie mit den Axen der x, y und z bildet, bezeichnen wir mit $\alpha, \alpha', \alpha''$ und erhalten $\cos\alpha = \frac{dx}{ds''}$, $\cos\alpha' = \frac{dy}{ds''}$, $\cos\alpha'' = \frac{dz}{ds''}$ oder nach 12.

$$14. \quad \cos\alpha = -\tfrac{1}{2} \frac{\sqrt{p + 2\mu}\sqrt{q + 2\mu}}{\sqrt{-(\varrho - \mu)}\sqrt{\mu - \nu}}$$

$$\cos\alpha' = \tfrac{1}{2} \frac{\sqrt{p + 2\varrho}\sqrt{p + 2\nu}\sqrt{q + 2\mu}}{\sqrt{-(p - q)}\sqrt{-(\varrho - \mu)}\sqrt{\mu - \nu}}$$

$$\cos\alpha'' = \tfrac{1}{2} \frac{\sqrt{q + 2\varrho}\sqrt{q + 2\nu}\sqrt{p + 2\mu}}{\sqrt{p - q}\sqrt{-(\varrho - \mu)}\sqrt{\mu - \nu}}$$

Betrachtet man endlich in 5., 6. und 7. x, y, z und ν als die Variabelen, und bezeichnet den unendlich kleinen Abstand der Punkte (ϱ, μ, ν) und $(\varrho, \mu, \nu + d\nu)$ oder die Normale des Paraboloids (ν) mit ds''', so ist

$$15. \quad ds''' = 2d\nu \frac{\sqrt{-(\mu-\nu)}\sqrt{-(\varrho-\nu)}}{\sqrt{p+2\nu}\sqrt{q+2\nu}}$$

ds''' bildet mit den Axen der x, y, z die Winkel a, a', a''; $\cos a = \frac{dx}{ds'''}$ $\cos a' = \frac{dy}{ds'''}$; $\cos a'' = \frac{dz}{ds'''}$, oder nach 12. durch gegenseitige Vertauschung der Buchstaben ϱ und ν

$$16. \quad \cos a = -\tfrac{1}{2} \frac{\sqrt{p+2\nu}\sqrt{q+2\nu}}{\sqrt{-(\mu-\nu)}\sqrt{-(\varrho-\nu)}}$$

$$\cos a' = \tfrac{1}{2} \frac{\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu}\sqrt{q+2\nu}}{\sqrt{-(p-q)}\sqrt{-(\mu-\nu)}\sqrt{-(\varrho-\nu)}}$$

$$\cos a'' = \tfrac{1}{2} \frac{\sqrt{q+2\varrho}\sqrt{q+2\mu}\sqrt{p+2\nu}}{\sqrt{p-q}\sqrt{-(\mu-\nu)}\sqrt{-(\varrho-\nu)}}$$

Aus 12. und 14. erhalten wir

$$17. \quad \cos a \,.\, \cos\alpha + \cos a' \,.\, \cos\alpha' + \cos a'' \,.\, \cos\alpha''$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{q+2\varrho}\sqrt{p+2\mu}\sqrt{q+2\mu}}{\sqrt{\varrho-\mu}\sqrt{-(\varrho-\mu)}\sqrt{\varrho-\nu}\sqrt{\mu-\nu}}$$

$$- \frac{1}{4} \frac{(p+2\nu)\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu}\sqrt{q+2\mu}\sqrt{q+2\varrho}}{(p-q)\sqrt{\varrho-\mu}\sqrt{-(\varrho-\mu)}\sqrt{\varrho-\nu}\sqrt{\mu-\nu}}$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{(q+2\nu)\sqrt{q+2\varrho}\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu}\sqrt{q+2\mu}}{(p-q)\sqrt{\varrho-\mu}\sqrt{-(\varrho-\mu)}\sqrt{\varrho-\nu}\sqrt{\mu-\nu}} = 0$$

Also stehen die beiden Flächen (ϱ) und (μ) auf einander senkrecht. Ganz ebenso läßt sich zeigen, daß die Flächen (ϱ) und (ν) wie auch (μ) und (ν) auf einander senkrecht stehen. Hierauf beruht das Theorem:

Drei homofokale Paraboloide stehen auf einander senkrecht, und mithin schneiden sie sich nach dem Satz von Dupin in ihren Krümmungslinien.

Es sei $ABCD$ ein von vier Krümmungslinien auf dem Paraboloid (ϱ) gebildetes Viereck. Die Abscissen der Ecken bezeichnen wir mit x_a, y_a, z_a; x_b, y_b, z_b; x_c, y_c, z_c; x_d, y_d, z_d; die Punkte A, B, C, D werden der Reihe nach durch die drei in denselben zusammentreffenden homofokalen Paraboloide bezeichnet mit (ϱ, μ, ν); (ϱ, μ, ν'); (ϱ, μ', ν'); (ϱ, μ', ν). Nach 5. ist

$$x_a = -\varrho - \mu - \nu - \frac{p}{2} - \frac{q}{2} \qquad x_b = -\varrho - \mu - \nu' - \frac{p}{2} - \frac{q}{2}$$

$$x_c = -\varrho - \mu' - \nu' - \frac{p}{2} - \frac{q}{2} \qquad x_d = -\varrho - \mu' - \nu - \frac{p}{2} - \frac{q}{2}$$

$$18. \quad x_a + x_c = x_b + x_d$$

In einem von vier Krümmungslinien gebildeten Viereck auf einem Paraboloid ist die Summe der Abstände zweier Gegenecken von irgend einer auf der Hauptaxe senkrechten Ebene gleich der Summe der Abstände der beiden andern Gegenecken. Legt man durch eine Ecke eines solchen Vierecks eine zur Hauptaxe senkrechte Ebene, so ist die Entfernung einer zweiten Ecke des Vierecks von dieser Ebene so groß als die Summe der Entfernungen der beiden andern Ecken.

Aus 6. folgt

$$y_a = \sqrt{-\frac{1}{p-q}\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu}\sqrt{p+2\nu}}$$

$$y_b = \sqrt{-\frac{1}{p-q}\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu}\sqrt{p+2\nu'}}$$

$$y_c = \sqrt{-\frac{1}{p-q}\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu'}\sqrt{p+2\nu'}}$$

$$y_d = \sqrt{-\frac{1}{p-q}\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu'}\sqrt{p+2\nu}}$$

19. $y_a . y_c = y_b . y_d$ ebenso $z_a . z_c = z_b . z_d$

In einem Krümmungslinienviereck auf einem Paraboloid bilden die Entfernungen der Ecken von einer der beiden andern durch den Ursprung gehenden Hauptebenen eine Proportion.

$$\overline{AC}^2 = (x_a - x_c)^2 + (y_a - y_c)^2 + (z_a - z_c)^2$$

oder nach 5., 6., 7.

$$= \{(\mu' - \mu) + (\nu' - \nu)\}^2 - \frac{p+2\varrho}{p-q} 4(\mu\nu + \mu'\nu') - 2 y_a y_c$$

$$+ \frac{q+2\varrho}{p-q} 4(\mu\nu + \mu'\nu') - 2 z_a . z_c$$

$$= \{(\mu' - \mu) + (\nu' - \nu)\}^2 - 4(\mu\nu + \mu'\nu') - 2 y_a y_c - 2 z_a z_c$$

$$= (\mu' - \mu)^2 + (\nu' - \nu)^2 - 2(\mu\nu + \mu'\nu' + \mu'\nu + \mu\nu') - 2 y_a y_c - 2 z_a z_c$$

$$\overline{BD}^2 = (x_b - x_d)^2 + (y_b - y_d)^2 + (z_b - z_d)^2$$

oder nach 5., 6. und 7.

$$= \{(\mu' - \mu) - (\nu' - \nu)\}^2 - \frac{p+2\varrho}{p-q} 4(\mu\nu' + \mu'\nu)$$

$$+ \frac{q+2\varrho}{p-q} 4(\mu\nu' + \mu'\nu) - 2 y_b y_d - 2 z_b z_d$$

$$= (\mu' - \mu)^2 + (\nu' - \nu)^2 - 2(\mu\nu + \mu'\nu' + \mu'\nu + \mu\nu') - 2 y_b y_d - 2 z_b z_d$$

Da nun nach 19. $y_a . y_c = y_b . y_d$ und $z_a . z_c = z_b . z_d$ ist, so haben wir

20. $AC = BD$ oder

In einem Krümmungslinienviereck auf einem Paraboloid ist die Entfernung von zwei Gegenecken gleich der Entfernung der beiden andern.

Aus $dx = - d\varrho$ (Gleichung 10) folgt:

Die Projektion des Stücks der Normalen zwischen zwei unendlich nahen homofokalen Paraboloiden auf der Hauptaxe ist konstant.

Aus 11. läßt sich der Satz ableiten:

Die Abstände der vier Ecken eines Krümmungslinienvierecks auf einem Paraboloid von dem unendlich nahen homofokalen Paraboloid bilden eine Proportion.

Dieses Theorem hat zuerst Bertrand für alle Flächen zweiten Grades angegeben (Recueil des savants étrangers).

Zufolge der Gleichungen 12, 14 oder 16 besteht der Satz:

Die Cosinus der Winkel, welche die Normalen eines Paraboloids in den Ecken eines Krümmungslinienvierecks mit einer Axe bilden, sind proportionirt.

Die beiden Hauptkrümmungshalbmesser im Punkte (x, y, z) des Paraboloids $\frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = x + \varrho$ sind durch diese Gleichung gegeben:

$$\frac{1}{R} = \frac{m + n + 4x + 4\varrho \pm \sqrt{(m + n + 4x + 4\varrho)^2 - 4mn\left(1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}\right)}}{\frac{mn}{4}\left(1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}\right)^{3/2}}$$

Wenn wir nun elliptische Coordinaten anwenden, so haben wir zu setzen

$$m = 2p + 4\varrho; \quad n = 2q + 4\varrho; \quad x = -\varrho - \mu - \nu - \frac{p}{2} - \frac{q}{2};$$

$$1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2} = \frac{4(\varrho - \mu)(\varrho - \nu)}{(p + 2\varrho)(q + 2\varrho)}$$

$$m + n + 4x + 4\varrho = 4(\varrho - \mu + \varrho - \nu)$$

$$4mn\left(1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}\right) = 64(\varrho - \mu)(\varrho - \nu)$$

$$\sqrt{(m + n + 4x + 4\varrho)^2 - 4mn\left(1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}\right)} = 4\Big((\varrho - \mu) - (\varrho - \nu)\Big)$$

Hiedurch wird der Zähler des Bruches von $\frac{1}{R} = 8(\varrho - \mu)$ oder $= 8(\varrho - \nu)$

$$\frac{mn}{4}\left(1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2}\right)^{3/2} = \frac{(\varrho - \mu)^{3/2}(\varrho - \nu)^{3/2}}{(p + 2\varrho)^{1/2}(q + 2\varrho)^{1/2}}$$

Bezeichnen wir die beiden Hauptkrümmungshalbmesser im Punkt (ϱ, μ, ν) mit $R > R'$, so ist demnach

$$21. \quad R = \frac{(\varrho - \mu)^{1/2}(\varrho - \nu)^{3/2}}{(p + 2\varrho)^{1/2}(q + 2\varrho)^{1/2}} \qquad R' = \frac{(\varrho - \mu)^{3/2}(\varrho - \nu)^{1/2}}{(p + 2\varrho)^{1/2}(q + 2\varrho)^{1/2}}$$

Hieraus folgt sogleich:

In einem Krümmungslinienviereck auf einem Paraboloid theilen sich die acht Hauptkrümmungshalbmesser der vier Ecken in zwei Gruppen; die vier Hauptkrümmungshalbmesser in einer Gruppe bilden eine Proportion.

Für die sechs Krümmungshalbmesser von drei in einem Punkt sich schneidenden orthogonalen Paraboloiden gelten die Gleichungen 36 des §. 21.

Aus 12. und 21. erhält man

$$22. \quad R' . \cos a = -\frac{1}{2}(\varrho - \mu) \qquad R . \cos a = -\frac{1}{2}(\varrho - \nu)$$

R ist der Halbmesser des Kreises, welcher die Krümmungslinie $\mu = \text{const.}$ berührt, auf dem Paraboloid (ϱ), während der Kreis von R′ die Krümmungslinie $\nu = \text{const.}$ berührt. Nach 22. haben wir also den Satz:

Bei einer Krümmungslinie auf einem Paraboloid ist die Projektion des Hauptkrümmungshalbmessers, dessen Ebene die Krümmungslinie senkrecht schneidet, auf der Hauptaxe konstant.

Da nun zwei Gegenecken eines Krümmungslinienvierecks von einer zur Hauptaxe senkrechten Ebene zusammen so weit entfernt sind, als die beiden andern Gegenecken, so folgt hieraus weiter:

Die acht Krümmungsmittelpunkte, welche den vier Ecken eines Krümmungslinienvierecks auf einem Paraboloid entsprechen, theilen sich in zwei Gruppen, wovon jede ein Viereck bildet: Die Summe der Entfernungen zweier Gegenecken eines solchen Vierecks von einer zur Hauptaxe senkrechten Ebene ist so groß als die Summe der Entfernungen der beiden andern Gegenecken.

Diese Krümmungsmittelpunkte liegen auf einer besondern Fläche (k); die Normalen des Paraboloids (ϱ), deren Fußpunkte eine Krümmungslinie bilden, tangiren diese Fläche in einer geodätischen Linie. In dem Krümmungslinienviereck ABCD sind z. B. AB und CD zwei Gegenseiten, deren Gleichungen in elliptischen Coordinaten

$$\mu = \text{const.} \quad \mu' = \text{const.}$$

heißen, während die Gleichungen von AC und BD $\nu = \text{const.}$ $\nu' = \text{const.}$ sind. Die Fläche (k) besteht nun aus zwei Mänteln, deren scheinbare Contouren sich überall senkrecht schneiden. Der eine Mantel wird durch die Mittelpunkte der Krümmungskreise R gebildet, der andere durch diejenigen von R'. Die Normalen von (ϱ), deren Fußpunkte auf AB und CD liegen, tangiren den ersten Mantel von (k) in zwei geodätischen Linien, und die Normalen von (ϱ), deren Fußpunkte auf BC und AD liegen, tangiren diesen Mantel in konjugirten geodätischen Linien (s. §. 15); wir können somit für die Fläche (k) das Theorem aufstellen:

In einem von zwei geodätischen und zwei konjugirten geodätischen Linien auf der Fläche der Krümmungsmittelpunkte eines Paraboloids gebildeten Viereck ist die Summe der Entfernungen zweier Gegenecken von einer zur Hauptaxe senkrechten Ebene gleich der Summe der Entfernungen der beiden andern Gegenecken. Hiebei ist aber zu bemerken, daß beide geodätische Linien eine Krümmungslinie der Fläche der Krümmungsmittelpunkte berühren, und daß die zwei konjugirten geodätischen Linien auf derselben Krümmungslinie senkrecht stehen müssen. Oder auch müssen die ersteren Linien durch einen Nabelpunkt gehen, wodurch sich die Richtung der letzteren von selbst bestimmt.

Die Gleichung 16 §. 20 der geodätischen Linien auf dem Paraboloid $\frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = x$ heißt

$$1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2} = C \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\frac{dy^2}{m} + \frac{dz^2}{n}}$$

Wenn wir auf elliptische Coordinaten übergehen, so haben wir nach der Gleichung 8 dieses Paragraphs

$$1 + \frac{4y^2}{m^2} + \frac{4z^2}{n^2} = 4 \frac{(\varrho - \mu)(\varrho - \nu)}{(p + 2\varrho)(q + 2\varrho)}$$

Wir wollen nun annehmen, daß die geodätische Linie auf dem Paraboloid (ϱ) liege, und bezeichnen ein Element derselben mit ds, so ist

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Die Werthe von dy und dz ergeben sich aus 6. und 7., indem man y, z, μ und ν als variabel betrachtet; man erhält also durch Differenziation:

$$dy = \frac{\sqrt{p+2\varrho}}{\sqrt{q-p}\sqrt{p+2\mu}\sqrt{p+2\nu}}\Big((p+2\nu)\,d\mu + (p+2\mu)\,d\nu\Big)$$

$$dz = \frac{\sqrt{q+2\varrho}}{\sqrt{p-q}\sqrt{q+2\mu}\sqrt{q+2\nu}}\Big((q+2\nu)\,d\mu + (q+2\mu)\,d\nu\Big)$$

$$\frac{dy^2}{m} + \frac{dz^2}{n} = \frac{dy^2}{2p+4\varrho} + \frac{dz^2}{2q+4\varrho} = \frac{\{(p+2\nu)\,d\mu + (p+2\mu)\,d\nu\}^2}{2(q-p)(p+2\mu)(p+2\nu)}$$

$$- \frac{\{(q+2\nu)\,d\mu + (q+2\mu)\,d\nu\}^2}{2(p-q)(q+2\mu)(q+2\nu)}$$

$$= - \frac{\mu-\nu}{(p+2\mu)(q+2\mu)}\,d\mu^2 + \frac{\mu-\nu}{(p+2\nu)(q+2\nu)}\,d\nu^2$$

Die Gleichung für geodätische Linien auf (ϱ) in elliptischen Coordinaten ist also:

$$22.\quad C = -4\,\frac{(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)(\mu-\nu)}{(p+2\varrho)(q+2\varrho)ds^2}\left(\frac{d\mu^2}{(p+2\mu)(q+2\mu)} - \frac{d\nu^2}{(p+2\nu)(q+2\nu)}\right)$$

Im Punkt (ϱ, μ, ν) auf (ϱ) schneiden sich die beiden Krümmungslinien ϱ = const., μ = const. und ϱ = const., ν = const. Das Element der ersten Krümmungslinie haben wir mit ds''' bezeichnet, und dafür gefunden (15.)

$ds''' = 2d\nu\,\dfrac{\sqrt{-(\mu-\nu)}\sqrt{-(\varrho-\nu)}}{\sqrt{p+2\nu}\sqrt{q+2\nu}}$. Wenn nun der Winkel zwischen ds und ds''' = i ist, so haben wir $\cos i = \dfrac{ds'''}{ds}$;

$$\cos^2 i = \frac{4d\nu^2}{ds^2}\,\frac{(\varrho-\nu)(\mu-\nu)}{(p+2\nu)(q+2\nu)}$$

Das Element der zweiten Krümmungslinie ist ds'' und nach 13.

$$ds'' = 2d\mu\,\frac{\sqrt{-(\varrho-\mu)}\sqrt{\mu-\nu}}{\sqrt{p+2\mu}\sqrt{q+2\mu}}$$

also

$$\sin i = \frac{ds''}{ds} \text{ oder } \sin^2 i = -\frac{4d\mu^2}{ds^2}\,\frac{(\varrho-\mu)(\mu-\nu)}{(p+2\mu)(q+2\mu)}$$

Hiedurch verwandelt sich die Gleichung 22 in folgende:

$$C = \frac{\varrho-\mu}{(p+2\varrho)(q+2\varrho)}\cos^2 i + \frac{\varrho-\nu}{(p+2\varrho)(q+2\varrho)}\sin^2 i$$

oder

$$23.\quad \mu\cos^2 i + \nu\sin^2 i = \varrho - C(p+2\varrho)(q+2\varrho) = C'$$

Somit haben wir für die geodätischen Linien des Paraboloids eine Relation gefunden, welche der Liouville'schen Gleichung für das Ellipsoid und die Hyperboloide entspricht, $\mu^2\cos^2 i + \nu^2\sin^2 i^2$ = const. Um den Werth von C' zu bestimmen, nehmen wir an, daß die geodätische Linie auf (ϱ), gehörig verlängert, die Krümmungslinie α berühre, d. h. die Durchschnittslinie der homofokalen Paraboloide (ϱ) und $\dfrac{y^2}{2p+4\alpha} + \dfrac{z^2}{2q+4\alpha} = x + \alpha$, so ist im Berührungspunkt $i = o$, $\mu = \alpha$, also verwandelt sich 23. in $\alpha = C'$; somit ist

24. $\mu \cos^2 i + \nu \sin^2 i = \alpha$

die Gleichung für die geodätischen Linien auf dem Paraboloid (ϱ), welche die Krümmungslinie $\varrho = \text{const.}$ $\alpha = \text{const.}$ tangiren.

Alle Consequenzen, welche aus der Gleichung von Liouville folgen, lassen sich aus der Formel 24 ziehen, blos mit der Modification, daß man μ und ν statt μ^2 und ν^2 zu setzen hat. Die Formeln 15, 16, 17, 18 des §. 24 verwandeln sich also in folgende für das Paraboloid:

25. $\cos i = \sqrt{\dfrac{\alpha - \nu}{\mu - \nu}}$ $\sin i = \sqrt{\dfrac{\mu - \alpha}{\mu - \nu}}$ $\operatorname{tg} i = \sqrt{\dfrac{\mu - \alpha}{\alpha - \nu}}$

26. $\dfrac{\sin i}{\sin i'} = \sqrt{\dfrac{\mu - \alpha}{\mu - \beta}}$

27. $\mu + \nu = \alpha + \beta = \text{const.}$

28. $\sin i \,.\, \sin i^1 \,.\, \sin i^2 \,.\, \sin i^3 \ldots = \sin J \,.\, \sin J^1 \,.\, \sin J^2 \,.\, \sin J^3 \ldots$

Die drei letzten Gleichungen enthalten folgende Theoreme für das Paraboloid:

Wenn sich die Spitze eines von zwei geodätischen Linien gebildeten Winkels, welche zwei bestimmte Krümmungslinien ($\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$) berühren, auf einer dritten Krümmungslinie bewegt, so ist das Verhältniß der Sinus der Winkel, welche die geodätischen Linien mit der letzteren Krümmungslinie bilden, konstant.

Die Spitze eines von zwei geodätischen Linien gebildeten rechten Winkels, welche zwei bestimmte Krümmungslinien ($\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$) oder nur eine berühren, bewegt sich auf einer zur Hauptaxe senkrechten Ebene. Denn wenn $\mu + \nu$ konstant ist auf dem Paraboloid (ϱ), so ist es auch die Abscisse $x = -\varrho - \mu - \nu - \dfrac{p}{2} - \dfrac{q}{2}$. Bei dem analogen Satz für das Ellipsoid und die Hyperboloide liegt die Spitze des rechten Winkels auf einer concentrischen Kugel. Da nun das Paraboloid als ein Ellipsoid mit unendlich fernem Mittelpunkt angesehen werden kann, so sieht man leicht die Uebereinstimmung zwischen beiden Sätzen, insofern als die Kugel sich in eine zur Hauptaxe senkrechte Ebene verwandelt.

Wenn man einer Krümmungslinie ein geodätisches Vieleck von n Seiten einbeschreibt, so lassen sich die Winkel, welche jede Seite des Vielecks mit der Krümmungslinie bildet, in zwei Gruppen bringen: Das Produkt der Sinus der n Winkel in der ersten Gruppe ist gleich dem Produkt der Sinus der n Winkel in der andern Gruppe.

Setzt man in 26. $\alpha = \beta$, so ist $\sin i = \sin i'$, oder

Zwei geodätische Linien, welche eine Krümmungslinie eines Paraboloids berühren, bilden in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt mit einer zweiten Krümmungslinie gleiche Winkel mit derselben.

Nach dem Theorem von Euler ist

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \cos^2 i + \frac{1}{R'} \cos^2 i$$

Mit Benützung der Werthe von R und R′ aus 21. erhalten wir

$$29. \quad \frac{1}{r} = \frac{\sqrt{p + 2\varrho}\sqrt{q + 2\varrho}}{(\varrho - \mu)^{3/2}(\varrho - \nu)^{3/2}} \{\varrho - (\mu \cos^2 i + \nu \sin^2 i)\}$$

Dieß ist der Ausdruck für den Krümmungshalbmesser r jeder beliebigen geodätischen Linie auf dem Paraboloid (ϱ), welche im Punkte (ϱ, μ, ν) mit der Krümmungslinie $\mu =$ const. den Winkel i bildet. Bei den geodätischen Linien, welche die Krümmungslinien $\varrho =$ const., $\alpha =$ const. tangiren, ist $\mu \cos^2 i + \nu \sin^2 i = \alpha$, also

$$30. \quad r = \frac{(\varrho - \mu)^{3/2}(\varrho - \nu)^{3/2}}{(p + 2\varrho)^{1/2}(q + 2\varrho)^{1/2}(\varrho - \alpha)}$$

Hieraus findet man ohne Mühe den Beweis für diesen Satz:

Wenn man in einem Krümmungslinienviereck auf einem Paraboloid zwei Eckenpaare durch geodätische Linien verbindet, so bilden die Krümmungshalbmesser der letzteren in den Ecken eine Proportion.

Aus 30. folgt:

$$31. \quad \frac{1}{r^2}(\varrho - \mu)^3(\varrho - \nu)^3 = \text{const.}$$

Dieß ist eine weitere Gleichung für die geodätischen Linien auf dem Paraboloid.

Der Joachimsthal'sche Ausdruck für die Poldistanz eines Elements auf einer Fläche, welches mit einer Krümmungslinie den Winkel i bildet, heißt:

$$\triangle = \frac{\frac{\cos^2 i}{R} + \frac{\sin^2 i}{R'}}{\frac{\cos^2 i}{R^2} + \frac{\sin^2 i}{R'^2}}$$

Wenn man die Werthe von R, R′, cos i und sin i aus 21. und 25. substituirt, so erhält man

$$\triangle = \frac{(\varrho - \mu)^{3/2}(\varrho - \nu)^{3/2}}{(p + 2\varrho)^{1/2}(q + 2\varrho)^{1/2}} \cdot \frac{\varrho - \alpha}{\varrho^2 - 2\varrho\alpha + \alpha(\mu + \nu) - \mu\nu}$$

Da ds die Diagonale in dem unendlich kleinen Parallelogramm ist, dessen Kanten ds″ und ds‴ sind, so läßt sich, mit Hülfe der Gleichungen

$$ds^2 = ds''^2 + ds'''^2 \text{ und } ds = ds''' \cos i + ds'' \sin i$$

das Element der paraboloidischen Linie auf zweierlei Art bestimmen:

$$32. \quad ds^2 = 4 d\mu^2 \frac{(\varrho - \mu)(\nu - \mu)}{(p + 2\mu)(q + 2\mu)} + 4 d\nu^2 \frac{(\varrho - \nu)(\mu - \nu)}{(p + 2\nu)(q + 2\nu)}$$

$$33. \quad ds = -2 d\nu \frac{\sqrt{\varrho - \nu}\sqrt{\alpha - \nu}}{\sqrt{p + 2\nu}\sqrt{q + 2\nu}} - 2 d\mu \frac{\sqrt{\varrho - \mu}\sqrt{\alpha - \mu}}{\sqrt{p + 2\mu}\sqrt{q + 2\mu}}$$

Soll die Gleichung 33 das Element einer beliebigen paraboloidischen Linie vorstellen, so ist allgemein $\alpha = \varphi(\mu, \nu)$; in dem speziellen Fall der geodätischen Linien ist $\alpha =$ const., wodurch sich die Integration von 33. wesentlich vereinfacht.

Endlich bestehen noch die Relationen $ds = \frac{ds'''}{\cos i} = \frac{ds''}{\sin i}$; oder

$$34. \quad \frac{d\mu\sqrt{\varrho-\mu}}{\sqrt{p+2\mu}\sqrt{q+2\mu}\sqrt{\alpha-\mu}} + \frac{d\nu\sqrt{\varrho-\nu}}{\sqrt{p+2\nu}\sqrt{q+2\nu}\sqrt{\alpha-\nu}} = 0$$

§. 29. Die homofokalen Paraboloide. Fortsetzung.

Es ist eine Ebene $Ax + By + z = \gamma$ gegeben, auf welcher sich ein Punkt M bewegt, dessen Coordinaten entweder (x, y, z) heißen mögen, oder durch die Parameter der drei durch A gehenden homofokalen Paraboloide

$$\frac{y^2}{2p+4\varrho} + \frac{z^2}{2q+4\varrho} = x + \varrho \qquad \frac{y^2}{2p+4\mu} + \frac{z^2}{2q+4\mu} = x + \mu$$

$$\frac{y^2}{2p+4\nu} + \frac{z^2}{2q+4\nu} = x + \nu$$

nämlich durch (ϱ, μ, ν) ausgedrückt werden können. Die Normalen von (ϱ), (μ), (ν), bilden in M mit der Ebene die Winkel i, i', i''; wir bezeichnen ferner, wie früher, die Winkel, welche die Normalen von (ϱ), (μ), (ν) mit den x, y, z Axen machen, der Reihe nach mit a, a', a''; $\alpha, \alpha', \alpha''$; $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \mathfrak{a}''$, so ist

$$1. \quad \sin i = \frac{A}{\sqrt{1+A^2+B^2}}\cos a + \frac{B}{\sqrt{1+A^2+B^2}}\cos a' + \frac{1}{\sqrt{1+A^2+B^2}}\cos a''$$

$$2. \quad \sin i' = \frac{A}{\sqrt{1+A^2+B^2}}\cos \alpha + \frac{B}{\sqrt{1+A^2+B^2}}\cos \alpha' + \frac{1}{\sqrt{1+A^2+B^2}}\cos \alpha''$$

$$3. \quad \sin i'' = \frac{A}{\sqrt{1+A^2+B^2}}\cos \mathfrak{a} + \frac{B}{\sqrt{1+A^2+B^2}}\cos \mathfrak{a}' + \frac{1}{\sqrt{1+A^2+B^2}}\cos \mathfrak{a}''$$

Mithin

$$\varrho\sin^2 i + \mu\sin^2 i' + \nu\sin^2 i'' = \frac{1}{1+A^2+B^2}\{(A\cos a + B\cos a' + \cos a'')^2\varrho + (A\cos\alpha + B\cos\alpha' + \cos\alpha'')^2\mu + (A\cos\mathfrak{a} + B\cos\mathfrak{a}' + \cos\mathfrak{a}'')^2\nu\}$$

$$= \frac{1}{1+A^2+B^2}\{(\cos^2 a\,.\,\varrho + \cos^2\alpha\,.\,\mu + \cos^2\mathfrak{a}\,.\,\nu)A^2 + (\cos a\,.\cos a'\,.\,\varrho + \cos\alpha\,.\cos\alpha'\,.\,\mu + \cos\mathfrak{a}\,.\cos\mathfrak{a}'\,.\,\nu)\,2AB + (\cos a\,.\cos a''\,.\,\varrho + \cos\alpha\,.\cos\alpha''\,.\,\mu + \cos\mathfrak{a}\,.\cos\mathfrak{a}''\,.\,\nu)\,2A\}$$

$$+ \frac{1}{1+A^2+B^2}\{(\cos^2 a'\,.\,\varrho + \cos^2\alpha'\,.\,\mu + \cos^2\mathfrak{a}'\,.\,\nu)B^2 + (\cos^2 a''\,.\,\varrho + \cos^2\alpha''\,.\,\mu + \cos^2\mathfrak{a}''\,.\,\nu) + (\cos a'\,.\cos a''\,.\,\varrho + \cos\alpha'\,.\cos\alpha''\,.\,\mu + \cos\mathfrak{a}'\,.\cos\mathfrak{a}''\,.\,\nu)\,2B\}.$$

Wenn wir die Ausdrücke in den Parenthesen entwickeln, mit Hülfe der Werthe von $\cos a$, $\cos a'$, $\cos a''$; $\cos \alpha$, $\cos \alpha'$, $\cos \alpha''$; $\cos \mathfrak{a}$, $\cos \mathfrak{a}'$, $\cos \mathfrak{a}''$ (12, 14. 16. in §. 28), so erhalten wir

$$\cos a^2 . \varrho + \cos \alpha^2 . \mu + \cos \mathfrak{a}^2 . \nu$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{(p+2\varrho)(q+2\varrho)\varrho}{(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)} - \frac{(p+2\mu)(q+2\mu)\mu}{(\varrho-\mu)(\mu-\nu)} + \frac{(p+2\nu)(q+2\nu)\nu}{(\varrho-\nu)(\mu-\nu)}\right)$$
$$= \{(pq + 2p\varrho + 2q\varrho + 4\varrho^2)\mu\varrho - (pq + 2p\varrho + 2q\varrho + 4\varrho^2)\nu\varrho$$
$$- (pq + 2p\mu + 2q\mu + 4\mu^2)\varrho\mu + (pq + 2p\mu + 2q\mu + 4\mu^2)\nu\mu$$
$$+ (pq+2p\nu+2q\nu+4\nu^2)\varrho\nu - (pq+2p\nu+2q\nu+4\nu^2)\mu\nu\} : 4(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)(\mu-\nu)$$
$$= \frac{p}{2} + \frac{q}{2} + \frac{\varrho^3\mu - \varrho^3\nu - \varrho\mu^3 + \mu^3\nu + \varrho\nu^3 - \nu^3\mu}{(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)(\mu-\nu)}$$

Nun ist $(\varrho - \mu)(\varrho - \nu)(\mu - \nu) = \varrho^2\mu - \varrho^2\nu + \varrho\nu^2 - \mu\varrho^2 + \mu^2\nu - \mu\nu^2$, ferner $(\varrho^2\mu - \varrho^2\nu + \varrho\nu^2 - \mu^2\varrho + \mu^2\nu - \mu\nu^2)(\varrho + \mu + \nu) = \varrho^3\mu - \varrho^3\nu - \varrho\mu^3 + \mu^3\nu + \varrho\nu^3 - \nu^3\mu$; somit $\cos^2 a . \varrho + \cos^2 \alpha . \mu + \cos^2 \mathfrak{a} . \nu = \frac{p}{2} + \frac{q}{2} + \varrho + \mu + \nu$; oder nach §. 28, 5.

$$4. \quad \cos^2 a . \varrho + \cos^2 \alpha . \mu + \cos^2 \mathfrak{a} . \nu = - x$$

$$\cos a . \cos a' . \varrho + \cos \alpha . \cos . \alpha' . \mu + \cos \mathfrak{a} . \cos \mathfrak{a}' . \nu$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{(q+2\varrho)\varrho}{(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)} - \frac{(q+2\mu)\mu}{(\varrho-\mu)(\mu-\nu)} + \frac{(q+2\nu)\nu}{(\varrho-\nu)(\mu-\nu)}\right)\frac{\sqrt{p+2\varrho}\sqrt{p+2\mu}\sqrt{p+2\nu}}{\sqrt{q-p}}$$

Der Ausdruck in der Klammer ist, wie man leicht findet, gleich 2; und nach §. 28, 6 ist der Bruch gleich y, also

$$5. \quad \cos a . \cos a' . \varrho + \cos \alpha . \cos \alpha' . \mu + \cos \mathfrak{a} . \cos \mathfrak{a}' . \nu = -\frac{1}{2} y$$

$$\cos a . \cos a'' . \varrho + \cos \alpha . \cos \alpha'' . \mu + \cos \mathfrak{a} . \cos . \mathfrak{a}'' . \nu$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{(p+2\varrho)\varrho}{(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)} - \frac{(p+2\mu)\mu}{(\varrho-\mu)(\mu-\nu)} + \frac{(p+2\nu)\nu}{(\varrho-\nu)(\mu-\nu)}\right)\frac{\sqrt{q+2\varrho}\sqrt{q+2\mu}\sqrt{q+2\nu}}{\sqrt{p-q}}$$

Die Größe in der Klammer ist gleich 2, und der Bruch nach §. 28, 7 gleich z, also

$$6. \quad \cos a . \cos a'' . \varrho + \cos \alpha . \cos \alpha'' . \mu + \cos \mathfrak{a} . \cos \mathfrak{a}'' . \nu = -\frac{1}{2} z$$

$$\cos^2 a' . \varrho + \cos^2 \alpha' . \mu + \cos^2 \mathfrak{a}' . \nu = \frac{1}{4}\left\{\frac{(p+2\mu)(p+2\nu)(q+2\varrho)}{(q-p)(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)}\right.$$
$$\left. - \frac{(p+2\varrho)(p+2\nu)(q+2\mu)}{(q-p)(\varrho-\mu)(\mu-\nu)} + \frac{(p+2\varrho)(p+2\mu)(q+2\nu)}{(q-p)(\varrho-\nu)(\mu-\nu)}\right\}$$
$$= \frac{1}{4(q-p)(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)(\mu-\nu)}\{(p^2q + 2p^2\varrho + 2q\nu p + 4p\nu\varrho + 2\mu pq + 4\mu p\varrho + 4\mu\nu q + 8\mu\nu\varrho)\varrho\mu$$
$$- (p^2q + 2p^2\varrho + 2p\nu q + 4p\nu\varrho + 2\mu pq + 4\mu p\varrho + 4\mu\nu q + 8\mu\nu\varrho)\varrho\nu$$
$$- (p^2q + 2p^2\mu + 2p\nu q + 4p\mu\nu + 2\varrho pq + 4\varrho p\mu + 4\varrho\nu q + 8\varrho\mu\nu)\varrho\mu$$
$$+ (p^2q + 2p^2\mu + 2p\nu q + 4p\mu\nu + 2\varrho pq + 4\varrho p\mu + 4\varrho\nu q + 8\varrho\mu\nu)\mu\nu$$
$$+ (p^2q + 2p^2\nu + 2p\mu q + 4p\mu\nu + 2\varrho pq + 4\varrho p\nu + 4\varrho\mu q + 8\varrho\mu\nu)\varrho\nu$$
$$- (p^2q + 2p^2\nu + 2p\mu q + 4p\mu\nu + 2\varrho pq + 4\varrho p\nu + 4\varrho\mu q + 8\varrho\mu\nu)\mu\nu\}$$

Wenn man in der Klammer diejenigen Summanden wegläßt, welche sich aufheben, so bleibt noch

$$(\mu - \nu)\{p^2\varrho^2 + p^2\mu\nu - p^2\varrho(\mu + \nu) + pq\varrho(\mu + \nu) - pq\varrho^2 - pq\mu\nu\}$$
$$= (\mu - \nu)\,p\,(p - q)\{\varrho^2 - (\mu + \nu)\varrho + \mu\nu\}$$
$$= (\mu - \nu)\,p\,(p - q)(\varrho - \mu)(\varrho - \nu)$$

Also erhalten wir

$$7.\quad \cos^2 a' . \varrho + \cos^2 \alpha' . \mu + \cos^2 a' . \nu = -\frac{1}{4} p$$

Den Werth von $\cos^2 a'' . \varrho + \cos^2 \alpha'' . \mu + \cos^2 a'' . \nu$ brauchen wir nicht besonders zu entwickeln, weil alle hieher gehörigen Formeln aus den vorhergehenden Formeln abgeleitet werden können, wenn die Buchstaben p und q gegenseitig vertauscht werden; also ist

$$8.\quad \cos^2 a'' . \varrho + \cos \alpha'' . \mu + \cos^2 a'' . \nu = -\frac{1}{4} q$$

$$\cos a' . \cos a'' . \varrho + \cos \alpha' . \cos \alpha'' . \mu + \cos a' . \cos a'' . \nu =$$

$$\sqrt{p + 2\varrho}\sqrt{p + 2\mu}\sqrt{p + 2\nu}\sqrt{q + 2\varrho}\sqrt{q + 2\mu}\sqrt{q + 2\nu}.$$

$$\frac{1}{p - q}\left\{-\frac{\varrho}{(\varrho-\mu)(\varrho-\nu)} + \frac{\mu}{(\varrho-\mu)(\mu-\nu)} - \frac{\nu}{(\varrho-\nu)(\mu-\nu)}\right\}$$

Die Größe in der Klammer ist Null, also ist

$$9.\quad \cos a' . \cos a'' . \varrho + \cos \alpha' . \cos \alpha'' . \mu + \cos a' . \cos a'' . \nu = 0$$

Aus den Gleichungen 4 — 9 folgt

$$\varrho . \sin^2 i + \mu . \sin^2 i' + \nu . \sin^2 i''$$

$$= \frac{1}{1 + A^2 + B^2}\left(- A^2 x - A B y - A z - \frac{p}{4} - \frac{q}{4}\right)$$

Da sich nun der Punkt auf der Ebene $Ax + By + z = \gamma$ bewegt, so haben wir

$$10.\quad \varrho . \sin^2 i + \mu . \sin^2 i' + \nu . \sin^2 i'' = -\frac{A\gamma + \frac{p}{4} + \frac{q}{4}}{1 + A^2 + B^2} = \text{const.}$$

In dieser Gleichung ist folgender Satz enthalten:

Wenn sich ein Punkt auf einer Ebene bewegt, so ist die Summe $\varrho \sin^2 i + \mu \sin^2 i + \nu \sin^2 i''$ konstant; ϱ, μ, ν sind die Parameter der drei homofokalen Paraboloide, welche durch den Punkt gehen und i, i′, i″ sind die Winkel zwischen der Ebene und den Normalen dieser Paraboloide.

Das entsprechende Theorem von Chasles für die centrischen Flächen zweiten Grades, welches wir früher angegeben, aber auf andere Weise bewiesen haben, heißt $\varrho^2 \sin^2 i + \mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \text{const.}$ Es kann aber keinem Zweifel unterliegen, daß sich auch dieser Satz ebenso direkt und auf ganz ähnliche Art nachweisen läßt, wie wir es bei den homofokalen Paraboloiden ausgeführt haben.

Die Bestimmung der const. in 10. ist sehr einfach. Unter allen homofokalen Paraboloiden, welche sich durch den Punkt M legen lassen, ist eines, das die Ebene $Ax + By + Cz = \gamma$ berührt; es sei α der entsprechende Parameter, dann ist offenbar $i = 90^0$, $i' = i'' = 0$, also $\alpha = \text{const.}$ oder

$$11.\quad \varrho . \sin^2 i + \mu . \sin^2 i' + \nu . \sin^2 i'' = \alpha$$

Wir betrachten das Paraboloid (α), dessen Parameter α ist, als gegeben, wie auch den Punkt M oder (ϱ, μ, ν), dann sind in 11. die Größen i, i′, i″ die Variabelen, und bezeichnen die Winkel, welche irgend eine durch M gelegte und die Fläche (α) tangirende Ebene L mit den Normalen der Flächen (ϱ), (μ), (ν) in M macht; alle diese Ebenen L hüllen aber einen Kegel K ein, dessen Gleichung sich leicht angeben läßt, wenn diese drei Normalen als Coor=

dinatenaxen angenommen werden, und zwar sollen die Normalen von (ϱ), (μ), (ν) die Axen der ξ, η, ζ sein. Man hat nämlich $\sin^2 i = \frac{\xi^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$; $\sin^2 i' = \frac{\eta^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$; $\sin^2 i'' = \frac{\zeta^2}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$

Durch Vergleichung mit 11.

$$\varrho\xi^2 + \mu\eta^2 + \nu\zeta^2 = \alpha(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

oder

$$(\varrho - \alpha)\,\xi^2 + (\mu - \alpha)\,\eta^2 + (\nu - \alpha)\,\zeta^2 = 0$$

Dieß ist die Gleichung des Ergänzungskegels von demjenigen, welchen die Ebenen L einhüllen; mithin ist die Gleichung des Kegels K selbst

$$12. \quad \frac{\xi^2}{\varrho - \alpha} + \frac{\eta^2}{\mu - \alpha} + \frac{\zeta^2}{\nu - \alpha} = 0$$

Die Gleichung eines zweiten Kegels K′, dessen Spitze ebenfalls der Punkt M oder (ϱ, μ, ν) ist, und welcher das homofokale Paraboloid (β) berührt, ist somit

$$13. \quad \frac{\xi^2}{\varrho - \beta} + \frac{\eta^2}{\mu - \beta} + \frac{\zeta^2}{\nu - \beta} = 0$$

Die beiden Kegel K und K′ sind homofokal. Die Gleichungen ihrer Fokallinien sind:

$$14. \quad \xi = \pm \frac{\sqrt{\varrho - \mu}}{\sqrt{\mu - \nu}}\,\zeta; \quad \eta = 0$$

(siehe §. 27, 4). Hierauf beruht der Satz:

Alle concentrischen Kegel, welche homofokale Paraboloide berühren, sind homofokal.

Die Fokallinien sind die geradlinigen Erzeugenden eines der drei durch die Spitze der Kegel gehenden homofokalen Paraboloide.

Da die zwei Ebenen, welche durch eine Erzeugende eines Kegels und seine beiden Fokallinien gelegt werden, mit der Tangentialebene gleiche Winkel bilden, so schließen wir weiter:

Gegeben sind ein Punkt im Raum und drei durch ihn gehende homofokale Paraboloide. Durch die beiden geradlinigen Erzeugenden eines derselben, und durch eine von dem Punkte aus an ein viertes homofokales Paraboloid gezogene Tangente lege man zwei Ebenen, so bilden dieselben gleiche Winkel mit der durch die Tangente gehenden Tangentialebene des vierten Paraboloids.

Wenn diese Tangente noch ein fünftes Paraboloid berührt, so bilden die genannten Ebenen ebenfalls gleiche Winkel mit der durch die Tangente an das letztere gezogenen Tangentialebene, und da zwei homofokale Paraboloide nie eine gemeinschaftliche Tangentialebene haben können, so müssen beide Tangentialebenen auf einander senkrecht stehen.

Zieht man durch die gemeinschaftliche Tangente zweier homofokalen Paraboloide eine Tangentialebene des einen, so ist sie zugleich Normalebene des andern.

Nicht jede Fläche ist geeignet, für sich allein die Fläche der Krümmungsmittelpunkte einer andern Fläche zu sein. Es ist zu diesem Zwecke nöthig, daß der Grad ihrer algebraischen Gleichung gerade ist, und zweitens, daß die scheinbaren Umrisse ihrer zwei Mäntel rechtwinklig zu einander sind. Alle diejenigen, welche diese beiden Bedingungen nicht erfüllen, können nur einen Mantel der Fläche der Krümmungsmittelpunkte bilden, und müssen mit einer andern Fläche verbunden werden, welche der zweite Mantel ist, und für welche es hinreicht, wenn die scheinbaren Umrisse beider senkrecht zu einander sind, von welchem Punkte aus man sie auch betrachtet (Monge, analyse appliquée à la géometrie, 5^{me} éd. page 136).

Aus unserem Satze geht hervor, daß zwei homofokale Paraboloide die hier angegebenen Bedingungen erfüllen, um die beiden Mäntel einer Fläche, auf welcher die Krümmungsmittelpunkte einer dritten Fläche liegen, vorstellen zu können; einerseits ist ihre Gleichung vom zweiten Grade, also gerade, und andererseits stehen ihre scheinbaren Umrisse senkrecht auf einander, weil jede durch eine gemeinschaftliche Tangente beider gehende Tangentialebene des einen Paraboloids zugleich Normalebene des andern ist. Man schließt hieraus sogleich weiter, daß, wenn sich diese gemeinsame Tangente bewegt, ohne aufzuhören, beide Flächen zugleich zu berühren, der Berührungspunkt auf der einen eine geodätische und auf der andern eine konjugirte geodätische Linie beschreibt, oder:

Alle Tangenten einer geodätischen Linie auf einem Paraboloid berühren ein homofokales Paraboloid; dieses letztere ist dasselbe für solche geodätische Linien, welche die nämliche Krümmungslinie des ersten Paraboloids tangiren (siehe §. 15).

12. und 13. sind die Gleichungen einer gemeinsamen Tangente der Paraboloide (α) und (β), welche durch den Punkt M oder (ϱ, μ, ν) gezogen wird. Man findet somit leicht, daß sich durch einen Punkt an zwei homofokale Paraboloide entweder keine oder vier gemeinsame Tangenten legen lassen, welche als die Durchschnitte von zwei homofokalen Kegeln eine symmetrische Lage hinsichtlich dreier rechtwinkligen Axen haben.

Wir haben oben gesehen bei den centrischen Flächen zweiten Grades, daß die konjugirten Tangenten einer geodätischen Linie in ihren auf einander folgenden Durchschnittspunkten eine Kurve bilden, die auf einer Fläche zweiten Grades liegt. Das Gleiche gilt auch von den Paraboloiden.

Die konjugirten Tangenten aller geodätischen Linien eines Paraboloids, welche eine Krümmungslinie berühren, schneiden sich auf einem zweiten Paraboloid, welches aber nicht homofokal ist. Die konjugirten Tangenten aller konjugirten geodätischen Linien, welche auf einer Krümmungslinie senkrecht stehen, schneiden sich in geodätischen Linien auf einem zweiten homofokalen Paraboloid.

Indem wir uns an die Betrachtungen des §. 15 über geodätische und konjugirte geodätische Linien anschließen, wollen wir annehmen, daß auf einer beliebigen Fläche

14. bis. $f(\mu, \nu, i) = k$

die Gleichung aller geodätischen Linien sei, welche eine Krümmungslinie berühren; die Konstante ändert sich von einem System solcher Linien zum andern. Für diejenigen geodätischen Linien also, welche eine andere Krümmungslinie tangiren, gilt die Relation

$$f(\mu, \nu, i) = k'$$

μ und ν sind gewisse Parameter, die für jede Krümmungslinie einen speciellen Werth haben, und i ist der Winkel zwischen einer solchen Krümmungslinie und der geodätischen Linie. Es seien m m′ m″ . . . Punkte auf mehreren unendlich nahen geodätischen Linien eines Systems; die Tangenten der letzteren in m′, m″ . . . sind den Elementen mm′, m′m″ . . . konjugirt, dann bilden diese Punkte eine konjugirte geodätische Linie auf der Fläche, wie dieß in §. 15 nachgewiesen ist. Nun ist einleuchtend, daß die Gleichung

$$f(\mu, \nu, i) = k$$

auf alle konjugirten geodätischen Linien eines Systems anwendbar ist; μ und ν haben dieselbe Bedeutung, d. h. sie sind die Parameter der Krümmungslinien, nur ist unter i nicht mehr der Winkel zu verstehen, welchen die Tangente der konjugirten geodätischen Linie mit einer Krümmungslinie bildet, sondern der Winkel der konjugirten Tangente dieser Linie, und mit dieser Modifikation lassen sich alle Sätze, welche aus 14. bis für die geodätischen Linien eines Systems abgeleitet werden können, auf die konjugirten geodätischen Linien desselben Systems übertragen. Diese Linien werden, gehörig verlängert, die Krümmungslinie der Fläche, welche von den geodätischen Linien des Systems berührt wird, senkrecht schneiden, weil die konjugirten Tangenten einer Krümmungslinie auf einander senkrecht stehen. Wenn die Fläche einen Nabelpunkt hat, so entspricht demselben ein spezieller Werth der Konstante k, und also auch allen durch ihn gehenden geodätischen Linien, sowie den entsprechenden konjugirten geodätischen Linien.

In dem besondern Fall der Paraboloide hat die Gleichung $f(\mu, \nu, i) = k$ die Form

$$\mu \cos^2 i + \nu \sin^2 i = \text{const.}$$

Wendet man dieselbe auf die konjugirten geodätischen Linien dieser Flächen an, so ist zu berücksichtigen, daß unter i der Winkel zu verstehen ist, welchen die konjugirten Tangenten der genannten Kurven mit der Krümmungslinie $\mu = \text{const.}$ machen.

Es ergeben sich nun unmittelbar folgende Sätze, deren Beweis früheren entsprechenden Theoremen für die centrischen Flächen zweiten Grades analog ist.

Zwei konjugirte geodätische Linien eines Paraboloids, welche auf einer Krümmungslinie der Fläche senkrecht stehen, bilden in ihrem Durchschnittspunkt mit einer zweiten Krümmungslinie gleiche Winkel mit letzterer.

$\mu \cos^2 i + \nu \sin^2 i = \alpha$ und $\mu \cos^2 i' + \nu \sin^2 i' = \beta$ sind die Gleichungen von zwei konjugirten geodätischen Linien des Paraboloids (ϱ), deren konjugirte Tangenten die homofokalen Paraboloide (α) und (β) berühren, oder, was dasselbe ist, welche, gehörig verlängert, auf den Durchschnitten von (ϱ) mit (α) und mit (β), d. h. auf den Krümmungslinien $\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$ von (ϱ) senkrecht stehen. Nun ist

15. $$\frac{\sin i}{\sin i'} = \sqrt{\frac{\mu - \alpha}{\mu - \beta}}$$

16. $$\mu + \nu = \alpha + \beta = \text{const.}$$

17. $$\sin i \,.\, \sin i^1 \,.\, \sin i^2 \,.\, \sin i^3 \,\ldots = \sin J \,.\, \sin J^1 \,.\, \sin J^2 \,.\, \sin J^3 \,\ldots$$

Die Bedeutung dieser Gleichungen ist ähnlich, wie bei früheren derartigen Formeln. Aus 15. folgt:

Wenn sich die Spitze des von den genannten zwei Linien auf einer Krümmungslinie ($\mu = \text{const.}$) bewegt, so ist das Verhältniß der Sinus der Winkel, welche ihre konjugirten Tangenten mit der Krümmungslinie bilden, konstant.

Die Gleichung 16 enthält den Satz:

Wenn sich zwei konjugirte geodätische Linien, welche auf einer oder auf zwei bestimmten Krümmungslinien senkrecht stehen, so bewegen, daß im Durchschnittspunkt ihre konjugirten Tangenten einen rechten Winkel bilden, so beschreibt dieser Punkt eine ebene zur Hauptaxe senkrechte Kurve.

Aus 17. schließt man:

Auf einer Krümmungslinie eines Paraboloids liegen n Punkte, wovon je zwei durch konjugirte geodätische Linien verbunden sind, dann theilen sich die Winkel, welche die konjugirten Tangenten in den Ecken des Vielecks mit den Krümmungslinien bilden, in zwei Gruppen: das Produkt der Sinus der n Winkel in der einen Gruppe ist gleich dem Produkt der Sinus in der andern.

Wir wollen nun die Gleichung der Fläche (λ), deren Krümmungsmittelpunkte auf zwei homofokalen Paraboloiden liegen, zu bestimmen suchen. Zu diesem Zwecke nehmen wir im Raum zwei Punkte an, (ϱ, μ, ν) und ($\varrho + d\varrho$, $\mu + d\mu$, $\nu + d\nu$), welche die Gegenecken eines Parallelepipeds sind. Die Diagonale ds bildet mit drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten die Winkel i′, i″, i‴ und berührt verlängert die beiden homofokalen Paraboloide (α) und (β), so haben wir nach 12. und 13. die Gleichungen

$$\frac{\cos^2 i'}{\varrho - \alpha} + \frac{\cos^2 i''}{\mu - \alpha} + \frac{\cos^2 i'''}{\nu - \alpha} = 0$$

$$\frac{\cos^2 i'}{\varrho - \beta} + \frac{\cos^2 i''}{\mu - \beta} + \frac{\cos^2 i'''}{\nu - \beta} = 0$$

Durch Verbindung derselben mit $\cos^2 i' + \cos^2 i'' + \cos^2 i''' = 1$ erhält man

$$18. \quad \cos^2 i' = \frac{(\varrho - \alpha)(\varrho - \beta)}{(\varrho - \mu)(\varrho - \nu)} \qquad \cos^2 i'' = \frac{(\alpha - \mu)(\mu - \beta)}{(\varrho - \mu)(\mu - \nu)}$$

$$\cos^2 i''' = \frac{(\alpha - \nu)(\beta - \nu)}{(\varrho - \nu)(\mu - \nu)}$$

Da nun die Projektion der drei Kanten ds′, ds″, ds‴ auf die Diagonale ds gleich ds ist, oder $ds = ds' \,.\, \cos i' + ds'' \,.\, \cos i'' + ds''' \,.\, \cos i'''$, so haben wir mit Benützung der Relationen 11, 13, 15 des vorigen Paragraphs

$$19. \quad ds = 2d\varrho \sqrt{\frac{(\varrho - \alpha)(\varrho - \beta)}{(p + 2\varrho)(q + 2\varrho)}} + 2d\mu \sqrt{\frac{(\mu - \alpha)(\mu - \beta)}{(p + 2\mu)(q + 2\mu)}}$$
$$+ 2d\nu \sqrt{\frac{(\nu - \alpha)(\nu - \beta)}{(p + 2\nu)(q + 2\nu)}}$$

Setzt man hier $ds = 0$, so ergibt sich

$$20. \quad 0 = d\varrho \sqrt{\frac{(\varrho - \alpha)(\varrho - \beta)}{(p + 2\varrho)(q + 2\varrho)}} + d\mu \sqrt{\frac{(\mu - \alpha)(\mu - \beta)}{(p + 2\mu)(q + 2\mu)}}$$
$$+ d\nu \sqrt{\frac{(\nu - \alpha)(\nu - \beta)}{(p + 2\nu)(q + 2\nu)}}$$

Die geometrische Bedeutung dieser Gleichung kann man sich auf folgende Art klar machen. A oder (ϱ, μ, ν) ist ein Punkt auf der gemeinschaftlichen

Tangente der Flächen (α) und (β); wir wollen annehmen, der Punkt B liegt auf (β) und AB drehe sich unendlich wenig um B, und komme dadurch in die Lage BC, so liegen A und C auf der Fläche (λ) und zwar ist AC ein Element derjenigen Krümmungslinie von (λ), deren Normalen sich in einer geodätischen Linie auf (β) schneiden. Man nehme auf AB unendlich nahe bei A den Punkt A' oder ($\varrho + d\varrho$, $\mu + d\mu$, $\nu + d\nu$) an, so ist AA' = ds die Diagonale des Parallelepipeds, von welchem soeben die Rede war. Nun drückt die Gleichung 19 im allgemeinen eine Relation zwischen den Variabelen ϱ, μ, ν aus; für den speziellen Fall, wo diese Relation der Fläche (λ) genügen soll, ist sie von der Art, daß beim Uebergang von einem Punkt A zu einem nächstliegenden C der genannten Fläche die Diagonale des Parallelepipeds gleich Null ist, weil die Projektion von AC auf AB gleich Null ist, da diese beiden Linien senkrecht auf einander stehen. Somit ist 20. die Differenzialgleichung der Fläche, deren Krümmungsmittelpunkte auf (α) und (β) liegen. Bezeichnen wir das Integral mit L (ϱ, μ, ν), so ist

21. $L(\varrho, \mu, \nu) = \text{const.}$

die Gleichung der Fläche, deren Krümmungsmittelpunkte auf zwei homofokalen Paraboloiden liegen.

Wir haben aber in dem genannten Parallelepiped $ds = \frac{ds'}{\cos i'} = \frac{ds''}{\cos i''} = \frac{ds'''}{\cos i'''}$, oder

$$22.\quad ds = 2 d\varrho \frac{(\varrho - \mu)(\varrho - \nu)}{\triangle(\varrho)};\quad ds = 2 d\mu \frac{(\varrho - \mu)(\mu - \nu)}{\triangle(\mu)};$$
$$ds = 2 d\nu \frac{(\varrho - \nu)(\mu - \nu)}{\triangle(\nu)}$$

indem wir der Einfachheit wegen setzen

$$\triangle(\varrho) = \sqrt{(p + 2\varrho)(q + 2\varrho)(\varrho - \alpha)(\varrho - \beta)}$$
$$\triangle(\mu) = -\sqrt{(p + 2\mu)(q + 2\mu)(\mu - \alpha)(\mu - \beta)}$$
$$\triangle(\nu) = \sqrt{(p + 2\nu)(q + 2\nu)(\nu - \alpha)(\nu - \beta)}$$

Aus 22. ergibt sich

$$\frac{d\varrho}{\triangle(\varrho)} + \frac{d\mu}{\triangle(\mu)} + \frac{d\nu}{\triangle(\nu)}$$
$$= \frac{ds}{2}\left(\frac{1}{(\varrho - \mu)(\varrho - \nu)} - \frac{1}{(\varrho - \mu)(\mu - \nu)} + \frac{1}{(\varrho - \nu)(\mu - \nu)}\right) = 0$$
$$\frac{\varrho\, d\varrho}{\triangle(\varrho)} + \frac{\mu\, d\mu}{\triangle(\mu)} + \frac{\nu\, d\nu}{\triangle(\nu)}$$
$$= \frac{ds}{2}\left(\frac{\varrho}{(\varrho - \mu)(\varrho - \nu)} - \frac{\mu}{(\varrho - \mu)(\mu - \nu)} + \frac{\nu}{(\varrho - \nu)(\mu - \nu)}\right) = 0$$
$$\frac{\varrho^2\, d\varrho}{\triangle(\varrho)} + \frac{\mu^2\, d\mu}{\triangle(\mu)} + \frac{\nu^2\, d\nu}{\triangle(\nu)}$$
$$= \frac{ds}{2}\left(\frac{\varrho^2}{(\varrho - \mu)(\varrho - \nu)} - \frac{\mu^2}{(\varrho - \mu)(\mu - \nu)} + \frac{\nu^2}{(\varrho - \nu)(\mu - \nu)}\right) = \frac{ds}{2}$$

oder

$$23.\quad \frac{d\varrho}{\triangle(\varrho)} + \frac{d\mu}{\triangle(\mu)} + \frac{d\nu}{\triangle(\nu)} = 0$$

$$24.\quad \frac{\varrho\, d\varrho}{\triangle(\varrho)} + \frac{\mu\, d\mu}{\triangle(\mu)} + \frac{\nu\, d\nu}{\triangle(\nu)} = 0$$

$$25.\quad \frac{\varrho^2\, d\varrho}{\triangle(\varrho)} + \frac{\mu^2\, d\mu}{\triangle(\mu)} + \frac{\nu^2\, d\nu}{\triangle(\nu)} = \frac{ds}{2}$$

Diese Differenzialgleichungen, welche wir hier durch höchst einfache geometrische Betrachtungen gefunden haben, bilden das Seitenstück zu den Abelianischen Differenzialgleichungen, welche die Formeln 20, 21 und 22 des §. 25 darstellen.

Aus 23. und 24., welche Gleichungen als diejenigen der gemeinschaftlichen Tangenten von zwei homofokalen Flächen angesehen werden können, leitet man ab

$$(\varrho - \mu)\frac{d\varrho}{\triangle(\varrho)} = (\mu - \nu)\frac{d\nu}{\triangle(\nu)}$$

$$(\varrho - \mu)\frac{d\mu}{\triangle(\mu)} = -(\varrho - \nu)\frac{d\nu}{\triangle(\nu)}$$

Statt 25. kann man auch schreiben

$$ds = 2\,\frac{\varrho^2 - (\alpha + \beta)\varrho + \alpha\beta}{\triangle(\varrho)}\, d\varrho + 2\,\frac{\mu^2 - (\alpha + \beta)\mu + \alpha\beta}{\triangle(\mu)}\, d\mu + 2\,\frac{\nu^2 - (\alpha + \beta)\nu + \alpha\beta}{\triangle(\nu)}\, d\nu$$

Da nun $\varrho^2 - (\alpha + \beta)\varrho + \alpha\beta = (\varrho - \alpha)(\varrho - \beta)$ und $\triangle(\varrho) = \sqrt{(p + 2\varrho)(q + 2\varrho)(\varrho - \alpha)(\varrho - \beta)}$ ist, so folgt daraus

$$\frac{\varrho^2 - (\alpha + \beta)\varrho + \alpha\beta}{\triangle(\varrho)} = \sqrt{\frac{(\varrho - \alpha)(\varrho - \beta)}{(p + 2\varrho)(q + 2\varrho)}}$$

ebenso lassen sich die beiden andern Brüche transformiren, wodurch man auf 19. kommt.

Die weiteren Betrachtungen über die Gleichung $L(\varrho, \mu, \nu) = \text{const.}$ sind ganz analog denjenigen, welche früher über die Fläche angestellt wurden, deren Krümmungsmittelpunkte auf homofokalen Ellipsoiden und Hyperboloiden liegen.

Die Gleichung 19

$$ds = 2d\varrho\sqrt{\frac{(\varrho - \alpha)(\varrho - \beta)}{(p + 2\varrho)(q + 2\varrho)}} + 2d\mu\sqrt{\frac{(\mu - \alpha)(\mu - \beta)}{(p + 2\mu)(q + 2\mu)}} + 2d\nu\sqrt{\frac{(\nu - \alpha)(\nu - \beta)}{(p + 2\nu)(q + 2\nu)}}$$

hat noch eine weitere und sehr allgemeine Bedeutung. Sie gibt nämlich den Werth für das Bogenelement ds jeder beliebigen Kurve im Raum in elliptischen (oder vielleicht zur Unterscheidung besser „paraboloidischen") Coordinaten an. Durch die Konstanten p und q ist ein System von homofokalen Paraboloiden gegeben. Zur vollkommenen Bestimmung der Lage eines Elements ds einer Kurve gehören: erstens die Coordinaten ϱ, μ, ν des Punkts auf der Kurve und dann die Parameter α und β der homofokalen Paraboloide (α) und (β), welche dieses Element, gehörig verlängert, berührt. Zwischen den genannten Parametern und den Coordinaten ϱ, μ, ν wird eine Relation stattfinden,

26. $\alpha = \varphi(\varrho, \mu, \nu)$ und $\beta = \psi(\varrho, \mu, \nu)$

welche von der Natur der Kurve abhängt; setzen wir diese Werthe für α und β in 19. ein, so erhalten wir eine Gleichung von der Form $ds = F(\varrho, \mu, \nu)$ von deren Integration die Rektifikation der gegebenen Kurve abhängt.

Es bieten sich nun verschiedene spezielle Fälle dar. Die Formel für ds wird schon um Vieles einfacher, wenn die Kurve auf einem der Paraboloide, z. B. auf (ϱ) liegt. Dann erhalten wir zunächst $d\varrho = 0$, und da alle Tangenten der Kurve jedenfalls (ϱ) berühren, so ist auch $\varrho = \alpha$, somit haben wir für alle Kurven auf (ϱ) die Gleichung:

$$27.\quad ds = 2d\mu\sqrt{\frac{(\mu-\varrho)(\mu-\psi)}{(p+2\mu)(q+2\mu)}} + 2d\nu\sqrt{\frac{(\nu-\varrho)(\nu-\psi)}{(p+2\nu)(q+2\nu)}}$$

Will man sich auf die geodätischen Linien beschränken, welche die Eigenschaft haben, daß alle ihre Tangenten eine zweite homofokale Fläche berühren, so ist $\psi(\varrho, \mu, \nu) = \beta = \text{const.}$, also

$$28.\quad ds = 2d\mu\sqrt{\frac{(\mu-\varrho)(\mu-\beta)}{(p+2\mu)(q+2\mu)}} + 2d\nu\sqrt{\frac{(\nu-\varrho)(\nu-\beta)}{(p+2\nu)(q+2\nu)}}$$

Diese Gleichung gilt für die geodätischen Linien auf (ϱ). Ihre weitere Behandlung führt auf elliptische Integrale, was man sogleich sieht, wenn die Zähler und Nenner der Brüche mit

$$\sqrt{(\mu-\varrho)(\mu-\beta)} \text{ und } \sqrt{(\nu-\varrho)(\nu-\beta)}$$

multiplicirt werden; man erhält dadurch

$$29.\quad ds = 2d\mu\frac{\varrho\beta-(\varrho+\beta)\mu+\mu^2}{\sqrt{(p+2\mu)(q+2\mu)(\mu-\varrho)(\mu-\beta)}} + 2d\nu\frac{\varrho\beta-(\varrho+\beta)\nu+\nu^2}{\sqrt{(p+2\nu)(q+2\nu)(\nu-\varrho)(\nu-\beta)}}$$

Wollen wir aber das Bogendifferenzial der Krümmungslinie auf (ϱ) haben, z. B. derjenigen, welche durch die Relationen $\varrho = \text{const.}$ $\mu = \text{const.}$ charakterisirt ist, so ist nicht blos $d\varrho = 0$, sondern auch $d\mu = 0$ und die zwei homofokalen Flächen, welche von den Tangenten der Krümmungslinie berührt werden, sind (ϱ) und (μ) selbst; somit ergibt sich

$$30.\quad ds = 2d\nu\sqrt{\frac{(\nu-\varrho)(\nu-\mu)}{(p+2\nu)(q+2\nu)}} \text{ und } s = \int 2d\nu\sqrt{\frac{(\nu-\varrho)(\nu-\mu)}{(p+2\nu)(q+2\nu)}}$$

für den Bogen der Krümmungslinie auf dem Paraboloid (ϱ).

§. 30. Ueber krummlinige Coordinaten und coordinirte Flächen.

Gegeben sind drei orthogonale Flächen

$$1.\quad f(x, y, z, \varrho) = 0 \qquad f'(x, y, z, \mu) = 0 \qquad f''(x, y, z, \nu) = 0$$

welche wir mit (ϱ), (μ), (ν) bezeichnen, und deren Parameter ϱ, μ und ν sind. Man erhält aus 1.

$$2.\quad x = \varphi(\varrho, \mu, \nu) \qquad y = \varphi'(\varrho, \mu, \nu) \qquad z = \varphi''(\varrho, \mu, \nu)$$

A und B sind zwei unendlich nahe Punkte im Raum, welche durch die Parameter der durch sie gehenden orthogonalen Flächen oder durch krummlinige Coordinaten also bestimmt werden:

$$A = (\varrho, \mu, \nu)$$
$$B = (\varrho + d\varrho, \mu + d\mu, \nu + d\nu)$$

A und B ist die Diagonale eines unendlich kleinen rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen in A zusammenstoßende Kanten mit ds', ds'', ds''' bezeichnet werden, ds' ist die Normale von (ϱ), ds'' und ds''' sind die Normalen von (μ) und (ν); die Winkel zwischen der Diagonale $AB = ds$ und den Kanten ds', ds'', ds''' sind der Reihe nach gleich i, i' und i''.

Man hat zunächst folgende drei Gleichungen, welche auf einfachen geometrischen Betrachtungen beruhen:

$$3.\quad ds^2 = ds'^2 + ds''^2 + ds'''^2$$

$$4.\quad ds = ds' . \cos i + ds'' . \cos i' + ds''' . \cos i''$$

$$5.\quad ds = \frac{ds'}{\cos i} = \frac{ds''}{\cos i''} = \frac{ds'''}{\cos i''}$$

Die Punkte A und B werden durch gewöhnliche rechtwinklige Coordinaten also bestimmt:

$$A = (x, y, z)$$
$$B = (x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$$

Betrachtet man in 2. x, y, z und ϱ als die Variabelen und differenziirt, so erhält man

$$6.\quad dx = \frac{d\varphi}{d\varrho}\, d\varrho \qquad dy = \frac{d\varphi'}{d\varrho}\, d\varrho \qquad dz = \frac{d\varphi''}{d\varrho}\, d\varrho$$

also

$$7.\quad ds' = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = d\varrho \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi'}{d\varrho}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi''}{d\varrho}\right)^2}$$

Die Cosinus der Winkel, welche die Kante ds' mit den Axen macht, sind

$$\frac{dx}{ds'},\ \frac{dy}{ds'},\ \frac{dz}{ds'}$$

und können nach 6. und 7. in krummlinigen Coordinaten ausgedrückt werden.

Sind in 2. x, y, z und μ die Variabelen, so ergibt sich durch Differenziation

$$8.\quad dx = \frac{d\varphi}{d\mu}\, d\mu \qquad dy = \frac{d\varphi'}{d\mu}\, d\mu \qquad dz = \frac{d\varphi''}{d\mu}\, d\mu$$

$$9.\quad ds'' = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = d\mu \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{d\mu}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi'}{d\mu}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi''}{d\mu}\right)^2}$$

Werden in 2. endlich x, y, z und ν als veränderlich angesehen, so erhält man analog:

$$10.\quad dx = \frac{d\varphi}{d\nu}\, d\nu \qquad dy = \frac{d\varphi'}{d\nu}\, d\nu \qquad dz = \frac{d\varphi''}{d\nu}\, d\nu$$

$$11.\quad ds''' = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = d\nu \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{d\nu}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi'}{d\nu}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi''}{d\nu}\right)^2}$$

Die Cosinus der Winkel, welche die Kanten ds'' und ds''' mit den Axen bilden, sind

$$\frac{dx}{ds''},\ \frac{dy}{ds''},\ \frac{dz}{ds''}$$

$$\frac{dx}{ds'''},\ \frac{dy}{ds'''},\ \frac{dz}{ds'''}$$

Man erhält ihre Werthe aus 8., 9., 10. und 11. Die Bedingung dafür, daß die Flächen orthogonal sind, ist in den Gleichungen enthalten:

$$12.\quad \frac{d\varphi}{d\varrho}\frac{d\varphi}{d\mu} + \frac{d\varphi'}{d\varrho}\frac{d\varphi'}{d\mu} + \frac{d\varphi''}{d\varrho}\frac{d\varphi''}{d\mu} = 0$$

$$\frac{d\varphi}{d\varrho}\,\frac{d\varphi}{d\nu} + \frac{d\varphi'}{d\varrho}\,\frac{d\varphi'}{d\nu} + \frac{d\varphi''}{d\varrho}\,\frac{d\varphi''}{d\nu} = 0$$

$$\frac{d\varphi}{d\mu}\,\frac{d\varphi}{d\nu} + \frac{d\varphi'}{d\mu}\,\frac{d\varphi'}{d\nu} + \frac{d\varphi''}{d\mu}\,\frac{d\varphi''}{d\nu} = 0$$

Nach 3., 7., 9. und 11. haben wir

$$13.\quad ds^2 = d\varrho^2\left\{\left(\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi'}{d\varrho}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi'''}{d\varrho}\right)^2\right\}$$
$$+\, d\mu^2\left\{\left(\frac{d\varphi}{d\mu}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi'}{d\mu}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi''}{d\mu}\right)^2\right\}$$
$$+\, d\nu^2\left\{\left(\frac{d\varphi}{d\nu}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi'}{d\nu}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi''}{d\nu}\right)^2\right\}$$

Hiedurch ist das Element ds jeder beliebigen Kurve im Raum durch krummlinige Coordinaten bestimmt. Beschränkt man sich auf die Curven, welche auf einer der orthogonalen Flächen selbst liegen, z. B. auf (ϱ), so ist $d\varrho = 0$ und man hat

$$14.\quad ds^2 = d\mu^2\left\{\left(\frac{d\varphi}{d\mu}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi'}{d\mu}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi''}{d\mu}\right)^2\right\}$$
$$+\, d\nu^2\left\{\left(\frac{d\varphi}{d\nu}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi'}{d\nu}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi''}{d\nu}\right)^2\right\}$$

Die Krümmungslinie einer solchen Fläche, z. B. die Durchschnittslinie von (ϱ) und (μ) endlich entspricht dieser Formel:

$$15.\quad ds = d\nu\left\{\left(\frac{d\varphi}{d\nu}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi'}{d\nu}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi''}{d\nu}\right)^2\right\}$$

Wir können aber auch aus 4. einen allgemeinen Ausdruck für ds ableiten. Zu diesem Zweck sei $Ax + By + z = \gamma$ die Gleichung einer durch den Punkt A gehenden Ebene, welche normal auf der Diagonale AB ist. Man hat also folgende Relationen:

$$16.\quad \cos i = \frac{A}{k}\,\frac{dx}{ds'} + \frac{B}{k}\,\frac{dy}{ds'} + \frac{1}{k}\,\frac{dz}{ds'}$$

$$\cos i' = \frac{A}{k}\,\frac{dx}{ds''} + \frac{B}{k}\,\frac{dy}{ds''} + \frac{1}{k}\,\frac{dz}{ds''}$$

$$\cos i'' = \frac{A}{k}\,\frac{dx}{ds'''} + \frac{B}{k}\,\frac{dy}{ds'''} + \frac{1}{k}\,\frac{dz}{ds'''}$$

$k = \sqrt{1 + A^2 + B^2}$. Hier setzen wir aus 6. — 9. für $\frac{dx}{ds'}$, $\frac{dy}{ds'}$ .... ihre Werthe, dann wird sich durch Verbindung dieser Gleichungen mit $Ax + By + z = \gamma$ eine Relation ergeben

$$17.\quad f(\varrho, \mu, \nu, \cos i, \cos i', \cos i'') = k$$

in welcher k eine Konstante ist, welche blos die Konstanten der Gleichungen 1 und die Größen A, B, γ enthält. Um den Werth von k zu bestimmen, betrachten wir die Ebene $Ax + By + z = \gamma$ als fest, und den Punkt A darauf als beweglich. Unter allen Lagen von A wählen wir diejenige, wo dieser Punkt zugleich Berührungspunkt der Ebene und einer der orthogonalen Flächen des Systems 1 ist, deren Parameter wir mit α bezeichnen; hier ist $i = 0^0$, $i' = i'' = 90^0$ also $\cos i = 1$, $\cos i' = \cos i'' =$ Null. Die Gleichung 17 verwandelt sich in folgende:

$$f(\alpha) = k$$

indem die Parameter μ und ν mit den Größen $\cos i'$, $\cos i''$ verschwinden oder in die Konstanten der Formeln 1 übergehen, wie wir gleich sehen werden. Wir betrachten nun in der Gleichung

18. $f(\varrho, \mu, \nu, \cos i, \cos i', \cos i'') = f(\alpha)$

die Parameter $\varrho, \mu, \nu, \alpha$ als konstant, und i, i′, i″ als die Variabelen, so stellt dieselbe einen Kegel vor, dessen Spitze der Punkt A oder (ϱ, μ, ν) ist, und welcher die zum System 1 gehörende orthogonale Fläche (α) umhüllt. Die Gleichung dieses Kegels läßt sich in gewöhnlichen Coordinaten leicht angeben, wenn man die Normalen der in A sich schneidenden orthogonalen Flächen (ϱ), (μ) und (ν) als Coordinatenaxen annimmt. Ganz ähnlich erhält man die Gleichung eines zweiten Kegels, dessen Spitze ebenfalls in A ist, und welcher eine zweite zum System 1 gehörende orthogonale Fläche (β) umhüllt

19. $f(\varrho, \mu, \nu, \cos i, \cos i', \cos i'') = f(\beta)$

18. und 19. beziehen sich auf den Durchschnitt beider Kegel, oder auf die gemeinschaftliche Tangente der Flächen (α) und (β).

Mit Hülfe der Gleichung

$$\cos^2 i + \cos^2 i' + \cos^2 i'' = 1$$

und der Formeln 18. und 19. können wir die Werthe von $\cos i$, $\cos i'$, $\cos i''$ bestimmen, und erhalten

20. $\cos i = \psi(\varrho, \mu, \nu, \alpha, \beta)$; $\cos i' = \psi'(\varrho, \mu, \nu, \alpha, \beta)$;
$\cos i'' = \psi''(\varrho, \mu, \nu, \alpha\, \beta)$.

Die Gleichungen 4, 7, 9, 11 führen nun auf

$$21.\quad ds = d\varrho \,.\, \psi(\varrho, \mu, \nu, \alpha, \beta) \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi'}{d\varrho}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi''}{d\varrho}\right)^2}$$
$$+ d\mu \,.\, \psi'(\varrho, \mu, \nu, \alpha, \beta) \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{d\mu}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi'}{d\mu}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi''}{d\mu}\right)^2}$$
$$+ d\nu \,.\, \psi''(\varrho, \mu, \nu, \alpha, \beta) \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{d\nu}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi'}{d\nu}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi''}{d\nu}\right)^2}$$

Dieß ist die Gleichung für das Element einer beliebigen Kurve im Raum in krummlinigen Coordinaten. Die Lage desselben ist bestimmt: erstens durch den Punkt (ϱ, μ, ν) der Kurve, zweitens durch die Parameter α und β derjenigen orthogonalen Flächen des Systems 1, welche die Tangente der Kurve oder die Verlängerung des Elements ds berührt; es ist hiebei aber darauf Rücksicht zu nehmen, daß die Berührungskegel 18 und 19 im allgemeinen sich in mehreren Geraden schneiden werden, und daß sich mithin durch den Punkt A eben so viele gemeinschaftliche Tangenten an die Flächen (α) und (β) legen lassen.

Wir können mehrere spezielle Fälle unterscheiden, wo die Gleichung 21 sich vereinfacht. Wenn die Kurve auf einer der Flächen (ϱ), (μ), (ν) liegt, z. B. auf (ϱ), so ist $d\varrho = 0$; also fällt auf der rechten Seite von 21. der erste Summand weg, die Durchschnitts- oder Krümmungslinie von zwei solchen Flächen, z. B. von (ϱ) und (μ) ist charakterisirt durch die Relation

$$22.\quad ds = d\nu \,.\, \psi''(\varrho, \mu, \nu, \alpha, \beta) \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{d\nu}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi'}{d\nu}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi''}{d\nu}\right)^2}$$

Bei der Anwendung der Formel 21 zur Rektifikation von Kurven mit krummlinigen Coordinaten darf nicht übersehen werden, daß die Parameter α und β Funktionen der Coordinaten des Punkts (ϱ, μ, ν) auf der Kurve sind, welche sich nach der Natur der Kurve richten. Wenn diese auf (ϱ) liegt, so ist statt α oder β ϱ zu setzen; in 22., wo ds die gemeinschaftliche Tangente der Flächen (ϱ) und (μ) ist, muß man α und β durch ϱ und μ ersetzen. Wenn die Kurve die Eigenschaft hat, daß ihre Tangenten alle eine der Flächen (α) oder (β) berühren, so sind in den Funktionen ψ die Parameter α oder β als konstant anzunehmen. Man kann auch voraussetzen, daß die Tangenten der geodätischen Linien z. B. auf (ϱ) die orthogonale Fläche (μ) berühren, so hat man in 21. $d\varrho = o$ und in $\psi'(\varrho,\mu,\nu,\alpha,\beta)$, $\psi''(\varrho,\mu,\nu,\alpha,\beta)$ $\alpha = \varrho$, $\beta = \mu$ zu setzen.

Wenn die Flächen (α) und (β) dieser Voraussetzung entsprechen, so schneiden sich die Kegel 18 und 19, welche sie umhüllen, orthogonal; ihre scheinbaren Umrisse, von irgend einem Punkt des Raums aus gesehen, stehen also auf einander senkrecht. Sie sind mithin (§. 15) die beiden Mäntel der Krümmungsmittelpunktenfläche einer neuen Fläche (λ), deren Differenzialgleichung sich aus 21. ergibt, wenn dort $ds = o$ gesetzt wird, und α und β als konstant angesehen werden.

Es ist noch nachzuweisen, wie man von 17. auf die Gleichung 18 kommt. Die Fläche (α) ist bestimmt durch ihren Parameter α und die Konstanten der Gleichungen 1. Ein Umhüllungskegel derselben ist also ebenfalls durch diese Größen bestimmt, in Verbindung mit den Coordinaten ϱ, μ, ν seiner Spitze. 17. kann als die Gleichung eines solchen Umhüllungskegels angesehen werden, woraus hervorgeht, daß der Werth von k blos von den angeführten Größen abhängt.

Aus 5. erhält man in Verbindung mit 7., 9., 11. und 20.:

$$23.\quad \frac{d\varrho\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{d\varrho}\right)^2+\left(\frac{d\varphi'}{d\varrho}\right)^2+\left(\frac{d\varphi''}{d\varrho}\right)^2}}{\psi(\varrho,\mu,\nu,\alpha,\beta)}
= \frac{d\mu\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{d\mu}\right)^2+\left(\frac{d\varphi'}{d\mu}\right)^2+\left(\frac{d\varphi''}{d\mu}\right)^2}}{\psi'(\varrho,\mu,\nu,\alpha,\beta)}
= \frac{d\nu\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{d\nu}\right)^2+\left(\frac{d\varphi'}{d\nu}\right)^2+\left(\frac{d\varphi''}{d\nu}\right)^2}}{\psi''(\varrho,\mu,\nu,\alpha,\beta)}$$

woraus sich je nach der Natur der Flächen (ϱ), (μ), (ν) besondere Differenzialgleichungen zwischen den Variabelen ϱ, μ, ν und den Konstanten α und β ergeben.

$$24.\quad \frac{x^n}{\varrho^n}+\frac{y^n}{\varrho^n-b^n}+\frac{z^n}{\varrho^n-c^n}=1$$

$$\frac{x^n}{\mu^n}+\frac{y^n}{\mu^n-b^n}+\frac{z^n}{c^n-\mu^n}=1$$

$$\frac{x^n}{\nu^n}+\frac{y^n}{b^n-\nu^n}+\frac{z^n}{c^n-\nu^n}=1$$

Die Flächen, welche durch diese Gleichungen repräsentirt sind, nennen wir coordinirt. Sie schneiden die Axen der x, y, z in Punkten, deren Entfernung vom Ursprung gleich ist ϱ, $\sqrt[n]{\varrho^n-b^n}$, $\sqrt[n]{\varrho^n-c^n}$, μ u. s. f. Diese Größen sind die Halbaxen der Flächen. b und c sind konstant. ϱ, μ und ν sind die Parameter der Flächen, welche wir mit (ϱ), (μ) und (ν) bezeichnen. Ein Punkt im Raum ist bestimmt, wenn die Parameter der drei durch ihn gehenden coordinirten Flächen gegeben sind.

$$\varrho = \text{const.} \quad \mu = \text{const.}; \quad \varrho = \text{const.} \quad \nu = \text{const.}$$

sind die Gleichungen der Durchschnitte von (ϱ) und (μ), von (ϱ) und (ν).

Die erste unter den Gleichungen 24, welche, wie man sieht, eine Form haben, können wir auch so schreiben:

$$\varrho^{3n} - \varrho^{2n}(x^n + y^n + z^n + b^n + c^n)$$
$$+ \varrho^n\Big((b^n + c^n)x^n + c^n y^n + b^n z^n + b^n c^n\Big) - b^n c^n x^n = 0$$

Die drei Wurzeln sind ϱ^n, μ^n, ν^n und man hat

25. $\varrho^n + \mu^n + \nu^n = x^n + y^n + z^n + b^n + c^n$

26. $\varrho^n \mu^n + \varrho^n \nu^n + \mu^n \nu^n = (b^n + c^n)x^n + c^n y^n + b^n z^n + b^n c^n$

27. $\varrho \mu \nu = bcx$

Hieraus findet man ferner

28. $b\sqrt[n]{c^n - b^n}\,.\,y = \sqrt[n]{\varrho^n - b^n}\,\sqrt[n]{\mu^n - b^n}\,\sqrt[n]{b^n - \nu^n}$

29. $c\sqrt[n]{c^n - b^n}\,.\,z = \sqrt[n]{\varrho^n - c^n}\,\sqrt[n]{c^n - \mu^n}\,\sqrt[n]{c^n - \nu^n}$

Aus 25. leitet man ab:

Bewegt sich ein Punkt im Raum auf der Fläche $x^n + y^n + z^n = \text{const.}$, so ist die Summe der n^{ten} Potenzen der Parameter von den durch ihn gehenden coordinirten Flächen konstant.

Aus 27. folgt:

Wenn sich ein Punkt in einer Ebene senkrecht zur xAxe bewegt, so ist das Produkt der Parameter von den drei durch ihn gehenden coordinirten Flächen konstant. Bewegt er sich auf dem Durchschnitt der Ebene mit einer der Flächen, so ist das Produkt der beiden andern Parameter konstant. Bewegt er sich endlich auf dem Durchschnitt zweier Flächen, so ist das Verhältniß seines Abstands von einer Hauptebene zu der auf ihr senkrechten Axe der dritten Fläche konstant.

Aehnliche Schlüsse könnte man aus 28. und 29. ziehen.

ABCD ist ein Viereck auf (ϱ), welches durch die Durchschnitte mit den coordinirten Flächen (μ) und (μ'), (ν) und (ν') gebildet wird. Die Abscissen der Ecken bezeichnen wir mit x_a, x_b, x_c, x_d, so ist nach 27.

$$x_a = \frac{\varrho\mu\nu}{bc} \quad x_b = \frac{\varrho\mu\nu'}{bc} \quad x_c = \frac{\varrho\mu'\nu'}{bc} \quad x_d = \frac{\varrho\mu'\nu}{bc}$$

30. $x_a \,.\, x_c = x_b \,.\, x_d$

ebenso

$$y_a \,.\, y_c = y_b \,.\, y_d \qquad z_a \,.\, z_c = z_b \,.\, z_d$$

Die Abstände der Ecken eines von zwei Paaren coordinirter Flächen auf einer fünften Fläche gebildeten Vierecks von einer Hauptebene sind proportionirt.

Nach 25. hat man den Satz:

Die Summe der n^{ten} Potenzen der Abscissen ist bei zwei Gegenecken eines solchen Vierecks so groß als bei den andern Gegenecken.

Durch Elimination ergibt sich aus 24. für die Projektionen des Durchschnitts der Flächen (ϱ) und (μ)

$$31.\quad \frac{x^n}{\frac{\varrho^n \mu^n}{c^n}} + \frac{y^n}{\frac{(\varrho^n - b^n)(\mu^n - b^n)}{c^n - b^n}} = 1$$

$$\frac{x^n}{\frac{\varrho^n \mu^n}{b^n}} + \frac{z^n}{\frac{(\varrho^n - c^n)(c^n - \mu^n)}{c^n - b^n}} = 1$$

$$-\frac{y^n}{\frac{1}{b^n}(\varrho^n - b^n)(\mu^n - b^n)} + \frac{z^n}{\frac{1}{c^n}(\varrho^n - c^n)(c^n - \mu^n)} = 1$$

Aehnliche Gleichungen erhält man für die beiden andern Durchschnittslinien der Flächen; dieselben sind im allgemeinen keine Krümmungslinien, da sich die Flächen nicht orthogonal schneiden. Um sich hievon zu überzeugen, entwickle man die erste unter den Gleichungen 12, welche auch so geschrieben werden kann:

$$\frac{dx}{d\varrho}\frac{dx}{d\mu} + \frac{dy}{d\varrho}\frac{dy}{d\mu} + \frac{dz}{d\varrho}\frac{dz}{d\mu} = 1$$

Der Ausdruck links enthält, wenn man 27., 28. und 29 nach ϱ und μ differenziirt, den gemeinschaftlichen Faktor

$$\nu^2 (c^n - b^n)^{\frac{2}{n}} \{(\varrho^n - b^n)(\varrho^n - c^n)(\mu^n - b^n)(c^n - \mu^n)\}^{\frac{n-2}{n}}$$

$$+ \varrho^{n-2} \mu^{n-2} c^2 (b^n - \nu^n)^{\frac{2}{n}} - \varrho^{n-2} \mu^{n-2} b^2 (c^n - \nu^n)^{\frac{2}{n}}$$

welcher gleich Null sein muß; für einen beliebigen Werth von n findet dieß nun nicht statt, für $n = 2$ aber reducirt sich der Faktor auf

$$\nu^2 (c^2 - b^2) + (b^2 - \nu^2) c^2 - (c^2 - \nu^2) b^2 = 0$$

Wenn sich der Punkt (ϱ, μ, ν) mehr und mehr dem Mittelpunkt nähert, so werden die Halbaxen $\sqrt[n]{\varrho^n - c^n}$, $\sqrt[n]{\mu^n - b^n}$ und ν gleich Null, also $\varrho = c$, $\mu = b$; dadurch verwandeln sich die Flächen (ϱ), (μ), (ν) in folgende Linien:

$$32.\quad \frac{x^n}{c^n} + \frac{y^n}{c^n - b^n} = 1 \qquad \frac{x^n}{b^n} - \frac{z^n}{c^n - b^n} = 1$$

$$\frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = -1$$

Für $n = 2$ erhält man die Fokalkurven.

Ein zweites System von coordinirten Flächen enthalten die Gleichungen:

$$33.\quad x^n + y^n + z^n = \varrho^n; \quad \frac{x^n}{\mu^n} + \frac{y^n}{\mu^n - c^n} - \frac{z^n}{c^n - \mu^n} = 0$$

$$\frac{x^n}{\nu^n} - \frac{y^n}{b^n - \nu^n} - \frac{z^n}{c^n - \nu^n} = 0$$

Hieraus findet man

$$bcx = \varrho\mu\nu; \quad b\sqrt[n]{c^n - b^n}\,.\,y = \varrho\sqrt[n]{\mu^n - b^n}\sqrt[n]{b^n - \nu^n}$$

$$c\sqrt[n]{c^n - b^n}\,.\,z = \varrho\sqrt[n]{c^n - \mu^n}\sqrt[n]{c^n - \nu^n}$$

Es knüpfen sich hier ähnliche Betrachtungen an, wie bei den Formeln 24.

Ein drittes System von coordinirten Flächen endlich wird dargestellt durch

$$34.\quad \frac{y^{2n}}{2p + 4\varrho^n} + \frac{z^{2n}}{2q + 4\varrho^n} = x^n + \varrho^n$$

$$\frac{y^{2n}}{2p + 4\mu^n} + \frac{z^{2n}}{2q + 4\mu^n} = x^n + \mu^n$$
$$\frac{y^{2n}}{2p + 4\nu^n} + \frac{z^{2n}}{2q + 4\nu^n} = x^n + \nu^n$$

n ist eine ungerade Zahl. Die Entfernungen des Ursprungs vom Durchschnittspunkt der Flächen mit der Axe der x oder Hauptaxe sind ϱ, μ und ν; diese Größen sind die Parameter der Flächen, die wir ebenfalls mit (ϱ), (μ), (ν) bezeichnen. Durch Entwicklung nach Potenzen von ϱ erhält man

$$\varrho^{3n} + \left(\frac{p}{2} + \frac{q}{2} + x^n\right)\varrho^{2n} + \left\{\frac{pq}{4} + \left(\frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right)x^n - \frac{y^{2n}}{4} - \frac{z^{2n}}{4}\right\}\varrho^n$$
$$+ \frac{pqx^n}{4} - \frac{q}{8}y^{2n} - \frac{p}{8}z^{2n} = 0$$

Hieraus, indem die Wurzeln wieder ϱ^n, μ^n, ν^n genannt werden

35. $\varrho^n + \mu^n + \nu^n = -\frac{p}{2} - \frac{q}{2} - x^n$

36. $\varrho^n\mu^n + \varrho^n\nu^n + \mu^n\nu^n = \frac{pq}{4} + \left(\frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right)x^n - \frac{y^{2n}}{4} - \frac{z^{2n}}{4}$

37. $\varrho\mu\nu = \frac{pq}{4}x^n - \frac{q}{8}y^{2n} - \frac{p}{8}z^{2n}$

und ferner

38. $y^{2n} = \frac{1}{q - p}(p + 2\varrho^n)(p + 2\mu^n)(p + 2\nu^n)$

39. $z^{2n} = \frac{1}{p - q}(q + 2\varrho^n)(q + 2\mu^n)(q + 2\nu^n)$

Bewegt sich ein Punkt in einer Ebene senkrecht zur Hauptaxe, so ist die Summe der n^{ten} Potenzen der Parameter von den durch ihn bestimmten coordinirten Flächen konstant. (35). Bewegt er sich auf dem Durchschnitt zweier Flächen, so ist die Summe der n^{ten} Potenzen des Parameters der dritten Fläche und seiner Entfernung von der Hauptebene konstant. (35).

In dem Viereck ABCD, welches auf (ϱ) die Durchschnitte mit den coordinirten Flächen (μ) und (μ'), (ν) und (ν') bilden, ist nach 35.

$$x_a^n + x_c^n = x_b^n + x_d^n$$

In einem Viereck, welches auf einer Fläche von den Durchschnitten mit zwei Paaren coordinirter Flächen gebildet wird, sind die Summen der n^{ten} Potenzen der Abstände je zweier Gegenecken von der Hauptebene einander gleich.

Nach 38. und 39. ist

40. $y_a \cdot y_c = y_b \cdot y_d \qquad z_a \cdot z_c = z_b \cdot z_d$

Die Entfernungen der Gegenecken eines solchen Vierecks von einer der zwei andern Coordinatenebenen bilden eine Proportion.

Anhang.

Sätze über den Kegel zweiten Grades.

Cyclische Ebenen sind zwei durch die Spitze des Kegels parallel mit seinen Kreisschnitten gelegte Ebenen. Zieht man durch die Spitze des Kegels Gerade, senkrecht auf die Berührungsebenen, so bilden diese die Erzeugenden des Ergänzungskegels. Wenn man einen Kegel durch eine beliebige Ebene schneidet und den Mittelpunkt der Durchschnittskurve mit der Spitze verbindet, so sind diese Verbindungslinie und zwei durch die Spitze mit irgend zwei konjugirten Durchmessern des Kegelschnitts parallel gezogene Gerade drei konjugirte Durchmesser des Kegels. Zwei konjugirte Durchmesser, welche in einer cyclischen Ebene liegen, sind also immer rechtwinklig.

1. Jede auf einer Fokallinie senkrechte Ebene schneidet den Kegel in einem Kegelschnitt, dessen Brennpunkt der Durchschnitt ist. Zwei konjugirte Ebenen, welche durch eine Fokallinie gehen, sind also immer senkrecht auf einander. (S. 89.)

2. Die Fokallinien stehen senkrecht auf den Kreisschnitten des Ergänzungskegels. (S. 89.)

3. Jede Berührungsebene eines Kegels schneidet die cyclischen Ebenen in zwei Geraden, welche mit der Berührungsebene gleiche Winkel machen. Da die Erzeugenden (Tangentialebenen) des Ergänzungskegels auf den Tangentialebenen (Erzeugenden) des gegebenen Kegels senkrecht stehen, so schließt man hieraus:

4. Die durch die Fokallinien und eine Erzeugende gelegten Ebenen bilden gleiche Winkel mit der Ebene, welche den Kegel längs der Erzeugenden berührt.

5. Jede durch zwei Erzeugende gehende Ebene schneidet die cyclischen Ebenen in zwei Geraden, welche mit diesen Erzeugenden gleiche Winkel machen. Hieraus findet man mit Hülfe des Ergänzungskegels:

6. Die Ebenen, welche durch zwei Fokallinien und den Durchschnitt von zwei Tangentialebenen gehen, machen mit letzteren gleiche Winkel.

7. Die Summe oder Differenz der Winkel, welche eine Tangentialebene (Erzeugende) mit den beiden cyclischen Ebenen (Fokallinien) macht, ist konstant.

8. Jede Tangentialebene schneidet die cyclischen Ebenen nach zwei Geraden, so daß das Produkt der Tangenten der halben Winkel, die sie mit dem Durchschnitt dieser cyclischen Ebenen machen, konstant ist. Hieraus folgt durch Uebertragung auf den Ergänzungskegel:

9. Die durch eine Erzeugende und die Fokallinien gelegten Ebenen haben die Eigenschaft, daß das Produkt der Tangenten der halben Winkel, welche sie mit der Ebene der Fokallinien machen, konstant ist.

10. Das Produkt der Sinus der Winkel, welche eine Erzeugende (Tangentialebene) mit den cyclischen Ebenen (Fokallinien) macht, ist konstant.

Der Beweis vorstehender Sätze wird erleichtert durch folgende Betrachtungen:

Zwei Kreisschnitte eines Kegels, welche nicht parallel sind (antiparallele Kreise), liegen auf einer Kugel. Zieht man durch die Spitze 0 des Kegels eine Erzeugende, welche die Kreise in M und m schneidet, so ist das Produkt $OM \, . \, Om$ konstant. Für eine unendlich nahe Erzeugende ist also $OM' \, . \, Om' = OM \, . \, Om$, mithin sind die Dreiecke OMM' und $Om'm$ ähnlich, und folglich die Winkel OMM' und $Om'm$ gleich (Seite 90).

11. Die Fußpunkte der von einem Punkt der Fokale auf die Tangentialebenen gefällten Perpendikel bilden einen Kreis, dessen Ebene senkrecht auf der zweiten Fokallinie ist. Die orthogonalen Projektionen der Fokallinien auf den Tangentialebenen bilden also einen Kegel zweiten Grades, dessen cyclische Ebenen senkrecht auf den Fokallinien des ersteren sind.

12. Die Perpendikel, welche von einem Punkt des Raums auf die Tangentialebenen eines Kegels gefällt werden, sind die Erzeugenden eines Kegels, der dem Ergänzungskegel kongruent ist. Die Fokallinien und cyclischen Ebenen beider sind parallel.

13. Ein rechter Winkel bewegt sich so, daß der eine Schenkel eine Erzeugende des Kegels ist, und der andere in einer cyclischen Ebene liegt. Die Ebene dieses Winkels umhüllt einen Kegel zweiten Grades, dessen Fokallinien senkrecht auf den cyclischen Ebenen des ersteren sind.

14. Wenn man um zwei feste, sich schneidende Gerade zwei zu einander rechtwinklige Ebenen sich drehen läßt, so beschreibt ihre Schnittlinie einen Kegel vom zweiten Grade, dessen cyclische Ebenen senkrecht auf den festen Geraden sind. Die Entfernungen irgend eines Punkts auf der Oberfläche des Kegels von zwei neuen Geraden, die in der Ebene der ersteren liegen, und mit diesen vier harmonische Strahlen bilden, sind unter sich in konstantem Verhältniß.

Hieraus schließt man mit Hülfe des Ergänzungskegels:

15. Es sind zwei feste Ebenen gegeben; ein Punkt ihres Durchschnitts ist die Spitze eines rechten Winkels, dessen Schenkel sich in den festen Ebenen bewegen. Die Ebene dieses Winkels umhüllt einen Kegel vom zweiten Grade, dessen Fokallinien senkrecht auf den festen Ebenen stehen. Wenn man durch die Schnittlinie der letzteren zwei andere Ebenen legt, welche mit ihnen einen harmonischen Ebenenbüschel bilden, so sind die Sinus der Winkel zwischen der Ebene des beweglichen rechten Winkels und den zwei neuen Ebenen unter sich in konstantem Verhältniß.

16. Die Polare einer cyclischen Ebene enthält die Mittelpunkte der mit ihr parallelen Kreisschnitte. Folgt aus 1. mit Hülfe des Ergänzungskegels.

Die Polarebene einer Fokallinie soll Direktionsebene des Kegels heißen, wie die Polare des Brennpunkts eines Kegelschnitts Direktrice genannt wird.

17. Das Verhältniß der Sinus der Winkel, welche eine Tangentialebene (Erzeugende) mit einer cyclischen Ebene und ihrer Polare (mit einer Fokallinie und ihrer Direktionsebene) bildet, ist konstant.

18. Die Tangentialebene und diejenige Ebene, welche durch die Berührungslinie und die Polare einer cyclischen Ebene geht, schneiden diese cyclische Ebene in zwei rechtwinkligen Geraden.

Durch den Ergänzungskegel folgert man hieraus:

19. Zwei durch eine Fokallinie gehende Ebenen, wovon die erste noch durch eine Erzeugende geht, und die zweite durch die Durchschnittslinie der Ebene, welche den Kegel nach dieser Erzeugenden berührt, mit der Direktionsebene, stehen auf einander senkrecht.

20. Zwei Tangentialebenen eines Kegels und die Ebene der beiden Berührungslinien schneiden eine cyclische Ebene nach drei Geraden, wovon die dritte den Winkel der beiden ersten halbirt. Dieser Satz und viele ähnliche lassen sich direkt aus den Eigenschaften der Tangenten und Sehnen des Kreises auf den Kegel übertragen. Durch den Ergänzungskegel schließt man weiter:

21. Drei durch eine Fokale gehende Ebenen, wovon die zwei ersten durch zwei Erzeugende gehen, und die dritte durch den Durchschnitt der Ebenen, welche den Kegel längs dieser Erzeugenden berühren, schneiden eine cyclische Ebene in drei Geraden, wovon die dritte den Winkel der beiden ersten halbirt.

22. Das Verhältniß der Entfernungen von einer Fokale und der Direktionsebene ist für alle Punkte des Kegels konstant.

Eine Kugel, welche mit einem Kegel zweiten Grades concentrisch ist, schneidet denselben in einem sphärischen Kegelschnitt. Die Fokallinien treffen die Kugel in den Brennpunkten des Kegelschnitts; die cyclischen Ebenen in den cyclischen Bögen und die Direktionsebenen in den Direktionsaxen des Kegelschnitts.

Die angegebenen Eigenschaften der Kegel lassen sich nun ohne alle Mühe auf die sphärischen Kegelschnitte übertragen, wovon hier einige Beispiele folgen:

23. Die von einem Punkt des Umfangs eines sphärischen Kegelschnitts nach den Brennpunkten gezogenen Bögen größter Kreise bilden mit der Tangente des Kegelschnitts gleiche Winkel (4).

24. Die Summe oder Differenz der in 23. genannten Bögen größter Kreise ist konstant (7).

25. Jeder Bogen eines größten Kreises, welcher einen sphärischen Kegelschnitt berührt, schneidet die cyclischen Bögen in zwei Punkten, die gleichweit entfernt sind vom Berührungspunkt (3). Analogie zwischen den cyclischen Bögen und den Asymtoten der Hyperbel.

26. Das sphärische Dreieck, welches gebildet wird durch zwei cyclische Bögen und durch den Bogen eines größten Kreises, der den Kegelschnitt in irgend einem Punkt berührt, hat einen konstanten Inhalt (aus 7., weil die Summe der Winkel in dem genannten sphärischen Dreieck konstant ist).

27. Wenn auf einer Kugel zwei feste Punkte liegen, und um dieselben zwei Bögen größter Kreise sich so drehen, daß sie sich rechtwinklig schneiden, so beschreibt ihr Durchschnittspunkt einen sphärischen Kegelschnitt (14).

28. Wenn auf einer Kugel zwei feste Bögen größter Kreise gegeben sind, und man läßt auf ihnen die Endpunkte eines größten Kreises gleich einem Quadranten sich bewegen, so wird dieser einen sphärischen Kegelschnitt umhüllen (15).

Theilt man die von einem Punkt in der Ebene eines Kreises nach demselben gezogenen Radienvektoren nach einem konstanten Verhältniß, so liegen die Theilpunkte auch auf einem Kreis. Hieraus folgt:

29. Zieht man durch die Spitze eines Drehungskegels eine Gerade, und halbirt die Winkel, welche sie mit den Erzeugenden bildet, so liegen die Halbirungslinien auf einem Kegel, von welchem e i n System der Kreisschnitte parallel den Kreisen des Drehungskegels ist.

30. Wenn man durch einen Punkt auf einer Kugel Bögen größter Kreise nach einem beliebigen Kugelkreis zieht, so liegen die Halbirungspunkte derselben auf einem sphärischen Kegelschnitt.

31. Ein sphärischer Kegelschnitt projicirt sich auf einer cyclischen Ebene als Kreis, wenn die Projektionsstrahlen parallel dem durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts gehenden Kugelhalbmesser gezogen werden.

32. Wenn ein durch vier Bögen größter Kreise gebildetes Viereck einem sphärischen Kegelschnitt eingeschrieben ist, so steht das Produkt der Sinus der Abstände eines Punkts der Kurve von zwei Gegenseiten des Vierecks zu dem Produkt der Sinus der Abstände desselben Punkts von den beiden andern Gegenseiten in einem konstanten Verhältniß. Dieses Verhältniß ist gleich dem Produkt der Sinus der Winkel, welche ein cyclischer Bogen der Kurve mit den zwei ersten Seiten des Vierecks macht, dividirt durch das Produkt der Sinus der Winkel, welche der nämliche cyclische Bogen mit den zwei andern Seiten macht.

33. Die Produkte der Sinus der Winkel, welche die beiden cyclischen Bögen mit den Gegenseiten des Vierecks bilden, sind unter sich wie die Produkte der Sinus der Winkel, welche diese cyclischen Bögen mit den zwei andern Gegenseiten machen.

34. Wenn ein durch vier Bögen größter Kreise gebildetes Vierseit einem sphärischen Kegelschnitt umschrieben wird, so hat jeder Bogen eines größten Kreises, welcher diese Kurve berührt, die Eigenschaft, daß das Produkt der Sinus seiner Abstände von zwei Gegenecken des Vierseits zu dem Produkt der Sinus der Abstände von den beiden andern Gegenecken in einem konstanten Verhältniß steht. Dieses Verhältniß ist gleich dem Produkt der Sinus der Abstände eines Brennpunkts der Kurve von den beiden ersten Ecken des Vierseits dividirt durch das Produkt der Abstände dieses Brennpunkts von den beiden andern Ecken.

35. Die Produkte der Sinus von den Bögen größter Kreise, welche von beiden Brennpunkten nach zwei Gegenecken gehen, verhalten sich zu einander, wie die Produkte der Sinus der Bögen größter Kreise, welche von den Brennpunkten nach zwei andern Gegenecken gehen.

Ueber eine andere Art von Kegelschnitten, welche durch eine Kugel gebildet werden, deren Umfang durch die Spitze des Kegels geht, siehe die Abhandlung des Verfassers über drei geometrische Transformationen (Grunerts Archiv 31).

36. Wenn man einem Drehungskegel zwei Kugeln einbeschreibt, und denselben durch eine Ebene schneidet, welche beide Kugeln tangirt, so sind die Berührungspunkte die Brennpunkte des durch die Ebene hervorgebrachten Kegelschnitts.

37. Ein Kegel wird durch eine beliebige Ebene geschnitten. Die Summe der beiden von der Spitze nach den Endpunkten eines Durchmessers gezogenen Geraden ist konstant.

38. Ein Kegel wird durch eine beliebige Ebene geschnitten. Die Differenz der von der Spitze des Kegels und von einem Brennpunkt des Kegelschnitts nach einem beliebigen Punkt des Umfangs gezogenen Geraden ist konstant.

Sätze über die Hyperboloide.

39. Ein einmantliges oder zweimantliges Hyperboloid und sein asymtotischer Kegel haben dieselben Systeme von konjugirten Durchmessern; mithin

sind je zwei durch die Fokallinien dieses Kegels gehende konjugirte Ebenen des Hyperboloids senkrecht auf einander.

40. Die Erzeugenden der beiden Drehungscylinder, welche ein einmantliges Hyperboloid berühren, sind parallel den Fokallinien des asymtotischen Kegels.

41. Bei jedem einmantligen Hyperboloid ist konstant: 1) Das Verhältniß der Sinus der Winkel, welche eine Erzeugende mit der Fokallinie des asymtotischen Kegels und der derselben konjugirten Diametralebene macht. 2) Die Summe oder Differenz der Winkel, welche eine Erzeugende mit den beiden Fokallinien bildet (7). 3) Das Produkt der Sinus der Winkel, welche eine Erzeugende mit den Ebenen der Kreisschnitte macht, die zugleich Kreisschnitte des asymtotischen Kegels sind (10).

42. Eine Gerade, welche einen Cylinder zweiten Grades berührt und sich zugleich auf zwei andere, nicht in einer Ebene liegende Tangenten dieses Cylinders stützt, erzeugt ein einmantliges Hyperboloid.

43. Wenn man um zwei feste Gerade, welche sich nicht schneiden, zwei sich rechtwinklig schneidende Ebenen dreht, so erzeugt ihr Durchschnitt ein einmantliges Hyperboloid, dessen Kreisschnitte senkrecht auf den festen Geraden sind (14). Man kann auf unendlich viele Arten zwei andere Gerade im Raum ziehen, so daß die Entfernungen irgend eines Punkts des Hyperboloids von diesen zwei Geraden unter sich in einem konstanten Verhältniß sind.

Auf einer beliebigen Ebene, welche ein einmantliges Hyperboloid schneidet, nehme man einen Punkt und ziehe durch denselben Gerade, welche je zwei Erzeugende schneiden. Zwei solche Erzeugende sollen konjugirt heißen in Beziehung auf den Punkt und die Ebene. Auf solche Art lassen sich also die Erzeugenden von jedem Punkt aus in irgend einer durch ihn gelegten Ebene in zwei Systeme theilen, die man gleichfalls konjugirt nennen kann. Die Sätze 44 — 48 gelten nur für solche Erzeugende, wovon keine die andere schneidet.

44. Wenn man alle Erzeugenden paarweise als konjugirt betrachtet, und zieht eine beliebige Ebene, so haben die Verbindungslinien der Schnittpunkte von je einem Paar konjugirter Erzeugenden einen gemeinsamen Convergenzpunkt. Umgekehrt, zieht man durch irgend einen Punkt Gerade, wovon jede zwei konjugirte Erzeugende trifft, so liegen diese Geraden in einer Ebene.

45. Die Geraden, welche auf je zwei konjugirten Erzeugenden senkrecht stehen, gehen durch eine feste Axe und treffen sie senkrecht. Die Abstände zweier konjugirten Erzeugenden von dieser Axe verhalten sich zu einander, wie die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche je zwei Gerade mit der Axe machen.

46. Wenn irgend ein Cylinder einem Hyperboloid umschrieben ist, so gehen je zwei parallele Tangentialebenen des Cylinders durch zwei konjugirte Erzeugende.

Nachdem die Erzeugenden paarweise abgetheilt sind, so entspricht jeder Ebene ein Punkt, in welchem die Verbindungslinien der Schnittpunkte je von einem Paar konjugirter Ebenen konvergiren und jedem Punkt eine Ebene, in welcher sich die Geraden befinden, die man von dem Punkt aus so ziehen kann, daß sie je zwei konjugirte Erzeugende treffen. Ein solcher Punkt und seine Ebene heißen Pol und Polare.

47. Wenn mehrere Ebenen durch einen Punkt gehen, so liegen ihre Pole auf der Polarebene dieses Punkts. Wenn mehrere Punkte in einer Ebene liegen, so gehen ihre Polarebenen durch den Pol dieser Ebene.

48. Wenn mehrere Ebenen durch eine Gerade L gehen, so liegen ihre Pole auf einer zweiten Geraden L′; die Pole der durch L′ gehenden Ebenen liegen auf L. Diese zwei Gerade haben dieselben Eigenschaften, wie zwei konjugirte Erzeugende. Wenn man irgend eine Ebene zieht, so geht die Verbindungslinie der Schnittpunkte von L und L′ durch den Pol der Ebene. Die Gerade, welche auf L und L′ senkrecht steht, schneidet die in 45. genannte Axe senkrecht. Die Entfernungen der Axe von L und L′ verhalten sich zu einander wie die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Axe mit L und L′ macht.

Alle Erzeugenden eines einmantligen Hyperboloids, welche sich nicht schneiden, bilden nach der gewöhnlichen und für die Sätze 49 und 50 geltenden Auffassung ein System. Eine Erzeugende des einen Systems schneidet alle andern Erzeugenden des andern Systems.

49. Zwei Erzeugende des einen Systems werden von allen Erzeugenden des andern Systems in den Punkten aa′, bb′, cc′.. geschnitten. Wenn man nun diese zwei Erzeugenden in eine solche Lage bringt, daß zwei entsprechende Punkte, z. B. a und a′ zusammenfallen, so haben die Verbindungslinien von je zwei der übrigen Punktenpaare, z. B. von b und b′, von c und c′... einen gemeinsamen Schnittpunkt.

50. Es sind zwei Erzeugende A und A′ auf einem einmantligen Hyperboloid gegeben, welche demselben System angehören. Man lege durch A sowohl als auch durch A′ und alle Erzeugenden des andern Systems Ebenen, und bringe A und A′ mit diesen Ebenen, und ohne daß sie ihre gegenseitige Lage ändern, in eine solche Stellung, daß zwei entsprechende (durch eine Erzeugende des andern Systems gelegte) Ebenen zusammenfallen, so liegen die Durchschnittslinien von je zwei der übrigen entsprechenden Ebenenpaare in einer durch den Schnittpunkt von A und A′ gehenden Ebene.

51. Jede Tangentialebene eines zweimantligen Hyperboloids schneidet von dem asymtotischen Kegel ein Stück von konstantem Inhalt ab; der Berührungspunkt ist der Mittelpunkt der Schnittkurve.

52. Wenn zwei Kugeln einem Drehungshyperboloid einbeschrieben sind, und dasselbe durch eine Ebene geschnitten wird, welche die Kugeln berührt, so sind die Berührungspunkte die Brennpunkte der Schnittkurve.

Sätze über das Ellipsoid.

Wenn man alle Coordinaten einer Fläche (oder Kurve), welche einer Axe parallel sind, nach einem konstanten Verhältniß theilt, so liegen die Theilpunkte auf der transformirten Fläche (oder Kurve), deren Gleichung denselben Grad hat. Einer Geraden, Ebene, Linie oder Fläche zweiten Grades entspricht also wieder eine Gerade, Ebene, Linie oder Fläche zweiten Grades. Schneiden oder berühren sich zwei Gerade, Flächen, so schneiden oder berühren sich auch ihre Transformirten. Durch diese Verwandlung lassen sich viele Eigenschaften der Drehungsflächen zweiten Grades auf die anderen Flächen übertragen; insbesondere diejenigen der Kugel auf das Ellipsoid (Gugler's descriptive Geometrie). Die meisten der hier angeführten Sätze gelten auch für die Hyperboloide.

53. Das aus drei konjugirten Semidiametern des Ellipsoids konstruirte Parallelepiped hat einen konstanten Inhalt.

54. Das Quadrat des vom Endpunkt eines Durchmessers auf die Ebene der beiden andern gefällten Perpendikels ist gleich der Quadratsumme der von den Endpunkten der Axen auf dieselbe Ebene gefällten Perpendikel.

55. Die Quadratsumme von drei konjugirten Diametern ist konstant.

56. Zwei ebene Schnittkurven eines Ellipsoids liegen auf zwei Kegeln,

deren Spitzen in gerader Linie liegen mit den Spitzen der beiden weiteren Kegel, welche das Ellipsoid in den genannten Schnittlinien berühren.

57. Alle diejenigen Ellipsen eines Ellipsoids, deren Ebenen durch einen Punkt gehen, liegen paarweise auf zwei Kegeln, deren Spitzen in der Polarebene dieses Punkts liegen.

58. Wenn die Ebenen von mehreren Ellipsen auf einem Ellipsoid durch eine von zwei konjugirten Polaren gehen, so liegen diese Ellipsen paarweise auf Kegeln, deren Spitzen sich auf der andern Polaren befinden.

59. Drei Ellipsen (oder Kreise) eines Ellipsoids liegen im Ganzen auf sechs Kegeln, von deren Spitzen viermal drei in gerader Linie liegen.

60. Die Ebene, welche durch die Endpunkte von drei konjugirten Semidiametern eines Ellipsoids geht, schneidet dasselbe in einer Ellipse, auf deren Umfang man unendlich viele Systeme von drei Punkten wählen kann, welche gleichfalls die Endpunkte von drei konjugirten Semidiametern sind.

Die Endpunkte von drei konjugirten Semidiametern sollen konjugirte Punkte heißen.

61. Der Mittelpunkt der Ellipse, auf welcher drei konjugirte Punkte liegen, ist der Schwerpunkt des durch die Punkte gebildeten Dreiecks. Der Inhalt dieses Dreiecks ist konstant für einen und denselben Schnitt des Ellipsoids.

62. Wenn auf einem ebenen Schnitt eines Ellipsoids zwei Systeme von konjugirten Punkten gegeben sind, so ist das von einem Punkt des ersten Systems und zwei Punkten des andern gebildete Dreieck so groß als das von den drei andern Punkten gebildete Dreieck.

63. Die Quadratsumme der vier Seitenflächen eines von drei konjugirten Semidiametern gebildeten Tetraeders ist konstant.

64. Die Quadratsumme der Projektionen von den drei Seitenflächen des von drei konjugirten Semidiametern gebildeten Tetraeders auf eine feste Ebene ist konstant.

65. Man ziehe von jedem der drei Paare von Brennpunkten eines Ellipsoids nach drei konjugirten Punkten Radien, multiplicire je zwei dieser Radien, welche von einem Paar Brennpunkte nach einem der konjugirten Punkte gezogen sind, so ergeben sich neun Produkte. Die Quadratsumme von je sechs derselben, die sich auf irgend zwei Paar Brennpunkte beziehen, vermindert um die doppelte Quadratsumme der übrigen drei vom dritten Paar Brennpunkte ist konstant.

66. Die Quadratsumme der achtzehn Radien, welche von den Brennpunkten oder Endpunkten der Axen nach je drei konjugirten Punkten sich ziehen lassen, ist konstant.

67. Die Quadratsumme der Normalen oder Subnormalen von je drei konjugirten Punkten ist konstant.

68. Die Summe der sechs Hauptkrümmungshalbmesser, welche je drei konjugirten Punkten entsprechen, ist konstant und gleich $abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$

69. Die Quadratsumme der reciproken Werthe von drei auf einander senkrechten Durchmessern eines Ellipsoids (Hyperboloids) ist konstant.

70. Die Quadratsumme der reciproken Werthe der Inhalte von drei auf einander senkrechten Diametralschnitten eines Ellipsoids (Hyperboloids) ist konstant. Beim geraden Cylinder kann man für die drei schneidenden

14*

Ebenen irgend drei auf einander senkrecht stehende nehmen. Die konstante Summe ist alsdann dem Quadrat des reciproken Werths der Fläche der Basis gleich.

71. Der geometrische Ort für körperliche Ecken, welche von drei zu einander senkrechten Tangentialebenen eines Ellipsoids (Hyperboloids) gebildet werden, ist eine Kugel; das Quadrat ihres Halbmessers ist gleich der Quadratsumme der Halbaxen.

72. Die ebenen Schnitte eines Ellipsoids (zweimantligen Hyperboloids) projiciren sich von einem Ende eines Durchmessers aus auf der Tangentialebene des andern Endpunkts dieses Durchmessers in ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsen, deren Axen parallel sind mit den Axen derjenigen Ellipsen, in welchen die Fläche von den der Tangentialebene parallelen Ebenen geschnitten wird.

73. Alle ebenen Kurven eines Ellipsoids projiciren sich von einem Nabelpunkt aus auf der Tangentialebene des entgegengesetzten Nabelpunkts als Kreise.

74. Alle einem einmantligen Hyperboloid umschriebenen Kegelflächen schneiden eine feste Tangentialebene desselben in solchen Kegelschnitten, welche die durch den Berührungspunkt gehenden Erzeugenden berühren.

75. Alle einem Ellipsoid (zweimantligen Hyperboloid) umschriebenen Kegelflächen werden von einer durch den Nabelpunkt gehenden Tangentialebene in solchen Kegelschnitten geschnitten, von welchen dieser Nabelpunkt ein Brennpunkt ist.

Sätze über Drehungsflächen zweiten Grades.

76. Es ist eine feste Ebene und ein fester Punkt gegeben. Der geometrische Ort eines Punkts, dessen Entfernungen von jenen in einem konstanten Verhältniß sind, ist eine Drehungsfläche, und zwar ein verlängertes Ellipsoid, oder ein zweimantliges Hyperboloid, oder ein Paraboloid. Diese Flächen nehmen an den zahlreichen Eigenschaften der Kegelschnitte hinsichtlich ihrer Brennpunkte Theil.

77. Jeder ebene Schnitt auf einer der im vorigen Satz genannten Flächen erscheint von einem Brennpunkt aus gesehen als Kreis.

78. Das abgeplattete Ellipsoid, das einmantlige Drehungshyperboloid entstehen durch Drehung eines Kegelschnitts um diejenige Axe, welche die beiden Brennpunkte nicht enthält. In die gleiche Kategorie kann man den parabolischen Cylinder rechnen, welcher durch Drehung einer Parabel um ihre in der Unendlichkeit liegende Axe entstanden angesehen werden kann. Diese Flächen haben die Eigenschaft, daß die Entfernungen irgend eines ihrer Punkte von dem Brennpunkt eines Meridians und der entsprechenden Direktrice unter sich in konstantem Verhältniß sind.

79. Wenn man beim abgeplatteten Ellipsoid und einmantligen Drehungshyperboloid irgend einen Meridianschnitt macht, so ist der Kegel, dessen Spitze ein Brennpunkt dieses Meridians und dessen Basis irgend ein auf der Fläche hervorgebrachter Schnitt ist, welcher mit der diesem Brennpunkt entsprechenden Direktrice in gleicher Ebene liegt, ein Drehungskegel.

80. Wenn beim parabolischen Cylinder eine Ebene senkrecht auf die geradlinigen Erzeugenden gelegt wird, und durch die Direktrice der Schnittkurve eine zweite Ebene, welche den parabolischen Cylinder auch in einem

Kegelschnitt trifft, so ist der Kegel, dessen Basis dieser Kegelschnitt und dessen Spitze der jener Direktrice entsprechende Brennpunkt ist, ein Drehungskegel.

81. Wenn sich das Auge in irgend einem Punkt eines einmantligen gleichseitigen Drehungshyperboloids befindet, so sieht es den Kehlkreis desselben auf einer zu seiner Ebene senkrechten Ebene wieder als Kreis.

82. Wenn ein Drehungskegel eine beliebige Fläche schneidet, so ist die Summe der reciproken Werthe der Entfernungen der Spitze des Kegels von den Schnittpunkten zweier mit der Axe in gleicher Ebene liegenden Erzeugenden konstant.

Sätze über die centrischen homofokalen Flächen.

83. Die Tangenten der Krümmungslinien eines Ellipsoids (Hyperboloids) bilden in einem einschließenden homofokalen Ellipsoid (Hyperboloid) Sehnen, welche den Quadraten der ihnen parallelen Durchmesser von letzterer Fläche proportional sind.

84. Es sind zwei homofokale Flächen (ϱ) und (α) gegeben. Auf (α) liegen zwei feste Punkte A und B, und ein Faden ist durch einen Griffel s, dessen Spitze über (ϱ) hingleitet, so gespannt, daß er von A ausgehend sich über (α) in einer geodätischen Linie biegt, dann eine gemeinschaftliche Tangente beider Flächen, und hierauf auf (ϱ) eine geodätische Linie bildet bis s. Der zweite Theil des Fadens zwischen s und B besteht ebenso der Reihe nach aus einer geodätischen Linie von (ϱ), einer gemeinschaftlichen Tangente von (ϱ) und (α) und einer geodätischen Linie auf (α) bis B. Wenn sich der Griffel s auf (ϱ) bewegt, so daß der Faden immer gespannt bleibt, so beschreibt der Punkt s eine Krümmungslinie auf (ϱ), welche von den beiden in s zusammenlaufenden Fadenstücken unter gleichen Winkeln geschnitten wird. Spezielle Fälle sind folgende:

85. Das Hyperboloid (α) vermindert sich mehr und mehr und wird endlich zur Fokalhyperbel: Die Krümmungslinien des Ellipsoids können beschrieben werden durch einen gespannten Faden, dessen Endpunkte sich auf der Fokalhyperbel befinden.

86. Die Nabelpunkte sind auch Punkte der Fokalhyperbel, also ist die Summe der geodätischen Entfernungen eines Punkts einer Krümmungslinie von den beiden Nabelpunkten konstant.

87. Wenn sich zugleich das Ellipsoid in die Fokalellipse vermindert, so erhält man den Satz: Eine Hyperbel und eine Ellipse liegen in zwei zu einander senkrechten Ebenen, und die Scheitel der einen Kurve sind die Brennpunkte der andern. Die Summe (Differenz) der Entfernungen zweier festen Punkte der Hyperbel (Ellipse) von allen Punkten der Ellipse (Hyperbel) ist konstant.

88. Wenn man von einem Punkt der Fokalhyperbel eines Ellipsoids eine Tangente an diese Fläche zieht, und sie durch eine geodätische Linie verlängert, so wird letztere stets durch den nämlichen Nabelpunkt gehen.

89. Da die Summe der im vorigen Satz genannten Tangente und geodätischen Linie, wie auch die Länge aller geodätischen Linien zwischen zwei Nabelpunkten bekannt ist, so folgt weiter: Die Differenz der von einem Punkt des Ellipsoids bis an die Fokalhyperbel gezogenen Tangente und der nach einem Nabelpunkt gezogenen geodätischen Linie ist konstant.

Sätze über die Flächen zweiten Grades überhaupt.

90. Wenn ein Kegel (eine Kugel) in einer ebenen Kurve in eine Fläche zweiten Grades eintritt, so ist auch die Austrittskurve eben.

91. Es sei eine Chorde einer Fläche zweiten Grades eingeschrieben, und O ein fester Punkt auf dieser Chorde, welcher sie in zwei, additive oder subtraktive, Segmente theilt, deren Produkt gleich m^2 sei. Durch O lege man unendlich viele Gerade, für welche m eine konstante Größe ist. Das System dieser Chorden bildet einen Kegel zweiten Grades, welcher die Oberfläche in einer sphärischen Kurve trifft. Der Mittelpunkt der Kugel, auf welcher die Kurve liegt, und der Punkt O liegen auf einer Geraden, senkrecht zur Polarebene des Punkts O. Wenn man durch einen beliebigen Punkt J der Fläche einen dem ersten parallelen Kegel legt, so trifft er die Fläche gleichfalls in einer sphärischen Kurve, deren Kugelmittelpunkt auf der Normale von J liegt. Wir verlegen den Punkt O auf die Axe eines solchen Schnitts der Fläche, dessen Ebene parallel der Tangentialebene von J ist, und nehmen m^2 gleich dem Rechteck der Segmente dieser Axe. Alsdann berührt der entsprechende Kegel die Ebene dieses Schnitts, und der durch J gelegte parallele Kegel hat mit der Fläche die Tangentialebene gemein, welche er in einer sphärischen Kurve schneidet, deren Kugelmittelpunkt der Krümmungsmittelpunkt der Fläche für den Punkt J ist. Da der Kegelschnitt, wovon die Rede war, zwei Hauptaxen hat, so erhält man auch zwei Krümmungsmittelpunkte für J. Die parallelen Linien, welche man durch J mit jenen Axen ziehen kann, geben die Tangenten der Krümmungslinien.

92. Ein Kegel, welcher, wie soeben angegeben, konstruirt ist und eine Fläche zweiten Grades in einer sphärischen Kurve schneidet, heißt cône conjoint; seine Hauptaxen sind parallel den Hauptaxen der Fläche; seine Kreisschnitte parallel den Kreisschnitten der Fläche. Eine Reihe von cônes conjoints mit gemeinschaftlicher Spitze haben dieselben Eigenschaften, wie die cyclischen Ebenen hinsichtlich der Kegel zweiten Grades. Die Summe der Winkel ist konstant, welche eine Berührungsebene an einen cône conjoint mit den Kreisschnitten der Fläche macht.

93. Jede dieser Berührungsebenen schneidet die Fläche in einem Kegelschnitt, wovon eine der Hauptaxen parallel der Erzeugenden ist, in welcher die Ebene den Kegel berührt. Also stehen die zwei Erzeugenden, in welchen zwei cônes conjoints mit gemeinschaftlicher Spitze von einer Ebene berührt werden, senkrecht auf einander.

94. Irgend zwei cônes conjoints schneiden sich in einer sphärischen Kurve; die Kugel, auf welcher sie liegt, geht durch den Kreis, in welchem sich die beiden Kugeln schneiden, auf welcher die sphärischen Kurven liegen, welche die Fläche mit den cônes conjoints gemein hat.

95. Die durch den festen Punkt parallel mit den Axen der Fläche gezogenen Geraden, die Verbindungslinie mit dem Mittelpunkt, die Hauptaxen des umschriebenen Kegels, der seine Spitze in dem festen Punkt hat, sind sieben andere Erzeugende desselben Kegels vom zweiten Grade.

96. Dieser Kegel geht durch die Spitzen der cônes conjoints hinsichtlich der Fläche und einer beliebigen Kugel, deren Mittelpunkt der feste Punkt ist.

97. Wenn man durch den Mittelpunkt eines ebenen Schnitts auf einer Fläche zweiten Grades eine beliebige Gerade zieht, so ist die Summe der

reciproken Werthe der Entfernungen dieser Ebene von den beiden Durchschnittspunkten konstant.

98. Wenn man in einem Punkt einer Fläche zweiten Grades die Normale und die Tangentialebene zieht, welche eine Hauptebene in einem Punkt und in einer Geraden treffen, so ist der Punkt der Pol der Geraden hinsichtlich der Fokale dieser Hauptebene.

99. Die Normalen in denjenigen Punkten einer Fläche zweiten Grades, welche einem ebenen Schnitt angehören, treffen eine Hauptebene in einem Kegelschnitt. Der Kegel, welcher die Fläche in der Schnittkurve berührt, trifft die Hauptebene in einem andern Kegelschnitt. Der erste Kegelschnitt ist in Beziehung auf die Fokale dieser Hauptebene die Polare des zweiten Kegelschnitts.

100. Wenn man an eine Fläche zweiten Grades die Normalen zieht, welche dieselbe in einer Kurve treffen, deren Ebene senkrecht auf einer Hauptebene ist, so schneiden sie letztere in einer Geraden, welche in Beziehung auf die Fokale die Polare von der Spitze des Kegels ist, der die Fläche in dem ebenen Schnitt berührt.

Die vorstehenden hundert Sätze sind von folgenden Autoren:

1.—13. Chasles (Académie de Bruxelles 1830).
14.—15. Chasles (Liouville I), Steiner (Crelle II).
16.—28. Chasles (Ac. de Bruxelles 1830, Liouville I).
29.—31. Vom Verfasser.
32.—35. Chasles (Liouville III).
36.—38. Quetelet (Ac. de Bruxelles 1822).
39.—41. Chasles (ibid. 1830).
42. Brasseur (ibid. 1855).
43. Chasles (Liouville I).
44.—48. Chasles (ibid. IV).
49.—50. Plücker (Crelle 34).
51. Unferdinger (Grunerts Archiv 1856).
52. Dandelin (Ac. de Bruxelles 1826).
53.—55. Livet (Journal de l'école polyt. an XII).
56.—59. Vom Verfasser (Schlömilch's Zeitschrift III).
60.—64. Chasles (Liouville II)
65.—68. Brassine (Liouville 1859).
69.—71. Plücker (Crelle 24). Monge (éc. polyt.).
72.—75. Plücker (ibid. 34).
76.—80. Chasles (Liouville I).
81. Vom Verfasser (Schlömilch III und nouv. Annales 17).
82. Quetelet (Ac. de Bruxelles).
83. Chasles (Institut 1846).
84.—89. Chasles (Liouville 1846).
90. Brianchon (éc. polyt. an XII).
91. Terquem (Liouville).
92.—96. Chasles (Liouville III).
97. Quetelet (Ac. de Bruxelles 1855).
98.—100. Chasles (ibid. VIII)

Druckfehler.

Seite 4	Zeile 19	von oben	lies	$L'M'' - L''M'$	statt	$L'M'' - L''M$.
„ 4	„ 25	von „	„	$MN' - M'N$	statt	$MN' - MN$.
„ 11	„ 8	von unten	„	$\{(1+q^2)\,s - p\,q\,t\}$	statt	$\{(1+q^2)\,s - p\,q\,t\}\,s$.
„ 32	„ 2	von oben	„	enthalten	statt	erhalten.
„ 48	„ 16	von „	„	34	statt	31.
„ 48	„ 9	von unten	„	35	statt	34.
„ 86	„ 17	von „	„	$x' + \alpha z' = a$	statt	$x' + \alpha z' = b$.
„ 96	„ 2	von oben	„	$\frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = x$	statt	$\frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = z$.