

65/2007

Raport Badawczy
Research Report

RB/46/2007

**Metody krigingowe
aproksymacji pomiarów
środowiskowych**

L. Bogdan, J. Studziński

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences



POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr hab. inż. Zbigniew Nahorski

Warszawa 2007

**Metody krigingowe aproksymacji pomiarów
środowiskowych**

Lucyna Bogdan, Jan Studziński

Spis treści

- 1 Wprowadzenie
- 2 Rodzaje macierzy czasoprzestrzennych
 - 2.1 Szeregi czasowe
 - 2.2 Wyniki badań struktur geologicznych
 - 2.3 Dane meteorologiczne i hydrologiczne
 - 2.4 Obrazy jako zapis danych czasoprzestrzennych
- 3 Podstawy teoretyczne geostatystyki
 - 3.1 Pojęcie zmiennej zregionalizowanej
 - 3.2 Podstawowe równania krigingowe
 - 3.3 Obliczanie semiwariogramu empirycznego
 - 3.4 Semiwariogramy teoretyczne
 - 3.5 Najczęściej stosowane rodzaje krigingu
 - 3.6 Etapy badań z wykorzystaniem technik geostatystycznych
- 4 Kokriging
- 5 Programy komputerowe do obliczeń geostatystycznych
- 6 Opis pakietu KRIPOS: KRiging POmiarów Srodowiskowych
- 7 Przykłady wykorzystania metod geostatystycznych

Literatura

1. Wprowadzenie

Powstanie wiedzy o świecie nas otaczającym to wynik umiejętności prowadzenia obserwacji, zapisu wyników oraz ich analizy. Osiągnięcia starożytnych w zakresie astronomii były oparte na obserwacjach ruchu słońca, księżyca, planet i gwiazd na niebie. Do ich analizy konieczne było wprowadzenie podstawowych aksjomatów matematycznych z zakresu liczb i geometrii oraz ustalenie jednostki czasu. Obserwacje nieba prowadzone przez starożytnych, to pierwsze wielowymiarowe zbiory czasoprzestrzeni. Pojedynczym zbiorem czasoprzestrzennym nazywać będziemy rekord danych, w którego skład wchodzi numeryczny zapis czasu mierzonego od umownej chwili, współrzędne lokalizujące punkt obserwacji X_i w stosunku do umownego układu odniesienia oraz wyniki badanych parametrów lub wskaźników

Czas	Współrzędne punktu obserwacji	Parametry lub wskaźniki mierzone	
t	$X_i(x_i, y_i, z_i)$	$P_1, P_2, \dots, P_k, W_1, W_2, \dots, W_n$	(1)

Pojedyncze zbiory czasoprzestrzenne dla danego punktu obserwacji X_i tworzą macierz danych czasoprzestrzennych

$$\text{CP}(X_i) = \begin{bmatrix} t_1, X_i, P_{1,1}, P_{2,1}, \dots, P_{k,1}, W_{1,1}, W_{2,1}, \dots, W_{n,1} \\ t_2, X_i, P_{1,2}, P_{2,2}, \dots, P_{k,2}, W_{1,2}, W_{2,2}, \dots, W_{n,2} \\ \vdots \\ t_m, X_i, P_{1,m}, P_{2,m}, \dots, P_{k,m}, W_{1,m}, W_{2,m}, \dots, W_{n,m} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Historycznie zapis zbiorów czasoprzestrzennych był niejednorodny, co wynikało ze stosowania w różnych okresach rozwoju cywilizacji różnych przyrządów do pomiaru czasu i opisu lokalizacji punktów obserwacji. Tak jak w starożytności, również i dzisiaj wiele odkryć naukowych, to wynik umiejętności archiwizacji danych czasoprzestrzennych.

2. Rodzaje macierzy czasoprzestrzennych

2.1. Szeregi czasowe

Zbiory danych czasoprzestrzennych są macierzami wielowymiarowymi. W przypadku, gdy wyniki obserwacji prowadzi się w jednym punkcie lub obserwacje dotyczą zamkniętego układu przestrzennego, przy analizie danych pomija się archiwizację współrzędnych punktu obserwacji. Macierz (2) można zapisać w postaci

$$\mathbf{CP}(X_i) = \begin{bmatrix} t_1, p_{1,1}, p_{2,1}, \dots, p_{k,1}, w_{1,1}, w_{2,1}, \dots, w_{n,1} \\ t_2, p_{1,2}, p_{2,2}, \dots, p_{k,2}, w_{1,2}, w_{2,2}, \dots, w_{n,2} \\ \vdots \\ t_m, p_{1,m}, p_{2,m}, \dots, p_{k,m}, w_{1,m}, w_{2,m}, \dots, w_{n,m} \end{bmatrix} \quad (3)$$

ale najczęściej przy archiwizacji danych jest stosowany zapis

$$\mathbf{CP}(X_i) = \begin{bmatrix} p_{1,t_1}, p_{1,t_2}, \dots, p_{1,t_m} \\ p_{2,t_1}, p_{2,t_2}, \dots, p_{2,t_m} \\ \vdots \\ p_{k,t_1}, p_{k,t_2}, \dots, p_{k,t_m} \\ w_{1,t_1}, w_{1,t_2}, \dots, w_{1,t_m} \\ w_{2,t_1}, w_{2,t_2}, \dots, w_{2,t_m} \\ \vdots \\ w_{n,t_1}, w_{n,t_2}, \dots, w_{n,t_m} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Każdy wiersz macierzy (4) jest szeregiem czasowym mierzonego parametru lub wskaźnika.

2.2. Wyniki badań struktur geologicznych

Szczególne znaczenie w badaniach środowiska naturalnego odgrywają macierze danych czasoprzestrzennych związanych z ustalaniem budowy struktur geologicznych. Czas zmian utworów geologicznych jest mierzony w tysiącach lat. Ze względu na koszty i duży obszar penetracji naukowej badania te mogą być prowadzone przez dziesięciolecia. Uwzględniając fakt niezmienności w długim okresie czasu analizowanych parametrów (wskaźników), można pominąć w macierzy (2) czas obserwacji. Do analizy bierze się pod uwagę następującą macierz danych

$$CP(X_i \in D) = \begin{bmatrix} X_1, P_{1,1}, P_{2,1}, \dots, P_{k,1}, W_{1,1}, W_{2,1}, \dots, W_{n,1} \\ X_2, P_{1,2}, P_{2,2}, \dots, P_{k,2}, W_{1,2}, W_{2,2}, \dots, W_{n,2} \\ \vdots \\ X_n, P_{1,n}, P_{2,n}, \dots, P_{k,n}, W_{1,n}, W_{2,n}, \dots, W_{n,n} \end{bmatrix} \quad (5)$$

gdzie D jest przestrzenią prowadzonych badań.

Podobny sposób archiwizowania danych stosuje się przy badaniach tych elementów środowiska naturalnego, które nie wykazują szybko zachodzących zmian. Dotyczy to np. badań klas bonitacyjnych gruntu czy zawartości w nich metali ciężkich.

2.3. Dane meteorologiczne i hydrologiczne

W badaniach meteorologicznych otrzymuje się duże zbiory, które ze względu na wielkość są mało przejrzyste. Ciągi obserwacji zapisywane w postaci szeregów czasowych o opadach atmosferycznych, temperaturach i wilgotności powietrza (gruntu), prędkościach i kierunkach wiatru, stanach wód w rzekach itd. przetwarza się z zastosowaniem podstawowych metod statystycznych. Na podstawie tych analiz oblicza się wskaźniki, które następnie znajdują zastosowanie w praktyce inżynierskiej i gospodarce wodnej kraju. Dla tych zastosowań opracowuje się macierze postaci

$$CP(X_i \in D) = \begin{bmatrix} X_1, \bar{w}_1 \\ X_2, \bar{w}_2 \\ \vdots \\ X_n, \bar{w}_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

gdzie wskaźniki \bar{w}_i , to wartości wyliczone na podstawie ciągów obserwacji. Najczęściej są to wartości dla przyjętego prawdopodobieństwa wystąpienia zdarzenia, określone z wykorzystaniem klasycznych metod statystycznych.

Stany ekstremalne jest niezmiernie trudno ustalić na podstawie dostępnych szeregów czasowych, gdyż charakteryzują się niskim prawdopodobieństwem wystąpienia. Obrazuje to następujący przykład. Chcemy określić stan wody w rzece, który może się pojawić z prawdopodobieństwem 1%, to jest, raz na sto lat, ale dysponujemy tylko 20 letnim ciągiem

obserwacji. Aby ustalić ten parametr na podstawie danych z próby, musielibyśmy mieć ciąg obserwacji co najmniej 500-letni. Takich danych dziś nikt nie posiada. Wartości ekstremalne są ustalane z wykorzystaniem modeli, które należy opracować z wykorzystaniem dostępnych zbiorów obserwacji.

Przy poszukiwaniu wartości ekstremalnych (najmniejszych lub największych o założonym prawdopodobieństwie) najczęściej wykorzystuje się rozkład Gumbela, którego dystrybuanta wartości oczekiwanej jest opisana ogólnym równaniem

$$F(x) = \exp\left(-\exp\left[-\frac{x-a}{b}\right]\right) \quad \text{dla } -\infty < x < \infty, b > 0 \quad (7)$$

a gęstość prawdopodobieństwa ustala się z zależności

$$E(x) = \frac{1}{b} \cdot \exp\left(-\frac{x-a}{b}\right) \cdot \exp\left[-\exp\left[-\frac{x-a}{b}\right]\right] \quad (8)$$

gdzie a jest parametrem progów (położenia), b parametrem skali a x jest wartością mierzoną.

W tabeli 1 przedstawiono najważniejsze wskaźniki ustalone w oparciu o szeregi czasowe wyników badań meteorologicznych i hydrologicznych, niezbędne dla potrzeb inżynierskich.

Archiwizowanie danych meteorologicznych i hydrologicznych zachodzi więc dwuetapowo. W pierwszym etapie archiwizuje się szeregi czasowe, a w drugim etapie udostępnia się dla potrzeb inżynierskich wyznaczone z zastosowaniem metod statystycznych wskaźniki niezbędne dla celów inżynierskich.

Tabela 1. Podstawowe wskaźniki ustalone w oparciu o szeregi czasowe danych uzyskiwanych w ramach monitoringu meteorologicznego i hydrologicznego.

Wskaźnik lub parametr	Podstawowe zastosowanie
Rzędne wysokich stanów wody w zależności od założonego prawdopodobieństwa wystąpienia	Projekty obwałowań dla ochrony przeciwpowodziowej, urządzeń hydrotechnicznych, dróg i mostów
Przepływy w rzekach, odpływ roczny, przepływy maksymalne i minimalne o założonym prawdopodobieństwie wystąpienia	Projekty zbiorników retencyjnych, ustalania poboru wód na cele gospodarcze, ustalanie dopuszczalnych punktów zrzutu ścieków
Intensywność opadów deszczu o założonym czasie trwania i prawdopodobieństwie wystąpienia	Projektowanie systemów kanalizacji deszczowej i ogólnospławnej, systemów odwodnień powierzchniowych lotnisk, dróg i terenów zurbanizowanych
Temperatury średnie roczne i ekstremalne o założonym prawdopodobieństwie wystąpienia	Potrzeby agrotechniczne i ustalanie zapotrzebowania na nośniki ciepła dla celów grzewczych, projektowanie systemów klimatyzacyjnych
Wilgotność powietrza, wartości średnie i ekstremalne o założonym prawdopodobieństwie w poszczególnych porach roku wystąpienia	Potrzeby agrotechniczne, projektowanie systemów klimatyzacyjnych
Opady śniegu, wielkość pokrywy śnieżnej o założonym prawdopodobieństwie wystąpienia	Projektowanie konstrukcji budowlanych
Maksymalne prędkości wiatru o założonym prawdopodobieństwie wystąpienia, róża wiatrów, zmienność prędkości wiatrów nad powierzchnią ziemi	Projektowanie konstrukcji budowlanych, określenie erozji eolitycznej i wpływ na stany morza, modelowanie rozprzestrzeniania się zanieczyszczeń w powietrzu atmosferycznym
Energia kinetyczna deszczu o założonym prawdopodobieństwie wystąpienia	Określenie podatności gruntów na erozję wodną

2.4. Obrazy jako zapis danych czasoprzestrzennych

Macierze czasoprzestrzenne są najczęściej wykorzystywane do sporządzania map warstwicznych lub rastrowych. Popularność tej formy archiwizacji wyników badań czasoprzestrzennych jest związana z łatwością odbioru dużej ilości informacji, jaką można zakodować na płaskim obrazie. Atlasy geograficzne są najlepszym na to dowodem. Na mapie można zakodować rzeźbę terenu, lokalizację obiektów geograficznych, przebieg dróg i linii kolejowych itd.

Współcześnie istnieje wiele metod utrwalania parametrów analizowanego obszaru za pomocą zdjęć. Jest to efekt rozwoju elektroniki i sensorów fotooptycznych, które pozwalają utrwalić dane czasoprzestrzenne w formie obrazu rastrowego zapisywanego numerycznie.

Należy zauważyć, że każde zdjęcie jest formą archiwizacji danych czasoprzestrzennych. Zdjęcie pozwala na utrwalenie stanu danej przestrzeni w chwili jego wykonania. Przy zjawiskach wolnozmiennych możliwe jest określenie stanu danej przestrzeni. Wprowadzenie do badań medycznych aparatu rentgena zrewolucjonizowało chirurgię, a unowocześnienie tej metody w tomografii komputerowej zrewolucjonizowało diagnostykę wielu chorób. Zdjęcia rentgenowskie przyczyniły się do poznania budowy DNA, identyfikacji wiązań chemicznych, poznanie struktur krystalicznych. Zdjęcia z użyciem mikroskopów elektronowych pozwoliły poznać budowę tkanek oraz komórek.

Zdjęcia są wykorzystywane nie tylko w medycynie, ale w wielu dziedzinach techniki i nauki. W badaniach środowiska naturalnego obecnie powszechnie stosuje się zdjęcia satelitarne oraz obrazy uzyskiwane z radarów i lidarów. Współczesna meteorologia i oceanologia nie może już się praktycznie obejść bez zdjęć wykonywanych przez satelity geostacjonarne.

Zdjęcia wykonywane z użyciem sensorów podczerwiennych są wykorzystywane przy badaniach rozprzestrzeniania się ciepła w środowisku. Analiza obrazów powstających w wyniku rozpraszania światła laserów jest wykorzystywana w badaniach molekuł o wymiarach mniejszych od 10^{-9} m, co inspirowało rozwój nanotechnologii.

Dane czasoprzestrzenne jest niezmiernie trudno opisać sumą funkcji zmiennych rzeczywistych. Dlatego przy ich rozpoznaniu i opisie lepsze efekty dają metody probabilistyczne. Modelowanie zmienności danych czasoprzestrzennych metodami stochastycznymi powinno się nazywać predykcją przestrzenną (Magnuszewski, 1999), choć najczęściej ze względów historycznych używa się nazwy geostatystyka. Wynika to z faktu, że metody te znalazły największe zastosowanie przy opracowywaniu danych związanych z badaniami powierzchni Ziemi.

3. Podstawy teoretyczne geostatystyki

3.1. Pojęcie zmiennej zregionalizowanej

Matematyczne podstawy geostatystyki stworzyli Krige (1951), Sichel (1952) oraz Matheron (1962-1963). Od nazwiska prekursora geostatystyki Krige'a często procedury stochastyczne są nazywane krigingiem (Mucha, 1991). Początkowo metody te były wykorzystywane dla potrzeb oceny zasobów złóż mineralnych oraz zmienności składu kopalin. Dzięki pracom Matherona geostatystyka wyodrębniła się jako samodzielna nauka.

Współczesna geostatystyka bazuje na teorii zmiennej zregionalizowanej, którą do nauki wprowadził w 1962 roku Matheron. Jest ona zdefiniowana jako ciągła przestrzennie (lub przestrzennie i czasowo) funkcja probabilistyczna, jedno- lub wielowymiarowa, określona dla wszystkich punktów X_i analizowanej przestrzeni metrycznej D

$$z(X_i) = m(X_i) + \varepsilon(X_i) \quad (9)$$

spełniająca warunki słabej stacjonarności, określone dwoma zależnościami

- a) wartość oczekiwana zmiennej nie zależy od miejsca pomiaru

$$E[z(X_i)] = m(X_i) = m \quad (10)$$

- b) kowariancja jest zależna jedynie od funkcji odległości pomiędzy dwoma punktami przestrzeni D

$$\text{cov}[z(X_1)z(X_1 + \vec{h})] = C(h) \quad (11)$$

gdzie $z(X_i)$ i $z(X_i + \vec{h})$ są odpowiednio wartościami zmiennej zregionalizowanej w punkcie X_i i w punktach odległych o wektor \vec{h} w dowolnym kierunku o długości h a $\varepsilon(X_i)$ jest białym szumem.

Mozna wykazać (Pannatier, 1996), że przy założeniach (10) i (11) zachodzi zależność

$$C(h) = C(0) - \gamma(h) \quad (12)$$

gdzie $\gamma(h)$ jest połową wariogramu (semiwariogramem) wyliczoną z równania

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \cdot D^2 [z(X_i + \vec{h}) - z(X_i)] = \frac{1}{2} \cdot E[z(X_i + \vec{h}) - z(X_i)]^2 \quad (13)$$

w którym D i E są odpowiednio operatorami wariancji i wartości oczekiwanej.

Założenia funkcji zregionalizowanej wynikają z obserwowanych w systemach przyrodniczych zmiennych pól losowych, w których wartości zmiennych losowych sąsiadujące ze sobą w przestrzeni w punktach w tym samym czasie, nie są zmiennymi niezależnymi, ale są skorelowane, przy czym w miarę wzrostu odległości punktów zmniejsza się wartość skorelowania. Dla przykładu, jeżeli pobierzemy próbkę gruntu i określimy w nim zawartość frakcji piaszczystej to można spodziewać się, że w sąsiednich blisko jego położonych innych punktach jest podobny udział frakcji piaszczystej. W miarę wzrostu odległości od tego punktu będziemy obserwować zmianę udziały frakcji piaszczystej w gruncie. Innym przykładem może być rozkład temperatur w pomieszczeniu. Mierząc temperaturę w kolejnych punktach na tej samej wysokości, oddalając się od ściany będziemy obserwować skorelowanie temperatur w punktach sąsiednich dla pomiarów wykonanych w różnym czasie.

Założenie warunku słabej stacjonarności zmiennej zregionalizowanej jest poważnym ograniczeniem przy zastosowaniu metod geostatystycznych w analizie przestrzeni o dużych rozmiarach. Najczęściej nie jest spełniony warunek (10), gdyż wartość oczekiwana jest funkcją miejsca lokalizacji X_i w przestrzeni D . Przykładem na to może być las. Traktując liczbę drzew danego gatunku przypadającą na powierzchnię jednostkową jako zmienną losową, można łatwo w każdym kompleksie leśnym wyodrębnić obszary lasu, w których liczba ta będzie przyjmować wartość w miarę stałą, ale chodząc po lesie w różnych kierunkach wskutek zmian warunków siedliskowych zmienna losowa będzie wykazywać dużą zmienność wartości średniej.

W przypadku, gdy średnią wartość oczekiwaną w danym punkcie można wyliczyć z zależności

$$m(X_i) = \sum_{k=0}^K a_k f_k(X_i) \quad (14)$$

gdzie a_k są współczynnikami wagowymi funkcji $f_k(X_i)$, a zmienna losowa $\varepsilon(X)$ określona dla punktów przestrzeni D wyrażeniem

$$\varepsilon(X_i) = Z(X_i) - \sum_{k=0}^K a_k f_k(X_i) \quad (15)$$

jest białym szumem, mówimy, że zmienna zregionalizowana charakteryzuje się dryftem (Kravchenko i in., 1996; Baxter i Oliver, 2005). Wyrażenie $\sum_{k=0}^K a_k f_k(X_i)$, które najczęściej jest wielomianem, nosi nazwę dryftu. Dryft obrazuje zmienność strukturalną zmiennej zregionalizowanej. Często dryft opisuje się funkcją liniową

$$m(X_i) = a_0 + a_1 y(X_i) \quad (16)$$

W przypadku, gdy nie jest spełniony warunek (15), ale istnieje funkcja $\hat{Z}_R(X)$, dla której zachodzi związek

$$Z(X) = \hat{Z}_R(X) + \varepsilon(X) \quad (17)$$

w którym zmienna losowa $\varepsilon(X)$ spełnia warunki słabej stacjonarności określone zależnościami (10) i (11), to mamy do czynienia ze zmienną zregionalizowaną z trendem (Baxter i Oliver, 2005).

Na początkowym etapie wyboru opisu zmiennej zregionalizowanej powinno się przeprowadzić badania typu rozkładu zbioru wyników. Aby zmienna zregionalizowana spełniała warunki słabej stacjonarności, zmienne losowe powinny mieć rozkłady normalne. W przypadku, gdy analizujemy jednowymiarowy zbiór wyników, który cechuje się rozkładem o dużej skośności, można zastosować przekształcenie lognormalne (Roth, 1998). W tym celu wyliczamy elementy nowego zbioru

$$\hat{Z}(X_i) = \log(Z(X_i) + \beta) \quad (18)$$

gdzie β jest wartością przesunięcia zapewniającą uzyskiwanie przez $\hat{Z}(X_i)$ wartości dodatnich. Gdy nowa zmienna $\hat{Z}(X)$ będzie posiadać rozkład normalny, możemy zastosować dalsze procedury geostatystyczne.

Przy obróbce zdjęć wykorzystuje się kodowanie danych, pozwalające wydzielić obszary, w których obrazy wykazują skorelowanie przestrzenne. Najczęściej do tego celu wykorzystuje się indeks Morana zdefiniowany zależnością (Pausas, 2006)

$$I = \frac{N \cdot \sum_i \sum_j w_{ij} (z_i - \bar{z})(z_j - \bar{z})}{\sum_i \sum_j w_{ij} \sum_i (z_i - \bar{z})^2} \quad (19)$$

gdzie N jest liczbą analizowanych obiektów na powierzchni, z_i i z_j są wartościami analizowanego wskaźnika barwy (atrybutu) dla analizowanych obszarów a w_{ij} są wagami określanymi w następujący sposób $w_{ij} = 1$ gdy obszary przylegają do siebie, $w_{ij} = 0$ dla obszarów nie przylegających oraz $w_{ii} = 0$ dla obszarów tożsamych. Sposób przyjmowania wag obrazuje rys. 1.

Analizowana powierzchnia z podziałem na obszary



		Numer obszaru		
		i		
		1	2	3
Numer obszaru	1	0	1	0
	2	1	0	1
	3	0	1	0


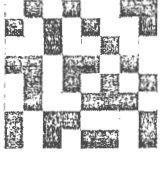
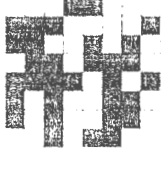
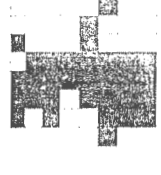
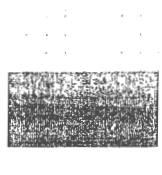
Wartości wag w_{ij}

Rys. 1. Przykład wyznaczania wag w_{ij} przy wyliczaniu indeksu Morana.

W przypadku, gdy indeks Morana jest większy od 0, ma miejsce dodatnia autokorelacja. Przy dodatniej autokorelacji na obrazie występują obszary o skupionych analizowanych atrybutach. W przypadku ujemnej wartości tego indeksu, obraz jest zbudowany z silnie rozproszonych obszarów różniących się analizowaną cechą. Obrazuje to rys. 2.

Wiele danych pochodzących z monitoringu środowiska charakteryzuje się nieciągłością przestrzenną. W tym przypadku sprawdza się hipotezę, czy prawdopodobieństwo wystąpienia określonych wielkości analizowanej zmiennej charakteryzuje się autokorelacją przestrzenną, a zatem ciągłością przestrzenną, co pozwala zastosować metody geostatystyki nieparametrycznej (Deutsch i Journel, 1998; Goovaerts, 1997). Procedury te są oparte na kodowaniu binarnym (0,1) danych pomiarowych, określającym prawdopodobieństwo przekroczenia określonej wartości progowej ustalonej z krzywej kumulacyjnej całego zbioru danych. W wyniku tych obliczeń uzyskuje się kodowaną zmienną zregionalizowaną. Kodowanie binarne może być dokonywane dla różnych wartości progowych dla całego zdyskredytowanego analizowanego obszaru (przestrzeni). Analiza

struktury przestrzennej danych kodowanych pozwala ocenić, czy prawdopodobieństwa z założoną wartością progową w dwóch punktach oddalonych od siebie o wektor \vec{h} znajdują się po przeciwnych stronach wartości progowej.

				
Liczba obiektów białych kontaktujących się z obiektami białymi				
0	16	26	36	52
Liczba obiektów białych kontaktujących się z obiektami czarnymi				
112	78	56	34	8
Liczba obiektów czarnych kontaktujących się z obiektami czarnymi				
0	18	30	42	52
Wartość indeksu Morana				
-1,000	-0,393	0,000	0,0393	0,857

Rys. 2. Wpływ wartości indeksu Morana na obraz powierzchni.

Analiza kodowanych zmiennych zregionalizowanych służy do wyodrębnienia obszarów na analizowanej powierzchni o podobnych cechach. Sposób ten bardzo często jest wykorzystywany przy opracowaniu map ze zdjęć lotniczych i satelitarnych przez geodetów i kartografów. Technika ta jest również stosowana przy wyznaczaniu obszarów, dla których stosuje się różne metody ustalania zmiennych zregionalizowanych lub określenia sposobu próbkowania badanej przestrzeni. Ma to duże znaczenie przy ustalaniu punktów monitoringu środowiska naturalnego.

3.2. Podstawowe równania krigingowe

W praktyce, ze względów ekonomicznych jak i analitycznych, badania (pomiaru) środowiska są prowadzone dla ograniczonej liczby losowo wybranych punktów analizowanej przestrzeni. Wartości badanej zmiennej zregionalizowanej są zatem rozpoznane tylko w obrębie punktów badań, o znikomym wymiarach w porównaniu z całą analizowaną przestrzenią (Cressie, 1991; Isaaks i Srivastava, 1989). Wynik każdego badania można

przyrównać do wyciągnięcia pojedynczej realizacji zmiennej losowej $Z(X_i)$ ze zbioru realizacji zmiennej zregionalizowanej $z(X)$, określonej w przestrzeni metrycznej D , przy czym zmienna losowa $Z(X_i)$ jest zawsze obciążona błędami pomiarowymi.

Macierz wyników badań (pomiarów) daje dyskretny obraz zmiennej zregionalizowanej $z(X)$. Celem analizy geostatystycznej jest aproksymacja wartości badanych wskaźników i parametrów w oparciu o macierz wyników na przestrzeń nie objętą badaniami.

Ponieważ badania prowadzi się tylko w wybranych punktach, więc semiwariogram, który jest podstawową funkcją charakterystyczną geostatystyki, wylicza się z zależności (Mucha, 1991; Stach, 2002)

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N_h} \sum_{i=1}^{N_h} [Z(X_i + \vec{h}) - Z(X_i)]^2 \quad (20)$$

gdzie N_h to liczba par punktów, dla których wzajemna odległość wynosi h , $Z(X_i)$ to wartość analizowanego parametru (wskaźnika) określona w punkcie X_i a $Z(X_i + \vec{h})$ oznacza wartość parametru w punkcie odległym o h w dowolnym kierunku od punktu X_i .

Semiwariogram służy w metodach kriginu do szacowania wartości analizowanego parametru (wskaźnika) $Z^*(X_0)$ w nowym nie objętym pomiarami punkcie X_0 w oparciu o liniowy związek określony zależnością (Kitanidis, 1997; Pannatier 1996; Wackernagel 1998)

$$Z^*(X_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot Z(X_i) \quad (21)$$

gdzie λ_i są to współczynniki wagowe kriginu, które należy ustalić na podstawie uzyskanych wyników badań.

Przy obliczaniu wartości λ_i przyjmuje się ograniczenie

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (22)$$

wynikające z konieczności spełnienia warunku nieobciążoności estymatora, który jest spełniony, gdy wartości oczekiwane wyników pomiarów i wartości obliczanych są sobie równe

$$E[Z^*(X_0) - Z(X_0)] = E\left[\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(X_i)}_{=1} - Z(X_0) \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i}_{=1}\right] = E[Z(X_i) - Z(X_0)] = 0 \quad (23)$$

Wariancja błędu oszacowania wyniesie

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon^2 &= E\left[(Z^*(X_0) - Z(X_0))^2\right] = \\ &= -\gamma(\overline{X_0 X_0}) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma(\overline{X_i X_j}) + 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(\overline{X_i X_0}) \end{aligned} \quad (24)$$

gdzie $|\overline{X_i X_j}|$ oznacza długość odcinka $\overline{X_i X_j}$ a $|\overline{X_i X_0}|$ - długość odcinka pomiędzy punktem X_i a punktem X_0 , w którym jest szacowana wartość $Z(X_0)$. Z warunku, że wariancja błędu oszacowania powinna być minimalna, poszukuje się minimum wariancji stosując metodę Lagrange'a

$$\frac{\delta}{\delta \lambda_i} \left(\sigma_\varepsilon^2 - 2 \cdot \mu \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) = 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n \quad (25)$$

gdzie μ jest mnożnikiem Lagrange'a.

Ostatecznie uzyskuje się układ $n + 1$ podstawowych równań krigingowych

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma(\overline{X_i X_j}) + \mu = \gamma(\overline{X_0 X_j}) & \text{dla } j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \end{cases} \quad (26)$$

rozwiązanie których pozwala ustalić wszystkie poszukiwane wartości λ_i oraz μ .

Kriging można stosować zarówno w oparciu o pomierzone wartości, jak również dla danych kodowanych (*Indicator kriging*)

3.3. Obliczanie semiwariogramu empirycznego

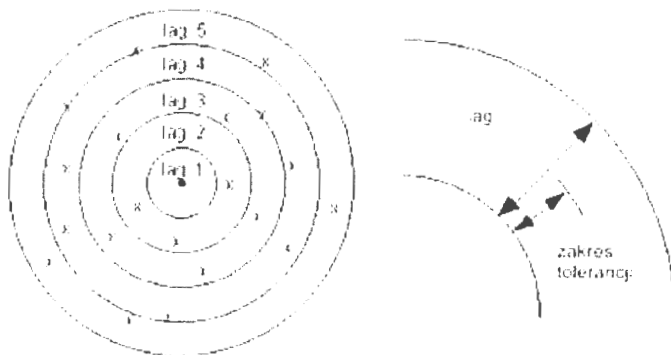
Semiwariogram, jak wynika z równania (18), jest funkcją odległości pomiędzy punktami, w których wykonane były badania analizowanych parametrów lub wskaźników. Do obliczeń semiwariogramów empirycznych stosuje się różne algorytmy.

W roku 1991 pojawił się pierwszy ogólnie dostępny program komputerowy Geo-EAS wraz z kodami źródłowymi do analiz geostatystycznych udostępniony przez Agencję Ochrony Środowiska USA (EPA USA). Opis tego programu można znaleźć w pracy Englunda i Sparksa (1991)

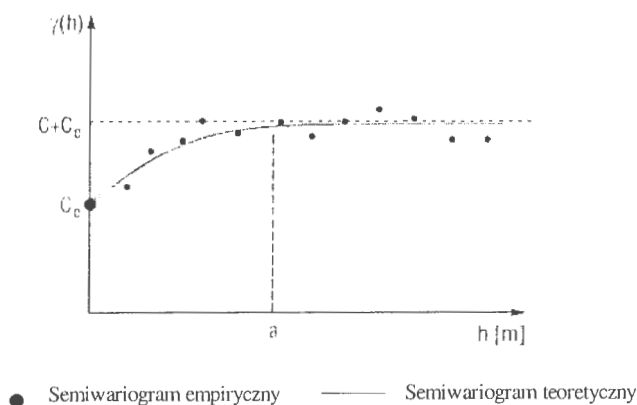
Szczegółowy opis podstawowych algorytmów z zakresu geostatystyki można znaleźć również w bibliotece oprogramowania geostatystycznego GsLibv.2, opracowanej na Uniwersytecie Stanforda w Kalifornii (USA), a kody źródłowe znajdują się na płycie CD dołączonej do podręcznika Deutscha i Journela (1998). Na stronach [http //ekofisk.stanford.edu/SCRFweb/GSLIB/index.html](http://ekofisk.stanford.edu/SCRFweb/GSLIB/index.html) oraz [http //www.gslib.com/](http://www.gslib.com/) można znaleźć również kody źródłowe nowszych algorytmów obliczeniowych.

Najczęściej całą analizowaną przestrzeń dzieli się na obszary grupowania danych stosując stały krok Δh (ang. *lag*) przyrostu wartości h , uwzględniając pewien zakres tolerancji (rys. 3). Następnie dla par utworzonych z punktów bazowych i leżących w obszarach grupowania wylicza się wartość semiwariogramu kolejno dla przyjętych wartości h .

Ze względu na dyskretny charakter zbioru punktów doświadczalnych, semiwariogram empiryczny przyjmuje formę funkcji dyskretnej (rys. 4).



Rys. 3. Sposób grupowania punktów podczas obliczania semiwariogramu empirycznego.



Rys. 4. Przykład wariogramu empirycznego oraz charakterystyczne wartości semiwariogramów ograniczonych
 C_0 – wariancja nuggatowa (*nugget effect*), a – zasięg semiwariogramu (*range of influence semivariogram*), $C + C_0$ – wariancja progowa (*sill variance*).

Najczęściej do ustalania semiwariogramu empirycznego stosuje się metodę najmniejszych kwadratów. Procedury obliczeniowe wymagają zwykle zastosowania aproksymacji wazonej, ze względu na różną dokładność oceny poszczególnych wartości semiwariogramu empirycznego. Wynika to z różnej liczebności par danych, na podstawie których są wyznaczone kolejne punkty semiwariogramu. Najczęściej pomija się wartości semiwariogramu określone dla małej liczby par punktów przyjmując, że są one obciążone zbyt dużym błędem.

Obliczenia semiwariogramów empirycznych a następnie aproksymację modeli teoretycznych przeprowadza się dla różnych kierunków wektora \vec{h} . W przypadku, gdy semiwariogramy empiryczne różnią się zasadniczo dla par punktów utworzonych przy zmianie kierunku wektora \vec{h} , mamy do czynienia z anizotropią zmiennej zregionalizowanej. Anizotropia jest obserwowana bardzo często w kierunku pionowym przestrzeni trójwymiarowych przy badaniu struktur geologicznych, co jest związane ze zmiennością procesów odpowiedzialnych za ich formowanie. Stwierdzenie anizotropii ma duże znaczenie dla rozpoznania i charakterystyki badanego parametru, ale jednocześnie komplikuje dalszą procedurę obliczeniową.

Przy dużej liczbie punktów pomiarowych klasyczny algorytm obliczania semiwariogramu jest czasochłonny. Dlatego przy dużych bazach danych stosuje się algorytmy pozwalające ograniczyć liczbę koniecznych obliczeń. Należą do nich procedury Sgsim i Sisim (Deutsch i Journel, 1998) oraz Iksim (Ying, 2000).

Semiwariogram empiryczny nie może być użyty bezpośrednio do predykcji wartości zmiennej zregionalizowanej. Dla osiągnięcia tego celu jest konieczne ustalenie semiwariogramu teoretycznego będącego aproksymacją semiwariogramu empirycznego.

3.4. Semiwariogramy teoretyczne

Na podstawie wyznaczonych dyskretnych punktów semiwariogramu empirycznego $\gamma(h)$ szuka się ciągłej funkcji aproksymującej te punkty. Funkcja ta, stanowiąc model matematyczny semiwariogramu empirycznego, nosi nazwę semiwariogramu teoretycznego.

Najczęściej semiwariogramy empiryczne $\gamma(h)$ przy małych wartościach h dążą do pewnej wartości C_0 , noszącej nazwę stałej efektu samorodków (*nugget effect*). Na wystąpienie efektu samorodka wpływają w pewnym stopniu błędy systematyczne wykonywanych pomiarów i analiz, ale główną jego przyczyną jest zmienność analizowanego parametru (wskaźnika), jaka ma miejsce przy małych odległościach h w porównaniu do rozmiarów analizowanej przestrzeni D . Nazwa tego efektu wywodzi się od samorodków złota, które trafiają się lokalnie w stosunkowo jednorodnych piaskach występujących na dużych przestrzeniach terenów złotodajnych.

Tabela 2. Najczęściej stosowane semiwariogramy teoretyczne do modelowania semiwariogramów empirycznych (na rysunkach przedstawiono przykładowe przebiegi semiwariogramów dla $C=3,0$; $C_0 = 0,6$; $a = 0,6$).

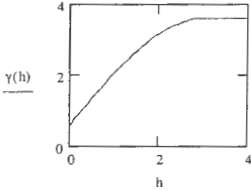
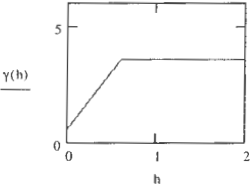
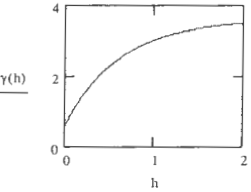
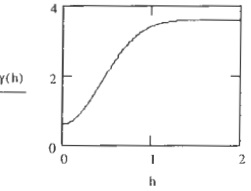
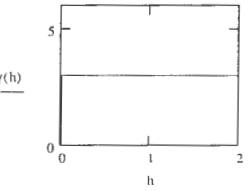
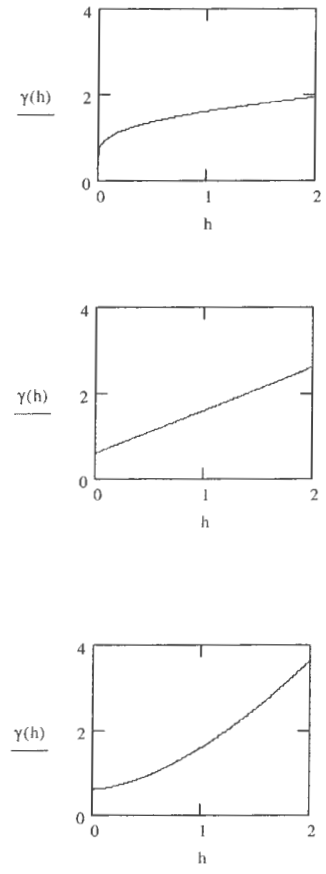
Model	Przykładowy wariogram
<p style="text-align: center;">Sferyczny Matherona</p> $\gamma(h) = \begin{cases} C \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{h}{a} - \frac{h^3}{2a^3} \right] + C_0 & h \leq a \\ C + C_0 & h \geq a \end{cases} \quad (28)$	
<p style="text-align: center;">Liniowy Matherona</p> $\gamma(h) = \begin{cases} \frac{C}{a}h + C_0 & h \leq a \\ C + C_0 & h \geq a \end{cases} \quad (29)$	
<p style="text-align: center;">Wykładniczy</p> $\gamma(h) = C \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{h}{a}\right) \right] + C_0 \quad (30)$	
<p style="text-align: center;">Gaussa</p> $\gamma(h) = C \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{h^2}{a^2}\right) \right] + C_0 \quad (31)$	
<p style="text-align: center;">Efektu samorodka (białego szumu)</p> $\gamma(h) = \begin{cases} 0 & h = 0 \\ C & h > 0 \end{cases} \quad (32)$	

Tabela 3. Potęgowe semiwariogramy teoretyczne do modelowania semiwariogramów empirycznych (na rysunkach przedstawiono przykładowe przebiegi semiwariogramów dla $C=3,0$; $C_0 = 0,6$; $a = 0,6$).

Model	Przykładowy wariogram
<p style="text-align: center;">Potęgowy</p> $\gamma(h) = C_0 + C \cdot h^\lambda \quad 0 < \lambda < 2 \quad (33)$	 <p>The figure contains three separate plots of $\gamma(h)$ versus h. Each plot has a y-axis labeled $\gamma(h)$ with tick marks at 0, 2, and 4, and an x-axis labeled h with tick marks at 0, 1, and 2. The top plot shows a concave curve starting at $(0, 0.6)$ and ending at $(2, 2.6)$. The middle plot shows a straight line starting at $(0, 0.6)$ and ending at $(2, 2.6)$. The bottom plot shows a convex curve starting at $(0, 0.6)$ and ending at $(2, 3.8)$.</p>

Wyróżniamy ograniczone i nieograniczone semiwariogramy teoretyczne (Mucha, 1991; Nowakowska-Wilczyńska, 2006). W przypadku semiwariogramów ograniczonych przy pewnej wartości odległości h wariancja (względnie semiwariancja) osiąga wartość progową $C + C_0$ (*sill variance*) i przy dalszym zwiększaniu odległości h ma wartość stałą (rys. 4). Dystans, powyżej którego semiwariancja jest wartością stałą, nazywa się zasięgiem oddziaływania a (*range of influence semivariogram*). Parametr C jest nazywany wariancją strukturalną i określa wartość wzrostu semiwariancji od poziomu nuggetowego C_0 do granicy zasięgu oddziaływania a . Najczęściej używane semiwariogramy ograniczone zostały przedstawione w tabeli 2.

W przypadku, gdy $\gamma(h)$ jest funkcją rosnącą dla wszystkich wartości h , mamy do czynienia z semiwariogramem nieograniczonym. Semiwariogramy nieograniczone najczęściej opisuje się funkcją potęgową, przy czym wykładnik potęgi jest mniejszy od 2, co wynika z definicji wariancji (tabela 3).

Z definicji wariancji wynika warunek

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\gamma(h)}{h^2} \rightarrow 0 \quad (27)$$

W przypadku, gdy punkty semiwariogramu empirycznego w miarę wzrostu h wykazują szybszy wzrost, niż to wynika z funkcji h^2 , zmienna zregionalizowana charakteryzuje się dryfem lub występuje w niej deterministyczna funkcja trendu.

Dopasowanie wybranego modelu teoretycznego do opracowanego uprzednio semiwariogramu empirycznego polega na doborze optymalnej kombinacji parametrów przyjętego modelu. Kitanidis (1997) zaleca na tym etapie, jak i już przy dobieraniu typu modelu teoretycznego, korzystanie z dodatkowej wiedzy eksperckiej. Typ modelu jak i jego parametry powinny pozostawać w zgodzie z ogólną wiedzą o modelowanym zjawisku. Jeśli na rozpatrywanym obszarze nie może występować zjawisko samorodka, parametrowi C_0 należy przypisywać a priori wartość 0.

Wartości współczynników w semiwariogramach teoretycznych, po przyjęciu typu modelu, najczęściej poszukuje się metodą najmniejszych kwadratów.

3.5. Najczęściej stosowane rodzaje krigingu

Opisana w rozdziale 3.2 procedura nosi nazwę krigingu zwyczajnego (*ordinary kriging*). Odmianą krigingu zwyczajnego jest kriging prosty (*simple kriging*), który ma zastosowanie, gdy dla analizowanej przestrzeni znana jest wartość średnia zmiennej zregionalizowanej. W tym wypadku zmienna zregionalizowana jest określona równaniem

$$Z(X) = Y(X) + m \quad (34)$$

Znajomość średniej zmiennej zregionalizowanej powoduje, że w kringu prostym nie musi być spełniony warunek (22) dotyczący sumy wag λ_i . Ogólne równanie kringowe ulega uproszczeniu do postaci

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma(\overline{X_i X_j}) = \gamma(\overline{X_0 X_j}) \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, n \quad (35)$$

Kriging prosty jest stosowany, gdy wykonujemy obliczenia na zbiorze danych przekształconych anamorfozą Gaussa, w wyniku czego zostaje ustalona średnia zmiennej zregionalizowanej dla całego analizowanego obszaru lub przestrzeni (Wackernagel, 1998).

W kringu blokowym (*block kriging*) w miejsce szacowania wartości w punktach dokonuje się oszacowania zmiennej zregionalizowanej w oparciu o szacowanie średniej dla wybranego ograniczonego obszaru (objętości), nieskończenie małego w porównaniu z całą powierzchnią analizowanego obszaru (objętością analizowanej przestrzeni). Cały obszar zostaje podzielony na n bloków, dla których określa się wartości średnie analizowanych parametrów lub wskaźników. Układ równań kringowych przyjmuje postać

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma(\overline{X_i X_j}) + \mu = \gamma(\overline{A_0 X_j}) & \text{dla } j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \end{cases} \quad (36)$$

gdzie

$\gamma(\overline{X_i X_j})$ – średnia wartość wariogramu dla długości odcinków $\overline{X_i X_j}$, obliczona na podstawie przyjętego modelu teoretycznego wariogramu empirycznego dla analizowanego parametru lub wskaźnika;

$\gamma(\overline{AX_j})$ średnia wartość wariogramu dla długości wszystkich odcinków łączących punkt pomiaru X_j z blokiem A_0 , dla którego ustalana jest wartość analizowanego parametru lub wskaźnika;
 μ mnożnik Lagrange'a.

W przypadku krigingu z dryfem zewnętrznym (*kriging with external drift*) rozwiązuje się układ równań

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{KED} \gamma_R(\overline{X_i X_j}) + \psi_0(X_0) + \psi_1(X_0)y(X_i) = \gamma_R(\overline{X_0 X_j}) & \text{dla } j=1, 2, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^{KED} = 1 \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j^{KED} y(X_j) = y(X_0) \end{cases} \quad (37)$$

gdzie

n liczba punktów w najbliższym sąsiedztwie punktu X_i , przy czym musi być spełniony warunek $n \ll N$, gdzie N jest liczbą wszystkich punktów w analizowanym obszarze;
 λ_j^{KED} poszukiwane współczynniki krigingu z dryfem zewnętrznym;
 $y(X)$ zmienna losowa dryftu;
 $\gamma_R(\overline{X_i X_j})$ wartość semiwariogramu teoretycznego dla długości odcinków $\overline{X_i X_j}$, ustalonego w oparciu o różnicę pomiędzy wartościami zmierzonymi a ustalonymi w oparciu o zmienną losową dryftu;
 $\psi_0(X_0), \psi_1(X_1)$ współczynniki Lagrange'a.

Wyżej wymienione rodzaje krigingu można stosować dla zmiennych mających wymiar fizyczny, jak i zmiennych kodowanych.

3.6. Etapy badań z wykorzystaniem technik geostatystycznych

Metoda krigingu polega na szacowaniu przestrzennym wartości parametrów na podstawie wyników badań uzyskanych w opomiarowanych punktach. Należy zauważyć, że estymowane parametry mają wartości dokładne wyłącznie w punktach, dla których posiadamy pomiary. Wartości w pozostałych punktach płaszczyzny lub przestrzeni są symulowane w oparciu o ustalone w czasie obliczeń wagi krigingu oraz funkcje dryftu lub trendu. Wiarygodność uzyskanego modelu zależy od szybkości zmian czynników decydujących o wartościach pola losowego. Każde odwzorowanie pola (przestrzeni) uzyskane za pomocą krigingu będzie jednym z wielu możliwych obrazów pola (przestrzeni) losowej. Wyniki krigingu będą tym bardziej zbliżone do wartości rzeczywistych w punktach nie opomiarowanych, im lepiej na etapie obliczeń wag krigingu punkty, w których wykonywane były pomiary, będą uwzględniać te parametry i czynniki, które wpływają na badaną zmienną zregionalizowaną.

Mapy sporządzane z zastosowaniem różnych procedur krigingowych będą się pomiędzy sobą różnić. Obrazuje to tabela 4, w której przedstawiono wyniki symulacji zawartości azotu mineralnego dla wybranego obszaru, jakie otrzymali Baxter i Oliver (2006).

Zmienność obrazów nie dyskwalifikuje metody krigingu do praktycznych zastosowań. Należy zauważyć, że wszystkie modele, które są wykonywane na drodze symulacji komputerowych, są obciążone błędem. Ważne jest, czy jesteśmy w stanie oszacować błąd naszej prognozy oraz czy uzyskane modele mają praktyczne zastosowanie.

Nie można do metod geostatystycznych podchodzić czysto instrumentalnie, to znaczy traktować każdy uzyskany wynik jako wiernie odtworzenie obszaru badań. Bez znajomości istoty procesów wpływających na analizowane parametry (wskaźniki), na analizowanym obszarze nie można zaplanować właściwie eksperymentu, który pozwoliłoby z powodzeniem odwzorować prawdopodobny obraz rzeczywistości.

Przy zastosowaniu krigingu dla potrzeb inżynierskich i poznawczych prace prowadzi się w pewnych charakterystycznych etapach. W tabeli 5 przedstawiono fazy prac z wyszczególnieniem charakterystycznych dla nich zakresów wykonywanych czynności i analiz.

Tabela 4. Przykład wpływu zastosowanej metody krugingu na obraz zmian analizowanych wartości (opracowano na podstawie Baxter i Oliver, 2006).

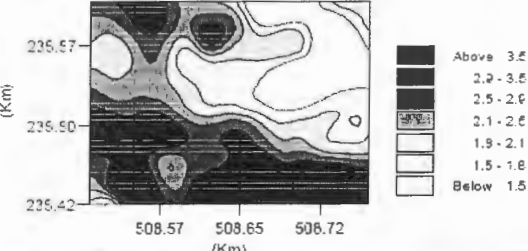
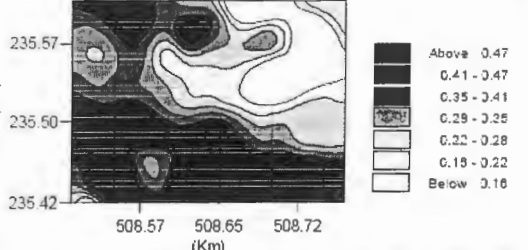
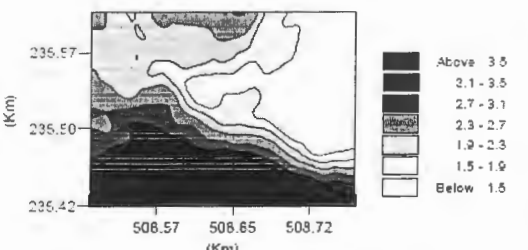
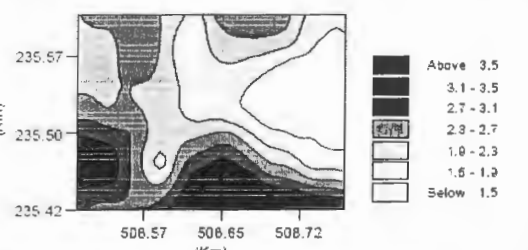
Mapa rastrowa	Zastosowany rodzaj krugingu
	<p>Kruging zwyczajny (ordinary kriging)</p>
	<p>Kruging lognormalny (lognormal kriging)</p>
	<p>Kruging z dryfem zewnętrznym (kriging with external drift)</p>
	<p>Kruging z wydzielonym trendem (regression kriging)</p>

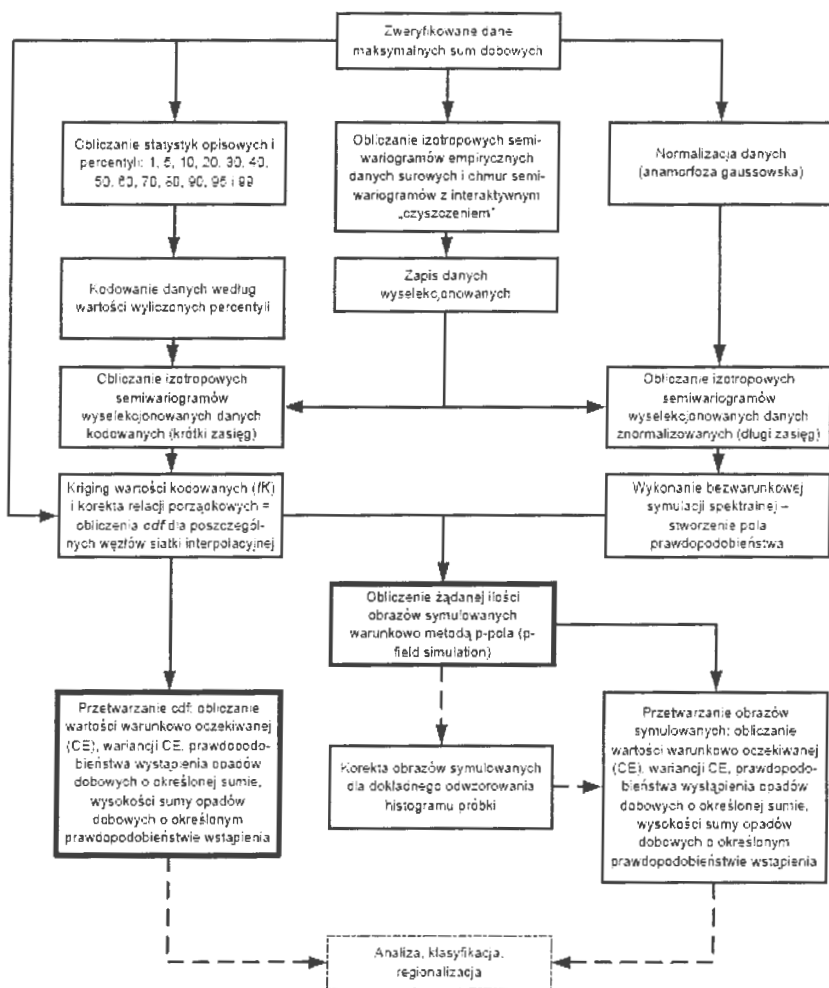
Tabela 5. Etapy prac przy zastosowaniu kriginu dla potrzeb aplikacyjnych.

Etap rozpoznania	Główne prace, które należy wykonać
Określenie celu i wykonanie projektu oraz badań parametrów (wskaźników) w analizowanej przestrzeni	Określenie metodyki badań i sposobu interpretacji wyników. Sprawdzenie dostępności map numerycznych oraz spektrofotometrycznych i radiometrycznych zdjęć szczególnie zdjęć satelitarnych. Określenie czynników wpływających na badane zmienne zregionalizowane.
Wstępne opracowanie danych	W przypadku wykorzystywania zdjęć satelitarnych zachodzi potrzeba transformacji danych z układu współrzędnych sferycznych na układ współrzędnych płaskich. Dotyczy to również wykonywania analiz pochodzących z dużych obszarów powierzchni Ziemi. Sprawdzenie statystycznych rozkładów prób empirycznych. Ustalenie czy poszczególne analizowane parametry lub wskaźniki nie wykazują skorelowania. Sprawdzenie możliwości zastosowania transformacji lognormalnej zbioru wyników badań. Kodowanie zmiennych zregionalizowanych lub transformacja ich anamorfozą Gaussa.
Modelowanie zmienności przestrzennych	Ustalenie semiwariogramów empirycznych i teoretycznych. Ustalenie kowariogramów empirycznych. Ustalenie czy zmienne zregionalizowane charakteryzują się dryftem zewnętrznym. Sprawdzenie występowania trendów. Dobór odpowiednich metod kriginu.
Kriging	Ustalenie wag kriginu, dla różnych semiwariogramów teoretycznych. Poszukiwanie zmiennej zregionalizowanej z zastosowaniem kokriginu. Walidacja modeli kriginu w oparciu o współczynniki korelacji zbioru pomiarów i prognoz uzyskanych z kriginu. Uwzględnienie anizotropowości. Przy dużych obszarach (przestrzeniach) symulacje z zastosowaniem kriginu na zmiennych kodowanych
Symulacja przestrzenna przy określonych warunkach	Sporządzanie map warstwicznych i rastrowych w układzie 2D z zastosowaniem wybranych modeli kriginowych. Symulacja zmienności przestrzennej z zastosowaniem modeli 3D
Analiza niepewności	Sprawdzenie poprawności uzyskanych wyników. Porównanie uzyskanych wyników symulacji dla punktów, w których wykonane były pomiary, ale nie użyto ich przy ustalaniu modeli z wynikami eksperymentalnymi. Ustalenie zmienności parametrów kriginu dla zadanych prawdopodobieństw przewyższenia błędu ich estymacji.

Na rys. 5 przedstawiono schemat stosowany przez Stacha (2006) przy opracowaniu danych o opadach atmosferycznych, z zastosowaniem kriginu danych kodowanych.

Kriging daje dobre rezultaty, gdy badane są małe powierzchnie lub przestrzenie. Wiarygodność odwzorowania struktur maleje w miarę wzrostu odległości pomiędzy punktami

pomiarowymi oraz wzrostem symulowanych powierzchni lub przestrzeni. W tym ostatnim wypadku należy sprawdzić, stosując kodowanie zmiennych przestrzennych, czy występują obszary o quasi stałej autokorelacji przestrzennej. Bardzo cennym narzędziem badawczym jest również kokriging.



Rys. 5. Schemat analizy danych stosowany przez Stacha (2006) przy ustalaniu pola prawdopodobieństwa maksymalnych opadów dobowych (przerywaną linią zaznaczono czynności wykonywane opcjonalnie) (cdf oznacza warunkową kumulacyjną funkcję rozkładu prawdopodobieństwa).

4. Kokriging

Wiele parametrów, które są kontrolowane względnie mierzone, jest ze sobą skorelowanych. Wykonanie jednych badań jest tanie i szybkie, inne wymagają długich procedur oraz specjalistycznej aparatury, przez co koszt ich wykonania jest wysoki. Wykazanie skorelowania wyników jednych oznaczeń z innymi umożliwi obniżenie kosztów prowadzenia monitoringu czy rozpoznania danej przestrzeni.

Przykładem danych skorelowanych może być pomiar barwy akwenów wód śródlądowych i powierzchni użytków rolnych i leśnych. Chlorofil *a* ma maksimum absorpcji fal widzialnych przy długości 680 nm. Wykonując zdjęcia lotnicze lub satelitarne w zakresie tej długości fal elektromagnetycznych uzyskuje się skorelowanie pomiędzy zawartością chlorofilu *a* i intensywnością barwy w poszczególnych punktach powierzchni, gdzie występuje szata roślinna (powierzchnia ziemi) lub rozwijają się glony (akweny wodne). Można w tym przypadku obniżyć koszty wykonywania badań niezbędnych dla określenia przestrzennej zmienności ilości biomasy, wielkości wiązania dwutlenku węgla i produkcji tlenu przez rośliny w okresie dnia oraz produkcji dwutlenku węgla i zużycia tlenu w okresie nocy.

Znajomość związków korelacyjnych pomiędzy dwoma wskaźnikami analizowanej przestrzeni pozwala ograniczyć ilość punktów kontrolnych w zakresie tego wskaźnika lub parametru, który charakteryzuje się większą kosztocłonnością, i zwiększyć liczbę punktów kontrolnych, w których prowadzi się pomiary wskaźników tanich do wykonania. W monitoringu środowiska najczęściej eliminuje się liczbę punktów, w których prowadzi się pomiary *on-line*, na rzecz zwiększenia ilości punktów kontrolnych, w których kontroluje się wybrane wskaźniki zanieczyszczeń metodami biernymi, pozwalającymi określić średni poziom zanieczyszczeń w danym punkcie w określonym przedziale czasu.

Przy opracowaniu zmiennych zregionalizowanych wskaźników skorelowanych wykorzystuje się kokriging.

W przypadku dwóch skorelowanych wskaźników u i v dla punktów, w których prowadzi się jednocześnie badania wartości Z_u i Z_v , poszukuje się krzyżowego semiwariogramu (*cross-semivariogram*) empirycznego wyliczanego równaniem

$$\hat{\gamma}_{uv}(h) = \frac{1}{2m_h} \sum_{i=1}^{m_h} [Z_u(X_i) - Z_u(X_i + \bar{h})] \cdot [Z_v(X_i) - Z_v(X_i + \bar{h})] \quad (38)$$

gdzie m_h jest liczbą par punktów odległych od siebie o h . Wyznaczanie krzyżowego semiwariogramu teoretycznego $\gamma_{uv}(h)$ jest znacznie trudniejsze, niż modelowanie semiwariogramu funkcji autowariancji zmiennej zregionalizowanej. Krzyżowy semiwariogram empiryczny może przyjmować zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne. Najczęściej $\gamma_{uv}(h)$ modeluje się złożoną funkcją liniową (Baxter i Oliver, 2006)

$$\gamma_{uv}(h) = \sum_{k=1}^K b_{uv}^k \cdot g_k(h) \quad (39)$$

gdzie b_{uv}^k są wariancjami nuggatowymi lub progowymi ograniczającymi niezależne składniki semiwariogramów $g_k(h)$.

Przy zastosowaniu kokrigingu zwyczajnego do szacowania wartości analizowanego parametru (wskaźnika) $\hat{Z}(X_0)$ w punkcie X_0 wykorzystuje się liniową zależność w postaci

$$\hat{Z}_u(X_0) = \sum_{l=1}^V \sum_{i=1}^{n_l} \lambda_{il} Z_l^{OK}(X_i) \quad (40)$$

gdzie V przyjmuje wartości $l = 1, 2, \dots, V$ dla punktów, w których poszukuje się wartości wskaźnika u , a indeks i oznacza punkty (których jest n_l) będące w sąsiedztwie punktu X_0 , dla których były mierzone wartości zmiennych l , przy czym

$$\sum_{i=1}^{n_l} \lambda_{il} = \begin{cases} 1 & l = u \\ 0 & l \neq u \end{cases} \quad (41)$$

Ostatecznie dla kokrigingu zwykłego uzyskuje się układ równań analogiczny do układu równań krigingowych (Deutsch i Journel, 1998).

5. Programy komputerowe do obliczeń geostatystycznych

W roku 1995 Gregoire Dubois uruchomił internetową listę dyskusyjną poświęconą geostatystyce. Duże zainteresowanie tą tematyką spowodowało, że przekształciła się ona z czasem w stronę internetową <http://www.ai-geostats.org/> Unii Europejskiej (European Commission Directorate General Joint Research Centre). Na stronie tej można znaleźć linki do stron internetowych niekomercyjnych i komercyjnych programów komputerowych oraz do publikacji związanych z praktycznymi zastosowaniami metod geostatystycznych.

Wśród programów niekomercyjnych należy wyróżnić oprogramowanie do analiz dwuwymiarowych danych przestrzennych VARIOWINv.2.21, opracowane na Uniwersytecie w Lozannie (Szwajcaria). Opis tego programu można znaleźć w pracy Pannatiera (1996) oraz na stronie <http://www-sst.unil.ch/research/variowin/index.html>.

Niekomercyjnym program do estymacji wariogramu i predykcji przestrzennej z oceną błędów VESPERv.1.6 (Variogram Estimation and Spatial Prediction with ERror) został opracowany przez Australian Centre for Precision Agriculture (ACPA), University of Sydney, (Australia). Jego opis można znaleźć w pracy Minasny i in. (2005) oraz na stronie internetowej <http://www.usyd.edu.au/su/agric/acpa/vesper/vesper.html>.

Jednym z podstawowych programów w tym obszarze jest pakiet GSLIB, będący aplikacją związaną z teorią geostatystyki i podstawowymi koncepcjami geostatystycznymi, które sięgają kilkudziesięciu lat wstecz. Dotyczą one funkcji losowych, stacjonarności, kowariancji, przestrzennej zmienności i ciągłości, jak również konstrukcji i modelowania wariogramów. Jedna z części pakietu jest poświęcona zagadnieniom krigingu, natomiast spora część oprogramowania jest poświęcona symulacji stochastycznej, to znaczy takim ogólnie znanym algorytmom, jak sekwencyjna symulacja gaussowska, algorytm dekompozycji LU, sekwencyjna symulacja wskaźnikowa, czy symulacja Markowa-Bayesa. Oddzielna część pakietu jest poświęcona programom graficznym, które stanowią bardzo ważną część w każdym oprogramowaniu dotyczącym geostatystyki.

Również popularnym i często stosowanym programem jest SURFER, będący powszechnie dostępną na rynku aplikacją do różnorodnych obliczeń geostatystycznych działającą w systemie operacyjnym WINDOWS. Aplikacja umożliwia między innymi także przeprowadzanie obliczeń krigingowych oraz tworzenie różnego rodzaju map dla zmiennych środowiskowych, przy czym główny nacisk jest położony raczej na możliwości związane ze stroną techniczną tworzenia map, natomiast mniej na tworzenie różnorodnych możliwości

pracy nad modelami wariogramów w sensie doboru rodzaju modelu, szacowania wartości jego parametrów i czy definiowania własnych funkcji modelujących.

W tabeli 6 przedstawiono listę najbardziej zaawansowanych obecnie standardowych programów do analizy danych geostatystycznych.

Tabela 6. Komercyjne programy do analizy geostatystycznej.

Nazwa programu	Strona internetowa
ISATIS	http //www.geovariances.com/
SURFER	http //www.goldensoftware.com/
SURGE	http //www.geocities.com/miroslavdressler/surgemain.htm
LYNX	http //www.lynxgeo.com/
GEOSTATSOFFICE	http //www.ibrae.ac.ru/~mkanev/eng/Software.html
DATAMINE	http //www.datamine.co.uk/
GEOSTOKOS TOOLKIT	http //www.stokos.demon.co.uk/toolkit.htm
GEOSTAT	http //www.geostat.com/
GS+	http //www.gammadesign.com/
GSLIB	http://www.pe.utexas.edu/Geosci/Software/GSLIB/gslib.html
SAGE2001	http //www.isaaks.com/

W dalszym ciągu zostanie opisany program KRIPOS, opracowany w Instytucie Badań Systemowych PAN jako oprogramowanie służące do obliczeń wariogramów empirycznych, tworzenia ich modeli matematycznych i wykonywania obliczeń krigingowych z możliwością wprowadzania, zmieniania i analizy statystycznej modeli. Program posiada własny interfejs graficzny umożliwiający wykreślanie map warstwicznych w układach współrzędnych 2D i 3D, kolorowych i czarno-białych.

6. Opis pakietu KRIPOS: KRiging POMiarów Srodowiskowych

Dokumentami programu są środowiskowe dane pomiarowe oraz dane sterujące obliczeniami. Opcja menu **Plik/Otwórz** otwiera wcześniej zapisany dokument z danymi pomiarowymi, przy czym standardowe dokumenty pakietu KRIPOS, to pliki z rozszerzeniem *.krp. Dokumenty z danymi pomiarowymi mogą być też przygotowane w postaci plików tekstowych (*.txt) lub plików Excela (*.xls). Ich wczytanie następuje wówczas za pomocą opcji **Plik/Nowy** a następnie **Wczytaj dane**.

Standardowy sposób postępowania przy wykonywaniu obliczeń aproksymacyjnych jest następujący:

- Wczytanie pomiarów środowiskowych z pliku standardowego, tekstowego lub pliku Excela.
- Ustawienie właściwych parametrów w tablicy pomiarów.
- Ustawienie parametrów wariogramu.
- Uruchomienie obliczeń wariogramu przez naciśnięcie przycisku **Zastosuj**.
- Przejście do zakładki **Wariogram wynikowy** i ocena jakościowa wyświetlonego wariogramu.
- Przejście do zakładki **Modele wariogramu**, wybranie odpowiedniego modelu i uruchomienie obliczeń krigingowych przez naciśnięcie przycisku **Zastosuj**.

W programie są wyświetlane następujące zakładki funkcyjne:

1. **Dane wejściowe** – wczytanie danych pomiarowych i ustawienia danych sterujących obliczeniami.
2. **Wariogramy kierunkowe** – obliczenie i prezentacja na wykresach od jednego (w przypadku kriginu bezkierunkowego) do dziewięciu (w przypadku kriginu kierunkowego) wariogramów empirycznych.
3. **Wariogram wynikowy** – prezentacja na wykresach obłoku danych pomiarowych oraz obliczonego wariogramu empirycznego.
4. **Modele wariogramu** – wyznaczenie i prezentacja na wykresach modeli wariogramu empirycznego dla ośmiu różnych funkcji modelujących.
5. **Wyniki kriginu** – prezentacja końcowych wyników obliczeń krigingowych.

W każdym momencie można przejść do dowolnej z zakładek, jednak w przypadku niewykonania wymaganych wcześniejszych czynności lub obliczeń prezentowana na ekranie zawartość informacyjna będzie niewłaściwa. Dokładniejszy opis czynności wykonywanych w ramach każdej zakładki jest następujący:

- **Dane wejściowe**

Dane wejściowe to pierwsza zakładka programu. Program automatycznie otwiera tę zakładkę po uruchomieniu. Tutaj użytkownik wprowadza dane pomiarowe badanego procesu oraz modyfikuje dane sterujące obliczeniami. Do obsługi danych pomiarowych służy okno **Dane pomiarowe** pokazane z rys. 6.

Dane pomiarowe

Ustaw domyślne wartości Wczytaj dane

Liczba kolumn: 3 Zapisz dane do pliku Eksportuj dane (Excel)

Liczba pomiarów: 106

Tablica pomiarów

Aktywne pomiary: 106 Kolumna pomiaru Model trzywymiarowy

Współrzędna X: A Dł. geogr. [°]

Współrzędna Y: B Sz. geogr. [°]

Wartość pomiaru: C Opady [mm/rok]

Zaproponuj wartość mnożnika korekcji

Generuj nowe wsp. X i Y: [°] -> [km.] Zastosuj

Rys. 6. Dane sterujące dla pomiarów w przestrzeni 2D.

Wczytane dane pomiarowe można zapisać do standardowego pliku z rozszerzeniem *.krp (stosując opcję **Plik/Zapisz** lub **Plik/Zapisz jako**) względnie do pliku tekstowego (za pomocą opcji **Zapisz do pliku**) lub wyeksportować do domyślnej aplikacji arkusza kalkulacyjnego (za pomocą opcji **Eksportuj dane (Excel)**). Export następuje w formacie *comma separated values* (*.csv) a dane są zapisywane w pliku tymczasowym.

Pierwszym trzem kolumnom tablicy z danymi pomiarowymi (tablicy pomiarów) są przyporządkowywane automatycznie następujące atrybuty: współrzędna X, współrzędna Y i wartość pomiaru. Uwzględniając jedynie dwie współrzędne punktów pomiarowych dokonujemy aproksymacji pomiarów w przestrzeni dwuwymiarowej 2D. Kolumnom tym można zmienić przyporządkowania atrybutów lub też nadać odpowiednie do kontekstu nazwy, korzystając z opcji **Kolumna pomiaru** lub **Nagłówki kolumn**. Po wprowadzeniu informacji o danych pomiarowych należy wcisnąć przycisk **Zastosuj**. Wtedy prawa część zakładki zawierająca tablicę pomiarów może wyglądać, jak na rys. 7.

Dowolne pomiary w tablicy pomiarów mogą być wyłączone z obliczeń poprzez dwukrotne kliknięcie na odpowiedni wiersz tablicy (pomiarów 4 i 7 na rys. 7). Ponowne dwukrotne kliknięcie odwołuje wyłączenie. Wszystkie dokonane zmiany w tablicy pomiarów wymagają późniejszego wciśnięcia przycisku **Zastosuj** w sekcji danych pomiarowych. W tej sekcji znajduje się też przycisk **Generuj nowe wsp. X i Y**. Pozwala on zamienić współrzędne geograficzne (w stopniach) punktów pomiarowych na odległości w kilometrach. W wyniku działania tej funkcji do tablicy pomiarów zostają dodane dwie nowe kolumny ze współrzędnymi punktów pomiarowych podanymi w kilometrach. Aby z nich skorzystać, należy zmienić przyporządkowanie współrzędnych X i Y do nowych kolumn (opcją

Kolumna pomiaru), zmienić opisy kolumn (opcją **Nagłówki kolumn**) i nacisnąć przycisk **Zastosuj** (por. rys. 8).

L.p.	Dł. geogr. [°]	Sz. geogr. [°]	Opady [mm/rok]
1	14.14	53.55	647.0
2	14.36	52.21	656.0
3	14.37	53.24	571.0
4	14.4	52.35	493.0
5	14.44	54.01	724.0
6	14.46	51.57	647.0
7	14.59	50.54	787.0
8	15.02	51.08	644.0
9	15.15	52.44	532.0
10	15.2	50.54	1260.0
11	15.25	53.1	712.0
12	15.25	52.46	878.0

Rys. 7. Tablica danych pomiarowych.

Tablica pomiarów

Aktywne pomiary 106

Kolumna pomiaru Nagłówki kolumn Model trzywymiarowy

Współrzędna X

Współrzędna Y Mnożnik korekcyjny

Współrzędna Z

Wartość pomiaru

Zaproponuj wartość mnożnika korekc.

Generuj nowe wsp. X i Y: [°] -> [km.]

Zastosuj

Rys. 8. Dane sterujące dla pomiarów w przestrzeni 3D.

Aplikacja KRIPOS obsługuje także tzw. modele trzywymiarowe, tzn. wykonuje aproksymację pomiarów w przestrzeni trójwymiarowej 3D. W tym celu należy ustawić w sekcji danych pomiarowych opcję **Model trzywymiarowy**. W tabelicy pomiarów jest wtedy konieczna dodatkowa kolumna z wartościami pomiarów dla trzeciej współrzędnej Z. W programie przyjmuje się automatycznie, że wartości Z znajdują się w czwartej kolumnie tabelicy pomiarów, jednak to przyporządkowanie można zmienić ręcznie korzystając z opcji **Kolumna pomiaru**. Dodatkowo można ustawić w przypadku aproksymacji trójwymiarowej wartość tzw. mnożnika korekcyjnego, korzystając z opcji **Mnożnik korekcyjny**. Mnożnik ten

ma zastosowanie wtedy, gdy zakres zmienności trzeciej współrzędnej odbiega od zakresów zmienności dwóch pozostałych współrzędnych i ma na celu ujednoczenie wyników przy obliczaniu odległości między parami punktów pomiarowych. Aplikacja może wyznaczyć wartość mnożnika korekcyjnego automatycznie (po wciśnięciu przycisku **Zaproponuj wartość mnożnika korekc.**) i robi to w ten sposób, by skorygowany zakres zmienności dla trzeciej współrzędnej pokrywał się z mniejszym z dwóch pozostałych zakresów.

Wariogram

Liczba par		Statystyka	
Najmniejszy dystans		Liczba przedziałów	15
Największy dystans		Maksymalny uwzgl. dystans [%]	100%
<input checked="" type="checkbox"/> Wyznacz automatycznie	Szerokość przedziału		
Rozłożenie przedziałów		Klasyczne	
	Liczba przedziałów kątowych	1	
	Tolerancja kątowa +/-	90°	
	Kąt początkowy	0°	

Rys. 9. Obsługa wariogramu; kriging bezkierunkowy.

Wariogram

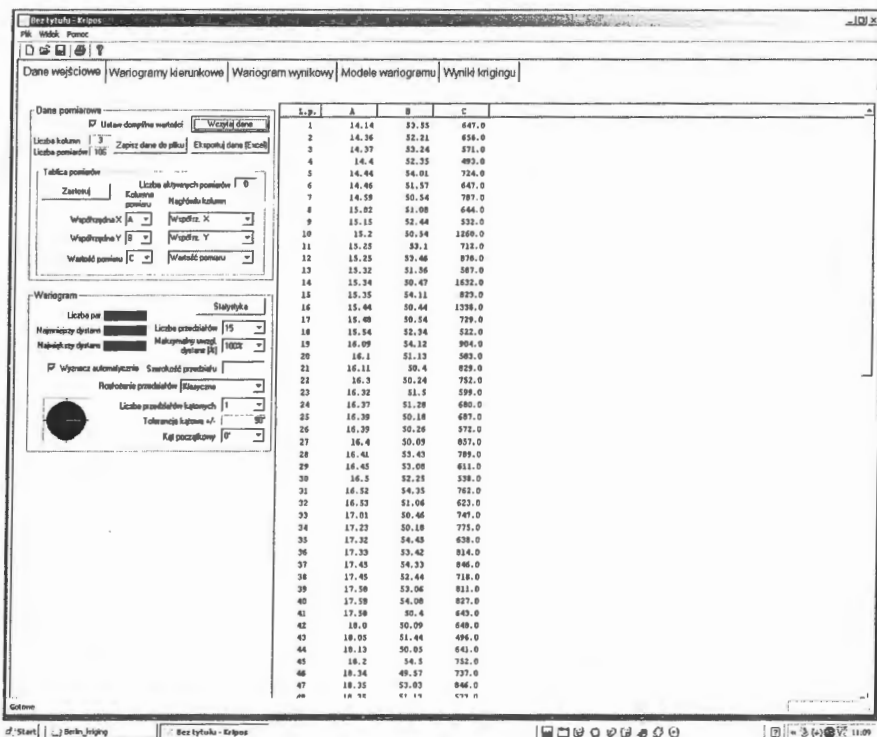
Liczba par		Statystyka	
Najmniejszy dystans	0.0447214	Liczba przedziałów	15
Największy dystans	9.72227	Maksymalny uwzgl. dystans [%]	100%
<input checked="" type="checkbox"/> Wyznacz automatycznie	Szerokość przedziału	0.648151	
Rozłożenie przedziałów		Klasyczne	
	Liczba przedziałów kątowych	4	
	Tolerancja kątowa +/-	22.5°	
	Kąt początkowy	45°	

Rys. 10. Obsługa wariogramu; kriging kierunkowy.

Wprowadzanie wszelkich danych w polach sekcji danych pomiarowych należy zawsze zatwierdzać przyciskiem **Zastosuj**.

W lewym-dolnym rogu zakładki znajduje się sekcja obsługi wariogramu (**Wariogram**), w której ustawia się parametry niezbędne do wyznaczenia wariogramu

empirycznego (rys. 9). Trzy czerwone pola po lewej stronie sekcji oznaczają, że nie naciśnięto przycisku **Zastosuj** w sekcji danych pomiarowych. Jego naciśnięcie powoduje utworzenie tablicy, w której są przechowywane wartości odległości i kąta dla wszystkich kombinacji par punktów pomiarowych (rys. 10).



Rys. 11. KRIPOS – ekran z danymi pomiarowymi.

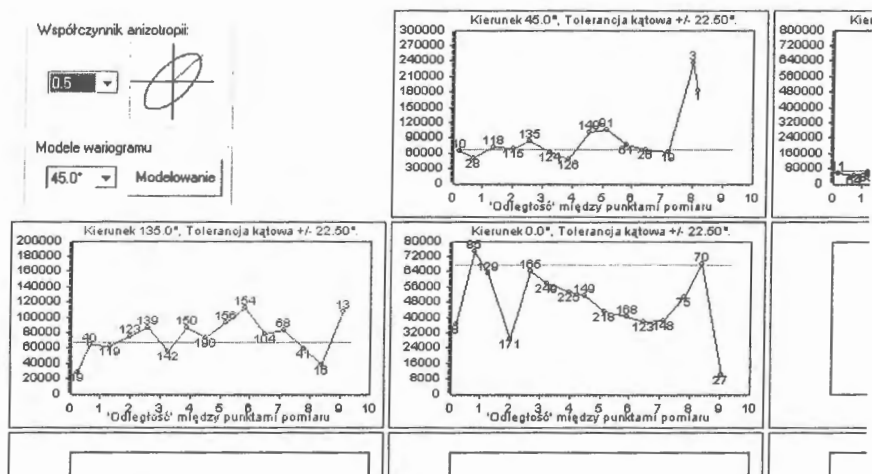
Dwa podstawowe parametry ustalane w tej sekcji, to **Liczba przedziałów** i **Liczba przedziałów katowych**. Pierwszy parametr definiuje, dla ilu punktów będzie obliczony wariogram empiryczny względnie na ile przedziałów dzieli się maksymalną odległość między badanymi punktami pomiarowymi z tablicy pomiarów (*number of lags*). Ustalenie drugiego parametru decyduje o tym, czy do obliczenia wariogramu empirycznego stosuje się algorytm krigingu bezkierunkowego (wartość '1'), czy kierunkowego (wartości 2, 4 lub 8). Ustalenie tej wartości obrazuje się na rysunku umieszczonym w lewym dolnym rogu sekcji: dla krigingu

bezkierunkowego (lub: wariogramu bezkierunkowego) jest to pełne koło (rys. 9), natomiast dla kriginu kierunkowego (lub: wariogramów kierunkowych) jest to podwójny wycinek kątowy o powierzchni zależnej od zadanej wartości parametru (rys. 10). W przypadku stosowania kriginu kierunkowego należy również ustalić wartość tzw. **Kąta początkowego**, określającego kierunek, dla którego wyznacza się pary punktów pomiarowych uwzględniane następnie przy obliczaniu wariogramu empirycznego (kierunek względnie kąt kriginu); kąt ten zmienia się w przedziale od 0° do 180° .

Przykładowy pełny ekran programu dla zakładki **Dane wejściowe** jest pokazany na rys. 11.

• Wariogramy kierunkowe

Na tej zakładce znajduje się osiem pól, na których obrazuje się wykresy wariogramów empirycznych, których liczba zależy od ustalenia wartości parametru **Liczba przedziałów kątowych** (1, 2, 4 lub 8 wariogramów). W przypadku obliczania wariogramów kierunkowych (gdy liczba przedziałów kątowych jest większa niż jeden), dwa wykresy są wyróżnione od pozostałych kolorami niebieskim i zielonym. Kolorem niebieskim jest oznaczony wariogram obliczony dla kierunku określonego wybranym kątem początkowym kriginu (wariogram podstawowy), natomiast w kolorze zielonym wykreśla się wariogram obliczony dla kierunku ortogonalnego do początkowego (wariogram ortogonalny).



Rys. 12. Wykresy wariogramów kierunkowych.

Na rys. 12 pokazano część zakładki **Wariogramy kierunkowe** dla czterech przedziałów kątowych ustalonych w krigingu kierunkowym.

Podwójne kliknięcie (dwuklik) na dowolnym wykresie powoduje zmianę kierunku krigingu, ustalonego wcześniej na zakładce **Dane pomiarowe** poprzez zadanie wartości **Kąt początkowy**. Dwukliknięty wariogram zostaje przeniesiony do pierwszego pola, czyli jego kierunek staje się kierunkiem początkowym, i jednocześnie odpowiednio zmienia się wariogram na kierunku ortogonalnym.

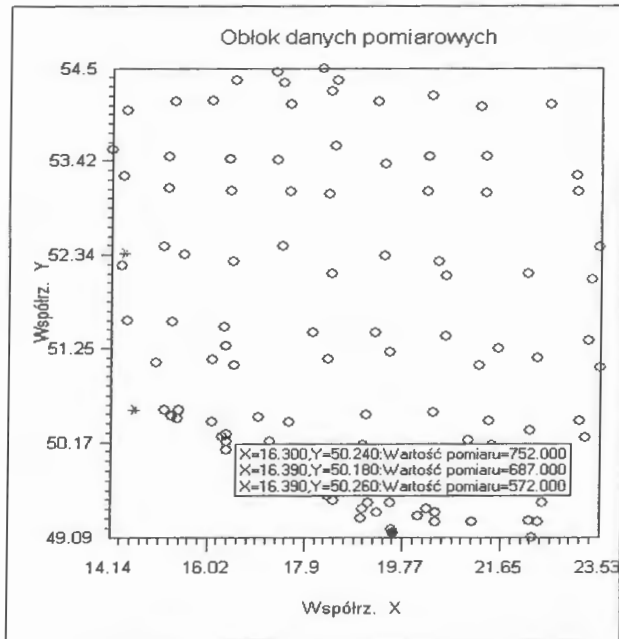
W lewej górnej części zakładki znajdują się dwa zestawy kontrolki: **Współczynnik anizotropii** i **Modele wariogramu**. Współczynnik anizotropii ustala się zwykle na podstawie analizy wykreślonych wariogramów kierunkowych: podstawowego i ortogonalnego. Ma on na ogół wartość mniejszą od jedności a umieszczony obok wykres wizualizuje kierunek i wielkość ustalonej anizotropii. Drugi zestaw kontrolki wspomaga analizę wariogramów kierunkowych, pozwalając na obliczenie i wykreślenie modeli (wariogramów teoretycznych) dla każdego wyznaczonego wariogramu empirycznego. Modele te są prezentowane na zakładce **Modele wariogramu** po wciśnięciu przycisku **Modelowanie** w sekcji drugiego zestawu kontrolki. Za pomocą funkcji **Modele wariogramu**, poprzez wybór kierunku (kąta) krigingu, wybiera się wariogram kierunkowy, który będzie modelowany.

- **Wariogram wynikowy**

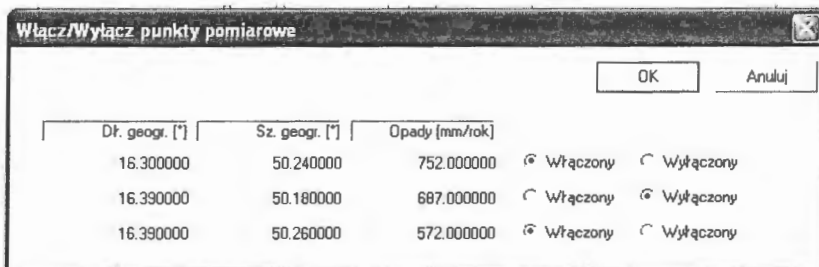
Zakładka **Wariogram wynikowy** składa się z dwóch wykresów. Z lewej strony znajduje się obłok danych pomiarowych, na którym każdy punkt pomiarowy jest zaznaczony przy pomocy znacznika. Czerwonymi krzyżykami są zaznaczone pomiary wyłączone z obliczeń. Znaczniki zaznaczone na żółto i na zielono oznaczają, odpowiednio, punkty pomiarowe z minimalną i maksymalną wartością pomiaru. Dokładną wartość współrzędnych i pomiaru dla każdego punktu można sprawdzić, najeżdżając kursorem myszki na znacznik punktu pomiarowego. W przypadku, gdy kilka punktów znajduje się w niewielkiej odległości od siebie, jest prezentowana informacja dla dwóch (lub większej liczby) punktów (rys. 13).

Na wykresie z obłokiem danych pomiarowych można włączać i wyłączać poszczególne punkty pomiarowe z obliczeń, analogicznie jak było to możliwe w przypadku tablicy pomiarów na zakładce **Dane wejściowe**. Obecnie jednak widać położenie punktu na mapie terenu, co istotnie ułatwia wybór. Aby włączyć/wyłączyć punkt pomiarowy, należy kliknąć na niego prawym klawiszem myszki. Pojawi się menu kontekstowe z pozycją: **Włącz punkt pomiarowy**, **Wyłącz punkt pomiarowy** lub **Włącz/wyłącz punkt pomiarowy**. Ten

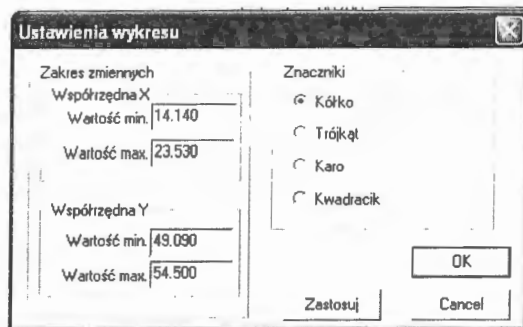
ostatni przypadek występuje, gdy w otoczeniu kursora znajduje się więcej niż jeden punkt pomiarowy i są kłopoty z ich precyzyjną identyfikacją. Wywoływany jest wtedy dialog zawierający opis kilku punktów i umożliwiający ich indywidualne włączenie lub wyłączenie. Wygląd takiego okna dialogowego jest pokazany na rys. 14.



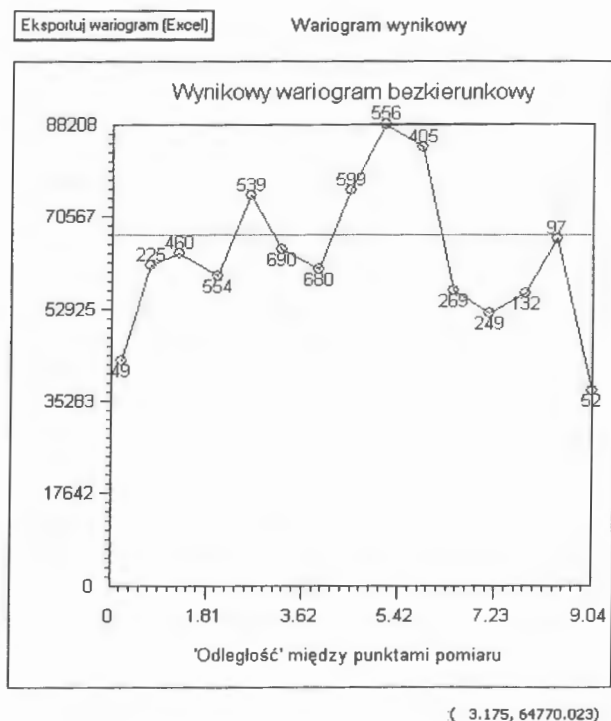
Rys. 13. Wykres obłoku danych pomiarowych.



Rys 14. Dialog włączania/wyłączania punktów pomiarowych.



Rys. 15. Dialog ustawiania wykresu.



Rys. 16. Wykres wariogramu wynikowego.

Stosowane w obłoku danych pomiarowych znaczniki można zmieniać poprzez wywołanie dialogu **Ustawienia wykresu**. Realizuje się to, wywołując menu kontekstowe za pomocą prawego klawisza myszki a następnie uruchamiając opcję **Właściwości**. Wywołane wówczas okno dialogowe pozwala zmieniać znaczniki punktów pomiarowych oraz zakresy wartości zmiennych dla układu współrzędnych, w którym są zobrazowane punkty pomiarowe. Na rys. 15 pokazano przykładowy dialog ustawiania wykresu.

Z prawej strony zakładki znajduje się wykres wynikowego wariogramu empirycznego (rys. 16) złożonego z liczby punktów równej liczbie przedziałów odległości ustalonych w zakładce **Dane wejściowe**. Liczby widniejące przy tych punktach oznaczają liczby par pomiarów, które znalazły się w danym przedziale i posłużyły do obliczenia danego punktu wariogramu. Pozioma linia na wykresie wyznacza poziom obliczonej wariancji. Przesuwanie kursorem myszki po polu wykresu powoduje wyświetlenie współrzędnych wskazywanego punktu na pasku stanu z prawej strony u dołu okna programu. Dane wariogramu można wyeksportować do aplikacji arkusza kalkulacyjnego za pomocą przycisku **Eksportuj wariogram (Excel)**.

- **Modele wariogramu**

Zakładka **Modele wariogramu** składa się z umieszczonej po lewej stronie ekranu sekcji informacyjno-sterującej (rys. 17) oraz z ośmiu wykresów modeli wariogramu empirycznego (jednocześnie są wyświetlane wykresy czterech modeli). Modele są wyznaczane za pomocą metody regresji nieliniowej z algorytmem optymalizacji gradientowej Marquardta, przy czym funkcje modeli są zadane standardowo a optymalizacja polega na oszacowaniu wartości trzech parametrów tych funkcji A, B i C (rys. 18). Parametr A przyjmuje wartość zerową, gdy nie zostanie wcześniej zaznaczona opcja **Efekt samorodka**. Wyznaczane modele są następujące:

- Model eksponencjalny: $\text{var}(h) = A + C \cdot (1 - \exp(-B \cdot h))$
- Model Gaussa: $\text{var}(h) = A + C \cdot (1 - \exp(-B \cdot B \cdot h \cdot h))$
- Model racjonalnie kwadratowy: $\text{var}(h) = A + C \cdot B \cdot B \cdot h \cdot h / (1 + B \cdot B \cdot h \cdot h)$
- Model falowy: $\text{var}(h) = A + C \cdot (1 - \sin(B \cdot h)) / (B \cdot h)$
- Model sferyczny: $\text{var}(h) = A + C \cdot (1.5 \cdot B \cdot h - 0.5 \cdot B \cdot B \cdot h \cdot h)$
- Model potęgowy ($n=1/4$): $\text{var}(h) = A + C \cdot (B \cdot h)^{1/4}$
- Model potęgowy ($n=1/2$): $\text{var}(h) = A + C \cdot (B \cdot h)^{1/2}$
- Model liniowy: $\text{var}(h) = A + C \cdot (B \cdot h)$.

Parametry modelu
 C - parametr skali
 1/B - parametr zasięgu
 A - efekt samorodka
 OS - odchylenie standardowe


Parametry pracy aplikacji modelującej

Efekt samorodka

Wykresy modeli
 Modele 1 - 4
 Modele 5 - 8

Wyniki pracy aplikacji modelującej

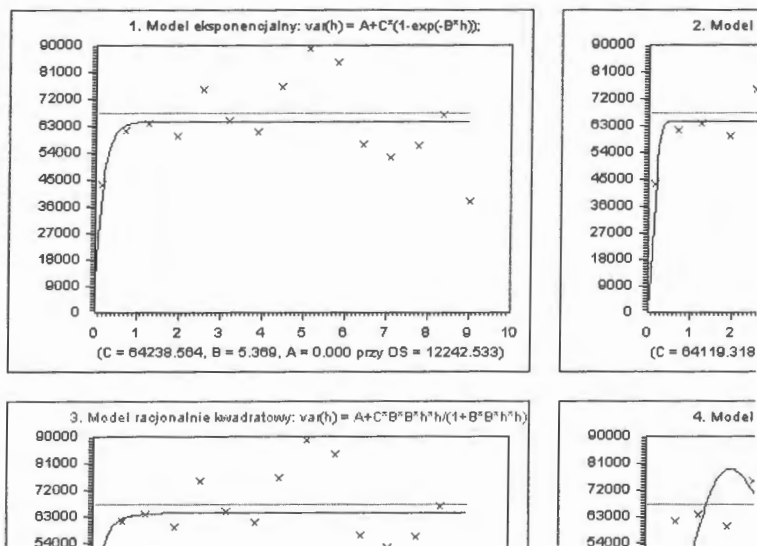
Kriging
 Wybrany model:
 1. Eksponencjalny

Współczynnik anizotropii:


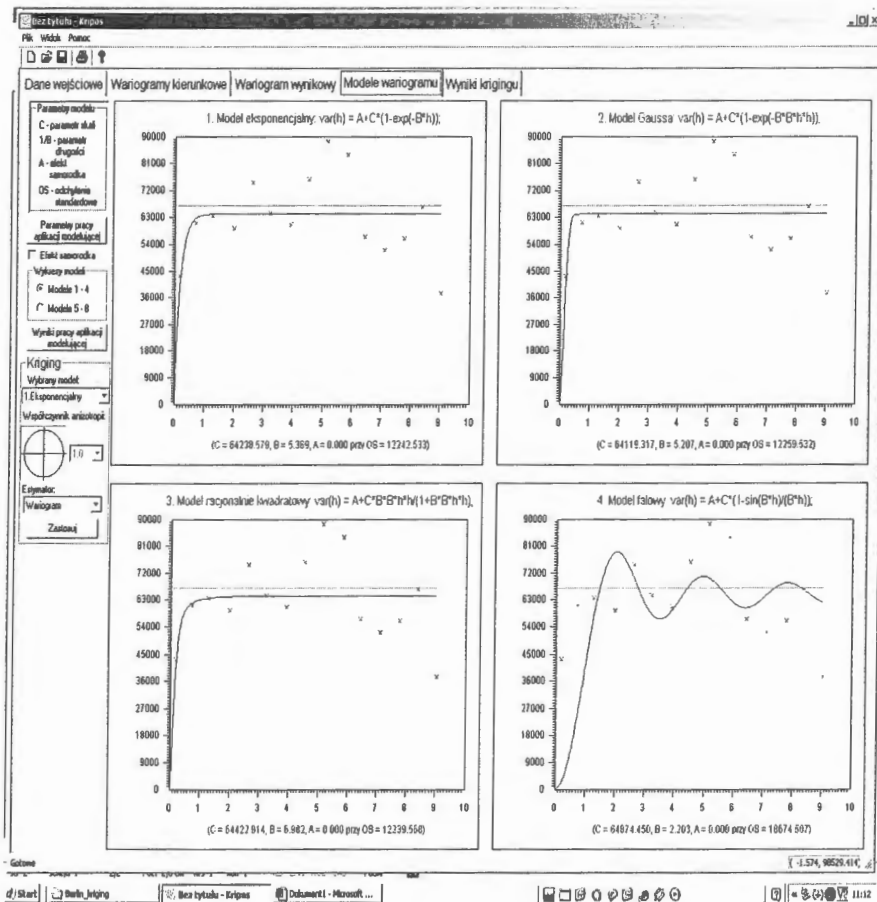
Estymator:

Zastosuj

Rys. 17. Sekcja informacyjno-sterująca zakładki Modele wariogramu.



Rys. 18. Modele wariogramu empirycznego; OS oznacza Odchylenie Standardowe modelu.



Rys. 19. KRIPOS – ekran z modelami wariogramu empirycznego.

Wyświetlanie modeli od 1 do 4 lub od 5 do 8 można przełączać za pomocą radioguzików funkcji **Wykresy modeli**. Spośród ośmiu wyznaczonych modeli wybiera się jeden do dalszych obliczeń aproksymacji krigingowej. Wyboru dokonuje się za pomocą listy kombo funkcji **Wybrany model** w sekcji **Kriging** lub dwukrotnie klikając na wybrany wykres. Po wybraniu modelu należy uruchomić obliczenia aproksymacji wciskając przycisk **Zastosuj**.

Zdarza się, że któryś z modeli nie zostanie obliczony, na przykład w wyniku wystąpienia błędu macierzy osobliwej, lub nie będzie zadawalający dla użytkownika. Można wówczas ręcznie zmienić parametry tego modelu, wywołując odpowiednie menu kontekstowe poprzez kliknięcie prawym klawiszem myszki na odnośny wykres i uruchamiając w wywołanym oknie dialogowym opcję **Ręcznie**. Wykres modelu ze zmienionymi ręcznie wartościami parametrów jest wyświetlany w kolorze czerwonym (rys. 18). Na rys. 19 pokazano cały ekran zakładki **Modele wariogramu**.

- **Wyniki krigingu**

Zakładka **Wyniki krigingu** ma umieszczoną z lewej strony sekcję informacyjno-sterującą (rys. 20). Gdy obliczenia krigingu nie zostały wcześniej uruchomione, pole wartości pomiaru ma kolor czerwony (byłoby to pole **Opady** na rys. 20). Należy wówczas powrócić do zakładki **Modele wariogramu** i wcisnąć przycisk **Zastosuj**. Przy przesuwaniu kursora po mapie z punktami pomiarowymi (rys. 21) w odpowiednich polach sekcji są wyświetlane aktualne wartości współrzędnych X i Y oraz obliczona wartość zmiennej pomiarowej.

Model:
Eksponencjalny

Dł. geogr. [°]
| 14.3534

Sz. geogr. [°]
| 53.2579

Opady [mm/rok]
| 591.2095

Warstwice w tle

Wyłączone pomiary

Wartości dla modelu krigingu

Eksportuj mapę (Excel)

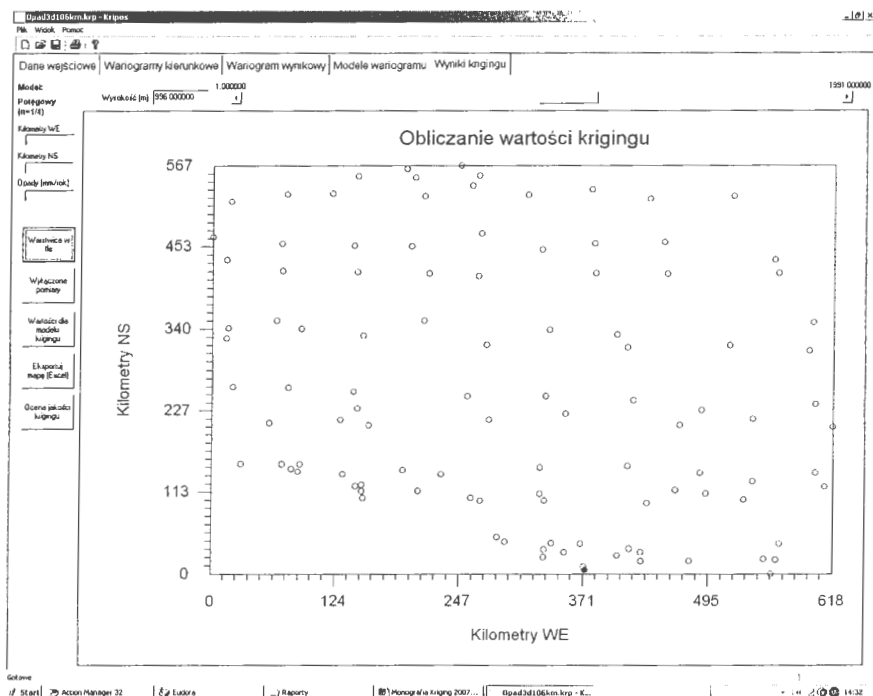
Ocena jakości krigingu

Rys. 20. Sekcja informacyjno-sterująca zakładki **Wyniki krigingu**.

W sekcji znajdują się następujące przyciski:

Warstwice w tle. Wciśnięcie tego przycisku powoduje obliczenie i wyświetlenie warstwicznej mapy krigingu (rys. 23). W wywołanym oknie dialogowym określa się dokładność (rozdzielczość) mapy oraz ustala się liczbę kolorów i jednocześnie liczbę przedziałów wartości wykreślanej zmiennej pomiarowej. Istnieje możliwość tworzenia mapy czarno-białej zamiast kolorowej (rys. 24).

Wyłączone pomiary. Po wciśnięciu przycisku pokazuje się tablica z wartościami zmiennej pomiarowej obliczonymi dla punktów pomiarowych, które zostały wcześniej (w zakładce **Dane wejściowe** lub zakładce **Wariogram wynikowy**) wyłączone ze zbioru punktów bazowych i dla których są znane wartości pomiarów. W ten sposób można testować dokładność aproksymacji dla wybranych punktów pomiarowych.



Rys. 21. KRIPOS – ekran z wynikami obliczeń.

Wartości dla modelu krigingu. Wciśnięcie przycisku wywołuje tablicę, w której użytkownik może wyspecyfikować wartości współrzędnych X, Y, Z punktów, w których chciałby, aby były obliczone wartości krigingu. Wyniki aproksymacji są prezentowane w tej samej tablicy.

Eksportuj mapę (Excel). Funkcja eksportuje do aplikacji Excela mapę zmiennej pomiarowej w postaci siatki prostokątnej, w której dla każdego węzła o współrzędnych X, Y jest obliczona wartość zmiennej. Eksport mapy poprzedza dialog, w którym użytkownik specyfikuje rozdzielczość mapy oraz format eksportowanych danych: macierzowy lub wierszowy. W formacie macierzowym pierwszy wiersz macierzy zawiera wartości współrzędnej X, pierwsza kolumna macierzy zawiera wartości współrzędnej Y a wewnętrzne elementy macierzy zawierają obliczone wartości krigingu dla węzłów siatki o współrzędnych odpowiednio X_i , Y_i . W formacie wierszowym każdy wiersz zawiera trzy liczby: wartości współrzędnych X i Y oraz wartość krigingu dla kolejnych węzłów siatki.

Ocena jakości krigingu. Wywołanie tej funkcji powoduje obliczenie, dla każdego punktu pomiarowego, wartości zmiennej pomiarowej przy wyłączeniu tego punktu z danych pomiarowych. Różnica między obliczonymi i rzeczywistymi znanymi wartościami pomiarów stanowi miarę dokładności aproksymacji. Rezultaty obliczeń są prezentowane w postaci tablicy lub mapy (po wciśnięciu przycisku **Pokaż mapę**), na której wartość błędu aproksymacji jest wyświetlana po zbliżeniu kursora do danego punktu pomiarowego.

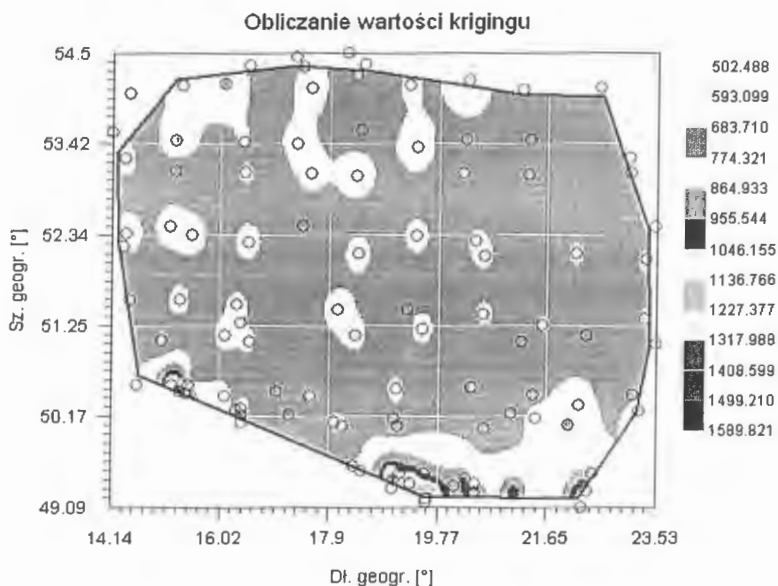


Rys. 22. Opcja **Definiuj wielokąt** ograniczania obszaru obliczeń krigingowych.

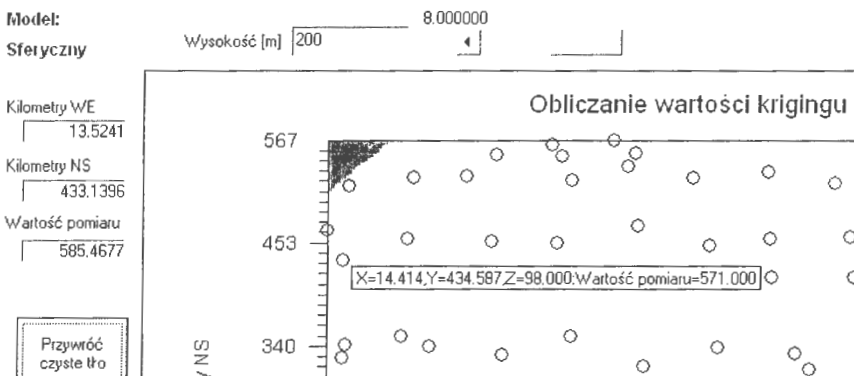
Kliknięcie prawym klawiszem myszki w dowolnym punkcie wykresu (mapy) wywołuje menu kontekstowe z następującymi opcjami: **Definiuj wielokąt**, **Pokaż wagi** i **Właściwości**. Opcja **Właściwości** powoduje wywołanie dialogu **Ustawienia wykresu**,

umożliwiającego zmianę zakresu wartości zmiennych układu współrzędnych. Opcja **Pokaż wagi** informuje o wartościach współczynników wagowych wyznaczonych przy obliczaniu wartości zmiennej pomiarowej dla danego punktu pomiarowego.

Opcja **Definiuj wielokąt** powoduje przejście do trybu wykreślenia wielokąta ograniczającego obszar (rys. 22), w którym zawierają się punkty pomiarowe służące do obliczeń aproksymacyjnych (rys. 23). Pozwala to ograniczyć obliczenia do obszaru, dla którego stosowanie aproksymacji kringingowej jest wiarygodne. Przy wprowadzaniu wierzchołków wielokąta kursor zmienia się w znak ołówka. Kliknięcie lewym klawiszem myszki pozwala wprowadzić nowy wierzchołek, zaś kliknięcie prawym klawiszem wywołuje menu kontekstowe pozwalające zmasać poprzednio wprowadzony wierzchołek (**Cofnij o jeden wierzchołek**) lub całkowicie zrezygnować z wprowadzania wielokąta (**Przerwij definiowanie wielokąta**) (rys. 22). Gdy kursor zostanie dosunięty dostatecznie blisko do pierwszego wprowadzonego wierzchołka, zmienia się w znak węzła i kliknięcie lewym klawiszem myszki powoduje pomyślne zakończenie rysowania wielokąta.



Rys. 23. Mapa obliczeń kringingowych z wyrysowanym wielokątem ograniczającym.



Rys. 24. Wygląd zakładki Wyniki krigingu dla modelu 3-wymiarowego.

Przesuwanie kursorem po mapie powoduje wyświetlanie w górnej części sekcji informacyjno-sterującej współrzędnych wskazywanego punktu i wyznaczonej wartości krigingu. Wygląd zakładki **Wyniki krigingu** zmienia się w przypadku aproksymacji w przestrzeni 3D. Powyżej mapy pojawia się wówczas pole edycyjne i pasek przewijania, pozwalające zmieniać wartość trzeciej współrzędnej (wysokość) punktów pomiarowych. Mapa przedstawia wtedy warstwicę zmiennej pomiarowej dla wprowadzonej wysokości (rys. 24). Nad paskiem przewijania znajdują się liczby stanowiące granice zakresu zmienności trzeciej współrzędnej.

7. Przykłady wykorzystania metod geostatystycznych

Metody geostatystyczne wykorzystywano początkowo dla potrzeb górnictwa odkrywkowego. We współczesnej geologii kriging znalazł zastosowanie do badań zmienności i zasobności złóż rud metali i węgla (da Rocha i Yamamoto, 2000; Namysłowska-Wilczyńska, 2006), ropy naftowej (Yarus i Chambers, 2006), a także zróżnicowania przestrzennego parametrów położenia poszczególnych warstw geologicznych (Dębowska i Zawadzki, 2005; Shogenova, 2004).

Przy określaniu zasobności złóż ropy naftowej bardzo ważnym zagadnieniem jest ustalenie nie tylko przestrzeni, w której występuje ropa naftowa, ale również porowatości utworów geologicznych, gdyż ten parametr wpływa na zasobność złoża. Przy ustalaniu rozkładu porowatości złóż roponośnych wykorzystuje się badania akustycznej oporności

pozornej struktur geologicznych. Przestrzenne odwzorowania tej zmiennej dobrze oddają obserwowane zmiany porowatości. Zastosowanie kokrigingu wiążącego ze sobą ustalone w czasie wierceń poszukiwawczych porowatości złoża z akustyczną opornością pozorną zwiększa stopień prawdopodobieństwa prognoz, ale wymaga bardzo złożonych obliczeń (Yarus i Chambers, 2006).

Szerokie zastosowanie znalazł kriging w hydrogeologii (Kitanidis, 1997). Jest on podstawowym narzędziem wizualizacji wyników obliczeń hydrogeologicznych wykonywanych metodą elementów skończonych w celu określenia kierunków przepływu wód podziemnych, zasobności w wodę warstw wodonośnych i migracji zanieczyszczeń przez strefę aeracji i saturacji. Modele warstw wodonośnych są sporządzane dla określenia zasobów wód podziemnych i migracji zanieczyszczeń w skali makroregionu, najczęściej w granicach głównych zbiorników wód podziemnych (GZWP) (Kleczkowski, 1990 i 1998). Mapy z lokalizacją GZWP w Polsce można znaleźć na stronie internetowej <http://www.pgi.gov.pl/soh/zbiornikiwodpodziemnych/index.html>. Obliczenia hydrogeologiczne prowadzi się również na etapie projektowania dużych ujęć wód podziemnych, głównie opartych o infiltrację sztuczną (Dokumentacja geologiczna..., 2001) oraz przy ustalaniu stref ochrony ujęć wód podziemnych narażonych na antropopresję.

W Polsce obliczenia hydrogeologiczne najczęściej prowadzi się z wykorzystaniem programów *Modflow* i *MT3D*. Programy te były wykorzystywane do modelowania migracji zanieczyszczeń w pobliżu składowisk odpadów (Fijałkiewicz, 2001) oraz przy ocenie zagrożeń środowiska naturalnego w przypadku wystąpienia wycieku substancji niebezpiecznych do gruntu lub wód powierzchniowych (Borysewicz i in., 2004; Macuda i Solecki 2005).

Rak (2004) wykorzystał metodę krigingu do przedstawiona przestrzennego (trójwymiarowego) rozkładu stężenia azotanów w latach 1961-2000 w GZWP nr 333 Opole-Zawadzkie. Powierzchnia tego zbiornika wynosi 1..120 km² a zasoby dyspozycyjne 200-225 tys. m³/d. Zbiornik został podzielony na 5.577 komórek o wymiarach 2 km x 2 km x 50 m. Określono strukturę użytkowania zbiornika oraz zlokalizowano blisko 400 ognisk zanieczyszczeń. Dokonano prognozy zanieczyszczeń azotanami wód podziemnych po roku 2000 w oparciu o archiwalne wyniki jakości wód podziemnych z zastosowaniem sztucznych sieci neuronowych.

Bertino i Wackernagel (2002) prowadzili badania nad wykorzystaniem kokrigingu do modelowania dynamicznych zmian stężeń rozpuszczonego tlenu w wodach Łaby. Do symulacji zużycia w okresie nocy tlenu i produkcji tlenu w okresie dnia wykorzystano zdjęcia

rzeki wykonywane z helikoptera, na podstawie których określano sezonową zmienność glonów w wodzie. Do obliczeń wykorzystano procedurę kokrigingu. Uzyskano bardzo dobrą korelację pomiędzy wartościami prognozowanymi stężenia tlenu a wartościami ustalonymi na drodze pomiarów.

Procedury kringingowe są wykorzystywane dość często przez geodetów i kartografów. W tym przypadku nie są to jedyne techniki stosowane przy sporządzaniu map w oparciu o nieregularną siatkę pomiarów. Duże zastosowanie mają metody najmniejszej krzywizny (*minimum curvature*), najbliższego sąsiedztwa (*nearest neighbor*), naturalnego sąsiedztwa (*natural neighbor*), radialnych funkcji bazowych (*radial basis function*), regresji wielomianowej (*polynomial regression*), odwrotnych odległości do potęgi (*inverse distance to a power*), triangulacji z liniową interpolacją (*triangulation with linear interpolation*) i zmodyfikowana metoda Sheparda (*modified Shepard's method*) (Goldsztein i Skrzypek, 2004). Metody te wykorzystywane są również przy sporządzaniu map sozologicznych i opracowaniu badań pochodzących z monitoringu środowiska. Należy zauważyć, że w kartografii wykorzystuje się techniki do odwzorowywania przestrzeni trójwymiarowych, podczas gdy kringing to narzędzie uniwersalne do opracowywania wieloparametrowych baz danych.

Techniki kringingowe mogą być wykorzystywane w pracach konserwatorskich (Boroń i Jachimski, 1998). W tym celu na etapie inwentaryzacji wykonuje się zdjęcia techniką fotogrametrii cyfrowej. Uzyskane fotografie są następnie opracowywane w celu określenia zmienności barw na malowidłach. Prace konserwatorskie są szczególnie trudne na sklepieniach.

Zmienne zregionalizowane wykorzystuje się do analizy przemieszczania stref zasięgu poszczególnych gatunków fito- i zoofauny, ustalania zasięgu siedlisk, przemieszczania się genów wśród zwierząt wolno żyjących (Ratkiewicz, 2006) a także przy badaniach nad ekologią krajobrazu (Cullinan i Thomas, 1992; Richling i Solon, 1994; Pausas, 2006). Metody geostatystyczne znalazły ostatnio również zastosowanie w badaniach genetycznych prowadzonych na komórkach *in-vitro* (Wagner i in, 2005).

Łomotowski i Skwarek (2003) wykorzystali procedurę kringingu, do opracowania zmienności składu wody w systemach wodociągowych. W ramach monitoringu sanitarnego prowadzi się badania w wybranych punktach sieci wodociągowej. Opracowane statystycznie wyniki mogą być następnie wykorzystywane do wyznaczania obszarów miasta, gdzie jakość wody ulega zmianom, w szczególności do wyznaczania obszarów, gdzie w sieci wodociągowej dochodzi do wytrącania się węglanów. Mapy kringingowe mogą być wykorzystywane również do wyznaczania stref mieszania się wód tłoczonych do sieci z

różnych ujęć wodociągowych. Ten sposób analizy danych można stosować na dużych systemach wodociągowych, gdzie jest znaczna liczba punktów kontrolnych.

Metody geostatystyczne mają zastosowanie przy badaniach struktury sklepień lasów (Blodgett i in., 2000). W badaniach tych wykorzystuje się spektrofotometryczne i radiometryczne zdjęcia satelitarne. Z zastosowaniem kokrigingu i kriginu modeluje się w oparciu o zdjęcia satelitarne wysokość drzew na danej powierzchni, powierzchnię porośniętą drzewami, indeksy powierzchni liści (igliwia), ilość biomasy. Kalibracja i weryfikacja modeli odbywa się poprzez wykonywanie badań metodami tradycyjnymi na powierzchni ziemi w ustalonych punktach kontrolnych. Praktycznym zastosowaniem tych technik to racjonalizacja gospodarki leśnej, możliwość szybkiej oceny uszkodzeń kultur leśnych przez owady oraz sporządzanie map pokrywy leśnej.

Kriging jest wykorzystywany do sporządzania map klimatycznych (Daly i in., 2002).

Liczne publikacje dotyczą zastosowań metod kriginowych w badaniach gleb. Przeglądu możliwości zastosowań kriginu w gleboznawstwie dokonał Goovaerts (1998, 1999). Herbs i in. (2006) wykorzystali kriginę zwyczajną, z liniowym dryftem zewnętrznym oraz z trendem (*regression kriging*), do oszacowania przestrzennej zmienności parametrów hydraulicznych strefy aeracji dla zlewni doświadczalnej o powierzchni 28,6 ha. Wykazano, że wszystkie symulowane mapy rastrowe i warstwicowe oddawały podobny przebieg zmienności tych parametrów. Znajomość właściwości hydraulicznych strefy aeracji gruntów jest niezbędna przy określaniu współczynnika infiltracji efektywnej gruntów oraz przy projektowaniu urządzeń do sztucznego wzbogacania wód podziemnych wodami powierzchniowymi. Baxter i Oliver (2006) zastosowali procedury kriginowe w badaniach zmienności zawartości pierwiastków pokarmowych w glebach azotu, fosforu i potasu. Prowadzono również badania nad przestrzenną zmiennością składu chemicznego (Zhang i in., 1992; Han i in., 2003; Lark i Ferguson, 2004) i fizycznych właściwości gleby (Usowicz i in. 2004).

Qian (1997) przeprowadził badania nad przestrzenną zmiennością wielkości odpływu fosforu ogólnego z obszaru bagien. Badania nad wynoszeniem fosforu ze zlewni są niezmiernie ważne dla ochrony naturalnych lub sztucznych zbiorników wód powierzchniowych przed eutrofizacją.

Procedury kriginowe znalazły powszechne zastosowanie przy badaniach zmienności przestrzennej ewapotranspiracji (Mardikis i in. 2005) oraz wielkości opadów atmosferycznych (Martinez-Cob. 1996; Sen, i Zeyad, 2000). W Polsce modelowaniem

zmienności przestrzennej opadów atmosferycznych zajmował się Stach (2006) oraz Stach i Tamulewicz (2003).

Szczególne trudności w modelowaniu zmienności przestrzennej opadów występują na obszarach górskich. Nakłada się tu efekt orograficzny oraz oddziaływania zmiennych cyrkulacji mas powietrza. W Polsce badania nad zmiennością opadów atmosferycznych w zlewniach górskich prowadził Szczepanek (2003). Wykazał on, że kriging może być z powodzeniem wykorzystywany w modelach o parametrach dyskretnie rozłożonych, bazujących na numerycznym modelu terenu. Kriging w stosunku do innych metod modelowania opadów atmosferycznych metody wieloboków, odwrotnych odległości i gradientowej metody odwrotnych odległości, jest najbardziej wymagającą procedurą pod względem liczebności punktów opomiarowanych.

Hevesi i in. (1992) zastosowali kriging do oszacowania zmienności opadów na obszarach górskich USA. Singh i Kumar (1997) a także Arora i in. (2006) podejmowali próby oszacowania zmienności przestrzennej opadów w Himalajach. Wilk i Andreson (2000) zastosowali kriging do oszacowania powierzchniowej zmienności opadów w zlewniach górskich w południowych Indiach.

Gimeno-García i in. (2004) metodą krigingu badali przestrzenną zmienność temperatury w czasie eksperymentalnych pożarów lasu. Badania te miały na celu określenie dynamiki przemieszczania się ognia oraz możliwości monitoringu termicznego obszarów w czasie naturalnych pożarów.

Kriging jest wykorzystywany przy opracowywaniu wyników badań stanu czystości powietrza (Carletti i in., 2000) i jonosfery (Blanch i in., 2006). Bobbia i in. (2006) zastosowali procedury krigingowe przy analizie pomiarów w powietrzu atmosferycznym stężeń benzenu, toluenu i ksylenu (BTX) oraz tlenków azotu. Bertino i Wackernagel (2002) modelowali zmiany ozonu w Paryżu i miastach skandynawskich.

W Czechach wykonuje się pomiary radioaktywności powierzchni Ziemi przy użyciu sond do pomiaru promieniowania β i γ w czasie lotów samolotem na niskich pułapach. W oparciu o te pomiary techniką kokrigingu sporządza się mapy radioaktywności powierzchni oraz zawartości radionukleoidów. Wykonanie takich map jest szczególnie ważne w rejonach, gdzie prowadzona była eksploatacja złóż uranowych. Wskutek odprowadzania wód kopalnianych do rzek nastąpiło znaczne zanieczyszczenie dużych obszarów radionukleoidami. Mapy te pozwalają także ustalić obszary o naturalnej podwyższonej radioaktywności.

Diodato i Ceccarelli (2005) z zastosowaniem kokrigingu badali w dystrykcie Benevento (Włochy) wpływ orografii na stężenie cezu 137 w glebach.

Tymotek (2005) i Namysłowska-Wilczyńska (2006) wykorzystali kriginę blokową do modelowania powierzchniowego obrazu zmian obciążeń elektrycznych sieci energetycznej oraz jednostkowych kosztów krańcowych przesyłu energii elektrycznej na obszarze Polski.

Metody geostatystyczne są wykorzystywane również do określania rejonów zagrożonych specyficznymi chorobami dla ludzi, zwierząt i roślin (Clarke i in.; 1996; Goetz i in., 2000).

Przedstawiony przegląd nie wyczerpuje wszystkich możliwości zastosowań geostatystyki. Pokazuje jednak, że kriginę jest uniwersalną metodą, która można być stosowana przy analizie wielowymiarowych baz danych czasoprzestrzennych. Kriginę jest nadal rozwijany w zakresie podstaw teoretycznych, jak również doświadczeń praktycznych. Można rzec, że historia kriginę, to niekończący się zbiór artykułów tworzących swoistą bazę w czasoprzestrzeni.

Literatura

- Arora M, Singh P., Goel N. K., Singh R. D. (2006) *Spatial distribution and seasonal variability of rainfall in a mountainous basin in the Himalayan Region*. Water Resources Management, vol. 20, pp. 489–508.
- Baxter S.J. Oliver M.A. (2005) *The spatial prediction of soil mineral N and potentially available N using elevation*. Geoderma, vol. 128, pp. 325-339.
- Bertino L. Wackernagel H. (2002) *Case studies of change-of-support problems*. IMPACT Project Report No 20 (Contract IST-1999-11313). Technical Report N–21/02/G ENSMP - ARMINES, Centre de Géostatistique 35 rue Saint Honoré, F-77305 Fontainebleau, France <http://cg.ensmp.fr>.
- Blanch J., Walter J., Engle P. (2006) *A new ionospheric estimation algorithm for SBAS combining kriging and tomography*
<http://waas.stanford.edu/~wwu/papers/gps/PDF/BlanchIONNTM04.pdf>

- Blodgett C., Jakubauskas M., Price K. and Martinko E. (2000) *Remote Sensing-based Geostatistical Modeling of Forest Canopy Structure*. ASPRS 2000 Annual Conference, Washington, D.C., May 22-26, 2000.
- Bobbia M., Mietlicki F., Roth C. Deraisme J. (2006) *Cartography for air quality monitoring the geostatistical approach*. www.geovariances.com.
- Boroń A., Jachimski J. (1998) *Inwentaryzacja Kaplicy Świątokrzyskiej na Wawelu z wykorzystaniem metod fotogrametrii cyfrowej*. Archiwum fotogrametrii, kartografii i teledetekcji. Vol. 8, str. 16-1 do 16-13.
- Borysewicz M., Furtek A., Potemski S. (2004) *Komputerowy system zarządzania sytuacjami kryzysowymi w zakładach niebezpiecznych. Adaptacja modelu rozprzestrzeniania się skażeń w glebie na potrzeby systemu zarządzania sytuacją kryzysową w zakładach niebezpiecznych SZYK*. Instytut Energii Atomowej, 05-400 Otwock-Świerk.
- Bourennane H, King D. (2003) *Using multiple external drifts to estimate a soil variable*. Geoderma, vol. 114, pp.1-18.
- Carletti R., Picci M., Romano D. (2000) *Kriging and bilinear methods for estimating spatial pattern of atmospheric pollutants*. Environmental Monitoring and Assessment, vol 63, pp. 341–359.
- Clarke K.C., McLafferty S.L., Tempalski B.J. (1996) *On epidemiology and geographic information systems A review and discussion of future directions*. Emerging Infect. Dis., vol. 2 no. 2, pp. 85–92.
- Cressie N. A. C. (1991) *Statistics for spatial data*, John Wiley and Sons, Inc., New York.
- Cullinan V.I., Thomas J.M. (1992) *A comparison of quantitative methods for examining landscape pattern and scale*. Landscape Ecol. vol. 7, pp. 211–227.
- Daly C., Gibson W. P., Taylor G. H., Johnson G. L., Pasteris, P. (2002) *A knowledge based approach to the statistical mapping of climate*. Clim. Res. 22, 99–113.
- Diodato N., Ceccarelli M. (2005) *Geographical information systems and geostatistics for modelling radioactively contaminated land areas*. Natural Hazards, vol. 35, pp. 229–242.
- da Rocha M. M. Yamamoto J. K. (2000) *Comparison between kriging variance and interpolation variance as uncertainty measurements in the Capanema Iron Mine, State of Minas Gerais—Brazil*. Natural Resources Research, vol. 9, no. 3, pp. 223-235.
- Deutsch C. V., Journel A. G. (1998) *GSLIB Geostatistical software library and user's guide. Second Edition*. Oxford University Press, New York Oxford.

- Dębowska U., Zawadzki J. (2005) *Analiza statystyczna i geostatystyczna zróżnicowania przestrzennego parametrów położenia warstw w NW części Gór Świętokrzyskich*. Przegląd Geologiczny, vol. 53, nr 4, str. 306-310.
- Dokumentacja geologiczna określająca warunki hydrogeologiczne do budowy infiltracyjnego ujęcia wody ze stawów w rejonie Czyżówka dla miasta Bydgoszczy* – Opracowanie Biura Studiów i Badań Hydrogeologicznych i Geofizycznych HYDROCONSULT Sp. z o.o. w Warszawie Oddział w Poznaniu pod kierownictwem S. Dąbrowskiego, Poznań, maj 2001 (maszynopis)
- Englund E., Sparks A. (1991) *Geo-EAS 1.2.1 User's Guide*. EPA Report 600/18-91/008, EPA-EMSL, Las Vegas, NV.
- Fijałkiewicz W. (2001) *Modelowanie migracji siarczanów w wodach podziemnych na przykładzie składowiska Żelazny Most*. Akademia Rolnicza we Wrocławiu, Wydział Inżynierii Kształtowania Środowiska i Geodezji, Wrocław.
- Gimeno-García E., V. Andreu V, Rubio J.L. (2004) Spatial patterns of soil temperatures during experimental fires. *Geoderma*, vol. 118, pp. 17–38.
- Goetz S.J., Prince S.D., Small J. (2000) *Advances in satellite remote sensing of environmental variables epidemiological applications*. *Advances in Parasitology*, vol. 47, pp. 289-304.
- Goldsztejn P., Skrzypek G. (2004) *Wykorzystanie metod interpolacji do numerycznego kreślenia map powierzchni geologicznych na podstawie nieregularnie rozmieszczonych danych*. Przegląd Geologiczny, vol. 52, nr 3, str. 233-236.
- Goovaerts P. (1998) *Geostatistical tools for characterizing the spatial variability of microbiological and physico-chemical soil properties*. *Biol Fert Soil*, vol. 27, pp. 315–334.
- Goovaerts P. (1999) *Geostatistics in soil science state-of-the-art and perspectives*. *Geoderma* vol. 89, pp.1–45.
- Han S, Schneider S. M., Evans R. G. (2003) *Evaluating cokriging for improving soil nutrient sampling efficiency*. *Transactions of the ASAE*, vol. 46, no. 3, pp. 845–849.
- Herbsta M., Diekkrüger B., Vereecken H. (2006) *Geostatistical co-regionalization of soil hydraulic properties in a micro-scale catchment using terrain attributes*. *Geoderma*, vol. 132, pp. 206– 221.
- Hevesi J.A., Istok J.D., Flint A.L. (1992) *Precipitation estimation in mountainous terrain using multivariate geostatistics. Part I Structural analysis*. *Journal of Applied Meteorology*, vol. 31, no. 6, pp.661-676.

- Isaaks E. H., Srivastava R. M. (1989) *Applied geostatistics*. Oxford University Press, New York.
- Kitanidis P. K. (1997) *Introduction to geostatistics applications to hydrogeology*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Kleczkowski A. (red.) *Mapa obszarów głównych zbiorników wód podziemnych (GZWP) w Polsce wymagających szczególnej ochrony I 500 000*. Kraków 1990.
- Kleczkowski A. (red.) *Główne zbiorniki wód podziemnych (GZWP) w Polsce – własności hydrogeologiczne, jakość wód, badania modelowe*. Kraków 1998.
- Knotters M., Brus D.J., Oude Voshaar J.H. (1995) *A comparison of kriging, co-kriging and kriging combined with regression for spatial interpolation of horizon depth with censored observation*. Geoderma, vol. 65, pp. 227-246.
- Kravchenko A, Zhang R., Tung Y.T. (1996) *Estimation of mean annual precipitation in Wyoming using geostatistical analysis* Proceedings of American Geophysical Union 16th Annual Hydrology Days, April 15-18, 1996, Fort Collins, Colorado, pp. 271-282.
- Krige D.G. (1951) *A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwaterland*. Journal Chem. Metali. Min. Sc. South Africa, no. 52, pp. 119-139.
- Lark R.M., Ferguson R.B. (2004) *Mapping risk of soil nutrient deficiency or excess by disjunctive and indicator kriging*. Geoderma, vol. 118, pp. 39-53.
- Lomotowski J., Skwarek J. (2003) *Zastosowanie metod geostatystycznych do analizy zmienności składu wody w systemach wodociągowych*. Ochrona Środowiska nr 3, str. 45-48.
- Macuda J., Solecki P. (2005) *Zanieczyszczenie środowiska gruntowo-wodnego wielopierścieniowymi węglowodorami aromatycznymi w rejonie rafinerii*. Inżynieria Środowiska, Tom 10, Zeszyt 1, str. 89-96.
- Magnuszewski A. (1999) *GIS w geografii fizycznej*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Mardikis M.G., Kalivas D. P., Kollias V. J. (2005) *Comparison of interpolation methods for the prediction of reference evapotranspiration—An application in Greece*. Water Resources Management, vol. 19, pp. 251-278.
- Martinem-Cob A. (1996) *Multivariate geostatistical analysis of evapotranspiration and precipitation in mountainous terrain*. Journal of Hydrology, vol. 174, pp.19-35.
- Matherona G. (1962-1963) *Traité de géostatistique. Appliqué, tome I*. Memoires de Bureau de Reccherches Geologigques et Minieres, vol. 1. Editions Technip, Paris.

- Michel H.S. (1952) *New methods in the statistical evaluation of mine sampling data*. Trans. Inst. Min. Metali. Vol. 61, part 6.
- Minasny, B., McBratney, A.B., and Whelan, B.M. (2005) *VESPER version 1.62*. Australian Centre for Precision Agriculture, McMillan Building A05, The University of Sydney, NSW 2006. (<http://www.usyd.edu.au/su/agric/acpa>).
- Mucha J. (1991) *Wybrane metody matematyczne w geologii górniczej*. Wydawnictwo AGH, Kraków.
- Namysłowska-Wilczyńska B. (2006) *Geostatystyka, teoria i zastosowanie*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
- Nielsen D.R., Kutilek M., Wendroth O., Hopmans J.W. (1997) *Selected research opportunities in soil physics*. Sci. Agric. Piracicaba, Vol. 54, pp. 51-77.
- Olea R.A. (1999) *Geostatics for Engineers and Earth Scientists*. Kluwer Academic Publishers.
- Pannatier Y. (1996) *VARIOWIN Software for spatial data analysis in 2D*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Pausas J.G. (2006) *Simulating Mediterranean landscape pattern and vegetation dynamics under different fire regimes*. Plant Ecology, Vol. 187, No 2, pp. 153-296.
- Rak A. (2004) *Wpływ zagospodarowania przestrzennego terenu na stan zanieczyszczeń azotanami wód podziemnych triasu opolskiego*. Akademia Rolnicza we Wrocławiu, Wydział Inżynierii Kształtowania Środowiska i Geodezji, Wrocław.
- Ratkiewicz M. (2006) *Wpływ barier genetycznych i środowiskowych oraz czynników historycznych na przepływ genów i strukturę populacji u zwierząt*. KOSMOS, Problemy nauk biologicznych, vol. 55, nr 2-3, str. 165-176.
- Richling A., Solon J. (1994) *Ekologia krajobrazu*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994.
- Roth C. (1998) *Is lognormal kriging suitable for local estimation?* Mathematical Geology, vol. 30, no. 8, pp. 999-1009.
- Sichel H.S. (1952) *New methods in statistical evaluation of mine sampling data*. Trans. Inst. Min. Metali, vol. 61, part 6, Londyn.
- Sen Z., Zeyad H. (2000) *Spatial precipitation assesment with elevation by using point cumulative semivariogram technique*. Water Resources Management, vol. 14, pp. 311-325.

- Shogenova A. (2004) *Geostatistic modelling of primary and diagenetic processes in the Ordovician sedimentary basin of Estonia*. WOGOGOB-2004 Conference Materiale, pp. 90-91.
- Singh, P., Kumar, N. (1997) *Effect of orography on precipitation in the western Himalayan region*. Journal of Hydrology, vol. 197, pp. 183–206
- Stach A. (2006) *Estymacja i symulacja pola prawdopodobieństwa maksymalnych opadów dobowych*. Mat. Konf. nt. Funkcjonowanie geosystemów zlewni rzecznych 4. Procesy ekstremalne w środowisku geograficznym. Kołobrzeg 20-22 września 2006, str. 25-29.
- Stach A., Tamulewicz J. (2003) *Wstępna ocena przydatności wybranych algorytmów przestrzennej estymacji miesięcznych i rocznych sum opadów na obszarze Polski*. [w] A. Kostrzewski, J. Szpikowski (red.) 2003 Funkcjonowanie geosystemów zlewni rzecznych, t. 3, Obieg wody – uwarunkowania i skutki w środowisku przyrodniczym, Instytut Badań Czwartorzędu i Geoekologii UAM, str. 87-111, Bogucki Wydawnictwo Naukowe, Poznań.
- Surfer 8. *User's Guide*, Golden Software, Inc. 2002 Colorado U.S.A.
- Szczepanek R. (2003) *Czasoprzestrzenna struktura opadu atmosferycznego w zlewni górskiej*. Praca doktorska, Wydział Inżynierii Środowiska Politechniki Krakowskiej, Kraków.
- Tymorek A. (2005) *Analiza taryf przesyłowych jako elementu bezpiecznego i efektywnego kierowania prac systemu elektroenergetycznego*. Praca doktorska. Wydział Elektryczny Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
- Qian S.S. (1997) *Estimating the area affected by phosphorus runoff in an Everglades wetland a comparison of universal kriging and Bayesian kriging*. Environmental and Ecological Statistics, vol. 4, pp. 1–29.
- Usowicz B., Ajnos M., Sokołowska Z., Józefaciuk G., Bowanko G., Kossowski J. (2004) *Przestrzenna zmienność fizycznych i chemicznych właściwości gleby w skali pola i gminy*. Acta Agrophysica, Rozprawy i Monografie nr 103, Lublin.
- Wackernagel H. (1998) *Multivariate geostatistics – An Introduction with Applications*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Wagner H.H., Silke Werth R.H., Gugerli F., Hoebee S.E., Scheidegger C. (2005) *Variogram analysis of the spatial genetic structure of continuous populations using multilocus microsatellite data*. Genetics Vol. 169, pp. 1739–1752.

- Wilk J., Anderson L. (2000) *GIS-supported modelling of areal rainfall in a mountainous river basin with monsoon climate in southern India*. Hydrologic Sciences, vol. 45, no. 2, pp. 185–201.
- Yarus J. M., Chambers R. M. (2006) *Practical geostatistics—an armchair overview for petroleum reservoir engineers*. JPT, no. 11, pp. 78-89.
- Ying Z. (2000) *iksim A fast algorithm for indicator kriging and simulation in the presence of inequality constraints, hard and soft data*. Computers and Geosciences. Vol. 26, pp. 493-507.
- Zhang R., Mayers D.E., Warrick A.W. (1992). *Estimation of the spatial distribution of soil chemicals using pseudo-cross-variograms*. Soil Sci. Soc. Am. J. 56, 1444-1452.

