282/2006

Raport Badawczy
Research Report

RB/29/2006

Ocena żywotności systemów wielostanowych

J. Karpiński

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr hab. inż. Olgierd Hryniewicz

Warszawa 2006

Raport Badawczy

Research Report

Ocena żywotności systemów wielostanowych

Janusz Karpiński

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

Warszawa 2006

SPIS TREŚCI

1. Wstęp

Celem przeprowadzenia analizy niezawodności systemu dzielimy go na rozłączne części składowe (np. jednostki, bloki, zespoły układy, pakiety czy też elementy fizyczne) traktowane analizie dalszej analizie jako niepodzielne – tzw. elementy systemu. Następnie na podstawie wzajemnych powiązań elementów systemu analizie ich wpływu na funkcjonowanie systemu ustala się strukturę niezawodnościową systemu, tzn. odwzorowanie przyporządkowujące stanom elementów stan systemu. Struktura niezawodnościowa, parametry niezawodności elementów oraz informacja o rodzajach analizie parametrach obsług technicznych stanowią podstawowe dane do oceny niezawodności systemu.

Najczęściej stosowane w praktyce metody wyznaczania wskaźników niezawodności systemów korzystają z następujących założeń:

1) system i jego elementy są dwustanowe w sensie niezawodności, tzn. wyróżnia się tylko dwa stany elementów systemu: stan zdatności oraz stan niezdatności,

2) warunki zewnętrzne oddziałujące na system są stałe w czasie,

3) struktura niezawodnościowa systemu jest stała w czasie.

W analizie niezawodności systemów uwzględnia się przeważnie czynniki o charakterze *„wewnętrznym"*, na przykład, losowe uszkodzenia elementów systemu spowodowane wadami materiałowymi, fizyko-chemicznymi procesami starzenia, błędami personelu obsługi itp. Uszkodzenia takie mają m. in. następujące cechy:

- pojedynczość strumienia uszkodzeń, tj. małe prawdopodobieństwo jednoczesnego uszkodzenia pewnej liczby elementów systemu;
- losowy charakter uszkodzeń, często o rozkładzie wykładniczym lub bliskim jemu;
- uszkodzenia poszczególnych elementów można zwykle uznać za niezależne;
- czas naprawy jest zwykle krótki.

Niekiedy, obok tak rozumianego pojęcia niezawodności systemów, wprowadza się pojęcie **żywotności systemów**. *Żywotność systemu jest cechą charakteryzującą odporność systemu na oddziaływanie czynników zewnętrznych w stosunku do systemu i powodujących uszkodzenia lub tylko pogorszenie stanu niezawodnościowego pewnej części elementów systemu*. Inna definicja żywotności pod tym pojęciem rozumie *zdolność systemu do* *zachowania podstawowych funkcji przy oddziaływaniu czynników otoczenia zewnętrznego o charakterze katastroficznym.*

Czynniki zewnętrzne o charakterze katastroficznym oddziałujące na system można podzielić na dwie grupy:

- czynniki o charakterze żywiołowym (naturalnym), np. pożary, wyładowania atmosferyczne, obsunięcia ziemi, powodzie, wichury, duże opady atmosferyczne;
- czynniki umyślne, związane z działaniami nieprzyjaciela, np. atak terrorystyczny, atak artyleryjski, atak rakietowy, bombowy, radio-elektroniczny, dywersja itp.

Istnieją pewne podobieństwa między *niezawodnością* a *żywotnością systemów*. W obu przypadkach rozważane są uszkodzenia elementów systemu. W podobny sposób definiuje się wskaźniki niezawodności i żywotności. Istnieją jednakże również istotne różnice. W analizie żywotności, w przeciwieństwie do analizy niezawodności, główną rolę odgrywają czynniki zewnętrzne w stosunku do systemu, zarówno o charakterze żywiołowym, jak też umyślnym. Analiza żywotności systemów charakteryzuje się następującymi cechami:

- występują równoczesne uszkodzenia lub zniszczenia wielu elementów systemu, tzw. uszkodzenia mnogie spowodowane wspólną przyczyną;
- charakter czynników umyślnych, a więc i uszkodzeń nimi spowodowanych, nie jest czysto losowy, chociaż w przypadku niewystarczającej informacji o przyszłych zamierzeniach nieprzyjaciela można założyć losowość uszkodzeń mnogich;
- uszkodzenia mają zazwyczaj charakter długotrwały, usuwanie uszkodzeń jest kosztowne i pracochłonne.

Wielu badaczy traktuje uszkodzenia mnogie i pojedyncze łącznie, ***uważając żywotność jako szczególny przypadek niezawodności***. Dotyczy to zwłaszcza takich systemów technicznych jak sieci energetyczne i rurociągowe, elektrownie konwencjonalne i jądrowe, instalacje chemiczne. Uszkodzenia mnogie są wówczas traktowane jako uszkodzenia zależne spowodowane wspólną przyczyną. Przy takim podejściu wskaźniki żywotności definiuje się dokładnie w taki sam sposób jak wskaźniki niezawodności. W niniejszym opracowaniu stosować będziemy to drugie podejście, uwzględniając – oczywiście – wpływ zmieniających się oddziaływań zewnętrznych na niezawodność systemu.

Powszechnie przyjmowane założenia o dwustanowości elementów oraz całego systemu, niezmienności struktury niezawodnościowej i braku oddziaływań zewnętrznych na system są w wielu przypadkach dużym uproszczeniem powodującym niewłaściwą ocenę niezawodności analizowanego systemu. Oceniając niezawodność współczesnych, skomplikowanych systemów technicznych, dokonuje się ich podziału na elementy, które w wielu przypadkach same są złożonymi obiektami. W takim przypadku dla właściwej oceny niezawodności systemu należy traktować jego elementy jako wielostanowe, tzn. należy wyróżnić wiele stanów zdatności i wiele stanów niezdatności odpowiadających różnym stopniom zużycia elementów, różnym poziomom efektywności ich działania czy też różnym rodzajom uszkodzeń.. Uwaga ta odnosi się tym bardziej do całego systemu. Wielostanowe traktowanie systemu i jego elementów pozwala ponadto na: uwzględnienie zjawiska wzajemnej kompensacji uszkodzeń oraz na planowanie racjonalnych obsług technicznych zapobiegających m. in. uszkodzeniom katastrofalnym systemu o skutkach niebezpiecznych dla zdrowia i życia ludzkiego lub prowadzących do dużych strat materialnych.

Wyróżnianie w analizie niezawodności systemów zagadnień ściśle wiążących się z ich żywotnością jest uzasadnione m. in. tym, że wiele współczesnych systemów technicznych funkcjonuje w zmieniających się warunkach zewnętrznych. Spowodowane to jest zmianami:

- narażeń środowiskowych oddziałujących na system,
- obciążeń elementów i systemu,
- wykonywanego przez system zadania (funkcji),
- wymagań (potrzeb) w stosunku do wielkości i jakości efektu wyjściowego,
- jakości obsług technicznych systemu,
- kondycji psychicznej i fizycznej operatora systemu.

Zmienne warunki zewnętrzne mogą powodować zmianę struktury niezawodnościowej systemu, a to z kolei wpływa na wartość wskaźników charakteryzujących jego żywotność. Dla dokonania adekwatnej oceny żywotności systemu powinno się zatem uwzględnić zmienność warunków zewnętrznych w czasie eksploatacji systemu. Jako przykład systemu o zmiennej w czasie strukturze niezawodnościowej rozpatrzmy system napędowy anteny stacji radiolokacyjnej składający się z dwóch torów napędowych. W zależności od obciążenia anteny tory te pracują w różnej konfiguracji. W czasie normalnego obciążenia tory te funkcjonują jako układ o strukturze równoległej, natomiast w czasie podwyższonego obciążenia (duże oblodzenie anteny, duża prędkość wiatru) tory napędowe pracują jako układ o strukturze szeregowej. Innymi przykładami systemów o losowo zmiennej w czasie strukturze niezawodnościowej są:

a) system zasilania złożony z wielu generatorów mocy funkcjonujący w warunkach zmiennego zapotrzebowania na energię elektryczną: w zależności od wielkości zapotrzebowania ulega zmianie liczba niezbędnych dla zaspokojenia zapotrzebowania generatorów, pozostałe zaś są nadmiarowe,

b) system wielofunkcyjny realizujący poszczególne funkcje w różnych losowych przedziałach czasu, przy czym każda funkcja realizowana jest przez określony zbiór elementów systemu tworzących układ o określonej, zależnej od realizowanej funkcji, strukturze niezawodnościowej,

c) system komputerowy złożony z dwóch procesorów, które w zależności od rodzaju realizowanych zadań i przeprowadzanych obsług technicznych funkcjonują: 1) jako układ o strukturze równoległej – gdy realizowane jest bardzo ważne zadanie i celem zwiększenia szybkości i niezawodności zadania procesory pracują w strukturze równoległej, 2) jako układ o strukturze szeregowej – gdy realizowana jest większa liczba mniej ważnych zadań i niezbędna jest praca obu procesorów, 30 jako układ złożony z jednego procesora – gdy przeprowadzane są planowe zabiegi profilaktyczne na drugim procesorze,

d) system transportowy komunikacji miejskiej, którego elementami są autobusy – w zależności od natężenia ruchu pasażerskiego dla prawidłowego zapewnienia przewozów niezbędna jest różna liczba autobusów, pozostałe natomiast stanowią rezerwę lub poddawane są obsługom technicznym.

Przedmiotem niniejszego opracowania jest analiza żywotności wielostanowych systemów technicznych, tzn. analiza niezawodności systemów, na które oddziałują losowo zmienne warunki zewnętrzne, mające wpływ na zmiany struktury niezawodnościowej systemu. Miarą żywotności takich wielostanowych systemów są pewne wskaźniki niezawodnościowe, charakteryzujące wpływ oddziaływania warunków zewnętrznych na niezawodność rozpatrywanego systemu, lub inaczej – odporność systemu (w sensie niezawodności) na narażenia zewnętrzne.

W opracowaniu najpierw przedstawiono opis rozpatrywanej klasy wielostanowych systemów technicznych, następnie przedstawiono model probabilistyczny opisujący dynamikę funkcjonowania systemu z punktu widzenia możliwości dokonywania oceny jego żywotności , na koniec zaś scharakteryzowano specyficzne charakterystyki modelu, mogące służyć do liczbowej lub funkcyjnej oceny żywotności systemu.

2. Założenia, definicje, opis systemu

Przedmiotem rozważań będzie system techniczny S złożony z $n \geq 1$ elementów $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Przyjmijmy następujące założenie:

Założenie 1

Element c_i, $i = 1, \ldots, n$, może znajdować się w jednym z $k_i + 1$ wykluczających się stanach $0,1,\ldots,k_i$, $k_i \geq 1$, tworzących zbiór $K_i = \{0,1,\ldots,k_i\}$ nazywany ***przestrzenią stanów niezawodnościowych elementu*** c_i lub prościej ***przestrzenią stanów elementu*** c_i.

Założenie 2

System S może znajdować się w jednym z $k+1$ wykluczających się stanów $0,1,\ldots,k$, $k \geq 1$, tworzących zbiór $K = \{0,1,\ldots,k\}$ nazywany ***przestrzenią stanów niezawodnościowych systemu*** S lub prościej ***przestrzenią stanów*** S.

Poszczególne stany systemu odpowiadają różnym stopniom jego efektywności działania lub inaczej, różnym poziomom jakości funkcjonowania systemu, wynikającym m.in. z różnego stopnia zużycia systemu. Zwykle przyjmuje się, że stany $0,1,\ldots,l$ odpowiadają różnym stanom niezdatności systemu, stany $l+1, l+2, \ldots, k-1$ - różnym stanom niepełnej zdatności, natomiast stan k - stanowi pełnej zdatności systemu, $0 \leq l < k$. Zwykle też zakłada się, że stany systemu są uszeregowane ze względu na stopień jego zużycia w taki sposób, że stanowi o mniejszym numerze odpowiada większe zużycie systemu.

Analogiczną interpretację można nadać stanom elementów: $0,1,\ldots,l_i$ - stany niezdatności elementu c_i, $l_i + 1, l_i + 2, \ldots, k_i - 1$ - stany niepełnej zdatności oraz k_i - stan pełnej zdatności elementu c_i, $i = 1,2,\ldots,n$, $0 \leq l_i < k_i$.

Wprowadzenie większej od 1 liczby stanów zdatności odpowiadających różnym stopniom zużycia systemu (elementu) pozwala na racjonalne planowanie obsług profilaktycznych, natomiast wprowadzenie większej od 1 liczby stanów niezdatności ma na celu rozróżnienie różnych rodzajów uszkodzeń systemu (elementu) wymagających odmiennych obsług technicznych (np. kapitalny remont, naprawa bieżąca, regulacja) lub powodujących różne następstwa (np. uszkodzenie katastroficzne o skutkach niebezpiecznych dla zdrowia i życia ludzkiego, uszkodzenie powodujące nadmierne obciążenie niektórych elementów systemu). Umożliwia ponadto racjonalne planowanie odpowiednich obsług technicznych środków niezbędnych dla ich przeprowadzenia.

W przypadku, gdy $k_i = 1, i = 1,2,...,n$ oraz $k = 1$, mamy do czynienia z klasycznym systemem dwustanowym o elementach dwustanowych.

Załóżmy, że $t = 0$ jest chwilą rozpoczęcia eksploatacji systemu S. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$X_i(t)$ - stan elementu c_i w chwili $t \geq 0$, $X_i(t) \in K_i$, $i = 1,2,...,n$

$X(t)$ - stan systemu w chwili $t \geq 0$, $X(t) \in K$

$\underline{X}(t) - (X_1(t), X_2(t),..., X_n(t))$ - wektor stanów elementów $c_1,...,c_n$ w chwili $t \geq 0$, $\underline{X}(t) \in V$,

gdzie: $V = K_1 x K_2 x ... x K_n = \{\underline{x} = (x_1,...,x_n) : x_i \in K_i, i = 1,2,...,n\}$.

Zbiór V zawiera wszystkie możliwe wektory stanów elementów, które będą oznaczane małymi literami $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{v}$, $\underline{z}$ itp.

Ze względu na losowy charakter procesów zużywania się elementów systemu oraz losowy czas napraw i innych obsług technicznych, stan elementów systemu ulega losowym zmianom w czasie eksploatacji systemu. Ponieważ liczba stanów elementów systemu jest skończona, zmiany te mają charakter skokowy. Przyjmijmy zatem następujące założenie:

Założenie 3

$\{X(t): t \in R_+\}$ oraz $\{X_i(t): t \in R_+\}, i = 1,2,\dots,n,$ są procesami stochastycznymi określonymi na ustalonej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \Sigma, \Pr)$, których realizacje są funkcjami schodkowymi prawostronnie ciągłymi i posiadającymi skończoną liczbę skoków na każdym przedziale ograniczonym. Przestrzenią stanów procesu $\{X(t)\}$jest K, natomiast przestrzenią stanów procesu $\{X_i(t)\}$ jest K_i, $i = 1,2,\dots,n$.

Ponadto zakłada się, że wszystkie stany powyższych procesów są osiągalne, tzn.

(2.1) $\forall\, r \in K \;\; \exists\, t \geq 0 \quad \Pr(X(t) = r) > 0$

(2.2) $\forall\, j \in K_i \; \exists\, t \geq 0 \quad \Pr(X_i(t) = j) > 0, i = 1,2,\dots,n.$

Proces stochastyczny $\{X(t)\}$opisuje przebieg zmian stanu systemu w czasie i nazywany jest *procesem zmian stanu systemu*.

Proces stochastyczny $\{X_i(t)\}$opisuje przebieg zmian stanu elementu c_i w czasie i nazywany jest *procesem zmian stanu elementu* c_i, $i = 1,2,\dots,n$.

Z założenia 3 wynika, że $\underline{X}(t) = (X_1(t), X_2(t),\dots, X_n(t)): t \in R_+$ jest również skokowym procesem stochastycznym przyjmującym wartości w n-wymiarowej przestrzeni $V = K_1 x K_2 x \dots x K_n$.

Proces stochastyczny $\{\underline{X}(t)\}$ opisuje łączny przebieg zmian stanów elementów systemu w czasie lub równoważnie, przebieg zmian wektora stanów elementów nazywany jest *procesem zmian wektora stanów elementów*.

Niech $L \subseteq V$ oznacza wszystkie te wektory stanów elementów (skrót: w.s.e), które realizują się z dodatnim prawdopodobieństwem:

$$L = \{\underline{x} \in V : \Pr(\underline{X}(t) = \underline{x}) > 0 \text{ dla pewnego } t \geq 0\}$$

Zbiór L będziemy nazywać *przestrzenią wektorów stanów elementów* (skrót: przestrzeń w.s.e.).

Przyjmijmy dalej następujące założenia:

Założenie 4

Przestrzeń w.s.e. L stanowi minimalną przestrzeń stanów procesu stochastycznego $\{\underline{X}(t)\}$, tzn.

$$\forall t \geq 0, \omega \in \Omega \qquad \underline{X}(t,\omega) \in L$$

$$\forall \underline{x} \in L \qquad \exists t \geq 0 \qquad \Pr\{\underline{X}(t) = \underline{x}) > 0.$$

Z założenia 3 wynika, że $L \neq 0$.

Rozkład początkowy procesu $\{X(t)\}$ oznaczmy symbolem $\underline{d} = (d_{\underline{x}} : \underline{x} \in L)$:

$$d_{\underline{x}} = \Pr\{\underline{X}(0) = \underline{x}\}, \quad \underline{x} \in L.$$

Jeśli procesy $\{X_i(t)\}$ są niezależne, $i = 1,2,\ldots,n$ to $L = V$ oraz

$$d = \prod_{i=1}^{n} \Pr\{X_i(0) = x_i\}, \quad \underline{x} \in L.$$

3. Proces zmian warunków zewnętrznych. Założenia ogólne

Wiele współczesnych systemów technicznych funkcjonuje w zmieniających się warunkach zewnętrznych, które mogą w istotny sposób wpływać na niezawodność systemu. Niestety, różnych powodów, najczęściej komplikacji obliczeniowych, faktu tego na ogół się nie uwzględnia. W niniejszej pracy podejmiemy próbę uwzględnienia tego zjawiska.

Pod pojęciem warunków zewnętrznych będziemy rozumieć zbiór wszystkich parametrów określających zewnętrzne oddziaływanie na system i wpływających na jego niezawodność. Warunki zewnętrzne charakteryzowane są takimi czynnikami, jak:

- narażenia środowiskowe oddziałujące na system (temperatura, opady atmosferyczne, wiatr, narażenia elektryczne i mechaniczne itp.),
- wpływ personelu obsługującego system (np. stopień przeszkolenia, kondycja psychofizyczna),
- rodzaj funkcji (zadania) wykonywanej przez system zgodnie z potrzebami użytkownika,
- strategia obsług technicznych (np. planowane przeglądy i wymiany profilaktyczne),
- intensywność użytkowania,
- wymagania w stosunku do wielkości i jakości efektu wyjściowego wypracowanego przez system (np. wymaganej mocy systemu energetycznego),
- wpływ innych systemów technicznych.

Z powyższego wynika, że dokonanie pełnego opisu warunków zewnętrznych oddziałujących na system pod kątem ich wpływu na niezawodność systemu jest bardzo złożonym zadaniem. Celowym jest zatem dokonanie pewnych uproszczeń.

Niech $e_i(t) \in R$ oznacza wartość parametru określającego i-ty czynnik w chwili $t \geq 0, i = 1,2,...,N$, gdzie N jest liczbą czynników charakteryzujących warunki zewnętrzne określone przez N-wymiarowy proces stochastyczny $\{e(t) = (e_1(t),...,e_N(t)) : t \in R_+\}$, którego przestrzeń fazowa jest pewnym podzbiorem Y zawartym w R^N.

Załóżmy, że przestrzeń fazowa Y procesu $\{e(t)\}$ została podzielona na $m \geq 1$ niepustych rozłącznych podzbiorów $Y_1, Y_2,...,Y_m$ podzbiorów taki sposób, że

(a) skutki oddziaływania na system warunków zewnętrznych określonych wartościami parametrów $e(t)$ należących do jednego podzbioru Y_i są praktycznie nierozróżnialne ze względu na ich wpływ na niezawodność systemu, tzn. w przybliżeniu w jednakowy sposób wpływają na niezawodność systemu,

(b) skutki oddziaływania na system warunków zewnętrznych określonych wartościami parametrów $e(t)$ należących do różnych podzbiorów Y_i oraz $Y_j, i \neq j$, są istotnie różne, tzn. ich wpływ na niezawodność systemu jest istotnie różny.

Przy takich założenia, z dostateczną dla celów analizy niezawodności dokładnością, warunki zewnętrzne oddziałujące na system mogą być określone procesem stochastycznym $\{W(t): t \in R_+\}$ o skończonej przestrzeni stanów $M = \{1,2,\ldots,m\}$ określonym wzorem

$$W(t) = i \quad \Leftrightarrow \quad e(t) \in Y_i, \quad i \in M, \quad t \in R_+$$

Podzbiór Y_i odpowiada i-tej klasie warunków zewnętrznych charakteryzowanych relacją: $e(t) \in Y_i$, stąd proces $(W(t)\}$ opisuje faktycznie klasy warunków zewnętrznych:

$W(t) = i,$ jeśli w chwili $t \geq 0$ oddziałują na system warunki zewnętrzne i-tej klasy, $i \in M$

W dalszej części pracy będziemy stosować uproszczoną terminologię. Będziemy mówić, że *w chwili* $t \geq 0$ *na system oddziałują warunki* $i \in M$ lub równoważnie, *w chwili* $t \geq 0$ *system znajduje się w warunkach* $i \in M$, jeśli $W(t) = i$, tzn. w chwili $t \geq 0$ na system oddziałują warunki zewnętrzne i-tej klasy.

Powyższe rozważania można zreasumować w postaci następującego założenia:

Założenie 5

W czasie eksploatacji system może znajdować się w jednym z $m \geq 1$ warunków zewnętrznych tworzących tzw. *przestrzeń warunków* $M = \{1,2,\ldots,m\}$. Zmiany warunków czasie opisane są procesem stochastycznym $\{W(t): t \in R_+\}$ warunków skończonej przestrzeni stanów M:

$$W(t) = i \in M \quad \Leftrightarrow \quad \{\text{w chwili } t \geq 0 \text{ system znajduje się w warunkach } i \in M\}$$

Ponadto zakładamy, że przestrzeń warunków M jest minimalna, tzn.

$$\forall i \in M \quad \exists t \in R_+ \quad \Pr\{W(t) = i\} > 0$$

oraz że realizacje procesu $\{W(t)\}$ są funkcjami schodkowymi prawostronnie ciągłymi, posiadającymi skończoną liczbę skoków na każdym przedziale ograniczonym.

Proces $\{W(t)\}$ będziemy nazywać *procesem zmian warunków*.

Niech $0 = S_0 < S_1 < \ldots < S_N < S_{n+1} < \ldots < \infty$ oznacza kolejne chwile zmian warunków, natomiast $W_0, W_1, \ldots, W_n, \ldots$ - kolejne warunki oddziałujące na system, $W_n \neq W_{n+1}$ dla dowolnego $n \in N$. Zmienna losowa W_n odpowiada warunkom zewnętrznym oddziałującym na system w okresie $[S_n, S_{n+1}]$, $n \in N$, tzn.

$$W_n = W(S_n) \qquad i \qquad W(t) = W_n \quad dla \quad t \in [S_n, S_{n+1}).$$

Niech $N(t) = \max\{n \in N : S_n \leq t\}$ - liczba zmian w przedziale czasu $(0,t]$. Wówczas można napisać

(3.1) $$\forall t \in R_+ \quad W(i) = W_{N(t)},$$

co oznacza, że proces $\{W(t)\}$ jest całkowicie określony ciągiem (W_n, S_n).

Przyjmijmy następujące założenie określające charakter zmian warunków:

Założenie 6

Proces zmian warunków $\{W(t) : t \in R_+\}$ jest nieprzywiedlnym procesem sami-Markowa o przestrzeni stanów M generowanym przez proces markowskiej odnowy $\{(W_n, S_n) : n \in N\}$ relacją (3.1), tzn. dla dowolnych $i, j \in M$, $t \in R_+$

(3.2) $$\Pr\{W_{n+1} = j, S_{n+1} - S_n \leq t | W_0, W_1, \ldots, W_n, S_1, S_2, \ldots, S_n\} =$$
$$= \Pr\{W_{n+1} = j, S_{n+1} - S_n \leq t | W_n\} = \Pr\{W_1 = j, S_1 \leq t | W_0 = i\} \quad dla\, W_n = i.$$

Nieprzywiedlność procesu $\{W(t) : t \in R_+\}$ oznacza, że włożony łańcuch Markowa $\{W_n\}$ jest nieprzywiedlny, tzn. po warunkach $i \in M$ mogą, z niezerowym prawdopodobieństwem, wystąpić po pewnym czasie warunki $j \in M$, dla dowolnych $i, j \in M$.

Zakłada się ponadto, że dla dowolnego $n \in N$:

(3.3) $$W_{n+1} \neq W_n$$

tzn. proces markowskiej odnowy $\{(W_n, S_n)\}$ nie ma przejść wirtualnych typu $i \to i$,

(3.4) $$S_{n+1} - S_n > 0 \quad i \quad E[S_{n+1} - S_n] < +\infty$$

tzn. czas trwania poszczególnych warunków jest ściśle dodatnią zmienną losową o skończonej wartości oczekiwanej.

Równość (3.2) oznacza, że proces $\{W(t)\}$ posiada w chwilach zmian warunków S_n własność Markowa: przebieg zmian warunków po chwili S_n przy znanej wartości W_n nie zależy od przebiegu zmian warunków do chwili S_n, a także nie zależy od n.

Z procesem $\{W(t)\}$ związane są następujące wielkości:

$$Q_{ij}(t) = \Pr\{W_{n+1} = j,\, S_{n+1} - S_n \le t | W_n = i\}$$

- prawdopodobieństwo tego, że warunki $i \in M$ będą trwać przez czas nie dłuższy od $t \ge 0$, po czym nastąpią warunki $j \in M$; ponadto z (3.3) i (3.4) wynika, że

$$Q_{ii}(t) \equiv 0, \qquad Q(_{ij}(0) = 0;$$

$$^{W}\underline{\underline{Q}}(t) = [Q_{ij}(t)]_{i,\, j \in M}$$

- jądro semi-Markowa procesu $\{W(t)\}$;

$$Q_{ij} = \lim_{t \to \infty} Q_{ij}(t) = \Pr\{W_{n+1} = j | W_n = i\}$$

- prawdopodobieństwo tego, że po zakończeniu warunków $i \in M$ nastąpią warunki $j \in M$, przy czy z (3.3) wynika, że

$$\forall i \in M \quad Q_{ii} = 0;$$

$$^{W}\underline{\underline{Q}} = [Q_{ij}]_{i,\, j \in M}$$

- macierz prawdopodobieństw przejść włożonego łańcucha Markowa $\{W_n\}$;

$$H_i(t) = \sum_{j \in M} Q_{ij}(t) = \Pr\{S_{n+1} - S_n \le t | W_n = i\}$$

- bezwarunkowy rozkład czasu trwania warunków $i \in M$;

$$b_i = \int_0^\infty t\,dH_i(t) = \int_0^\infty (1 - H_i(t))dt < +\infty$$

- średni czas trwania warunków $i \in M$, przy czym z (3.4) wynika, że

$$b_i = E[S_{n+1} - S_n | W_n = i] < +\infty;$$

$$R_{ij}(t) = \int \Pr\{W_n = j, S_n \le t | W_0 = i\}$$

- średnia liczba przejść do warunków $j \in M$ w przedziale czasu $[0,t]$, wliczając również warunki początkowe, przy założeniu, że $W_0 = i$; należy nadmienić, że $R_{ii} = 1$;

$$w_{\underline{\underline{R}}(t)} = [R_{ij}(t)]_{i,j \in M}$$

- jądro markowskiej odnowy procesu $\{W(t)\}$;

$$\underline{\Pi} = (\Pi_i : i \in M)$$

- rozkład stacjonarny włożonego łańcucha Markowa $\{W_n\}$ istniejący na mocy nieprzywiedlności $\{W(t)\}$ i będący jednoznacznym ściśle dodatnim rozwiązaniem układu równań liniowych:

$$\underline{\Pi} \cdot {}^wQ = \Pi, \qquad \underline{\Pi} \cdot \underline{1} = 1,$$

gdzie $\underline{1} = (1,1,\ldots,1)$ - wektor jedynkowy wymiaru m.

Oznaczmy przez $\underline{a} = (a_i : i \in M)$ rozkład początkowy procesu $\{W(t)\}$:

$$a_i = \Pr\{W(0) = W_0 = i\}, \quad i \in M.$$

Wówczas jądro sami-Markowa ${}^wQ(t)$ wraz z rozkładem początkowym $\underline{a}$ stanowi pełną charakteryzację procesu zmian warunków $\{W(t)\}$.

Ważną charakterystyką stacjonarna procesu zmian warunków $\{W(t)\}$ jest funkcja czasu trwania warunków $i \in M$, oznaczona przez μ_i i określona wzorem:

$$\mu_i = \lim_{t \to +\infty} \frac{E[\textit{sumaryczny czas trwania warunkow i w okresie } [0,t]]}{t} =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} E[\int I_{\{W(s)=i\}} ds] = \frac{\Pi_i \cdot b_i}{\underline{\Pi} \cdot \underline{b}},$$

gdzie $\vec{b} = (b_i : i \in M)$, $\quad \underline{\Pi} \cdot \underline{b} = \sum_{i \in M} \Pi_i \cdot b_i$.

Ponieważ $\{W(t)\}$ jest nieprzywiedlny i $b_i < +\infty$ dla $i \in M$, stąd dla dowolnego $i \in M$ frakcja czasu trwania warunków istnieje i nie zależy od rozkładu początkowego. Jeśli ponadto proces $\{W(t)\}$ jest nieokresowy, tzn. rozkład czasu powrotu procesu $\{W(t)\}$ do dowolnego stanu $j \in M$ jest nieokresowy (niekratowy, niearytmetyczny, nieperiodyczny), to frakcja czasów trwania μ_i warunków $i \in M$ są równe prawdopodobieństwom granicznym warunków $i \in M$:

$$\mu_i = \lim_{t \to +\infty} \Pr\{W(t) = i\} = \lim_{t \to +\infty} P_t(j,i)$$

dla dowolnego $j \in M$, gdzie

$$P_t(j,i) = \Pr\{W(t) = i \mid W(0) = j\}$$

- prawdopodobieństwo przejścia z warunków początkowych $W_0 = j \in M$ do warunków $i \in M$ warunków czasie $t \geq 0$.

4. Założenia szczegółowe

Dotychczas podano opis systemu i opis procesu zmian warunków zewnętrznych oddziałujących na system. Zostały zdefiniowane trzy procesy stochastyczne:

$\{\underline{X}(t)\}$ - proces zmian wektora stanów elementów systemu,

$\{X(t)\}$ - proces zmian stanu systemu,

$\{W(t)\}$ - proces zmian warunków zewnętrznych.

Obecnie – dla potrzeb opisu żywotności systemu – zostaną sformułowane założenia dotyczące wzajemnych zależności między procesami $\{\underline{X}(t)\}$ i $\{W(t)\}$ oraz powiązań między stanem systemu $\{X(t)\}$ a parą procesów $\{\underline{X}(t)\}, \{W(t)\}$.

Definicja

Stałą w czasie strukturą niezawodnościową systemu S nazywamy dowolną funkcję $\varphi : V \to K$, która każdemu wektorowi stanów elementów $\underline{x} \in V$ elementów jednoznaczny sposób przyporządkowuje stan systemu $\varphi(\underline{x}) \in K = \{0,1,\ldots,k\}$ tak, że spełniony jest warunek

$$\forall t \in R_+ \qquad \varphi(\underline{X}(t)) = X(t),$$

tzn. zależność między stanami elementów stanem systemu jest niezmienna w czasie. Mówimy wówczas, że system ma stałą w czasie strukturę niezawodnościową.

Strukturę nazywamy *monotoniczną*, jeśli spełnione są poniższe warunki:

$$\varphi(\underline{0}) = 0, \qquad \varphi(\underline{k}) = k,$$

$$\forall\, x, y \in V \qquad \underline{x} \leq \underline{y} \Rightarrow \varphi(\underline{x}) \leq \varphi(\underline{y}),$$

gdzie $\underline{0} = (0,0,\ldots,0)$, $\underline{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$,

$$\underline{x} \leq \underline{y} \Leftrightarrow \forall\, i = 1,2,\ldots,n \quad x_i \leq y_i, \qquad n \text{ - liczba elementów.}$$

W naszych rozważaniach w zasadzie nie będziemy się ograniczać do struktur monotonicznych. Należy też zaznaczyć, że zgodnie za *założeniem 4* przestrzenią stanów procesu $\underline{X}(t)$ jest $L \subseteq V$, stąd – na podstawie podanej wyżej definicji struktury – wystarczy określić funkcję φ tylko na zbiorze L, natomiast na $V \setminus L$ może być ona w zasadzie zdefiniowana w dowolny sposób.

Dla szerokiej klasy systemów technicznych zmiany warunków zewnętrznych oddziałujących na system mogą powodować zmiany powiązań między stanem systemu a stanami jego elementów. Poniższe założenie ustala wpływ procesu zmian warunków $\{W(t)\}$ na powiązania między procesem zmian wektora stanów elementów $\{\underline{X}(t)\}$ i procesem zmian stanu systemu $\{X(t)\}$.

Założenie 7

Każdym warunkom $i \in M$ przyporządkowana jest stała w czasie struktura niezawodnościowa $\varphi_i :\ L \to K$ taka, że jeśli $W(t) = i$, to $\varphi_i(\underline{X}(t) = X(t)$ dla $t \in R_+$, tzn. w czasie trwania warunków $i \in M$ stan niezawodnościowy systemu określony jest jednoznacznie przez wektor stanów elementów za pośrednictwem nielosowej i stałej w czasie funkcji φ_i.

Z powyższego założenia wynika, że

$$(4.1) \qquad \forall\, t \in R_+ \qquad X(t) = \varphi_{W(t)}(\underline{X}(t)).$$

Ze względu na nosowość zmian warunków zewnętrznych w czasie postać powiązań stanu systemu i stanów elementów ulega zatem losowym zmianom w czasie, tzn. *struktura niezawodnościowa systemu jest losowo zmienna w czasie.*

Z powyżej umieszczonego wzoru wynika następujący wniosek.

WNIOSEK 4.1

Proces zmian stanu $\{X(t)\}$ jest całkowicie określony przez proces zmian wektora stanów elementów $\{\underline{X}(t)\}$, proces zmian warunków $\{W(t)\}$ oraz rodzinę deterministycznych funkcji struktury $\{\varphi_i : i \in M\}$ spełniających założenie 7.

Należy dodać, że nie zakładamy, iż wszystkie struktury φ_i są różne. Dopuszczamy możliwość, że dla pewnych $i, j \in M \quad \varphi_i = \varphi_j$, tzn. w warunkach $i \in M$ oraz $j \in M$ powiązanie stanu systemu ze stanami elementów jest tą samą zależnością. W szczególnym przypadku, gdy wszystkie φ_i są sobie równe, to system S posiada stałą w czasie strukturę niezawodnościową.

Rozpatrzmy proces stochastyczny $\{Z(t) : t \in R_+\}$ zadany wzorem

$$Z(t) = (W(t), \underline{X}(t)).$$

Przestrzenią stanów procesu $\{Z(t)\}$ jest $E = M \times L = \{(i, \underline{x}) : i \in M, \underline{x} \in L\}$. Z ostatniego *wniosku* wynika, że proces $\{Z(t)\}$ wraz z rodziną struktur $(\varphi_i : i \in M)$ determinuje stan niezawodnościowy systemu. Okazuje się, że strukturę niezawodnościową systemu można przedstawić w następującej równoważnej formie.

Zdefiniujmy funkcję $\Psi : E \to K$ wzorem

$$\Psi(i, x) = \varphi_i(\underline{x}), \quad (i, \underline{x}) \in E.$$

Z określenia funkcji Ψ oraz z (4.1) wynika, że

$$(4.2) \qquad \Psi(Z(t)) = X(t), \quad t \in R_+,$$

tzn. funkcja Ψ oraz proces $\{Z(t)\}$ całkowicie określają proces zmian stanu systemu $\{X(t)\}$. Z tego względu *proces stochastyczny* $\{Z(t)\}$ *wraz z funkcją* Ψ *stanowi model niezawodnościowy systemu* S. Model ten będzie przedmiotem rozważań w dalszej części opracowania. Z tego też względu stany procesu $\{Z(t)\}$, tzn. elementy zbioru $E = M \times L$, będziemy nazywać *stanami systemu* (opuszczając przymiotnik niezawodnościowymi), przestrzeń E będziemy nazywać *przestrzenią stanów systemu*, natomiast funkcję Ψ - *strukturą systemu* lub, aby uniknąć nieporozumień – *funkcją strukturalną systemu*.

Wprowadzone wyżej nazewnictwo ma jeszcze następujące uzasadnienie. Potraktujmy warunki zewnętrzne jako dodatkowy *element* systemu, oznaczając go przez c_0. Przestrzenią stanów *elementu* c_0 jest M, natomiast przestrzenią wektorów stanów elementów rozszerzonego systemu jest $E = M \times L$. Wówczas, ze względu na (4.2), funkcja Ψ jest strukturą rozszerzonego systemu, przy czyn jest ona strukturą stałą w czasie. Zatem system S, przez rozszerzenie go o dodatkowy *element* c_0 - warunki zewnętrzne, może być formalnie rozpatrywany jako system o stałej w czasie strukturze Ψ.

Funkcja Ψ indukuje rozkład przestrzeni E na niepuste, parami rozłączne podzbiory $\{E_r : r \in K\}$:

$$(4.3) \qquad E_r = \{(j,\underline{x}) \in E : \ \Psi(i,\underline{x}) - r\}, \qquad r \in K.$$

To, że podzbiory te są niepuste wynika z (2.1) i (4.2). Rozłączność ich jest oczywista. Podzbiór stanów E_r zawiera wszystkie te stany systemu $(i,\underline{x})$ z przestrzeni E, którym odpowiada stan niezawodnościowy systemu $r \in K$. Zatem proces stochastyczny $\{Z(t)\}$ wraz z rozkładem jego przestrzeni stanów E na niepuste, parami rozłączne podzbiory $\{E_r : r \in K\}$ stanowi następny równoważny opis niezawodnościowy systemu.

Dla pełnej charakterystyki systemu S pozostało jeszcze określenie zależności między procesem zmian warunków $\{W(t)\}$ a procesem zmian wektora stanów elementów $\{\underline{X}(t)\}$. Zależności te będą zarazem stanowiły charakteryzację procesu $\{(Z(t)\}$.

Przed sformułowaniem odpowiednich założeń wprowadźmy kilka niezbędnych oznaczeń. Dla dowolnego $i \in M$ niech określone będą:

$$\underline{\underline{A}}^{(i)} = [A^{(i)}_{\underline{x}\underline{y}}]_{\underline{x},\underline{y}\in L}$$

- macierz intensywności przejścia między wektorami stanów elementów spełniająca warunki:

$$\forall\ \underline{x}, \underline{y} \in L \qquad A^{(i)}_{\underline{x}\underline{y}} \geq 0, \quad \text{jeśli } \underline{x} \neq \underline{y}: \qquad A^{(i)}_{\underline{x}\underline{x}} \leq 0$$

$$\forall\ \underline{x} \in L \qquad \sum_{\underline{y}\in L} A^{(i)}_{\underline{x}\underline{y}} = 0$$

$$\underline{\underline{P}}^{(i)}(t) = [P^{(i)}_{\underline{x}\underline{y}}(t)]_{\underline{x},\underline{y}\in L}, \qquad t \in R_+$$

-macierz prawdopodobieństw przejścia między wektorami stanów elementów odpowiadająca macierzy intensywności przejścia $\underline{\underline{A}}^{(i)}$, tzn. będąca rozwiązaniem układu równań różniczkowych Kołmogorowa

$$\frac{d}{dt}\underline{\underline{P}}^{(i)}(t) = \underline{\underline{P}}^{(i)}(t)\underline{\underline{A}}^{(i)}$$

z warunkiem początkowym $\underline{\underline{P}}^{(i)}(0) = \underline{\underline{I}}$ - macierz jednostkowa o elementach diagonalnych równych *1*, a pozostałych równych *0*.

Macierz prawdopodobieństw przejścia $\underline{\underline{P}}^{(i)}(t)$ charakteryzuje się następującymi warunkami: dla dowolnych $\underline{x}, \underline{y} \in L, \quad t, s \in R_+$

$$P^{(i)}_{\underline{x}\underline{y}}(t) \geq 0, \qquad P^{(i)}_{\underline{x}\underline{x}}(0) = 1, \qquad \sum P^{(i)}_{\underline{x}\underline{y}}(t) = 1,$$

$$P^{(i)}_{\underline{x}\underline{y}}(t+s) = \sum_{\underline{z}\in L} P^{(i)}_{\underline{x}\underline{z}}(t) P^{(i)}_{\underline{z}\underline{y}}(s)$$

- równanie Kołmogorowa-Chapmana.

Przyjmijmy następujące założenia

Założenie 8

W chwili $t = 0$ proces zmian warunków $\{W(t)\}$ warunków proces zmian wektora stanów elementów $\{\underline{X}(t)\}$ rozpoczynają się niezależnie od siebie, tzn. $W(0) = W_0$ i $\underline{X}(0)$ SA niezależne: dla dowolnych $(i, \underline{x}) \in E$

$$\Pr\{W_0 = i, \underline{X}(0) = \underline{x}\} = \Pr\{W_0 = i\} \Pr\{\underline{X}(0) = \underline{x}\} = a_i \cdot d_{\underline{x}}.$$

Założenie 9

Niech $n \in N$. W okresie trwania $n+1-$szych warunków $W_n = i \in M$, tzn. w okresie $[S_n, S_{n+1})$, dla którego $W_n = i$ (i – dowolna) wektor stanów elementów $\{\underline{X}(t)\}$ zmienia się jak jednorodny proces Markowa o macierzy intensywności przejścia $\underline{\underline{A}}(i) = [A^{(i)}_{\underline{x}\underline{y}}]_{\underline{x},\underline{y} \in L}$ i stanie początkowym $\underline{X}(S_n)$, w sposób niezależny od n, od czasu trwania warunków $W_n = i$ równego $S_{n+1} - S_n$, od następnych po W_n warunków W_{n+1}, warunków także nie zależy od tego, w jaki sposób w chwili S_n zostały osiągnięte warunki W_n i i wektor stanu elementów $\underline{X}(S_n) \in L$.

Założenie 10

Zmiana warunków nie powoduje zmiany wektora stanów elementów, tzn. dla dowolnego $n \geq 1$

$$\Pr\{\underline{X}(S_n-) = \underline{X}(S_n)\} = 1$$

gdzie

$$\underline{X}(S_n-) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \underline{X}(S_n - h).$$

Ewentualne zmiany wektora stanów elementów dokładnie w chwili zmiany warunków S_n mogą wynikać np. z zakończenia naprawy lub uszkodzenia jednego z elementów dokładnie w chwili S_n, lecz zmiany te są pochodną zmian wektora stanów elementów zachodzących przed chwilą S_n i ich prawdopodobieństwo jest równe *0*.

Założenia 8, 9 i 10 oznaczają, że warunki zewnętrzne oddziałujące na system S określone są wyłącznie przez czynniki niezależne w sensie przyczynowo-skutkowym od systemu, tzn. zmiany wektora stanu elementów (np. uszkodzenia elementów) nie powodują zaburzeń w procesie zmian warunków. Z drugiej strony, warunki zewnętrzne wpływają na wartości intensywności przejścia miedzy wektorami stanów elementów (np. przez zwiększenie lub zmniejszenie obciążenia pewnych elementów), przy czym sama chwila zmiany warunków nie powoduje skokowych zaburzeń w procesie zmian wektora stanów elementów.

Należy dodać, że istnieją systemy techniczne, które mogą wpływać na przebieg zmian warunków, powodując wydłużenie lub skrojenie czasu trwania pewnych rodzajów warunków $i \in M$, jak również mogą wymuszać zmianę warunków. Przykładem mogą być systemy z rekonfiguracją struktury niezawodnościowej i zmianą wykonywanego zadania po wystąpieniu uszkodzeń pewnych elementów. Systemy tego typu nie będą rozpatrywane w niniejszym opracowaniu.

Na podstawie przyjętych założeń funkcjonowanie systemu można opisać następująco:

(1) W chwili początkowej $t=0$ z prawdopodobieństwem a_i rozpoczynają się warunki $i \in M$ oraz niezależnie od nich system rozpoczyna funkcjonowanie z początkowego wektora stanu elementów (w.s.e.) $\underline{X}(0)=\underline{x} \in L$ z prawdopodobieństwem $d_{\underline{x}}$. W okresie $[0,S_1)$ trwania warunków $i \in M$ w.s.e. zmienia się zgodnie z macierzą intensywności przejścia $\underline{\underline{A}}^{(i)}$ w sposób niezależny od czasu S_1 trwania warunków $i \in M$ i od następnych warunków $W_1=j$. Czas trwania S_1 warunków $i \in M$ oraz zmian na warunki $j \in M$ nie zależy od przebiegu zmian w.s.e. w okresie $[0,S_1)$, zależy jedynie od $W_0=i$, za pośrednictwem jądra sami-Markowa ${}^{w}\underline{\underline{Q}}(t): \Pr\{W_1=j, S_1 \le t \mid W_0=i\}=Q_{ij}(t)$. W okresie $[0,S_1)$ zależność między w.s.e. a stanem niezawodnościowym systemu opisana jest strukturą φ_i. Ponadto, Ponadto chwili S_1 zmiany warunków nie ulega zmianie wektor stanów elementów.

(2) Założmy, że w chwili S_1 nastąpiła zmiana warunków na $W_1=j$, a w.s.e. osiągnął stan $\underline{y} \in L$. Wówczas, niezależnie od tego, jak $W_1=j$ i $\underline{X}(S_1)=\underline{y}$ zostały osiągnięte, przebieg zmian w.s.e. w okresie $[S_1,S_2)$ następuje zgodnie z macierzą intensywności przejścia $\underline{\underline{A}}^{(i)}$, rozpoczynając ewolucję od stanu *początkowego* $\underline{y} \in L$. Zmiany te zachodzą niezależnie od czasu S_2-S_1 trwania warunków $W_1=j$ i od następnych warunków $W_2=m$. Z kolei, prawdopodobieństwo tego, że warunki $W_1=j$ będą trwać przez czas nie dłuższy niż *t*, po czym nastąpią warunki $m \in M$ nie zależy od przebiegu zmian w.s.e. w czasie $[S_1,S_2)$ i jest równe $Q_{jm}(t)$. W czasie trwania warunków $j \in M$ system posiada strukturę φ_j. Ponadto, jeżeli tuż przed chwila S_2 w.s.e. osiągnął stan $\underline{z} \in L$, to stan ten nie ulega zmianie w chwili S_2 zmiany warunków.

Z opisu funkcjonowania systemu wynika, że chwile zmian warunków są chwilami regeneracji dla procesu $\{Z(t)\}$, tzn. jeśli $W_n=i \in M$ i $\underline{X}(S_n)=\underline{x} \in L$, to po chwili S_n

ewolucja procesu $\{Z(t)\}$ przebiega w taki sam sposób, jak ewolucja procesu $\{Z(t)\}$ rozpoczęta w chwili $t = 0$ ze stanu $(i, \underline{x})$, niezależnie od tego, jak w chwili S_n został osiągnięty stan $Z(S_n) = (i, \underline{x})$.

5. Probabilistyczny model funkcjonowania systemu

5.1 Uwagi ogólne

W niniejszym punkcie zostanie zaprezentowana konstrukcja procesu $\{Z(t)\}$, traktowanego jako model probabilistyczny systemu S. Będziemy zakładać, że struktura Ψ, lub równoważnie: podział przestrzeni E na podzbiory $\{E_r : r \in K\}$ odpowiadające stanom niezawodnościowym systemu (patrz 4.3), jest ustalona.

Należy jeszcze nadmienić, że nie będziemy rozważać oddzielnie takich przypadków systemu S jak: system naprawiany, o elementach naprawianych / nienaprawialnych w czasie pracy systemu, system nienaprawialny, system o niektórych elementach naprawianych, a niektórych nienaprawialnych, system naprawiany tylko w niektórych warunkach itd. Prowadziłoby to do nadmiernego, zbędnego rozdrobnienia, mogącego prowadzić do wniosku, że każdy z wymienionych przypadków wymaga odrębnego modelu probabilistycznego. To, czy dany element lub system jest naprawiany, w jakich warunkach i w jaki sposób, a także to, czy elementy są zależne czy nie , wynika z postaci macierzy intensywności przejścia $\underline{\underline{A}}^{(i)}, i \in M$ oraz z interpretacji stanów elementów, wektorów stanów elementów i intensywności przejścia między wektorami stanów elementów.

5.2 Konstrukcja modelu: proces semiregenerujący się

Konstrukcja procesu $\{Z(t) = (W(t), \underline{X}(t)) : t \in R_+\}$ oparta będzie o opis funkcjonowania systemu przedstawiony w poprzednim punkcie.

Niech dana będzie przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \Sigma, \Pr)$, na której określone są następujące obiekty:

(i) *zmienna losowa* $X_0 : \Omega \to L \subseteq V = K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_n$, zadająca początkowy wektor stanów elementów taka, że

$$\forall\, \underline{x} \in L \qquad \Pr\{X_0 = \underline{x}\} = \frac{1}{|L|} > 0,$$

gdzie $|L|$ jest równy liczbie elementów zbioru L.

Zbiory $K_1, K_2, \ldots, K_n, L$ zostały zdefiniowane w punkcie 2, a n oznacza liczbę elementów systemu.

(ii) *proces markowskiej odnowy* $\{(W_n, S_n) : n \in N\}$ o przestrzeni stanów $M = \{1, 2, \ldots, m\}$, generujący *proces sami-Markowa* $\{W(t) : t \in R_+\}$, posiadający jądro semi-Markowa ${}^{w}\underline{\underline{Q}}(t) = [Q_{ij}(t)]_{i,j \in M}$:

$$Q_{ij}(t) = \Pr\{W_{n+1} = j, S_{n+1} - S_n \le t \mid W_n = i\},$$

oraz rozkład początkowy:

$$\forall\, i \in M \qquad \Pr\{W_0 = i\} = \frac{1}{|M|} > 0,$$

gdzie M jest przestrzenią warunków.

Zakładamy, że $\{W(t)\}$ spełnia założenie 6 podane w punkcie 3, tzn. jest nieprzywiedlny, nie ma przejść wirtualnych (tzn. $Q_{ii}(t) = 0$ dla $i \in M, \in R_+$) oraz czas pobytu w dowolnym stanie jest ściśle dodatnią zmienną losową o skończonej wartości oczekiwanej.

Proces semi-Markowa $\{W(t)\}$ opisuje przebieg zmian warunków zewnętrznych oddziałujących na system. Definicje i oznaczenia charakterystyk procesu $\{W(t)\}$, poza rozkładem początkowym zadanym ostatnio zapisanym wzorem są zgodne z podanymi w punkcie 3.

(iii) *rodzina wzajemnie niezależnych, jednorodnych procesów Markowa*

$$\Theta = \{\{\underline{X}^{(n)}_{(i,\underline{x})}(t) : t \in R_+\} : N \ge 1, \quad i \in M, \quad x \in L\}$$

o wspólnej przestrzenie stanów L takich, że:

(a) realizacje ich są funkcjami schodkowymi prawostronnie ciągłymi,

(b) dla dowolnych $i \in M$, $\underline{x} \subset L, n \geq 1$ proces Markowa $\{\underline{X}^{(n)}_{(i,\underline{x})}(t)\}$ określony jest macierzą intensywności przejścia $\underline{\underline{A}}^{(i)} = [A^{(i)}_{\underline{x}\underline{y}}]_{\underline{x},\underline{y} \in L}$ i macierzą prawdopodobieństw przejścia $\underline{P}^{(i)}(t) = [P^{9i)}_{\underline{x}\underline{y}}(t)]_{\underline{x},\underline{y} \in L}$, $t \in R_+$, będącej rozwiązaniem odpowiedniego układu równań różniczkowych Kołmogorowa , natomiast stanem początkowym jest $\underline{x} \cup L$:

$$\forall \, \omega \in \Omega \qquad \underline{X}^{(n)}_{(i,\underline{x})}(0,\omega) = \underline{x} .$$

Z powyższego wynika, że przy ustalonym $i \in M, \underline{x} \in L$ procesy Markowa $\{\underline{X}^{(n)}_{(i,\underline{x})}(t) : n \geq 1\}$ są wzajemnymi kopiami probabilistycznymi: posiadają wspólny stan początkowy $\underline{x} \in L$ i wspólną macierz intensywności przejścia $\underline{\underline{A}}^{(i)}$. Natomiast procesy $\{\underline{X}^{(n)}_{(i,\underline{x})}(t)\}$ i $\{\underline{X}^{(m)}_{(i,\underline{x})}(t)\}$ różnią się tylko stanem początkowym.

Proces $\{\underline{X}^{(n)}_{(i,\underline{x})}(t)\}$ opisuje przebieg zmian wektora stanów elementów elementów okresie $[S_{n-1}, S_n)$ takim, że $W_{n-1} = i$, $\underline{X}(S_{n-1}) = \overline{\underline{x}}$.
Zakładamy, że wszystkie zdefiniowane powyżej obiekty są wzajemnie niezależne, tzn. zmienna losowa $\underline{X}_0$, proces markowskiej odnowy $\{(W_n, S_n)\}$ oraz rodzina procesów Markowa Θ są wzajemnie niezależne.

Za pomocą określonych wyżej obiektów definiujemy proces $\{Z(t) : t \in R_+$ w następujący sposób:

1) $Z(0) = (W_0, \underline{X}_0)$,

2) dla $t \in [0.S_1)$

$$Z(t) = (W_0, \underline{X}^{(1)}_{Z(0)}(t)) = (W(t), \underline{X}^{(1)}_{Z(0)}(t)),$$

tzn. jeśli $W_0 = i$, $\underline{X}_0 = \underline{x}$, to $Z(t) = (i, \underline{X}^{(1)}_{(i,\underline{x})}(t))$;

3) $Z(S_1) = (W_1, \underline{X}^{(1)}_{Z(0)}(S_1)) = (W(S_1), \underline{X}^{(1)}_{Z(0)}(S_1))$,

tzn. jeśli $W_0 = i, W_1 = j$, $\underline{X}_0 = \underline{x}$, $S_1 = t$, to $Z(S_1) = Z(t) = (j, \underline{X}^{(1)}_{(i,\underline{x})}(t))$;

4) dla $t \in [S_1, S_2)$

$$Z(t) = (W_1, \underline{X}^{(2)}_{Z(S_1)}(t - S_1)) = (W(t), \underline{X}^{(2)}_{Z(S_1)}(t - S_1)),$$

tzn. jeśli $W_1 = j$, $\underline{X}^{(1)}_{Z(0)}(S_1) = \underline{y}$, czyli $Z(S_1) = (j, \underline{y})$, to

$Z(t) = (j, \underline{X}^{(2)}_{(j,\underline{y})}(t - S_1))$;

5) $Z(S_2) = (W_2, \underline{X}^{(2)}_{Z(S_1)}(S_2 - S_1)) = (W(S_2), \underline{X}^{(2)}_{Z(S_1)}(S_2 - S_1))$;

itd.

.

.

.

Załóżmy, że zdefiniowaliśmy już proces $\{Z(t)\}$ do chwili S_n włącznie i $Z(S_n) = (W_n, \underline{X}^{(n)}_{Z(S_{n-1})}(S_n - S_{n-1})) = (i, \underline{x})$, wówczas dla $t \in [S_n, S_{n+1})$

$$Z(t) = (W_n, \underline{X}^{(n+1)}_{Z(S_n)}(t - S_n)) = (W(t), \underline{X}^{(n+1)}_{Z(S_n)}(t - S_n) = (i, \underline{X}^{(n+1)}_{(i,\underline{x})}(t - S_n));$$

.

.

.

Oznaczmy przez $\{\underline{X}(t)\}$ drugą współrzędną procesu $\{Z(t)\}$:

$$\underline{X}(0) = \underline{X}_0, \quad \underline{X}(t) = \underline{X}^{(n+1+}_{Z(S_n)}(t - S_n) \quad \text{dla} \quad t \in [S_n, S_{n+1}).$$

Możemy wówczas napisać:

$$Z(t) = (W(t), \underline{X}(t)),$$

gdzie $\{W(t)\}$ jest procesem sami-Markowa opisującym przebieg zmian warunków zewnętrznych generowanym przez proces markowskiej odnowy $\{(W_n, S_n)\}$, natomiast proces $\{\underline{X}(t)\}$, będący *sklejeniem* kawałków jednorodnych procesów Markowa z rodziny zdefiniowanej na początku niniejszego punktu, opisuje przebieg zmian wektora stanów elementów systemu.

Ponieważ chwile kolejnych zmian warunków S_n są chwilami Markowa względem $\{W(t)\}$, tzn. dla dowolnego $t \in R_+$ $\{S_n \le t\} \in \sigma(W(s) : s \le t) \overset{ozn}{=} F_t^W$, stąd są one chwilami Markowa względem $\{Z(t)\}$.

Wprowadźmy kilka niezbędnych dalej oznaczeń.

$$\Pr_i\{A\} = \Pr\{A | W_0 = i) \quad \text{dla} \quad A \in \Sigma, \quad i \in M;$$

$$\Pr_{(i,\underline{x})}\{A\} = \Pr\{A | Z(0) = (i, \underline{x})\} = \Pr\{A | W_0 = i, \underline{X}_0 = \underline{x}\} \quad \text{dla} \quad A \in \Sigma, \quad i \in M, \quad \underline{x} \in L;$$

$E_i[Y] = E[Y|W@_0 = i]$ - warunkowa wartość oczekiwana zmiennej losowej Y pod warunkiem, że $W_0 = i \in M$, tj. wartość oczekiwana zmiennej Y względem miary probabilistycznej $\Pr_i$;

$$E_{(i,\underline{x})}[Y] = E[Y|Z(0) = (i,\underline{x})] = E[Y|W_0 = i, \underline{X}_0 = \underline{x}]$$

- wartość oczekiwana zmiennej losowej Y pod warunkiem, że

$$Z(0) = (W_0, \underline{X}_0) = (i,\underline{x}) \in E = M \times L,$$

tj. wartość oczekiwana zmiennej Y względem miary probabilistycznej $\Pr_{(i,\underline{x})}$.

Z konstrukcji procesu $\{Z(t)\}$ wynikają bezpośrednio następujące wnioski:

a) proces stochastyczny $\{Z(t)\}$ ma realizacje schodkowe, prawostronnie ciągłe i jego przestrzenią stanów jest $E = M \times L$, przy czym każdy stan jest istotny, ponieważ $\Pr\{Z(0) = (i,\underline{x})\} > 0$ dla dowolnego $(i,\underline{x}) \in E$;

b) pierwsza składowa $\{W(t)\}$ procesu $\{Z(t)\}$ jest procesem sami-Markowa spełniającym założenie 6;

c) W_0 i $\underline{X}(0)$ są wzajemnie niezależne, tzn. spełnione jest założenie 8, z tym zastrzeżeniem, że rozkład początkowy skonstruowanego procesu jest ściśle dodatni, tzn. proces $\{Z(t)\}$ może z dodatnim prawdopodobieństwem startować z dowolnego stanu $(i,\underline{x}) \in E$, co nie jest warunkiem ograniczającym (patrz UWAGA 5.1. poniżej);

d) w okresie $[S_n, S_{n+1})$, dla którego $W_n = i \in M$, $\underline{X}(S_n) = \underline{X}^{(n)}_{Z(S_{n-1})}(S_n - S_{n-1}) = \underline{x} \in L$ proces stochastyczny $\{X(t)\}$ ewoluuje po trajektoriach procesu Markowa $\{\underline{X}^{(n+1)}_{(i,\underline{x})}(t)\}$ o macierzy intensywności przejścia $\underline{\underline{A}}^{(i)}$, niezależnym od W_{n+1}, $S_{n+1}-S_n, \cdots n$ oraz od sposobu osiągnięcia w chwili S_n stanu $Z(S_n) = (i,\underline{x})$. Oznacza to, że spełnione jest założenie 9;

e) w chwilach S_n proces $\underline{X}(t)$ nie zmienia, z prawdopodobieństwem 1, swojego stanu, tzn. spełnione jest założenie 10;

f) dla dowolnego $(i,\underline{x}) \in E$, jeśli $Z(S_n) = (i,\underline{x})$, to ewolucja procesu $\{Z(t)\}$ po czasie S_n, czyli ewolucja przesuniętego procesu $\{Z(S_n + t)\}$, jest probabilistyczna kopią ewolucji procesu $\{Z(t)\}$ startującego w chwili $t = 0$ ze stanu $(i,\underline{x})$, niezależną od tego, w jaki proces $\{Z(t)\}$ osiągnął stan $(i,\underline{x}) \in E$ w chwili S_n. Oznacza to, że chwile zmian stanu procesu sami-Markowa $\{W(t)\}$ są chwilami regeneracji dla procesu $\{Z(t)\}$, tzn. dla dowolnych $n,p \geq 1$, $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_p \in R_+$, $B_1, B_2, \ldots, B_p \subseteq E$, $(i,\underline{x}) \in E$

$$\Pr\{Z(S_n + t_1) \in B_1, \ldots, Z(S_n + t_p) \in B_p | F_{S_n}^Z\} =$$

$$= \Pr_{Z(S_n)}\{Z(t_1) \in B_1, \ldots, Z(t_p) \in B_p\} = \Pr_{(i,\underline{x})}\{Z(t_1) \in B_1, \ldots, Z(t_p) \in B_p\},$$

gdzie $\Pr_{Z(S_n)}\{\cdot\}$ jest złożeniem zmiennej losowej $Z(S_n)$ z przekształceniem $(i,\underline{x}) \in E \mapsto \Pr_{(i,\underline{x})}\{\cdot\} \in [0,1]$.

UWAGA 5.1

Zgodnie z założeniem 8 rozkładem początkowym procesu $\{Z(t)\}$ powinien być $(a_i d_{\underline{x}} : (i,\underline{x}) \in E) = (p_{(i,\underline{x})} : (i,\underline{x}) \in E)$. Przy konstrukcji procesu $\{Z(t)\}$ przyjęliśmy, że $\Pr\{Z(0) = (i,\underline{x})\} = 1/|E| > 0$, co pozwoliło w elementarny sposób zdefiniować prawdopodobieństwo warunkowe $\Pr_i$ oraz $\Pr_{(i,\underline{x})}$, a stąd uprościć analizę procesu $\{Z(t)\}$. Takie określenie rozkładu początkowego nie jest utratą ogólności rozważań, ponieważ rozkłady skończenie wymiarowe, a więc i wszystkie inne charakterystyki procesu $\{Z(t)\}$, przy założeniu, że rozkładem początkowym jest $\underline{p} = (p_{(i,\underline{x})} = a_i d_{\underline{x}} : (i,\underline{x}) \in E)$, można w prosty sposób wyrazić za pomocą analogicznych charakterystyk wyznaczonych dla procesu $\{Z(t)\}$, którego rozkład początkowy jest równomiernie rozłożony po wszystkich stanach, jak to przyjęto w konstrukcji. Przykładowo:

$$\Pr\{Z(t) \in B | \underline{p}\} = \sum_{(i,\underline{x}) \in E} p_{(i,\underline{x})} \Pr_{(i,\underline{x})}\{Z(t) \in B\}.$$

WNIOSEK 5.1

Na mocy wyżej sformulowanych wniosków oraz powyższej uwagi skonstruowany proces stochastyczny $\{Z(t)\}$ wraz ze strukturą systemu Ψ jest adekwatnym modelem niezawodnościowym systemu S spełniającego założenia sformułowane w rozdziałach 3 i 4.

WNIOSEK 5.2

Proces stochastyczny $\{Z(t)\}$ wraz z procesem markowskiej odnowy $\{(Z_n, S_n)\}$, $Z_n = Z(S_n)$ jest procesem semiregenerujacym się w sensie definicji podanej w [Cinlar, Gaede], przy czym zbiór stanów regenerujących jest równy całej przestrzeni stanów $E = M \times L$.

Przedział $[S_n, S_{n+1})$ jest nazywany okresem regeneracji lub okresem $(i, \underline{x})$ - regeneracji procesu $\{Z(t)\}$, jeśli $Z(S_n) = (i, \underline{x})$. Zatem okresy regeneracji pokrywają się z okresami trwania poszczególnych warunków zewnętrznych. Fakt, że $[S_n, S_{n+1})$ jest okresem $(i, \underline{x})$ - regeneracji oznacza, że w chwili S_n nastąpiła zmiana warunków na $W_n = i$ oraz wektor stanów elementów osiągnął stan $\underline{x} = \underline{X}(S_n)$. Przejście procesu $\{Z(t)\}$ do stanu $Z(S_n) = (i, \underline{x})$ w chwili regeneracji S_n nazywamy $(i, \underline{x})$ -przejściem regeneracyjnym lub przejściem regeneracyjnym, jeśli stan $Z(S_n)$ nie jest wyszczególniony. To, że każdy stan $(i, \underline{x}) \in E$ jest stanem regeneracji nie oznacza, że każde przejście do stanu $(i, \underline{x})$ jest przejściem regeneracyjnym, możliwe są bowiem przejścia do tego stanu wewnątrz okresu regeneracji $[S_n, S_{n+1})$. Przejścia takie będziemy, dla odróżnienia od przejść regeneracyjnych, nazywać przejściami nieregeneracyjnymi procesu $\{Z(t)\}$.

WNIOSEK 5.3

Niech $Z_n = Z(S_n)$, $n \in N$. Wówczas $\{Z_n : n \in N\}$ jest włożonym łańcuchem Markowa o przestrzeni stanów E.

Procesy semiregenerujące się oraz procesy zbliżone do nich lub będące ich szczególnymi przypadkami w [Cinlar (1975)]. Procesy semiregenerujące się są uogólnieniem procesów Markowa, procesów sami-Markowa oraz procesów regenerujących się. Należy dodać, że proces $\{Z(t)\}$ należy do klasy procesów nazywanych procesami Markowa z semimarkowskimi zaburzeniami, będących szczególnym przypadkiem procesów semiregenerujących się.

5.3. Probabilistyczne charakterystyki modelu

W niniejszym punkcie zostaną podane podstawowe charakterystyki probabilistyczne procesu $\{Z(t)\}$ niezbędne dla otrzymania wskaźników charakteryzujących żywotność systemu S.

Zdefiniujmy następujące wielkości:

$$Q((i,\underline{x}),(j,\underline{y});t) = \Pr_{(i,\underline{x})}\{Z_1 = (j,\underline{y}),\ S_1 \leq t\}$$

- prawdopodobieństwo przejścia w jednym kroku procesu markowskiej odnowy $\{(Z_n,S_n)\}$ ze stanu $(i,\underline{x}) \in E$ do stanu $(j,\underline{y}) \in E$ w czasie nie dłuższym od $t \in R_+$.

Interpretacja: prawdopodobieństwo tego, że warunki $i \in M$, w chwili rozpoczęcia których wektor stanów elementów był równy $\underline{x} \in L$, będą trwać przez czas nie dłuższy od t, po czym nastąpi zmiana na warunki $j \in M$, w której to chwili wektor stanów elementów będzie w stanie $\underline{y} \in L$.

$$\underline{\underline{Q}}(t) = [Q((i,\underline{x}),(j,\underline{y});t)]_{(i,\underline{x}),(j,\underline{y})\in E}$$

- jądro sami-Markowa procesu markowskiej odnowy $\{(Z_n,S_n)\}$.

$$Q((i,\underline{x}),(j,\underline{y})) = \Pr_{(i,\underline{x})}\{Z_1 = (j,\underline{y})\} = \lim_{t\to+\infty} Q((i,\underline{x}),(j,\underline{y});t)$$

- prawdopodobieństwo przejścia w jednym kroku włożonego łańcucha Markowa $\{Z_n\}$ ze stanu $(i,\underline{x}) \in E$ do stanu $(j,\underline{y}) \in E$.

Interpretacja: prawdopodobieństwo tego, że po warunkach $i \in M$, w chwili rozpoczęcia których wektor stanów elementów był równy $\underline{x} \in L$, nastąpi zmiana na warunki $j \in M$, w której to chwili wektor stanów elementów będzie w stanie $\underline{y} \in L$.

$$\underline{\underline{Q}} = [Q((i,\underline{x}),(j,\underline{y}))]_{(i,\underline{x}),(i,\underline{y})\in E}$$

- macierz prawdopodobieństw przejścia włożonego łańcucha Markowa $\{Z_n\}$, $Z_n = Z(S_n) = (W_n, \underline{X}(S_n))$.

$$H((i,\underline{x});t) = \Pr_{(i,\underline{x})}\{S_1 \leq t\}, \quad t \in R_+$$

- bezwarunkowy rozkład czasu pobytu procesu markowskiej odnowy $\{(Z_n,S_n)\}$ w stanie $(i,\underline{x}) \in E$.

Interpretacja: dla ustalonego $t \in R_+$, prawdopodobieństwo, że warunki $i \in M$, w chwili rozpoczęcia których wektor stanów elementów był równy $\underline{x} \in L$, będą trwać przez czas nie dłuższy od t.

$$m(i,\underline{x}) = E_{(i,\underline{x})}[S_1]$$

- średni bezwarunkowy czas pobytu procesu markowskiej odnowy $\{(Z_n, S_n)\}$ w stanie $(i,\underline{x}) \in E$.

Interpretacja: średni czas trwania warunków $i \in M$, w chwili rozpoczęcia których wektor stanów elementów był równy $\underline{x} \in L$.

$$\underline{m} = (m(i,\underline{x}) : (i,\underline{x}) \in E)$$

- wektor średnich czasów pobytu $\{(Z_n, S_n)\}$ w poszczególnych stanach.

$$Q^{(n)}((i,\underline{x}),(j,\underline{y});t) = \Pr_{(i,\underline{x})}\{Z_n = (j,\underline{y}), S_n \le t\}, \quad n \in N$$

- prawdopodobieństwo przejścia procesu markowskiej odnowy $\{(Z_n, S_n)\}$ w dokładnie n krokach ze stanu $(i,\underline{x}) \in E$ do stanu $(j,\underline{y}) \in E$ w czasie nie dłuższym od $t \in R_+$.

Interpretacja: prawdopodobieństwo tego, że n-ta zmiana warunków nastąpi przed czasem t i w chwili tej zmiany rozpoczną się warunki $j \in M$, a wektor stanów elementów osiągnie stan $\underline{y} \in L$, przy założeniu, że w chwili początkowej rozpoczęły się warunki $i \in M$, a wektor stanów elementów był równy $\underline{x} \in L$.

$$R((i,\underline{x}),(j,\underline{y});t) = E_{(i,\underline{x})}[\sum_{n=0}^{\infty} I_{\{Z_n=(j,\underline{y}),S_0 \le t\}}]$$

- średnia liczba $(j,\underline{y})$ - przejść regeneracyjnych procesu $\{Z(t)\}$ w okresie $[0,t]$ przy założeniu, że $Z(0) = Z_0 = (i,\underline{x}) \in E$.

Interpretacja: średnia liczba wystąpień w okresie $[0,t]$ warunków $j \in M$ takich, że w chwilach ich rozpoczęcia się wektor stanów elementów osiągnął stan $\underline{y} \in L$ przy założeniu, że w chwili początkowej $S_0 = 0$ rozpoczęły się warunki $i \in M$, a wektor stanów elementów był równy $\underline{x} \in L$.

Z powyższego określenia wynika, że

$$R((i,\underline{x}),(j,\underline{y});0) = \begin{cases} 1 & gdy\ i = j,\ \underline{x} = \underline{y} \\ 0 & w przeciwnym\ przypadku \end{cases}.$$

Stąd funkcja $R((i,\underline{x}),(i,\underline{x});t)$ ma skok jednostkowy w chwili $t = 0$.

$$\underline{\underline{R}}(t) = [R((i,\underline{x}),(j,\underline{y});t)]_{(i,\underline{x}),(j,\underline{y})\in E}, \quad t \in R_+$$

- jądro markowskiej odnowy procesu $\{(Z_n, S_n)\}$.

$$P_t((i,\underline{x}),(j,\underline{y})) = \Pr_{(i,\underline{x})}\{Z(t) = (j,\underline{y})\}$$

- prawdopodobieństwo przejścia procesu $\{Z(t)\}$ ze stanu początkowego $(i,\underline{x}) \in E$ do stanu $(j,\underline{y}) \in E$ w czasie $t \in R_+$.

Interpretacja: prawdopodobieństwo tego, że w chwili $t \in R_+$ na system będą oddziaływać warunki $j \in M$ i wektor stanów elementów będzie równy $\underline{y} \in L$ przy założeniu, że w chwili początkowej $S_0 = 0$ rozpoczęły się warunki $i \in M$, a wektor stanów elementów był równy $\underline{x} \in L$.

$$V_t((i,\underline{x}),(j,\underline{y})) = E_{(i,\underline{x})}[\int I_{\{Z(u)=(j,\underline{y})\}} du], \quad t \in R_+$$

- średni sumaryczny czas pobytu procesu $\{Z(t)\}$ w stanie $(j,\underline{y}) \in E$ w okresie $[0,t]$ przy założeniu, że $Z_0 = (i,\underline{x}) \in E$.

Interpretacja: średni sumaryczny czas trwania warunków $j \in M$ w okresie $[0,t]$, w czasie których wektor stanów elementów jest równy $\underline{y} \in L$ przy założeniu, że w chwili początkowej $S_0 = 0$ rozpoczęły się warunki $i \in M$, a wektor stanów elementów był równy $\underline{x} \in L$.

$$U((i,\underline{x});\underline{y}) = E_{(i,\underline{x})}[\int_0^{S_1} I_{\{\underline{X}(u)=\underline{y}\}} du]$$

- średni sumaryczny czas pobytu procesu $\{\underline{X}(t)\}$ w stanie $\underline{y} \in L$ w okresie $[0,S_1]$ przy założeniu, że $Z_0 = (W_0, \underline{X}(0)) = (i,\underline{x}) \in E$.

Interpretacja: średni sumaryczny czas, w którym wektor stanów elementów jest równy $\underline{y} = \in L$ w pojedynczym okresie trwania warunków $i \in M$, na początku którego wektor stanów elementów był równy $\underline{x} \in L$.

$$K_t((i,\underline{x});\underline{y}) = \Pr_{(i,\underline{x})}\{\underline{X}(t) = \underline{y}, S_1 > t\}, \quad t \in R_+$$

- prawdopodobieństwo tego, że do chwili $t \in R_+$ nie wystąpiło przejście regeneracyjne procesu $\{Z(t)\}$, natomiast w chwili t proces $\{\underline{X}(t)\}$ osiągnął stan $\underline{y} \in L$ przy założeniu, że $Z_0 = (i,\underline{x}) \in E$.

Interpretacja: prawdopodobieństwo tego, że warunki $i \in M$ będą trwać co najmniej przez czas t, w którym to wektor stanów elementów osiągnie stan $\underline{y} \in L$ przy założeniu, w chwili rozpoczęcia się warunków $i \in M$ wektor stanów elementów był równy $\underline{x} \in L$.

$$\underline{e} = (e(i,\underline{x}) : (i,\underline{x}) \in E$$

- rozkład stacjonarny włożonego łańcucha Markowa $\{Z_n\}$, o ile $\{Z_n\}$ jest nieprzywiedlny [Cinlar (1975), Feller (1981)], będący wówczas jedynym ściśle dodatnim rozwiązaniem układu równań algebraicznych :

$$\begin{cases} e(j,\underline{y}) = \sum_{(i,\underline{x})\in E} e(i,\underline{x})Q((i,\underline{x}),(j,\underline{y})), & (j,\underline{y}) \in E, \\ \sum_{(i,\underline{x})\in E} e(i,\underline{x}) = 1, \end{cases}$$

który zapisany w formie macierzowej ma postać:

$$\underline{e} = \underline{e}\,\underline{\underline{Q}}, \quad \underline{e}\,\underline{1} = 1,$$

gdzie $\underline{1} = (1,1,\ldots,1)$ - wektor jedynkowy wymiaru $|E|$.

Wielkość $e(i,\underline{x})$ może być interpretowana jako częstotliwość występowania takich okresów trwania warunków $i \in M$, na początku których wektor stanów elementów jest równy $\underline{x} \in L$.

6. Wskaźniki żywotności systemu wielostanowego

Wskaźniki niezawodności, w tym również wskaźniki żywotności systemu S będziemy określać w podobny sposób, jak to się czyni w przypadku systemów dwustanowych. Oznacza to, że będziemy dokonywać podziału przestrzeni stanów systemu E na dwa niepuste, rozłączne podzbiory: E_+ - zawierający interesujące nas stany systemu oraz $E_- = E \setminus E_+$ - zawierający pozostałe stany systemu. Wówczas wskaźniki niezawodności systemu będziemy definiować jako jako odpowiednie charakterystyki procesu $\{Z(t)\}$związane podzbiorze czasem lub prawdopodobieństwem pobytu procesu $\{Z(t)\}$ w podzbiorze stanów E_+ .

Rozpatrywać będziemy następujące charakterystyki procesu $\{Z(t)\}$ związane z wybranym podzbiorem stanów E_+ i stanowiące zarazem wskaźniki żywotności systemu:

1) $R_{(i,\underline{x})}(E_+;t)$ - prawdopodobieństwo pozostawania (pobytu) procesu $\{Z(t)\}$ w podzbiorze E_+ przez czas dłuższy od t przy założeniu, że $Z_0 = (i,\underline{x}) \in E_+$

$$\Pr_{(i,\underline{x})}\{Z(u) \in E_+ \quad \text{dla} \quad u \in [0,t]\}, \qquad (i,x) \in E_+$$

2) $P_t((i,\underline{x}),E_+)$ - prawdopodobieństwo tego, że w chwili $t \geq 0$ proces $\{Z(t)\}$ będzie w podzbiorze E_+ przy założeniu, że $Z_0 = (i,\underline{x}) \in E$, tzw. niestacjonarne prawdopodobieństwo podzbioru E_+ :

$$P_t((i,\underline{x}),E_+) = \Pr_{(i,\underline{x})}\{Z(t) \in E_+\}, \qquad (i,\underline{x}) \in E.$$

Zamieniając miejscami E_+ i E_- otrzymujemy tzw. przeciwstawne wskaźniki żywotności (niezawodności) systemu.

W przypadku systemów dwustanowych rozpatruje się tylko jeden podział przestrzeni stanów E: na podzbiór stanów zdatności E_+ i podzbiór stanów niezdatności $E_- = E \setminus E_+$. Wówczas, przykładowo, $R_{(i,\underline{x})}(E_+;t)$ jest prawdopodobieństwem poprawnej pracy systemu przez czas t.

Rozpatrywany w niniejszym opracowaniu system S jest wielostanowy: posiada $k+1$ stanów niezawodnościowych $\Psi 0,1,...,k$ tworzących przestrzeń stanów niezawodnościowych K i generujących podział przestrzeni stanów E na $k+1$ rozłącznych, niepustych podzbiorów E_r, $r \in K$, z których każdy odpowiada jednemu stanowi niezawodnościowemu systemu. Dlatego też istnieje wiele sposobów podziału przestrzeni stanów E na podzbiory E_+ i E_-, z których każdy definiuje inną klasę wskaźników niezawodności (żywotności) systemu. Interpretacja tych wskaźników zależy od interpretacji niezawodnościowej wybranego podzbioru E_+. Zazwyczaj E_+ definiuje się jako jeden z podzbiorów E_r lub jako sumę kilku podzbiorów $E_{r_1},...,E_{r_p}$, gdzie $2 \le p \le k, r_1,....,r_p \in K$.

Załóżmy, że system S jest czterostanowy, tzn. $k = 3$ i poszczególne stany niezawodnościowe mają następującą interpretację:

3 - stan pełnej zdatności,
2- stan niepełnej zdatności,
1 - stan niezdatności, uszkodzenie systemu nie powoduje zagrożeń,
0 - stan niezdatności, usuwalne uszkodzenie katastrofalne, tzn. powodujące zagrożenie dla zdrowia i życia obsługi systemu.

Wówczas przestrzeń stanów systemu E rozkłada się na niepuste, parami rozłączne podzbiory E_3, E_2, E_1, E_0, których interpretacja jest taka sama, jak odpowiadających im stanów niezawodnościowych 3, 2, 1, 0. Można ponadto wyróżnić następujące podzbiory:

$E_z = E_3 \cup E_2$ - podzbiór stanów zdatności,
$E_n = E_1 \cup E_0 = E \setminus E_z$ - podzbiór stanów niezdatności,
$E_{bz} = E \setminus E_0$ - podzbiór stanów bez zagrożenia, będący dopełnieniem stanu E_0, odpowiadających uszkodzeniu katastrofalnemu systemu.

Jeśli przyjmiemy $E_+ = E_z$, to wskaźniki niezawodności określone w punkach 1) i 2) niniejszego rozdziału mają taką samą interpretację, jak w przypadku systemu dwustanowego, przykładowo:

$R_{(i,\underline{x})}(E_z;t)$ - prawdopodobieństwo poprawnej pracy systemu przez czas t, przy założeniu, że w chwili początkowej $S_0 = 0$ rozpoczęły się warunki zewnętrzne $i \in M$ i wektor stanów elementów był równy $\underline{x} \in L$, przy czym $(i,\underline{x}) \in E_z$.

Jeśli natomiast przyjmiemy $E_+ = E_{bz}$, to interpretacja wskaźników niezawodności systemu będzie następująca:

$R_{(i,\underline{x})}(E_{bz};t)$ - prawdopodobieństwo tego, że w okresie $[0,t]$ nie wystąpi uszkodzenie katastrofalne przy założeniu, że w chwili początkowej $S_0 = 0$ rozpoczęły się warunki zewnętrzne $i \in M$, wektor stanów elementów był równy $\underline{x} \in L$ i nie było zagrożeń.

$P_t((i,\underline{x}),E_{bz})$ - prawdopodobieństwo tego, że w chwili $t \geq 0$ nie ma zagrożenia przy założeniu jak wyżej.

Sposób wyznaczania postaci funkcyjnej wymienionych wyżej, a także innych, wskaźników żywotności systemów wielostanowych wymaga dalszych prac.

Literatura

Bahring H., Heidtman K. (1983): „Reliability systems with changing structure". *Fault-Tolerant Systems and Diagnostic, VI. Proceedings,* Brno.

Bai J.M, Li Z.H., Kong X.B. (2006): "Generalized shock models based on cluster process". *IEEE Trans. on Reliab.*, vol. 55, No 3, s. 542-550.

Bondavalli A., Chiaradonna S., Di Giandomenico F., Mura I. (2005): "Dependability modeling and evaluation of multiple-phased systems using DEEM". *IEEE Trans. on Reliab.*, vol.53, No 4, s. 509-522.

Burdick G.R., Fussell J.B., Rasmuson D.N., Wilson J.R. (1977): "Phased mission analysis: a review of new developments and applications". *IEEE Trans. on Reliab.,* vol. 26, s. 43 – 49.

Cinclar E. (1975): "Introduction to Stochastic Processes". *Prentice-Hall: Englewood Cliffs.*

Feller M. (1091): "Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa", *PWN Warszawa.*

Ho P.H., Tapolocai J., Mouftah H.T. (2004): "On achieving optimal survivable routing for shared protection in survivable next-generation Internet". ". *IEEE Trans. on Reliab.*, vol. 53, No. 2, s. 216-225.

Johnson V.E., Moosman A., Cotter P. (2005): "): "A hierarchical model for estimating the early reliability of complex systems". *IEEE Trans. on Reliab.*, vol.54, No 2, s. 224-231.

Korczak E. (1982): „ Model niezawodnościowy systemu wielofunkcyjnego". *Prace PIT,* z. 101, s. 1 – 10.

Korczak E. (1987): „ Markowski model pewnego systemu pracującego w zmiennych warunkach eksploatacji". *Prace PIT*, z. 105.

Levitin G. (2003): "Reliability of multi-state systems with two failure-modes". ". *IEEE Trans. on Reliab.*, vol. 52, No 3, s. 340-348.

Lin Y.K. (2004): "Reliability of a stochastic-flow network with unreliable branches & nodes, under budget constraints". ". *IEEE Trans. on Reliab.*, vol. 53, No 3, s. 381-387.

Murari K., Muruthachalam C. (1984): „The reliability of a two unit system with two different interlinkings in two different periods". *J. Oper. Res. Soc.,* vol. 35, s. 835 – 845.

Wu J., Gao F., Li Z., Min Y. (2005): „Optima, and reliable communication in hypecubes using extended safety vectors". ". *IEEE Trans. on Reliab.*, vol. 54, No 3, s. 402-411.