262/2005

Raport Badawczy

Research Report

RB/44/2005

Model sterowania czasem pracy własnej ucznia lub studenta

M. Bereziński, M. Inkielman, D. Wagner

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr inż. Roman Kulikowski

Warszawa 2005

MODEL STEROWANIA CZASEM PRACY WŁASNEJ UCZNIA LUB STUDENTA

Mirosław Bereziński[1], Michał Inkielman[2],
Dariusz Wagner[3]
Instytut Badań Systemowych PAN
01-447 Warszawa, ul. Newelska 6
[1]e-mail: Miroslaw.Berezinski@ibspan,waw.pl
[2]e-mail:Michal.Inkielman@ibspan.waw.pl
[3]e-mail:Dariusz.Wagner@ibspan.waw.pl

Streszczenie

Poziom wiedzy przedmiotowej ucznia lub studenta, osiągnięty na koniec danego etapu edukacji, zależy nie tylko od ich subiektywnych zdolności pamięciowych, ale także od regularności i aktywności brania udziału w obowiązkowych zajęciach szkolnych lub uczelnianych oraz od długości czasu poświęcanego na naukę indywidualną i systematyczności uczenia się. Narzędziem pomagającym nauczycielom i uczniom zrozumienie tych zależności i wybranie optymalnej strategii nauczania i uczenia się może być model matematyczny, wiążący wzajemnie ze sobą jako zmienne bądź parametry wymagania edukacyjne, długość etapu edukacji, charakterystykę zdolności pamięciowej ucznia lub studenta, długość czasu poświęconego przez każdego z nich na własną naukę i rozmaite formy zarządzania tym czasem (nauka systematyczna, uczenie się zrywami, uczenie się tylko tuż przed sprawdzianami, kolokwiami i egzaminami itp.). W pracy skonstruowano taki model. Kryterium modelowym jest minimalizacja nakładu czasu, który trzeba poświęcić, aby w danym okresie opanować wymagany zasób wiedzy. Dla ustalenia uwagi rozważania są prowadzone w odniesieniu do kursu przedmiotowego, np. matematycznego, trwającego określoną liczbę tygodni i mającego zakończyć się zaliczeniem zajęć przez jego uczestników. Model ma postać liniowego niejednorodnego równania różnicowego. Pełni ono rolę ograniczenia w zadaniu minimalizacji własnego czasu nauki. Zadanie jest rozwiązane metodą mnożników Lagrange'a. Podana jest analityczna postać rozwiązania, która posłużyła do zdefiniowania pojęcia współczynnika rytmiczności uczenia się. Przeprowadzono numeryczne i analityczne badanie jego własności. Przedyskutowano wyniki i sformułowano podstawowe wnioski dotyczące wzajemnej zależności długości trwania kursu, rozkładu czasu uczenia się i zdolności zapamiętywania.

Słowa kluczowe: nauczanie i uczenie się, edukacja, sterowanie czasem uczenia się, współczynnik zapamiętywania, czas trwania kursu.

1. Wprowadzenie

Skuteczność i efektywność nauczania w szkole wyższej jest tym większa, im absolwenci szkół średnich są lepiej merytorycznie przygotowani do podjęcia określonego kierunku studiów. Niestety, doświadczenia ostatnich lat pokazują, że niemała część maturzystów wynosi ze szkół średnich słabe przygotowanie z przedmiotów ścisłych, a poza tym rozrzut ich wiadomości z tych przedmiotów jest na ogół tak duży[1], że - aby móc przystąpić do systematycznego realizowania podstawowego programu studiów - wiele szkół wyższych stoi wobec konieczności organizowania wielotygodniowych zajęć uzupełniających, wyrównawczych bądź repetytoryjnych z tych przedmiotów. Szczególnie dotkliwy jest bardzo niski poziom przeciętnego maturzysty z matematyki. Zła polityka programowa, nie zawsze poprawne metody nauczania, nie zawsze dobrze dobrana kadra dydaktyczna, brak popularyzacji matematyki itp. doprowadziły do tak dużego obniżenia prestiżu tego przedmiotu i kultury matematycznej społeczeństwa, że wystąpiło realne zagrożenie możliwości kształcenia nowych pokoleń inżynierów i techników, tak potrzebnych krajowi w dobie przemian związanych z kształtowaniem społeczeństwa informacyjnego.

Przeciętnie uzdolniony uczeń szkoły podstawowej a potem średniej jest w stanie sprawnie opanować taki zasób wiedzy matematycznej, który - bez specjalnych dodatkowych przygotowań - pozwoli mu kontynuować naukę na tych kierunkach studiów wyższych, dla których matematyka stała się obecnie jedną z podstawowych metod zdobywania wiedzy specjalistycznej, a nierzadko także wygodnym językiem wyrażania faktów naukowych w danej dzie-

[1] Na przykład, zgodnie z dotychczas obowiązującymi przepisami oświatowymi, wydanymi w związku z wdrażaniem reformy edukacji, uczeń szkoły średniej ma prawo wyboru jednej z dwóch opcji: uczenie się matematyki na poziomie podstawowym lub na poziomie rozszerzonym. Do niedawna obowiązywała także zasada minimum programowego, którą wielu nauczycieli uznało jednak za powszechy standard nauczania, zwłaszcza w odniesieniu do przedmiotów ścisłych.

dzinie (wszystkie kierunki politechniczne, fizyka, ekonomia, socjologia, psychologia, geografia itd.). Przyczyn uczniowskich kłopotów z matematyką jest wiele, ale nie ma najmniejszej wątpliwości, że jedną z głównych są błędy dydaktyczne popełniane przez nauczycieli oraz nieumiejętność uczenia się matematyki przez uczniów. Aby podnieść poziom edukacji matematycznej wynoszonej ze szkół podstawowych i średnich trzeba więc od małego ukazywać uczniom wszechobecność, piękno i przydatność matematyki, wyrabiać ich wyobraźnię matematyczną oraz uczyć sposobów opanowywania i utrwalania wiedzy matematycznej. Wiadomo, jak wielką rolę w nauczaniu i uczeniu się matematyki odgrywa systematyczność pracy ucznia. Uczeń od pierwszych klas szkoły podstawowej powinien więc być uczony umiejętności gospodarowania swoim czasem pozaszkolnym, którego część winien przeznaczać na naukę matematyki. To samo odnosi się do każdego innego przedmiotu. Niestety, ta sfera metodyki nauczania jest bardzo zaniedbana.

Pomocą dla nauczyciela mogą być wnioski wynikające z matematycznej analizy zależności między wymaganiami edukacyjnymi, długością czasu nauczania matematyki, indywidualnymi zdolnościami pamięciowymi ucznia, długością czasu pozaszkolnego poświęconego przez ucznia na indywidualną naukę i sposobem uczenia się (nauka systematyczna, uczenie się zrywami, uczenie się dopiero przed sprawdzianami, kolokwiami i egzaminami itp.). Znając te zależności nauczyciel może wyrabiać w uczniach umiejętność sterowania ich czasem pozaszkolnym w taki sposób, aby każdy z nich, świadomy swoich indywidualnych predyspozycji umysłowych i własnych ograniczeń czasowych, umiał wybrać taki styl uczenia się matematyki, który pozwoli zminimalizować nakład pozaszkolnego czasu poświęconego na naukę tego przedmiotu, masymalizując przy tym szansę opanowana wiedzy matematycznej co najmniej w stopniu wymaganym do zaliczenia semestru, roku, kursu itp.

Celem niniejszej pracy jest skonstruowanie matematycznego modelu zarządzania przez ucznia wykorzystaniem czasu, którym dysponuje po odbyciu obowiązkowych zajęć szkolnych. Model uwzględnia charakterystykę pamięciową ucznia lub studenta oraz możliwość dokonywania prze nich wyboru między różnymi stylami uczenia się. Kryterium modelowym jest określenie minimalnego nakładu czasu, który trzeba poświęcić, aby w danym okresie czasu opanować określony zasób wiedzy matematycznej.

Dla ustalenia uwagi rozważania będziemy prowadzić w odniesieniu do kursu uzupełniająco-wyrównawczo-repetytoryjnego z matematyki na wyższej uczelni. Równie dobrze można by jednak mówić o dowolnym innym przedmiocie, szkole dowolnego szczebla i dowolnym etapie edukacji (semestr, rok szkolny, edukacja podstawowa, edukacja gimnazjalna, edukacja średnia itd.). Kurs ma trwać określoną liczbę tygodni i ma zakończyć się sprawdzianem, którego wyniki zadecydują o zaliczeniu lub niezaliczeniu zajęć przez jego uczestników.

2. Model

2.1. Założenia i ogólna postać modelu

Załóżmy, że rozpoczęcie właściwych studiów na danym kierunku, wymagającym od studentów posiadania wiedzy matematycznej i umiejętności jej stosowania w stopniu co najmniej odpowiadającym obowiązującym w tej mierze standardom edukacyjnym, zostało poprzedzone sprawdzeniem przez uczelnię rzeczywistego stanu wiedzy z tego przedmiotu każdego nowo przyjętego studenta oraz umiejętności jej stosowania. Stan ten może być scharakteryzowany w różny sposób: opisowo, za pomocą oceny liczbowej, zgodnej z obowiązującą w szkole skalą ocen, bądź w skali punktowej. Przyjmijmy, że przyjęto system oceny punktowej w skali całkowitoliczbowej od 0 punktów do 100 punktów (każdy inny system punktowy można sprowadzić do tej skali). Niech x_0 charakteryzuje liczbę punktów zdobytych przez studenta, zaś x^* niech będzie minimalną liczbą punktów, której osiągnięcie zwalnia studenta z obowiązku uczestniczenia w zajęciach uzupełniająco-wyrównawczo-repetytoryjnych lub - jeżeli w nich uczestniczył - jest wymagane do zaliczenia zajęć.

Przypuśćmy, że wyniki sprawdzianu pokazały, iż dla co najmniej części studentów $x_0 < x^*$, trzeba więc zorganizować i przeprowadzić dodatkowe zajęcia z danego przedmiot-matematyki. Załóżmy, że będą one trwały K kolejnych tygodni i że na koniec każdego tygodnia będzie oceniany poziom opanowania przez studentów przerabianego w tym tygodniu materiału. Niech x_k będzie stanem wiedzy studenta na koniec tygodnia k $(k = 1,2,...,K)$. Jest zrozumiałe, że stan ten powinien być tym lepszy, im aktywniej student będzie uczestniczył w zajęciach i im bardziej zaangażuje się w uzupełnianie braków i nadrabianie zaległości. Można więc przyjąć, że matematyczna wiedza studenta na koniec każdego tygodnia jest funkcją wiedzy posiadanej przez niego na początku tego tygodnia oraz tej którą nabył w ciągu tygodnia. Wyraża to symbolicznie zapis

$$x_{k+1} = f(x_k, t_k), \qquad (k = 0,1,...,K). \tag{1}$$

Czas, który student mógłby tygodniowo poświęcić na naukę jest w naturalny sposób ograniczony. Na przykład, gdyby przyjąć zasadę, że w ciągu doby student przeznacza 8 godzin na naukę, 8 godzin na inne zajęcia i 8 godzin na odpoczynek, to w ciągu pięciodniowego tygodnia pracy zasadniczo nie powinien on poświęcać na naukę więcej niż 40 godzin. Faktycznie jednak student w dużej mierze sam decyduje o tym, ile czasu tygodniowo przeznaczy na naukę. Jeżeli więc t_i jest czasem poświęconym na naukę w tygodniu i, to - z punktu widzenia studenta - t_i pełni rolę zmiennej sterowania. Niech T $(0 < T < T')$ będzie całkowitym nakładem czasem, który student powinien poświęcić na naukę w ciągu K tygodni trwania kursu, aby zdać egzamin końcowy i uzyskać zaliczenie kursu, przy czym $\hat{T}$ - maksymalny dopuszczalny czas nauki w okresie kursu. Tak więc

$$T = \sum_{k=1}^{K} t_k \, . \tag{2}$$

Zgodnie z zasadą najmniejszego wysiłku student świadomie lub podświadomie dąży do takiego gospodarowania swoim czasem, by minimalizować T przy ograniczeniu, że $x_k \geq x^*$, którego spełnienie warunkuje zaliczenie zajęć. Ograniczenie to wyraża bowiem fakt, że aby uzyskać zaliczenie kursu student musi w wymaganym stopniu opanować przerabiany materiał i wykazać się umiejętnością poprawnego jego stosowania.

Oznaczmy przez $g_{k+1}(t_{k+1})$ funkcję czasu, której wartościami są liczby godzin spędzonych przez studenta na nauce w kolejnych tygodniach k $(k = 1,...,K)$. Przyjmijmy, że tygodniowy przyrost wiedzy studenta jest proporcjonalny do liczby godzin przeznaczonych przez niego w danym tygodniu na naukę (zajęcia obowiązkowe plus praca własna). Niech β będzie współczynnikiem tej proporcjonalności. Nazwiemy go współczynnikiem wykorzystania czasu. Przyjmiemy, że wartość tego współczynnika jest stała w czasie, przy czym $0 < \beta < 1$[2].

---

[2] Wartość $\beta = 0$ oznaczałaby, że student w ogóle nie przyswaja sobie nowej wiedzy, zaś wartość $\beta = 1$ odpowiadałaby sytuacji, w której przyswaja on ją sobie w sposób idealnie pełny.

Jest rzeczą naturalną, że student biorący udział w kursie nie pamięta całej wiedzy, którą mu dotychczas przekazano, lub którą zdobył samodzielnie. Z upływem czasu część wiedzy jest zapominana. Niech α będzie współczynnikiem charakteryzującym procent wiedzy zapamiętanej. Przyjmiemy, że $0 < \alpha < 1$[3]. Przyjmiemy też, że dla danego studenta wartość tego współczynnika jest stała w czasie. Przy tych oznaczeniach formuła (1) przybiera postać

$$x_{k+1} = \alpha x_k + \beta g_{k+1}(t_{k+1}), \qquad (k = 1,...,K), \tag{3}$$

czyli

$$x_{k+1} - \alpha x_k = \beta g_{k+1}(t_{k+1}), \qquad (k = 1,...,K). \tag{4}$$

Jest to niejednorodne liniowe równanie różnicowe o stałych współczynnikach. Jak wiadomo, (zob., np., Korn i Korn 1968), ogólne rozwiązanie takiego równania może być przedstawione jako suma któregokolwiek z jego rozwiązań szczególnych i ogólnego rozwiązania równania jednorodnego. Rozpatrujemy więc najpierw równanie jednorodne

$$x_{k+1} - \alpha x_k = 0, \qquad (k = 1,...,K). \tag{5}$$

Jego równaniem charakterystycznym jest

$$q - \alpha = 0. \tag{6}$$

Ponieważ pierwiastkiem tego równania jest liczba $q = \alpha$, więc rozwiązanie ogólne równania jednorodnego ma postać

[3] Ograniczenie to wynika z wykluczenia w modelu możliwości, że studentem jest osoba mająca absolutną zdolność zapamiętywania wszystkiego co zobaczyła i usłyszała, lub osoba w ogóle pozbawiona pamięci.

$$x_k = \lambda \alpha^k, \qquad (k = 1,\dots,K) \tag{7}$$

gdzie λ jest stałą dowolną. W wyniku uzmiennienia stałej λ otrzymamy

$$x_k = u_k \alpha^k, \qquad (k = 1,\dots,K). \tag{8}$$

Po podstawieniu tego wyrażenia do równania (3) i obustronnym podzieleniu go przez α^k dostajemy

$$u_{k+1} - u_k = \beta \frac{g_{k+1}(t_{k+1})}{\alpha^{k+1}}, \qquad (k = 0,1,\dots,K). \tag{9}$$

W szczególności mamy

$$\begin{aligned} u_1 - u_0 &= \beta \frac{g_1(t_1)}{\alpha} \\ u_2 - u_1 &= \beta \frac{g_2(t_2)}{\alpha^2} \\ &\vdots \\ u_K - u_{K-1} &= \beta \frac{g_K(t_K)}{\alpha^K} \end{aligned} \tag{10}$$

Po dodaniu tych równości stronami otrzymuje się

$$u_K - u_0 = \beta \left(\frac{g_1(t_1)}{\alpha} + \frac{g_2(t_2)}{\alpha^2} + \dots + \frac{g_K(t_K)}{\alpha^K} \right). \tag{11}$$

Ponieważ z formuły (8) wynika, że $u_K = \frac{x_K}{\alpha^K}$, $u_0 = x_0$, więc

$$u_K - u_0 = \frac{x_K}{\alpha^K} - x_0 = \frac{x_K - \alpha^K x_0}{\alpha^K}. \tag{13}$$

Po porównaniu stronami zależności (11) i (13), a następnie obustronnym podzieleniu otrzymanej równości przez β, otrzymamy

$$\frac{x_K - \alpha^K x_0}{\alpha^K \beta} = \frac{g_1(t_1)}{\alpha} + \frac{g_2(t_2)}{\alpha^2} + \dots + \frac{g_K(t_K)}{\alpha^K}. \tag{14}$$

Załóżmy, że minimalny stopień opanowania przez studenta wiedzy na koniec zajęć, wynosi x^*. Warunkiem uzyskania zaliczenia jest więc $x_K = x^*$. Po uwzględnieniu tego równanie (14) przyjmuje postać

$$\frac{x^* - \alpha^K x_0}{\alpha^K \beta} = \frac{g_1(t_1)}{\alpha} + \frac{g_2(t_2)}{\alpha^2} + \dots + \frac{g_K(t_K)}{\alpha^K}. \tag{15}$$

A zatem, stajemy wobec konieczności znalezienia takich wartości zmiennych $t_1, t_2, ..., t_K$, które będą minimalizowały funkcję (2) przy warunku ubocznym (15). Zadanie to można rozwiązać wieloma metodami. Użyjemy metody mnożników Lagrange'a. W tym celu rozpatrujemy funkcję

$$F(t_1, t_2, ..., t_K, \lambda) = t_1 + t_2 + ... + t_K + \lambda \left[\frac{x^* - \alpha^K x_0}{\alpha^K \beta} - \left(\frac{g_1(t_1)}{\alpha} + \frac{g_2(t_2)}{\alpha^2} + \dots + \frac{g_K(t_K)}{\alpha^K} \right) \right] \tag{16}$$

gdzie λ - mnożnik Lagrange'a.

2.2. Wybór postaci funkcji $g(t_k)$

Z logiki procesu akumulacji wiedzy wynika, że - w typowych sytuacjach[4] - jego matematycznych modeli trzeba poszukiwać w rodzinie funkcji nieujemnych niemalejących. Zwłaszcza wygodne są funkcje wielomianowe, w szczególności potęgowe. Liczne przesłanki wskazujące na przydatność tych funkcji do opisu procesów kumulacji wiedzy w czasie wynikają z psychologii pedagogicznej (zob., np. Mietzel 2001) oraz z analiz procesów nauczania i uczenia się (zob., np., Coombs, Dawes i Tversky 1970; Kozielecki 1981; Nęcka 2002, 2003). Przyjmiemy więc, że modelem nakładu czasu poświęcanego przez uczniów i studentów na naukę jest funkcja potęgowa, czyli że $g_k(t_k) = t_k^\gamma$, $(k = 1,2,...,K-1)$, gdzie $0 < \gamma < 1$. Nie stanowi to istotnego ograniczenia, ponieważ wiele innych postaci funkcji akumulacji wiedzy, przyjmowanych w pracach z zakresu psychologii pedagogicznej, stanowi szczególny przypadek ogólnej postaci funkcji potęgowej (np. $g_k(t_k) = \sqrt{t}$).

2.3. Rozwiązanie modelu dla $g_k(t_k) = t_k^\gamma$

Dla $g_k(t_k) = t_k^\gamma$ funkcja (16) przyjmuje postać

$$F(t_1, t_2, ..., t_K, \lambda) = t_1 + t_2 + ... + t_K + \lambda\left[\frac{x^* - \alpha^K x_0}{\alpha^K \beta} - \left(\frac{t_1^\gamma}{\alpha} + \frac{t_2^\gamma}{\alpha^2} + \cdots + \frac{t_K^\gamma}{\alpha^K}\right)\right] \tag{17}$$

---

[4] Za nietypową uważamy sytuację, w której student wskutek wrodzonych lub nabytych ograniczeń umysłowych ma ograniczone możliwości przyswajania wiedzy.

Obliczając jej pochodne cząstkowe względem zmiennych $t_1, t_2, \ldots, t_K$ i przyrównując je do zera otrzymamy układ $K+1$ równań z $K+1$ niewiadomymi $t_1, t_2, \ldots, t_K, \lambda$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial F}{\partial t_1} = 1 - \lambda \frac{\gamma t_1^{\gamma-1}}{\alpha} = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial t_2} = 1 - \lambda \frac{\gamma t_2^{\gamma-1}}{\alpha^2} = 0 \\
\vdots \\
\frac{\partial F}{\partial t_K} = 1 - \lambda \frac{\gamma t_K^{\gamma-1}}{\alpha^K} = 0 \\
\frac{x^* - \alpha^K x_0}{\alpha^K \beta} - \left(\frac{t_1^\gamma}{\alpha} + \frac{t_2^\gamma}{\alpha^2} + \cdots + \frac{t_K^\gamma}{\alpha^K} \right) = 0
\end{gathered} \tag{18}$$

Z K pierwszych równań tego układu wynika, że

$$\begin{gathered}
t_1 = \left(\frac{\alpha}{\lambda\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = (\lambda\gamma)^{\frac{1}{1-\gamma}} \alpha^{\frac{1}{\gamma-1}} \\
t_2 = \left(\frac{\alpha^2}{\lambda\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = (\lambda\gamma)^{\frac{1}{1-\gamma}} \alpha^{\frac{2}{\gamma-1}} \\
\vdots \\
t_K = \left(\frac{\alpha^K}{\lambda\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = (\lambda\gamma)^{\frac{1}{1-\gamma}} \alpha^{\frac{K}{\gamma-1}}
\end{gathered} \tag{19}$$

Po podstawieniu powyższych wyrażeń do ostatniego równania układu (18), wykonaniu odpowiednich działań na potęgach i wyłączeniu czynnika $(\lambda\gamma)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \alpha^{-\frac{1}{1-\gamma}}$ przed nawias dostaniemy

$$\frac{x^* - \alpha^K x_0}{\alpha^K \beta} - (\lambda\gamma)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \alpha^{-\frac{1}{1-\gamma}} (1 + \alpha^{-\frac{1}{1-\gamma}} + \cdots + \alpha^{-\frac{K-1}{1-\gamma}}) = 0 . \tag{20}$$

Wyrażenie $1+\alpha^{-\frac{1}{1-\gamma}}+\dots+\alpha^{-\frac{K-1}{1-\gamma}}$ jest sumą K-elementowego ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1=1$ i ilorazie $q=\alpha^{-\frac{1}{1-\gamma}}$. Ponieważ suma ta jest równa

$$S_K=\alpha^{-\frac{K-1}{1-\gamma}}\frac{1-\alpha^{\frac{K}{1-\gamma}}}{1-\alpha^{\frac{1}{1-\gamma}}}, \tag{21}$$

więc

$$\frac{x^*-\alpha^K x_0}{\alpha^K\beta}-(\lambda\gamma)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\alpha^{-\frac{K}{1-\gamma}}\frac{1-\alpha^{\frac{K}{1-\gamma}}}{1-\alpha^{\frac{1}{1-\gamma}}}=0. \tag{22}$$

Z tego wynika, że

$$(\lambda\gamma)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}=\frac{x^*-\alpha^K x_0}{\alpha^K\beta}\alpha^{\frac{K}{1-\gamma}}\frac{1-\alpha^{\frac{1}{1-\gamma}}}{1-\alpha^{\frac{K}{1-\gamma}}}. \tag{23}$$

A zatem

$$(\lambda\gamma)^{\frac{1}{1-\gamma}}=\left[\frac{x^*-\alpha^K x_0}{\alpha^K\beta}\alpha^{\frac{K}{1-\gamma}}\frac{1-\alpha^{\frac{1}{1-\gamma}}}{1-\alpha^{\frac{K}{1-\gamma}}}\right]^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{24}$$

Po podstawieniu do (19) otrzymamy

$$t_1 = (\lambda\gamma)^{\frac{1}{1-\gamma}} \alpha^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left[\frac{x^* - \alpha^K x_0}{\alpha^K \beta} \alpha^{\frac{K}{1-\gamma}} \frac{1-\alpha^{\frac{1}{1-\gamma}}}{1-\alpha^{\frac{K}{1-\gamma}}} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \alpha^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$t_2 = (\lambda\gamma)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \alpha^{\frac{2}{\gamma-1}} = \left[\frac{x^* - \alpha^K x_0}{\alpha^K \beta} \alpha^{\frac{K}{1-\gamma}} \frac{1-\alpha^{\frac{1}{1-\gamma}}}{1-\alpha^{\frac{K}{1-\gamma}}} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \alpha^{\frac{2}{\gamma-1}} \tag{25}$$

$$\vdots$$

$$t_K = (\lambda\gamma)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \alpha^{\frac{K}{\gamma-1}} = \left[\frac{x^* - \alpha^K x_0}{\alpha^K \beta} \alpha^{\frac{K}{1-\gamma}} \frac{1-\alpha^{\frac{1}{1-\gamma}}}{1-\alpha^{\frac{K}{1-\gamma}}} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \alpha^{\frac{K}{\gamma-1}}$$

Po dodaniu do siebie stronami wszystkich tych równości i wyłączeniu stałego czynnika przed znak sumy otrzymamy

$$T_{\min}(\alpha,\beta,\gamma,K) = \left[\frac{x^* - \alpha^K x_0}{\alpha^K \beta} \alpha^{\frac{K}{1-\gamma}} \frac{1-\alpha^{\frac{1}{1-\gamma}}}{1-\alpha^{\frac{K}{1-\gamma}}} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \alpha^{\frac{1}{\gamma-1}} \sum_{k=0}^{K-1} \alpha^{\frac{k}{\gamma-1}} . \tag{26}$$

Ponieważ występująca w tej formule suma wyraża się wzorem (21), więc

$$T_{\min}(\alpha,\beta,\gamma,K) = \left[\frac{x^* - \alpha^K x_0}{\alpha^K \beta} \alpha^{\frac{K}{1-\gamma}} \frac{1-\alpha^{\frac{1}{1-\gamma}}}{1-\alpha^{\frac{K}{1-\gamma}}} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \alpha^{-\frac{K}{1-\gamma}} \frac{1-\alpha^{\frac{K}{1-\gamma}}}{1-\alpha^{\frac{1}{1-\gamma}}}, \tag{27}$$

co jest równoważne wyrażeniu

$$T_{\min}(\alpha,\beta,\gamma,K)=\left(\frac{x^{*}-\alpha^{K}x_{0}}{\alpha^{K}\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{1-\alpha^{\frac{1}{1-\gamma}}}{1-\alpha^{\frac{K}{1-\gamma}}}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}. \tag{28}$$

Ostatecznie

$$T_{\min}(\alpha,\beta,\gamma,K)=\left[\frac{x^{*}-\alpha^{K}x_{0}}{\alpha^{K}\beta}\left(\frac{1-\alpha^{\frac{1}{1-\gamma}}}{1-\alpha^{\frac{K}{1-\gamma}}}\right)^{1-\gamma}\right]^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{29}$$

Jak widać, w przypadku typowego studenta optymalną zasadą wykorzystania ogólnego czasu przeznaczonego na naukę jest rozłożenie go w taki sposób, aby długości czasu nauki w kolejnych tygodniach tworzyły rosnący ciąg geometryczny. W przypadku szczególnym, gdy osoba ucząca się ma bardzo słabą zdolność zapamiętywania, otrzymujemy

$$\lim_{\alpha\to 0}\left[\frac{x^{*}-\alpha^{K}x_{0}}{\alpha^{K}\beta}\left(\frac{1-\alpha^{\frac{1}{1-\gamma}}}{1-\alpha^{\frac{K}{1-\gamma}}}\right)^{1-\gamma}\right]^{\frac{1}{\gamma}}=+\infty, \tag{30}$$

A zatem, najlepszą strategią dla takiej osoby jest uczenie się dopiero tuż przed egzaminem. W odniesieniu do osoby mającej niemal idealną zdolność zapamiętywania mamy

$$\lim_{\alpha\to 1}\left[\frac{x^{*}-\alpha^{K}x_{0}}{\alpha^{K}\beta}\left(\frac{1-\alpha^{\frac{1}{1-\gamma}}}{1-\alpha^{\frac{K}{1-\gamma}}}\right)^{1-\gamma}\right]^{\frac{1}{\gamma}}=\left(\frac{x^{*}-x_{0}}{\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\lim_{\alpha\to 1}\left(\frac{1-\alpha^{\frac{1}{1-\gamma}}}{1-\alpha^{\frac{K}{1-\gamma}}}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}=\left(\frac{1}{K^{1-\gamma}}\frac{x^{*}-x_{0}}{\beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{31}$$

Najlepszą dla niej strategią jest więc równomierne rozłożenie ogólnego czasu przenaczonego na naukę między wszystkie tygodnie trwania zajęć.

2.4. Szczególny przypadek ($t_1^\gamma = t_2^\gamma = \ldots = t_K^\gamma = t^\gamma$)

Z dydaktycznego punktu widzenia idealna byłaby sytuacja, gdyby typowy student pracował rytmicznie, poświęcając cotygodniowo taki sam nakład czasu na naukę. W tym przypadku mielibyśmy $t_1 = t_2 = \ldots = t_K = t^\gamma$, a ciąg wartości współczynnika zapamiętywania byłby ciągiem geometrycznym, którego pierwszy wyraz równa się 1, a ilorazem jest α. A zatem

$$\frac{x^* - \alpha^K x_0}{\alpha^K \beta} - t^\gamma \left(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{K-1}\right) = 0, \tag{32}$$

czyli

$$\frac{x^* - \alpha^K x_0}{\alpha^K \beta} - t^\gamma \frac{\alpha^K - 1}{\alpha - 1} = 0. \tag{33}$$

Stąd

$$t = \left[\frac{x^* - \alpha^K x_0}{\alpha^K \beta}\left(\frac{1-\alpha^K}{1-\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{34}$$

Wobec tego, minimalny nakład czasu, który regularnie uczący się student powinien poświęcić na naukę, aby zdobyć wymagany zasób wiedzy i zmaksymalizować szansę zaliczenia zajęć, wynosi $T^*_{\min} = Kt$, czyli

$$T^*_{\min} = K\left[\frac{x^* - \alpha^K x_0}{\alpha^K \beta}\left(\frac{1-\alpha^K}{1-\alpha}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{35}$$

2.5. Współczynnik rytmiczności pracy studenta

Dobrą i praktycznie użyteczną miarą wykorzystania czasu przeznaczonego na naukę może być stosunek minimalnego czasu nauki typowego studenta, który rozłożył czas przeznaczony na naukę w poszczególnych tygodniach w sposób rosnący geometrycznie (wzór (29)), do minimalnego czasu nauki takiego studenta, gdy rozłożył ogólny czas nauki między poszczególne tygodnie w sposób równomierny (wzór (35)), tj.

$$\eta(\alpha, K, \gamma) = \frac{T_{\min}}{T^*_{\min}}. \tag{36}$$

Stosunek ten nazwiemy współczynnikiem rytmiczności pracy studenta. Po uwzględnieniu postaci wyrażeń (29) i (35) wyrazi się on formułą

$$\eta(\alpha, K, \gamma) = \frac{1}{K}\left[\frac{1-\alpha^K}{1-\alpha}\left(\frac{1-\alpha^{\frac{1}{1-\gamma}}}{1-\alpha^{\frac{K}{1-\gamma}}}\right)^{\gamma-1}\right]^{\frac{1}{\gamma}}, \tag{37}$$

lub, co na jedno wychodzi, formułą

$$\eta(\alpha,K,\gamma)=\frac{1}{K}\left[\frac{1-\alpha^{K}}{1-\alpha}\left(\frac{1-\alpha^{\frac{K}{1-\gamma}}}{1-\alpha^{\frac{1}{1-\gamma}}}\right)^{1-\gamma}\right]^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{38}$$

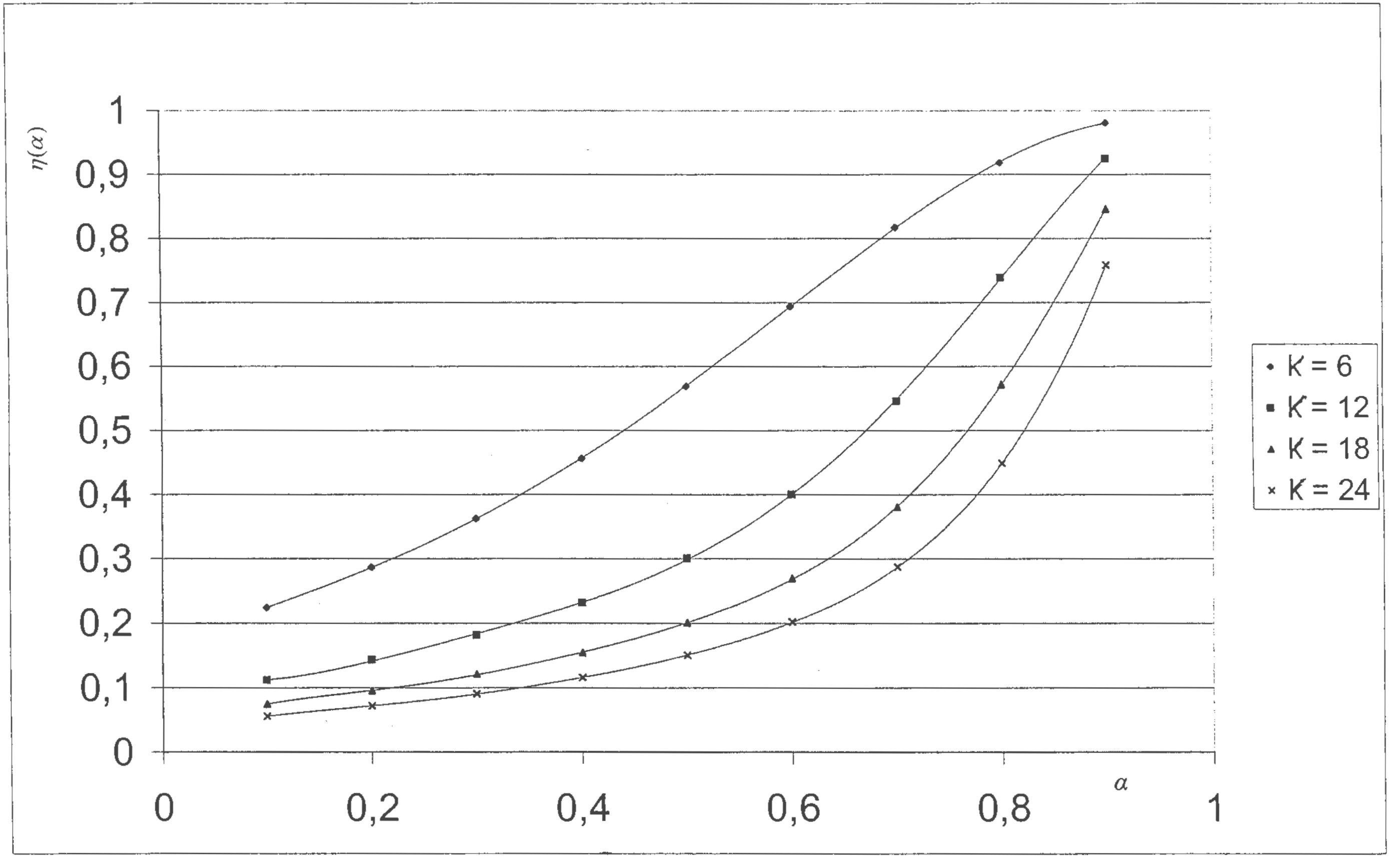
Widać z niej bezpośrednio, że oszczędności czasu poświęconego na uczenie się są tym większe, im dłuższy jest ogólny czas trwania zajęć, czyli im większe jest K, i im mniejsza jest wartość współczynnika zapamiętywania α .

2.6. Numeryczna analiza własności współczynnika $\eta(\alpha,K,\gamma)$

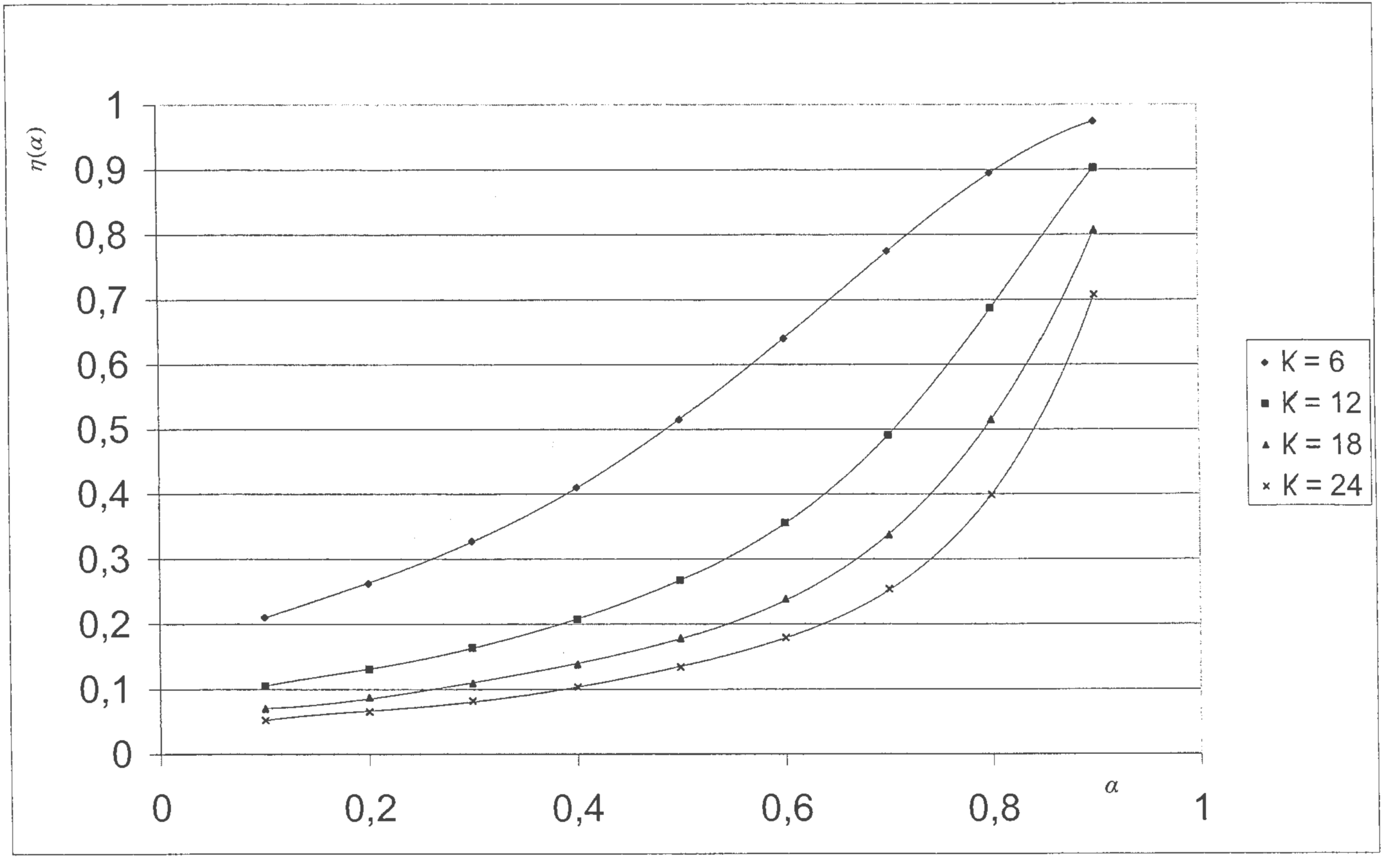
Dla bardziej wnikliwego zbadania własności współczynnika $\eta(\alpha,K,\gamma)$ przeprowadzono jego analizę numeryczną w zakresie dopuszczalnych wartości jego parametrów ($0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, $0<\gamma<1$). Na rysunkach 1, 2, 3 i 4 przedstawiono wykresy zmienności wartości tego współczynnika w zależności od zmian wartości współczynnika zapamiętywania α , przy ustalonych wartościach współczynnika γ ($\gamma=0.2,0.4,0.6,0.8$), dla $K=6,12,18,24$. Z wykresów widać, że krzywe ilustrujące tę zmienność są fragmentami krzywych z nasyceniem, przy czym im krótszy jest łączny czas trwania zajęć, *K*, tym szybciej osiągają one punkt przegięcia. Dla danej wartości γ, przy ustalonej wartości współczynnika zapamiętywania, wartość współczynnika $\eta(\alpha,K,\gamma)$ jest tym większa, im mniejsze jest *K*. Dla danej wartości γ, im większe jest *K*, dla tym większych wartości współczynnika zapamiętywania α współczynnika $\eta(\alpha,K,\gamma)$ przyjmuje tę samą wartość. Na przykład, przy $\gamma=0.2$ tę samą wartość współczynnika $\eta(\alpha, K, \gamma)$ można otrzymać dla $K=6$ i $\alpha=0.4$, jak i dla $K=18$ i $\alpha=0.8$. Znaczy to, że - przy ustalonym γ - tę samą wartość współczynnika $\eta(\alpha, K, \gamma)$ można osiągnąć pracując ze studentami mniej uzdolnionymi, ale za to bardziej intensywnie (mniejsze K), co pracując ze studentami bardziej uzdolnionymi, ale mniej intensywnie (mniejsze K). Wydaje się, że jest to ważna informacja dla organizatorów wszelkich kursów, szkoleń itp. W miarę możności powinny być one indywidualizowane, tzn. prowadzone w grupach uczestników o zbliżonym profilu wiedzy, zdolności itp. Bez względu na zdolność zapamiętywania wiedzy nadmierne rozciąganie zajęć w czasie jest niewłaściwe.

Na rysunkach 5, 6, 7 i 8 są przedstawione wykresy zmienności wartości współczynnika $\eta(\alpha, K, \gamma)$ w zależności od zmian wartości współczynnika zapamiętywania α, kolejno dla ustalonych wartości K $(K=6,12,18,24)$, dla $\gamma=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$. Z wykresów wynika, że dla danego K wartość współczynnik $\eta(\alpha, K, \gamma)$ jest tym większa, im mniejsza jest wartość parametru γ. W miarę wzrostu wartości K wykresy funkcji $\eta(\alpha, K, \gamma)$, odpowiadające tej samej wartości parametru γ, przesuwają się pionowo w kierunku osi odciętych, wyraźnie przy tym zmieniając swój kształt. O ile w przypadku $K=6$, dla prawie wszystkich rozpatrywanych wartości γ wykresy funkcji $\eta(\alpha, K, \gamma)$ osiągają punkt przegięcia w rozpatrywanym przedziałe zmienności α, o tyle dla wyższych wartości K wykresy te są fragmentami wznoszącej się części jakiejś krzywej z nasyceniem. Na tym etapie badań nie identyfikowano postaci tej krzywej. W przyszłości trzeba to jednak zrobić pamiętając, że niekoniecznie musi to być krzywa logistyczna.

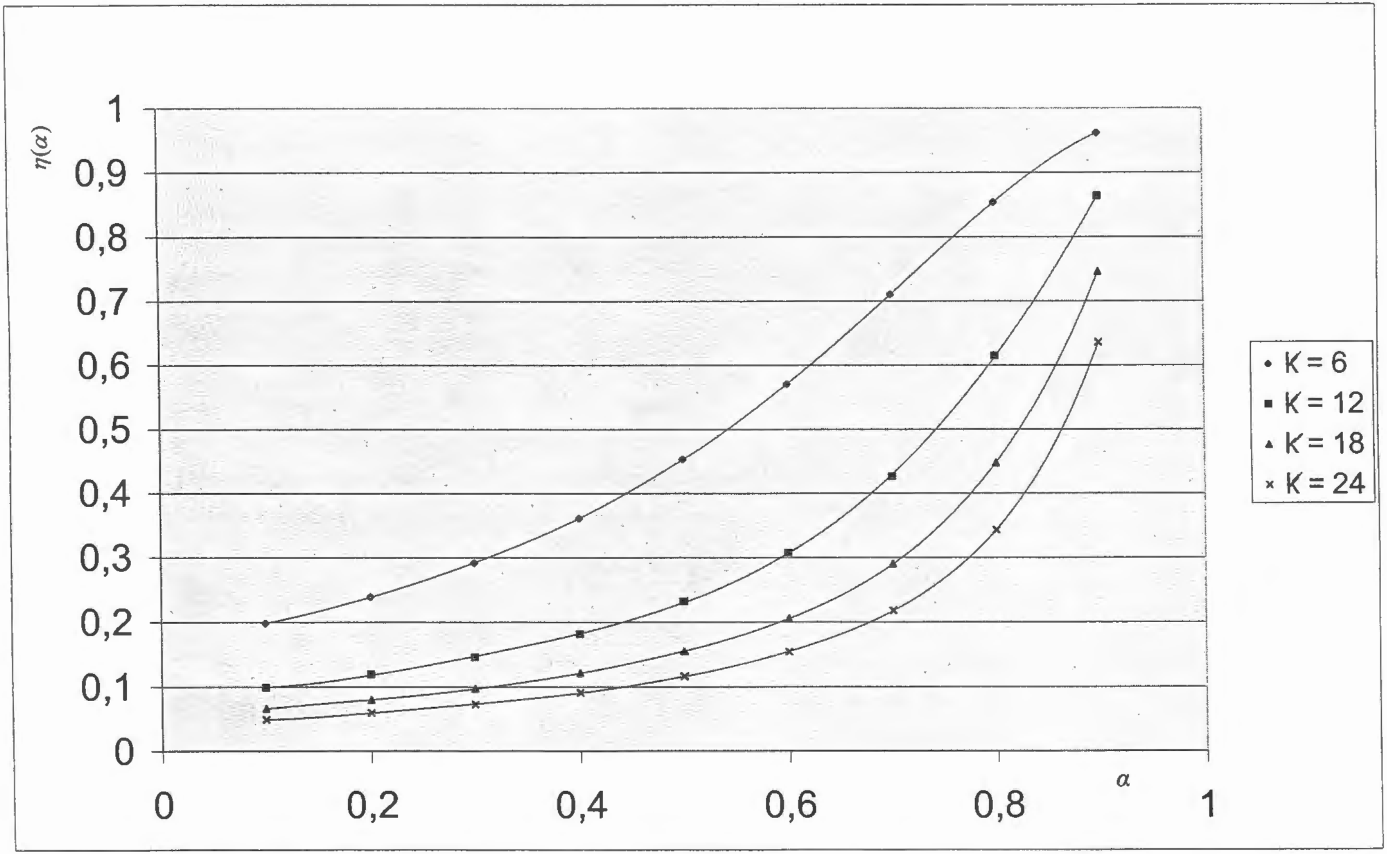
Na rysunkach 9, 10, 11 i 12 przedstawiono kolejno trójwymiarowe wykresy funkcji $\eta(\alpha, K, \gamma)$, przy ustalonych wartościach parametru γ $(\gamma=0.2, 0.4, 0.6, 0.8)$.



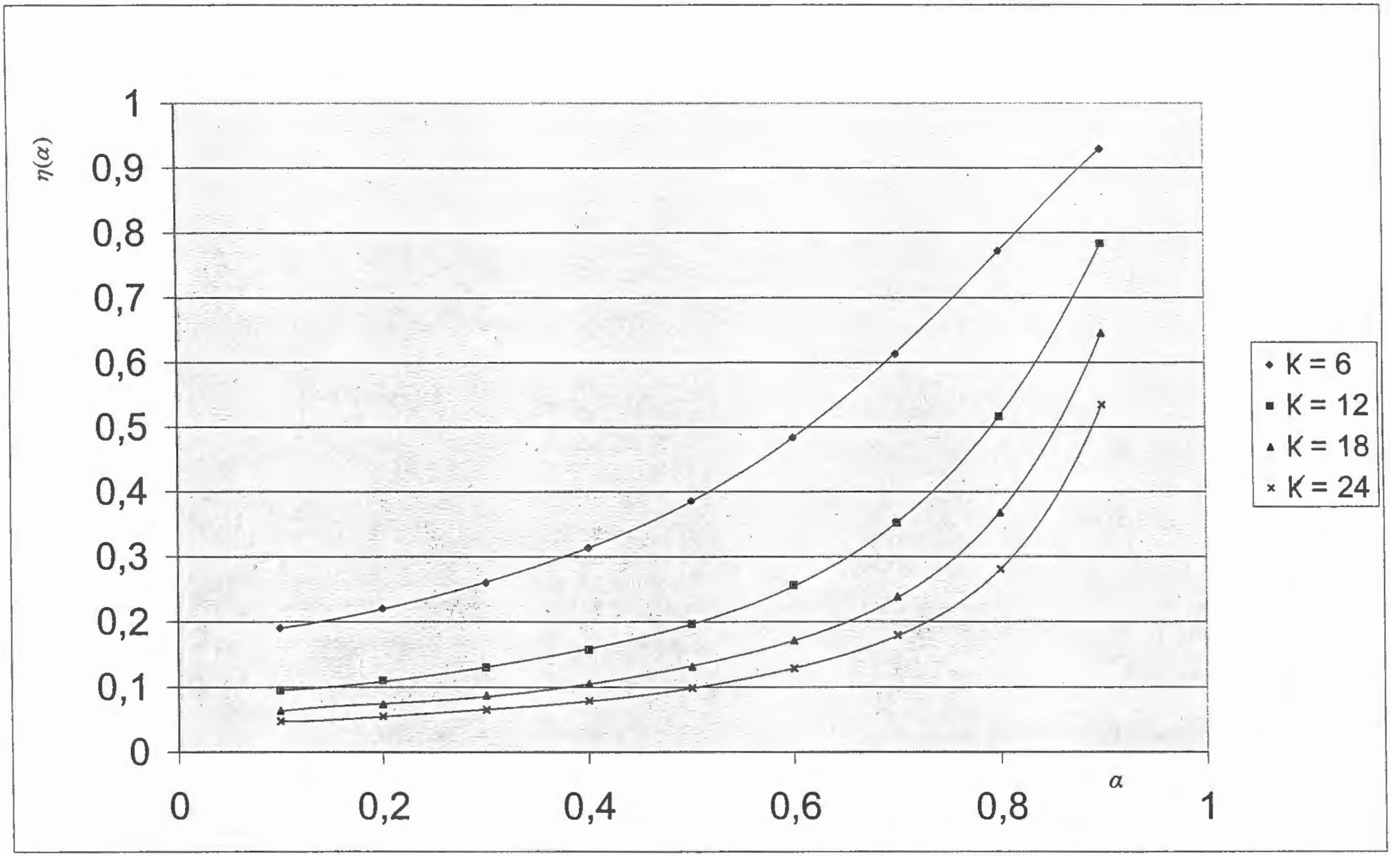
Rys. 1. Zmienność wartości współczynnika $\eta(\alpha, K, \gamma)$ w zależności od zmian wartości współczynnika zapamiętywania α, dla $\gamma = 0.2$ oraz $k = 6, 12, 18, 24$.



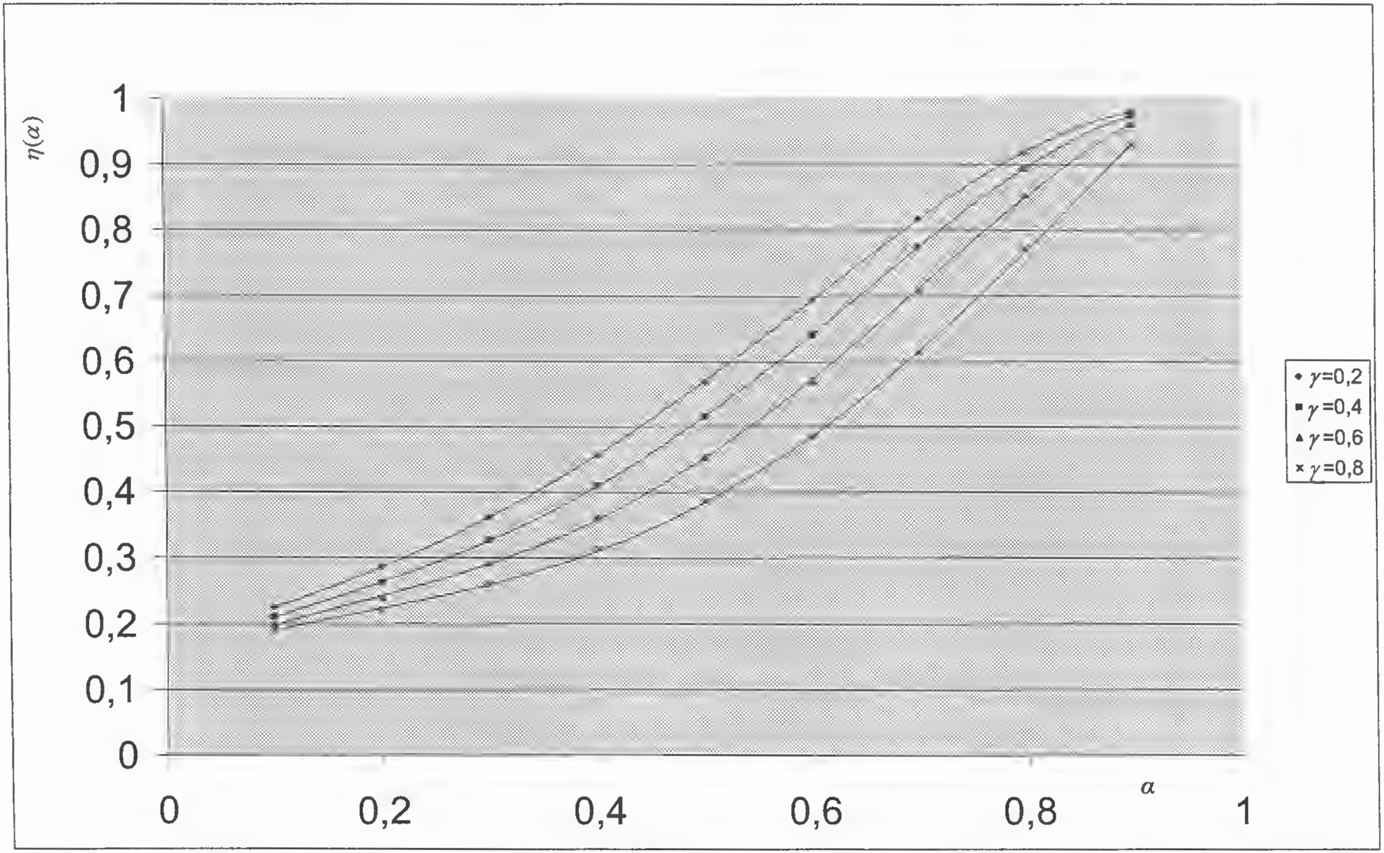
Rys. 2. Zmienność wartości współczynnika $\eta(\alpha, K, \gamma)$ w zależności od zmian wartości współczynnika zapamiętywania α, dla $\gamma = 0.4$ oraz $k = 6, 12, 18, 24$.



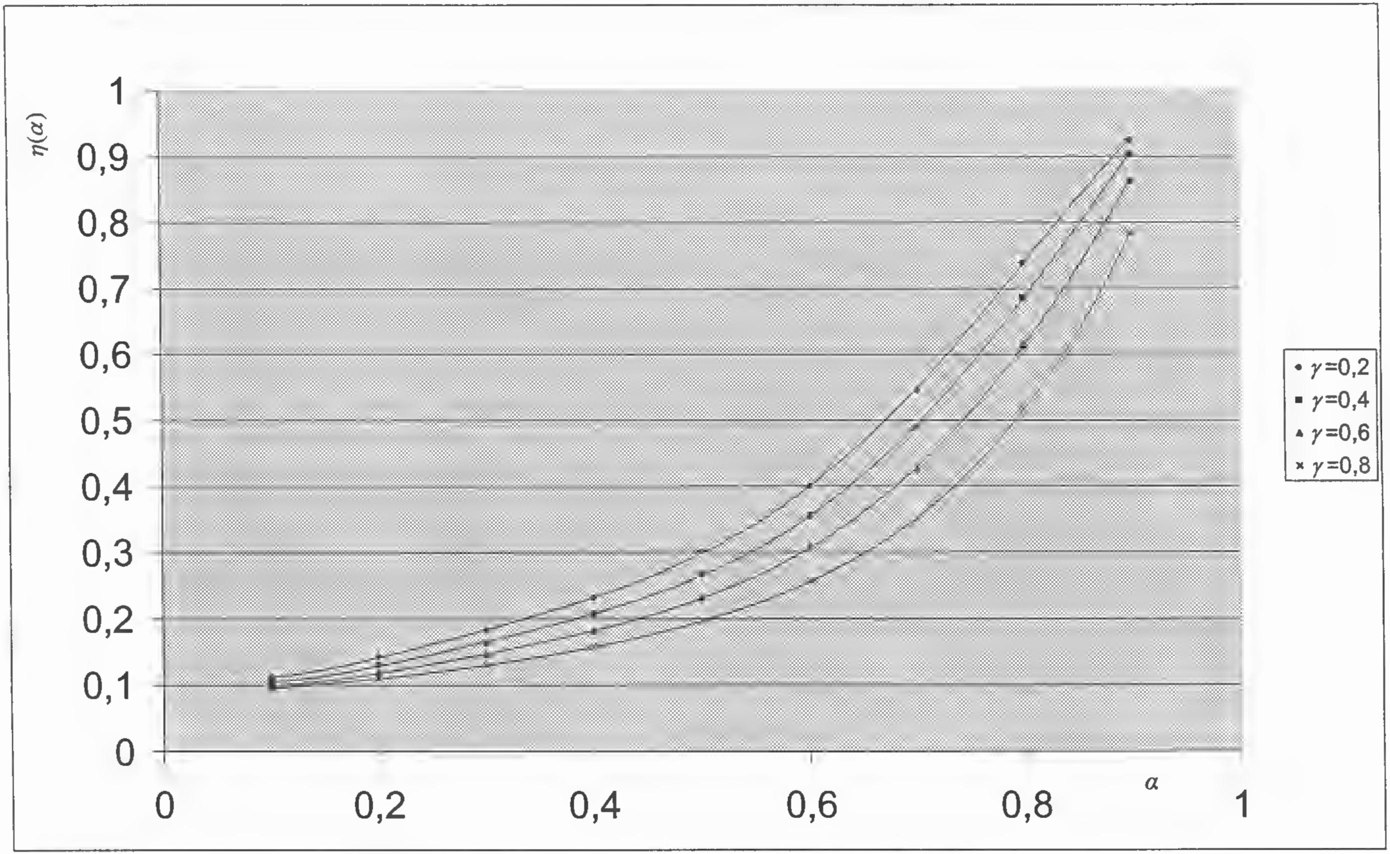
Rys. 3. Zmienność wartości współczynnika $\eta(\alpha, K, \gamma)$ w zależności od zmian wartości współczynnika zapamiętywania α, dla $\gamma = 0.6$ oraz $k = 6, 12, 18, 24$.



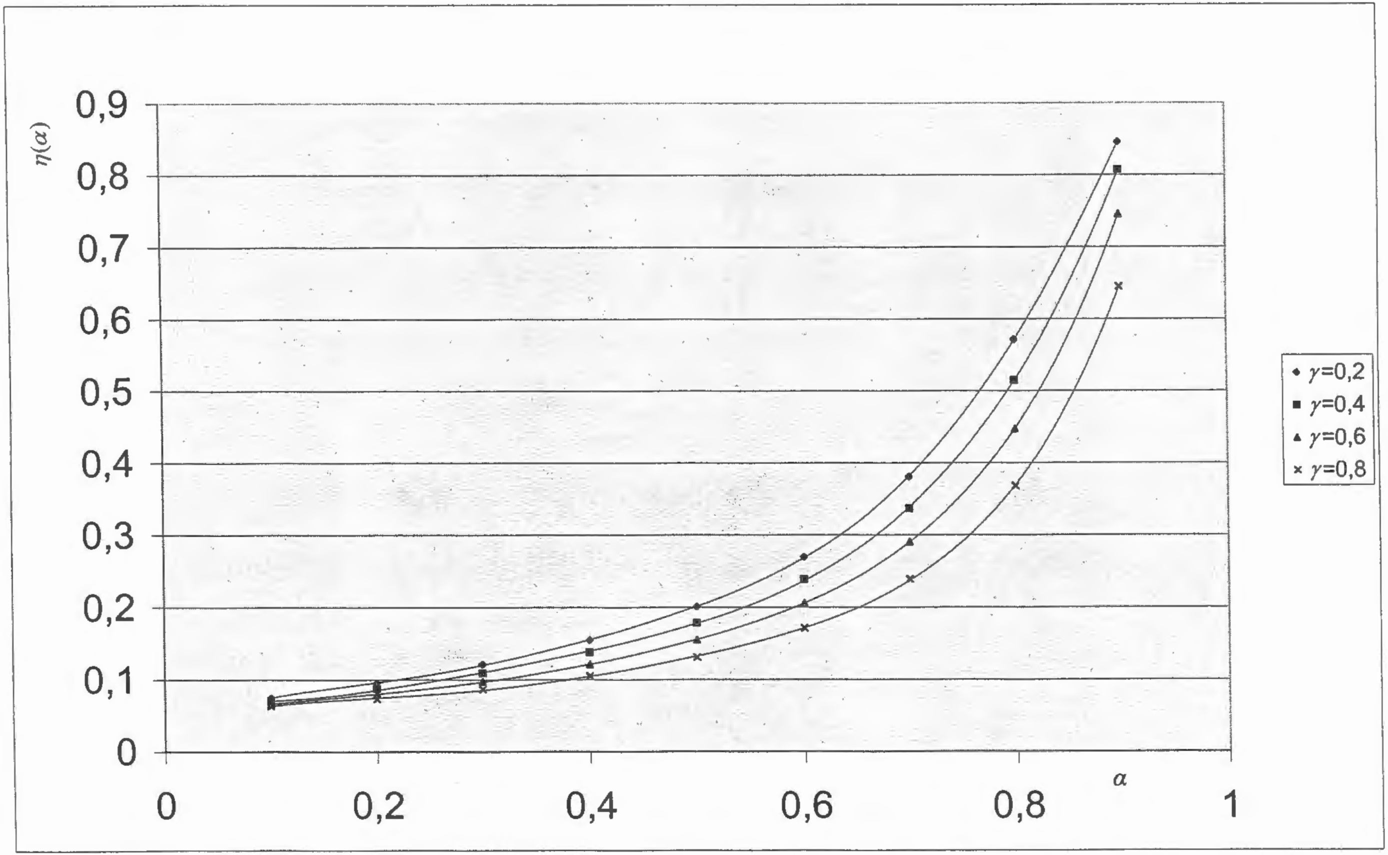
Rys. 4. Zmienność wartości współczynnika $\eta(\alpha, K, \gamma)$ w zależności od zmian wartości współczynnika zapamiętywania α, dla $\gamma = 0.8$ oraz $k = 6, 12, 18, 24$.



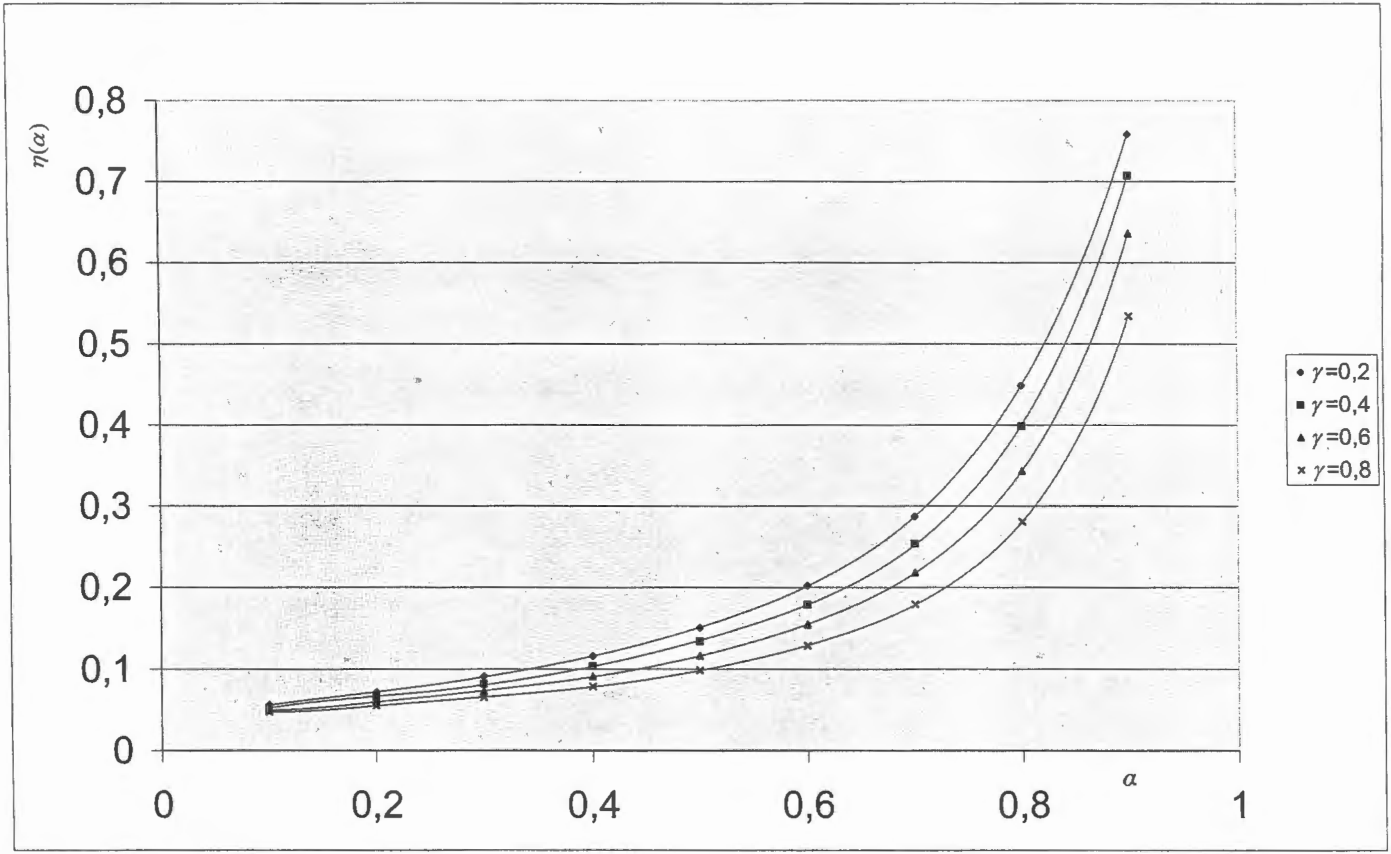
Rys. 5. Zmienność wartości współczynnika $\eta(\alpha, K, \gamma)$ w zależności od zmian wartości współczynnika zapamiętywania α, dla $K = 6$ oraz $\gamma = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$.



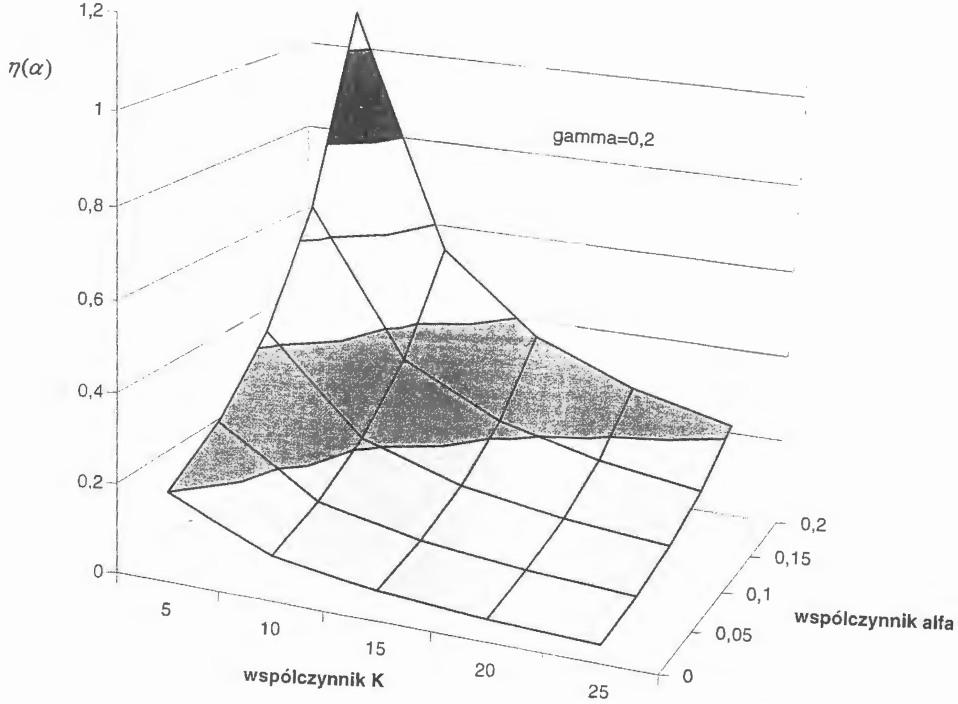
Rys. 6. Zmienność wartości współczynnika $\eta(\alpha, K, \gamma)$ w zależności od zmian wartości współczynnika zapamiętywania α, dla $K = 12$ oraz $\gamma = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$.



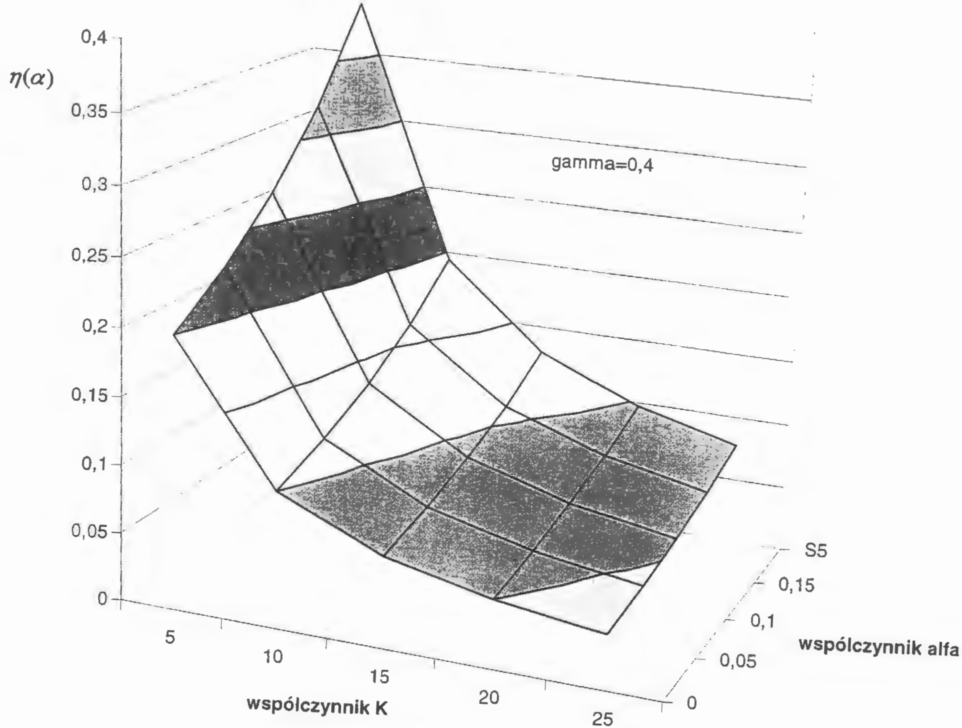
Rys. 7. Zmienność wartości współczynnika $\eta(\alpha, K, \gamma)$ w zależności od zmian wartości współczynnika zapamiętywania α, dla $K = 18$ oraz $\gamma = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$.



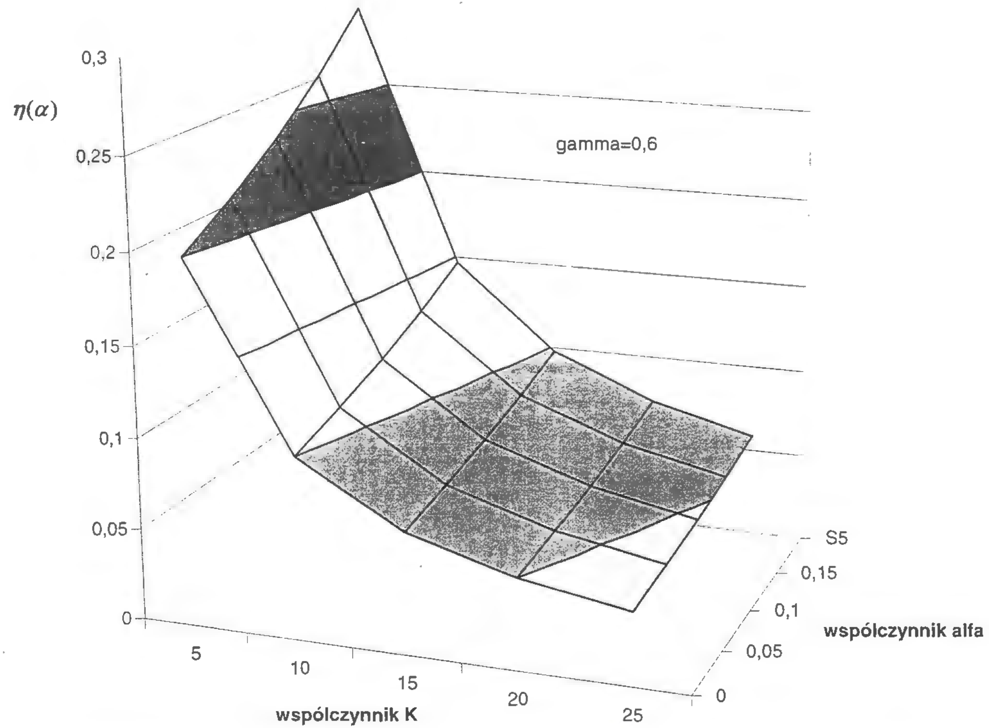
Rys. 8. Zmienność wartości współczynnika $\eta(\alpha, K, \gamma)$ w zależności od zmian wartości współczynnika zapamiętywania α, dla $K = 24$ oraz $\gamma = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$.



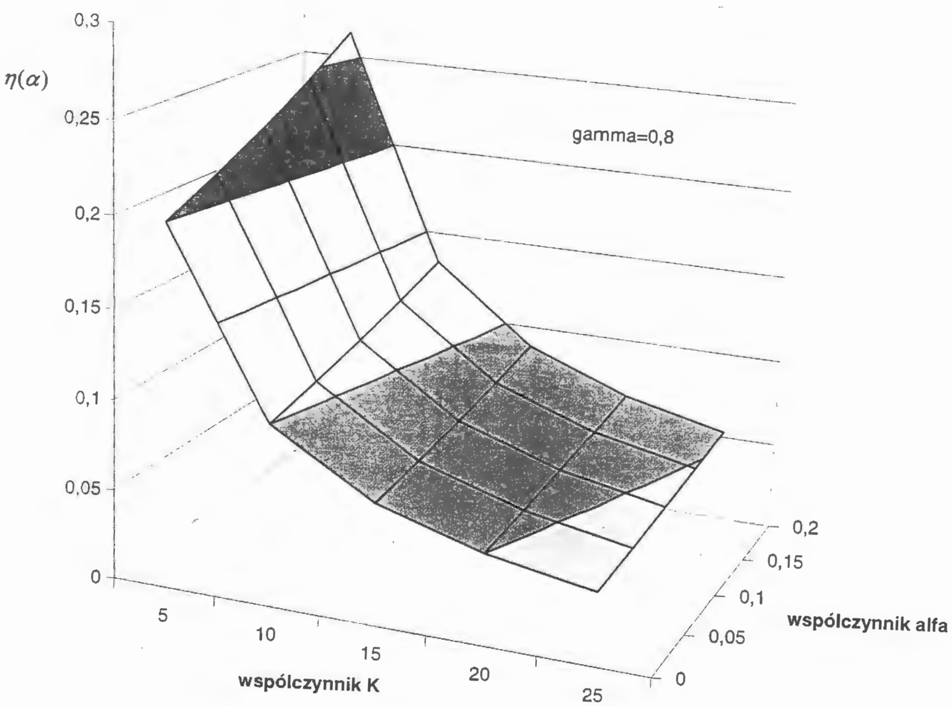
Rys. 9. Zmienność wartości współczynnika $\eta(\alpha, K, \gamma)$ w funkcji zmiennych α i K, dla $\gamma = 0.2$.



Rys. 10. Zmienność wartości współczynnika $\eta(\alpha, K, \gamma)$ w funkcji zmiennych α i K, dla $\gamma = 0.4$.



Rys. 11. Zmienność wartości współczynnika $\eta(\alpha, K, \gamma)$ w funkcji zmiennych α i K, dla $\gamma = 0.6$.



Rys. 12. Zmienność wartości współczynnika $\eta(\alpha, K, \gamma)$ w funkcji zmiennych α i K, dla $\gamma = 0.8$.

Wykresami są powierzchnie, których charakterystyczną cechą jest występowanie ostrza funkcji $\eta(\alpha,K,\gamma)$ wyraźnie zwężającego się ku górze wykresu i tym węższego, im mniejsza jest wartość parametru γ. Położenie szczytowego punktu ostrza obniża się w miarę wzrostu wartości parametru γ. Z wykresów widać, że - dla każdej ustalonej wartości parametru γ - im większa jest wartość współczynnika α i im większa jest równocześnie wartość K, tym większ jest wartość współczynnika $\eta(\alpha,K,\gamma)$. Wykresy sugerują, że przy ustalonych wartościach parametrów α i γ współczynnik $\eta(\alpha,K,\gamma)$ jest malejącą funkcją zmiennej K, zaś przy ustalonych wartościach K i γ jest rosnącą funkcją zmiennej α.

2.7. Analityczna analiza własności współczynnika $\eta(\alpha,K,\gamma)$

Zbadajmy najpierw, czy jest prawdą, że przy ustalonych wartościach parametrów α i γ współczynnik $\eta(\alpha,K,\gamma)$ jest malejącą funkcją zmiennej K. Zajmujemy się więc funkcją $\eta(\alpha,\gamma,K)=\eta(K)$. Zapiszmy wyrażenie (38) w postaci

$$\eta(K)=\frac{1}{K}\left[\frac{1-\alpha^K}{(1-\alpha^{\frac{K}{1-\gamma}})^{1-\gamma}}\frac{(1-\alpha^{\frac{1}{1-\gamma}})^{1-\gamma}}{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{\gamma}} \tag{39}$$

i podstawmy $\frac{1}{\alpha}=e^{\frac{2u}{K}}$. Ponieważ

$$1-\alpha=\alpha^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \tag{40}$$

więc

$$1-\alpha=\alpha^{-\frac{u}{K}}(e^{\frac{u}{K}}-e^{-\frac{u}{K}}), \tag{41}$$

a ponieważ $\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=\sinh x$, więc ostatecznie

$$1-\alpha=2e^{-\frac{u}{K}}\sinh\frac{u}{K}. \tag{42}$$

W analogiczny sposób otrzymamy

$$1-\alpha^{K}=2e^{-u}\sinh u \tag{43}$$

$$1-\alpha^{\frac{1}{1-\gamma}}=2^{1-\gamma}e^{-\frac{u}{K}}\sinh^{1-\gamma}\frac{u}{K(1-\gamma)} \tag{44}$$

$$1-\alpha^{\frac{K}{1-\gamma}}=2^{1-\gamma}e^{-u}\sinh^{1-\gamma}\frac{u}{1-\gamma} \tag{45}$$

Po podstawieniu wyrażeń (42), (43), (44) i (45) do wzoru (39) nadamy mu po prostych przekształceniach postać

$$\eta(K)=\frac{1}{K}\left[\frac{\sinh u}{\sinh\frac{u}{K}}\left(\frac{\sinh\frac{u}{K(1-\gamma)}}{\sinh\frac{u}{1-\gamma}}\right)^{1-\gamma}\right]^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{46}$$

$$\varphi(K)=\frac{1}{2K}\left(\frac{\sinh u}{(\sinh\frac{u}{1-\gamma})^{1-\gamma}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \tag{44}$$

lub

$$\varphi(K)=\frac{1}{2K}\left(\frac{1-\gamma}{u}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\left(\frac{\sinh u}{u}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{\sinh\frac{u}{1-\gamma}}{\frac{u}{1-\gamma}}\right)^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}}. \tag{45}$$

W wyrażeniu tym występują funkcje typu $h(x)=\dfrac{f(x)}{f(cx)}$. Ich pochodne logarytmiczne mają postać

$$[\ln h(x)]'=[\ln f(x)-\ln f(cx)]'=\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f(cx)}{f'(cx)}. \tag{46}$$

Ponieważ warunkiem malenia funkcji $h(x)$ jest spełnienie nierówności $[\ln h(x)]'<0$, więc mamy

$$\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f(cx)}{f'(cx)}<0, \tag{47}$$

czyli

$$\frac{f(x)}{f'(x)}<\frac{f(cx)}{f'(cx)}. \tag{48}$$

Żeby ten warunek był spełniony, trzeba by iloraz $\frac{f(x)}{f'(x)}$ był funkcją rosnącą. To z kolei będzie miało miejsce wtedy, gdy pochodna tej funkcji będzie dodatnia, tj. gdy $\frac{f'(x)f'(x)-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}>0$. Otrzymujemy więc warunek

$$[f'(x)]^2-f(x)f''(x)>0 \tag{49}$$

Wystarczy sprawdzić, czy funkcje $h_1(x)=\frac{\sinh u}{u}$ oraz $h_2(x)=\frac{\sinh\frac{u}{1-\gamma}}{\frac{u}{1-\gamma}}$. Ponieważ

$$h_1'(x)=\frac{u\cosh u-\sinh u}{u^2}, \tag{50}$$

$$h_1''(x)=\frac{(u^2+2)\sinh u-2u\cosh u}{u^3}. \tag{51}$$

więc

$$[h_1'(u)]^2-h_1(u)h_1''(u)=\frac{u^2(\sinh^2 u-\cosh^2 u)+\sinh^2 u}{u^4}=\frac{\sinh^2 u-u^2}{u^4}. \tag{52}$$

Ponieważ $\sinh u>1$ dla $u>0$, więc $\sinh^2 u-u^2>0$. W podobny sposób można sprawdzić, że funkcja $h_2(x)$ też spełnia warunek (49). Wobec tego funkcja $\eta(K)$ jest malejąca.

Przeprowadzają analogiczne rozumowanie można wykazać, że przy ustalonych wartościach K i γ funkcja $\eta(\alpha, K, \gamma) = \eta(\alpha)$ jest rosnąca względem α.

3. Uwagi końcowe i wnioski

Podstawowym celem sterowania procesem edukacyjnym w szkole wyższej jest podnoszenie jakości wykształcenia studenta. Cel ten jest zwrotnie sprzężony z celem samego istnienia szkoły. Im lepsze są wyniki edukacyjne szkoły, tym większa jest szansa jej utrzymywania się na rynku szkolnym. W grę wchodzą dwa rodzaje oddziaływań na studenta: zewnętrzne (tj. pochodzące od władz uczelni) i wewnętrzne (tj. takie, którymi rozporządza sam student). W pracy ograniczono się tylko do oddziaływań wewnętrznych. Podstawowym z nich jest sterowana przez studenta długość czasu, który poświęci na naukę w okresie trwania zajęć (kursu, semestru itp.), oraz sposób wykorzystania tego czasu. Sformułowano zadanie minimalizacji czasu poświęcanego na uczenie się i skonstruowano jego model matematyczny. Pokazano, że istotny wpływ na jakość wiedzy przedmiotowej zdobytej w okresie zajęć mają nie tylko zdolności percepcyjne słuchacza, ale także sposób gospodarowania własnym czasem. Zdolności percepcyjne osoby uczącej się scharakteryzowano za pomocą tzw. współczynnika zapamiętywania. Wprowadzono pojęcie współczynnika rytmiczności uczenia się, $\eta(\alpha, K, \gamma)$. Przyjęto, że na jego wartość mają wpływ długość okresu zajęć K, współczynnik zapamiętywania α oraz współczynnik γ określający, jaką część ogólnego portfela czasu słuchacz poświęca tygodniowo na naukę. Wykazano, że przy ustalonych wartościach parametrów α i γ współczynnik ten jest malejącą funkcją długości trwania kursu. Można udowodnić, że przy ustalonych wartościach K i γ współczynnik $\eta(\alpha, K, \gamma)$ jest rosnącą funkcją zmiennej α.

Ważnym wynikiem pracy jest stwierdzenie, że – przy przyjętych założeniach modelowych – przeciętnie uzdolniony słuchacz powinien rozłożyć czas uczenia się w taki sposób, by porcje czasu poświęcanego na naukę w kolejnych tygodniach tworzyły rosnący ciąg geometryczny. Wykazano też, że jeżeli akceptować przyjęte założenia, to słuchacz mający dużą swobodę przyswajania materiału powinien pracować rytmicznie przez cały czas trwania zajęć, równomiernie rozkładając czas nauki na wszystkie tygodnie.

Rozważania teoretyczne są zilustrowane przykładem obliczeniowym, którego wyniki są przedstawione graficznie.

Literatura

Chodkowska M., red. (2002). Wielowymiarowość integracji w teorii i praktyce edukacyjnej. Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin.

Coombs C.H., Dawes R.M., Tversky A. (1970). Mathematical psychology. An elementary introduction. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

Dryden G., Vos J. (1999). The learning revolution. The Learning WEB, Torrance.

Dziubiński I., Świątkowski T. (1980). Poradnik matematyczny. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Korn G.A., Korn T.M. (1968). Mathematical handbook for scientists and engineers. McGraw -Hill, New York.

Kozielecki J. (1981). Psychological decision theory. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Mietzel G. (2001). Pädagogische Psychologie des Lernens und Lehrens. Hogrefe-Verlag, Göttingen.

Nęcka E. (2002). Psychologia twórczości. Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, Gdańsk.

Nęcka E. (2003). Inteligencja. Geneza – struktura – funkcje. Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, Gdańsk.

Walker D.F., Soltis J.F. (2000). Program i cele kształcenia. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne Spółka Akcyjna, Warszawa.