234/2007

Raport Badawczy
Research Report

RB/32/2007

Wyznaczanie oceny grupowej na podstawie podejścia Cooka-Seiforda z uwzględnieniem możliwości występowania obiektów równoważnych w ocenie grupowej

H. Bury, D. Wagner

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr hab. inż. Janusz Kacprzyk

Warszawa 2007

Hanna Bury

Dariusz Wagner

Instytut Badań Systemowych PAN

Wyznaczanie oceny grupowej na podstawie podejścia Cooka-Seiforda z uwzględnieniem możliwości występowania obiektów równoważnych w ocenie grupowej

Wprowadzenie

Przy rozpatrywaniu właściwości metod tworzenia oceny grupowej w celu uproszczenia rozważań często zakłada się, że w opiniach ekspertów nie występują obiekty równoważne. To założenie jest przyjmowane zarówno w przypadku, gdy opinie ekspertów mają postać porównań parami, jak i wtedy, gdy są one przedstawione w postaci uporządkowań. Z reguły przyjmuje się, że opinia grupowa ma postać uporządkowania, w którym nie występują obiekty równoważne nawet wtedy, gdy w uporządkowaniach ekspertów występują obiekty równoważne.

Przyjęcie założeń, co do postaci oceny grupowej jest szczególnie ważne w odniesieniu do metod tworzenia oceny grupowej, w których jest wykorzystywana odpowiednio zdefiniowana odległość między uporządkowaniami [6], [7], [8], [12]. W metodach tych wyznaczenie oceny grupowej sprowadza się do znalezienia uporządkowania, które w sensie przyjętej odległości jest najmniej oddalone od uporządkowań podanych przez ekspertów. Jako przykład tych metod można podać medianę Kemeny'ego

[9], [10], medianę Litwaka [11], metodę Cooka-Seiforda [5]. Nie ulega wątpliwości, że przyjęcie założenia o braku obiektów równoważnych w tworzonej ocenie grupowej ogranicza zakres otrzymywanych rozwiązań. Na konieczność eliminacji tego założenia zwrócono uwagę w pracy autorów [3]. Zaproponowana tam koncepcja sprowadzała się do konieczności rozwiązania złożonego problemu optymalizacji całkowitoliczbowej. Jednakże problem ten można znacznie uprościć wprowadzając zapis wykorzystujący tzw. pozycje połówkowe, zaproponowany przez R.D. Armstronga, W.D. Cooka i L.M. Seiforda [1].

Ideę tego zapisu przedstawiono w punkcie 1. W punkcie 2 podano sformułowanie zadania optymalizacji prowadzącego do uzyskania oceny grupowej a w punkcie 3 przedstawiono przykłady numeryczne ilustrujące rozpatrywane zagadnienie.

1. Wyznaczanie struktur uporządkowań z obiektami równoważnymi

W cytowanej pracy Armstrong, Cook i Seiford zaproponowali interesujący sposób zapisu uporządkowań, w których występują obiekty równoważne. Najczęściej stosowany zapis uporządkowań tego typu ma postać

$$O_{i_1},\ldots,\left(O_{i_r},\ldots,O_{i_{r+a}}\right),\ldots,O_{i_n}, \tag{1}$$

gdzie w nawiasach ujęta jest grupa obiektów równoważnych.

Przy tym zapisie liczba pozycji, na których są rozmieszczone obiekty, jak również suma tych pozycji nie jest stała; zależy bowiem od liczby grup obiektów równoważnych oraz od liczności każdej z tych grup. Zaletą zapisu proponowanego w [1] jest stałość sumy pozycji zajmowanych przez obiekty w uporządkowaniu.

Zakładamy, że dany jest zbiór obiektów $\mathcal{O} = \{O_1, \ldots, O_n\}$. W przypadku braku obiektów równoważnych liczba pozycji zajmowanych przez obiekty w ich dowolnym uporządkowaniu jest równa liczbie obiektów n. W dalszych rozważaniach numer pozycji w uporządkowaniu będziemy oznaczać literą j.

Przyjmiemy teraz, że grupa obiektów równoważnych o liczności a zajmuje w uporządkowaniu miejsca rozpoczynając od pozycji j = t. Zgodnie z propozycją zawartą w cytowanej pracy przyjmuje się, że obiekty $O_{i_t}, \ldots, O_{i_{t+a}}$ umieszczone są na pozycji

$$j_t = \frac{t + (t+1) + \ldots + (t + a - 1)}{a} = t + \frac{a-1}{2}. \qquad (2)$$

Jeżeli liczność grupy obiektów równoważnych jest liczbą parzystą (przyjmijmy, że wynosi 2b, b ≤ n/2), to grupie tej będzie przyporządkowana pozycja $j_t = [t + (b-1)] + \frac{1}{2}$. Jeżeli zaś jest to liczba nieparzysta (przyjmijmy 2b+1, gdzie b < n/2), to $j_t = (t + b)$.

A zatem w zależności od tego, czy a jest liczbą parzystą czy nie, będą występować pozycje opisane przez liczby całkowite bądź pozycje połówkowe. Przy liczbie obiektów równej n, obiektom mogą być przyporządkowane następujące pozycje w uporządkowaniu:

$\mathcal{J}$={1; 1½ ; 2; 2½; ..., (n-1)+ ½; n}. (3)

Należy podkreślić, że liczba możliwych pozycji wynosi 2n-1.

Na przykład, dla uporządkowania pięciu obiektów, które zapisane według zasady (1) ma postać

$(O_1, O_4), O_3, (O_2, O_5)$ (4)

pozycje przypisane poszczególnym obiektom będą – w konwencji zapisu (3) - jak następuje.

Dla pary obiektów (O_1, O_4) mamy t=1, a=2, zatem pozycja

$$j_1 = \frac{1+2}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

Podobnie dla pary obiektów (O_2, O_5) mamy t=4, a=2, czyli

$$j_2 = \frac{4+5}{2} = 4\frac{1}{2}.$$

Przyporządkowanie obiektów do pozycji według zapisu (3) jest więc następujące

Obiekty	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
Pozycja	1½	4½	3	1½	4½

(5)

Z analizy uporządkowania (5) wynika, że przy przyjetym zapisie mogą występować pozycje, którym nie są przyporządkowane obiekty. W rozpatrywanym przykładzie są to pozycje 1, 2, 2½, 3½, 4, 5.

Warto zwrócić uwagę, że numer pozycji nie przesądza, ile obiektów znajduje się na danej pozycji. Przyjmijmy przykładowo, że numer pozycji wynosi 4.

Rozpatrzmy następujące uporządkowania 7 obiektów

1. $(O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, O_7)$ $\quad j_1 = \frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = 4$ (6)

2. $O_6, (O_2, O_3, O_4, O_5, O_7), O_1$ $\quad j_2 = \frac{2+3+4+5+6}{5} = 4$ (7)

3. $O_6, O_2, (O_1, O_4, O_7), O_5, O_3$ $\quad j_3 = \frac{3+4+5}{3} = 4.$ (8)

Z zapisu tego bezpośrednio wynika, że warunkiem jednoznacznego określenia liczby obiektów równoważnych znajdujących się na danej pozycji jest wykorzystanie dodatkowej informacji o pozycji zajmowanej przez pierwszy z grupy obiektów równoważnych. Pozycję tę nazwiemy poziomem i będziemy dalej oznaczać literą ℓ. Oczywiście $\ell=1, \ldots, n$.

Poziom $\ell=1$ wyznacza te grupy obiektów równoważnych, w których pierwszy obiekt znajduje się na pierwszej pozycji w uporządkowaniu.

Poziom $\ell=2$ określa te grupy obiektów równoważnych, w których pierwszy obiekt stoi na drugiej pozycji w uporządkowaniu itd.

Zamiast posługiwać się zapisem, w którym obiekty równoważne są wskazywane bezpośrednio, np. $\left(O_{i_1}, \ldots, O_{i_n}\right)$, jest korzystniej posługiwać się zapisem, w którym wymienione są pozycje, na których znajdują się obiekty równoważne, np. (3, 4, 5). Zapis ten oznacza, że rozpatrywane są kolejne pozycje zaczynając od trzeciej a na piątej kończąc. W tej konwencji nie są uwzględniane pozycje połówkowe.

Grupę pozycji równoważnych nazwiemy strukturą i oznaczymy przez S_ℓ^j; jest ona zależna zarówno od pozycji j jak i od poziomu ℓ. Liczbę elementów danej struktury, to znaczy liczbę kolejnych pozycji zajmowanych przez obiekty równoważne oznaczymy przez s_{ℓ_j}, oczywiście $1 \leq s_{\ell_j} \leq n$.

Przedstawione zasady konstrukcji struktur S_ℓ^j umożliwiają budowę tablicy, w której wierszach będą umieszczone struktury odpowiadające danemu poziomowi a w kolumnach te, które są związane z daną pozycją połówkową (Tablica 1).

Tablica 1.

		Struktury S_ℓ^j								
	j	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
Poziom	$\ell = 1$	1	(1,2)	(1,2,3)	(1,2,3,4)	(1,2,3,4,5)	(1,2,3,4,5,6)	(1,2,3,4,5,6,7)	(1,2,3,4,5,6,7,8)	(1,2,3,4,5,6,7,8,9)
	$\ell = 2$			2	(2,3)	(2,3,4)	(2,3,4,5)	(2,3,4,5,6)	(2,3,4,5,6,7)	(2,3,4,5,6,7,8)
	$\ell = 3$					3	(3,4)	(3,4,5)	(3,4,5,6)	(3,4,5,6,7)
	$\ell = 4$							4	(4,5)	(4,5,6)
	$\ell = 5$									5

Rozpatrzymy poziom ℓ=v. Struktury odpowiadające temu poziomowi podano w Tablicy 2.

Tablica 2.

Pozycje połówkowe j	v	v+0,5	v+1	(v+1)+0,5	v+2	...
Poziom ℓ=v	v	(v, v+1)	(v, v+1, v+2)	(v, v+1, v+2, v+3)	(v, v+1, v+2, v+3, v+4)	...

Z Tablicy 2 wynika, że strukturze (v, v+1, ..., v+a) odpowiada pozycja połówkowa $j = v + \frac{a}{2}$ czyli struktura ta będzie oznaczana jako $S_v^{v+\frac{a}{2}}$.

Z Tablicy 2 wynika również, że

$$s_{\ell j} = 2(j - \ell) + 1 . \tag{9}$$

A zatem

$$\sum_{\ell=1}^{[j]} s_{\ell j} = [j](2j - [j]), \qquad \text{dla } [j]=j \quad \sum_{\ell=1}^{[j]} s_{\ell j} = j^2, \tag{10}$$

gdzie $[j]$ największa liczba całkowita $\leq j$.

Na przykład, dla $j = 3,5$ $\quad \sum_{\ell=1}^{[3,5]} s_{\ell j} = 3(7-3) = 12$.

Wprowadzimy zmienną zero-jedynkową $x_{\ell j}$ zdefiniowaną, jak następuje:

$$x_{\ell j} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli rozpatrywana struktura odpowiada poziomowi } \ell \\ & \text{i pozycji połówkowej } j \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

Zmienna ta wyznacza częściową strukturę oceny grupowej, którą przyjmujemy do rozważań, odpowiadającą danej liczbie obiektów równoważnych. Łatwo zauważyć, że jeżeli została wybrana struktura odpowiadająca pozycji j, to musi być spełniony warunek

$$\sum_{\ell=1}^{[j]} x_{\ell j} \le 1,\ j \in \mathcal{J} \tag{11}$$

bowiem w konkretnych rozważaniach można przyjąć co najwyżej jedną strukturę oceny grupowej odpowiadającą danej pozycji.

Jeżeli została wybrana struktura z poziomu ℓ, to

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = 1 \text{ oraz } \sum_{j=1}^{n} x_{\ell j} \le 1, \quad \ell = 2, \ldots, [j] \tag{12}$$

bowiem w konkretnych rozważaniach można wybrać tylko jedną strukturę oceny grupowej z poziomu pierwszego oraz co najwyżej jedną strukturę przy założeniu określonego poziomu $\ell > 1$.

Biorąc pod uwagę, że liczba obiektów w rozpatrywanych strukturach tworzących ocenę grupową jest równa n, musi być spełniony warunek

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{[j]} s_{\ell j} x_{\ell j} = n\,. \tag{13}$$

2. Zadanie wyznaczania oceny grupowej

Cook i Seiford w pracy [5] przyjęli następującą definicję odległości.

Definicja 1

Odległość między uporządkowaniami P^k i P^l dana jest następującą zależnością:

$$d(P^k, P^l) = \sum_{i=1}^{n} \left| q_i^k - q_i^l \right|, \tag{14}$$

gdzie współczynniki $[\, q_i^k \,]$ oznaczają numery pozycji, na których eksperci umieścili oceniane obiekty (wiersze k=1, ..., K odpowiadają uporządkowaniom podanym przez ekspertów, kolumny i = 1, ..., n kolejnym obiektom $O_1, \ldots, O_n$).

Zadanie, które należy rozwiązać polega na wyznaczeniu uporządkowania $\hat{P}$ najmniej odległego w sensie odległości (14) od zbioru uporządkowań podanych przez ekspertów. Zadanie to można zapisać w postaci

$$M(\hat{P}) = \min_{P} \sum_{k=1}^{K} d(P^k, P). \tag{15}$$

Zakładając, że w uporządkowaniu $\hat{P}$ obiekt O_i może zajmować j-tą pozycję, $j \in \mathcal{S} = \{1; 1{,}5; \ldots, n\text{-}0{,}5; n\}$ zadanie minimalizacji można zapisać w postaci:

$$\min_{y_{ij}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in \mathcal{S}} y_{ij} d_{ij}, \text{ gdzie } d_{ij} = \sum_{k=1}^{K} q_i^{k(j)}, \quad q_i^{k(j)} = \left|q_i^k - j\right| \tag{16},$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli obiekt } O_i \text{ zajmuje } j-\text{tą pozycję w uporządkowaniu P} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

z ograniczeniami wynikającymi ze struktury pozycji zajmowanych przez obiekty. Szczegółowy opis ograniczeń podano w pracy [4].

Po pomnożeniu przez 2 numerów pozycji zajmowanych przez obiekty zadanie (16) zostaje sprowadzone do postaci zadania programowania całkowitoliczbowego, które może być rozwiązywane za pomocą dostępnych pakietów optymalizacji dyskretnej (CPLEX, Solver). Szczegółowy opis zadania przedstawiono w pracy [4].

Alternatywą dla rozwiązywania zadania optymalizacji dyskretnej (16) jest przeszukiwanie zbioru wszystkich możliwych uporządkowań n obiektów i wybór uporządkowania najmniej odległego w sensie (15) od zbioru uporządkowań podanych przez ekspertów. Ograniczeniem tego podejścia jest fakt, że ze wzrostem n rośnie liczba uporządkowań, jakie należy rozpatrzeć. Jeżeli założymy, że w ocenie grupowej nie występują obiekty równoważne, liczba wszystkich uporządkowań zbioru n obiektów jest równa n!. Uwzględnienie obiektów równoważnych w ocenie grupowej powoduje szybki wzrost liczności zbioru uporządkowań. Dla niewielkich wartości n liczność zbioru możliwych uporządkowań wynosi:

liczba obiektów	3	4	5	6
liczba uporządkowań	13	75	541	4683

Jak widać metoda przeszukiwania jest ekstensywna i raczej mało użyteczna dla większych n. Stąd zainteresowanie autorów sformułowaniem i rozwiązaniem problemu optymalizacji. Dla rozważanych wartości n ma ono następujace wymiary:

liczba obiektów	3	4	5	6
liczba zmiennych	24	42	65	93
liczba ograniczeń	15	20	25	30

Można pokazać, że liczba zmiennych występujących w zadaniu optymalizacji wynosi n(5n+1)/2 oraz, że liczba ograniczeń zadania wynosi 5n.

3. Przykłady

Przykład 3.1.

Dane są uporządkowania zbioru pięciu obiektów przedstawione przez dziewięciu ekspertów. Przyjęto, że uporządkowania ekspertów mogą zawierać obiekty równoważne (zostały ujęte w nawiasach).

P^1: $(O_1, O_2, O_4), (O_3, O_5)$
P^2: O_4, O_2, O_3, O_5, O_1
P^3: O_1, O_5, O_3, O_4, O_2
P^4: O_4, O_2, O_1, O_3, O_5
P^5: $(O_1, O_3, O_5), O_4, O_2$ (17)
P^6: O_1, O_5, O_3, O_4, O_2
P^7: $(O_2, O_4), O_1, O_5, O_3$

P^8: O_1, O_5, O_3, O_4, O_2

P^9: $(O_1, O_5), O_3, (O_2, O_4)$

Aby wyznaczyć ocenę grupową reprezentatywną dla tego grona ekspertów posługując się pojęciem odległości Cooka-Seiforda, należy wyznaczyć uporządkowanie $\hat{P}$ stanowiące rozwiązanie problemu (16).

Stosując zapis ACS należy - w uporządkowaniach ekspertów - umieścić obiekty na następujących pozycjach:

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
P^1:	2	2	4,5	2	4,5
P^2:	5	2	3	1	4
P^3:	1	5	3	4	2
P^4:	3	2	4	1	5
P^5:	2	5	2	4	2
P^6:	1	5	3	4	2
P^7:	3	1,5	5	1,5	4
P^8:	1	5	3	4	2
P^9:	1,5	4,5	3	4,5	1,5

Po pomnożeniu numerów pozycji obiektów przez 2 otrzymamy nowy zbiór pozycji, które mogą zajmować obiekty $J \in \{2, 3, ..., 10\}$. Jak wspomniano wcześniej liczba tych pozycji wynosi 9.

Zadanie minimalizacji odległości (16) przybiera postać:

$$\min_{y_{ij}} \sum_{i=1}^{5} \sum_{J=2}^{10} y_{iJ} \bar{d}_{iJ} \text{, gdzie } \bar{d}_{iJ} = \sum_{k=1}^{9} \left| 2q_i^k - J \right| \text{ oraz}$$

$$y_{iJ} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli obiekt } O_i \text{ zajmuje } J-\text{tą pozycję w uporządkowaniu P} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Macierz „odległości" ma postać:

$$\overline{D} = [\overline{d}_{iJ}] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} J & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ j & 1 & 1\frac{1}{2} & 2 & 2\frac{1}{2} & 3 & 3\frac{1}{2} & 4 & 4\frac{1}{2} & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccc} 21 & 18 & 17 & 20 & 23 & 30 & 37 & 44 & 51 \\ 46 & 37 & 30 & 29 & 28 & 27 & 26 & 25 & 26 \\ 43 & 34 & 25 & 18 & 11 & 14 & 17 & 22 & 29 \\ 34 & 29 & 26 & 25 & 24 & 23 & 22 & 29 & 38 \\ 36 & 27 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 29 & 36 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ O_1 \\ O_2 \\ O_3 \\ O_4 \\ O_5 \end{array}$$

Elementy, które odpowiadają pozycjom obiektów w uporządkowaniu stanowiącym ocenę grupową zostały zacienione.

Ograniczenia zadania wynikają ze struktury pozycji ACS zajmowanych przez obiekty:

1) 5 ograniczeń wynika z wymagania, że jeden obiekt może być umieszczony tylko na jednej pozycji,

2) kolejne ograniczenie wynika z faktu, że suma pozycji w zapisie ACS zajmowanych przez obiekty jest stała i wynosi 15 (lub 30 w zapisie podwojonym),

3) następne ograniczenie uwzględnia fakt, że liczba obiektów w uporządkowaniu wynosi 5, (co odpowiada zależności (13)),

4) 9 ograniczeń stanowi, że w uporządkowaniu może występować co najwyżej jedna struktura z danej pozycji (kolumny) macierzy struktur, co odpowiada zależności (11).

5) 5 ograniczeń określa, że z każdego poziomu macierzy struktur należy uwzględnić co najwyżej jedną strukturę, (co odpowiada zależności (12)),

6) 4 ograniczenia uwzględniają fakt, że występowanie struktur z wyższych poziomów zależy od tego, jakie struktury zostały przyjęte na poziomach wcześniejszych.

Wszystkie zmienne y_{iJ}, x_{iJ} oraz pomocnicze zmienne λ_i są binarne, $i=1, \ldots, 5$, $J=2, \ldots 10$.

Ocena grupowa otrzymana w wyniku rozwiązania zadania optymalizacji ma postać następującego uporządkowania:

$O_1, O_5, O_3, O_4, O_2.$ (18)

Odległość w sensie (15) od zbioru uporządkowań ekspertów wynosi 50 (dla zapisu podwojonego 100).

Warto zauważyć, że pomimo obecności obiektów równoważnych w ocenach ekspertów, w opinii grupowej brak jest obiektów równoważnych. Następny przykład pokazuje, że możliwa jest sytuacja przeciwna.

Przykład 3.2.

Dane są uporządkowania zbioru pięciu obiektów podane przez jedenastu ekspertów. Założono, że oceny ekspertów nie mogą zawierać obiektów równoważnych.

P^1: $O_1; O_2, O_4, O_5, O_3$
P^2: O_5, O_1, O_2, O_4, O_3
P^3: O_1, O_2, O_5, O_3, O_4
P^4: O_2, O_4, O_3, O_1, O_5
P^5: O_3, O_4, O_2, O_5, O_1
P^6: O_5, O_2, O_1, O_3, O_4 (19)
P^7: O_2, O_3, O_5, O_4, O_1
P^8: O_1, O_4, O_3, O_2, O_5
P^9: O_1, O_2, O_3, O_5, O_4
P^{10}: O_2, O_1, O_4, O_5, O_3
P^{11}: O_1, O_2, O_4, O_3, O_5

Zakładając, że w ocenie grupowej nie mogą występować obiekty równoważne otrzymujemy dwa rozwiązania:

O_1, O_2, O_4, O_3, O_5 oraz O_1, O_2, O_4, O_5, O_3 (20)

jednakowo odległe w sensie (15) od uporządkowań podanych przez ekspertów. Odległość (15) określona dla uporządkowań (20) wynosi 60.

Jeżeli założymy, że w ocenie grupowej mogą występować obiekty równoważne otrzymujemy następujące rozwiązanie:

$O_1, O_2, (O_3, O_4, O_5)$. (21)

Dla tego uporządkowania odległość (15) wynosi 56.

Jak widać założenie o dopuszczalności występowania obiektów równoważnych w ocenie grupowej wpływa na charakter rozwiązania.

4. Uwagi końcowe

W przykładach przedstawiono sytuacje, w których w ocenach ekspertów występowały lub nie obiekty równoważne. W ocenie grupowej obiekty równoważne były dopuszczalne. Pokazano, że przyjęcie tego założenia może wpływać na postać rozwiązania.

Podejście Cooka i Seiforda ułatwia rozwiązywanie problemów związanych z występowaniem obiektów równoważnych w ocenie grupowej. Stanowi ono skuteczne narzędzie rozszerzające możliwości znajdowania oceny grupowej w przypadku, gdy dopuszczane są obiekty równoważne.

Literatura

[1] Armstrong R.D., Cook W.D., Seiford L.M.: Priority ranking and consensus formation: The case of ties, Management Science, 1982

[2] Bury H., Wagner D.: Wyznaczanie oceny grupowej metodą mediany Kemeny'go, w: Modelowanie preferencji a ryzyko'99, cz.2, 1999

[3] Bury H., Wagner D.: The use of Kemeny median for group decision making. Integer programming approach, proc. of the 6th MMAR conference, Międzyzdroje 2000

[4] Bury H., Wagner D.: Determining the group judgement when ties can occur, proc. of the 13th MMAR conference, Szczecin 2007

[5] Cook W.D., Seiford L.M.: Priority ranking and consensus formation, Management Science, vol. 24, no 16, 1978

[6] Cook W.D., Kress M., Seiford L.M.: A general framework for distance-based consensus in ordinal ranking models, European Journal of Operational Research, vol. 96, issue 2, 1997

[7] Cook W.D.: Distance-based and ad hoc consensus models in ordinal preference ranking, European Journal of Operational Research, vol. 172, issue 2, 2006

[8] Hwang C.-L., Lin M.-J.: Group decision making under multiple criteria, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987

[9] Kemeny J.: Mathematics without numbers, Daedalus 88, 1959

[10] Kemeny J., Snell L.: Mathematical Models in the Social Sciences. Ginn. Boston 1960

[11] Litvak B.G.: Ekspertnaja informacija. Mietody połuczienija i analiza, Radio i Swjaz, Moskwa 1982.

[12] Nurmi H.: Comparing voting systems, Kluwer, Dordrecht/ Boston/ Lancaster, Tokio, 1987