Raport Badawczy

Research Report

RB/43/2005

Zastosowanie metody Saariego do analizy pozycyjnych algorytmów tworzenia oceny grupowej

H. Bury, D. Wagner

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr hab. inż. Janusz Kacprzyk

Warszawa 2005

Wprowadzenie

Jednym z paradoksów występujących w teorii i praktyce głosowania jest zmiana wyników otrzymywanych za pomocą wybranego algorytmu generowania oceny grupowej w zależności od liczby rozpatrywanych wariantów. Przykładem może być tak zwany „no-show paradox” [3].

W pracy Saariego [4] dotyczącej zastosowania pozycyjnych metod tworzenia oceny grupowej zaproponowano metodę zapewniającą – przynajmniej w istotnym stopniu – stabilność wyników uzyskiwanych za pomocą tych metod. Jej istotą jest rekurencyjne określanie wektorów głosowania dla większej liczby obiektów na podstawie wektorów głosowania uzyskanych dla ustalonej mniejszej liczby obiektów.

Ilustrację tego podejścia przedstawiono w przykładach 1 i 2.

W cytowanej pracy Saariego podane są – bez wyprowadzenia - wzory pozwalające określić wektor głosowania dla (n+1) obiektów w przypadku, gdy dany jest wektor głosowania dla n obiektów. Szczegółową analizę tego zagadnienia przedstawiono w pracy [1].

1. Podstawowe pojęcia związane z pozycyjnymi metodami tworzenia oceny grupowej

Załóżmy, że jest dany zbiór n kandydatów (alternatyw, obiektów) oraz ich uporządkowania podane przez ekspertów. Podejście Saariego polega ona na dekompozycji uporządkowań większej liczby obiektów na zbiór uporządkowań zadanej liczby obiektów. Przyjmujemy, że w uporządkowaniach nie występują obiekty równoważne, a zatem liczba miejsc w uporządkowaniach jest równa liczbie obiektów.

Definicja 1 [4].

Wektorem głosowania w^n dla zbioru n kandydatów nazywamy wypukłą kombinację (n-1) znormalizowanych wektorów v_j^n

$$w^n = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j^n v_j^n, \quad \lambda_j^n \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j^n = 1 . \tag{1}$$

Wektory znormalizowane v_j^n mają postać $v_j^n = \left(\underset{\text{pozycja } 1}{1}, \ldots, \underset{\text{pozycja } j}{1}, 0, \ldots, \underset{\text{pozycja } n}{0} \right)$

Zapis wektora v_j^n oznacza, że obiektom zajmującym w uporządkowaniach pozycje od 1 do j jest przypisany jeden głos.

Przykład 1.

Dane jest uporządkowanie pięciu obiektów O_1, O_2, O_3, O_4, O_5:

$$O_1 \succ O_2 \succ O_3 \succ O_4 \succ O_5 \tag{2}$$

Uporządkowanie to można zapisać w postaci 10 uporządkowań trzech obiektów.

Wybór zbioru trzech obiektów jako punktu wyjścia dla dalszego rozszerzania zbioru obiektów wynika z faktu, że jest to najmniejszy nietrywialny zbiór porządkowanych obiektów, który można szczegółowo przeanalizować i zinterpretować jego własności. Ponadto, dwa znormalizowane wektory głosowania $v_1^3 = (1,0,0)$ oraz $v_2^3 = (1,1,0)$, jakie można określić dla tego zbioru, mają przejrzystą interpretację. Warto zauważyć, że v_1^3 definiuje zwycięzcę w głosowaniu większościowym, zaś v_2^3 zwycięzcę w głosowaniu antywiększościowym.

Tabela 1.

Uporządkowanie		Obiekty				
		O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
1	$O_1 \succ O_2 \succ O_3$	1	1			
2	$O_1 \succ O_2 \succ O_4$	1	1			
3	$O_1 \succ O_2 \succ O_5$	1	1			
4	$O_1 \succ O_3 \succ O_4$	1		1		
5	$O_1 \succ O_3 \succ O_5$	1		1		
6	$O_1 \succ O_4 \succ O_5$	1			1	
7	$O_2 \succ O_3 \succ O_4$		1	1		
8	$O_2 \succ O_3 \succ O_5$		1	1		
9	$O_2 \succ O_4 \succ O_5$		1		1	
10	$O_3 \succ O_4 \succ O_5$			1	1	
Razem		6	6	5	3	0

Załóżmy, dla celów dalszych rozważań, że znormalizowany wektor głosowania dla trzech obiektów ma postać

$$v_2^3 = (1, 1, 0) \tag{3}$$

to znaczy, że obiekty zajmujące w uporządkowaniu pierwszą i drugą pozycję otrzymują po jednym głosie. W prawej części Tabeli 1 podano liczby głosów przyporządkowane poszczególnym obiektom w kolejnych uporządkowaniach w wyniku zastosowania znormalizowanego wektora głosowania (3). Z Tabeli 1 wynika, że wektor głosowania dla pięciu obiektów uzyskany za pomocą wektora (3) ma postać

$$w^5 = \left(1, 1, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, 0\right). \tag{4}$$

Przykład 2

Dane jest uporządkowanie sześciu obiektów O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6

$$O_1 \succ O_2 \succ O_3 \succ O_4 \succ O_5 \succ O_6 \qquad (5)$$

Uporządkowanie to można zapisać w postaci 20 uporządkowań trzech obiektów.

Tabela 2.

Uporządkowanie		Obiekty					
		O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
1	$O_1 \succ O_2 \succ O_3$	1	1				
2	$O_1 \succ O_2 \succ O_4$	1	1				
3	$O_1 \succ O_2 \succ O_5$	1	1				
4	$O_1 \succ O_2 \succ O_6$	1	1				
5	$O_1 \succ O_3 \succ O_4$	1		1			
6	$O_1 \succ O_3 \succ O_5$	1		1			
7	$O_1 \succ O_3 \succ O_6$	1		1			
8	$O_1 \succ O_4 \succ O_5$	1			1		
9	$O_1 \succ O_4 \succ O_6$	1			1		
10	$O_1 \succ O_5 \succ O_6$	1				1	
11	$O_2 \succ O_3 \succ O_4$		1	1			
12	$O_2 \succ O_3 \succ O_5$		1	1			
13	$O_2 \succ O_3 \succ O_6$		1	1			
14	$O_2 \succ O_4 \succ O_5$		1		1		
15	$O_2 \succ O_4 \succ O_6$		1		1		
16	$O_2 \succ O_5 \succ O_6$		1			1	
17	$O_3 \succ O_4 \succ O_5$			1	1		
18	$O_3 \succ O_4 \succ O_6$			1	1		
19	$O_3 \succ O_5 \succ O_6$			1		1	
20	$O_4 \succ O_5 \succ O_6$				1	1	
Razem		10	10	9	7	4	0

Załóżmy ponownie, że znormalizowany wektor głosowania dla trzech obiektów ma postać (3). W prawej części Tabeli 2 podano liczby głosów przyporządkowane poszczególnym obiektom w kolejnych uporządkowaniach w wyniku zastosowania znormalizowanego wektora głosowania (3). Z Tabeli 2 wynika, że wektor głosowania dla sześciu obiektów uzyskany za pomocą wektora (3) ma postać

$$w^6 = \left(1, 1, \frac{9}{10}, \frac{7}{10}, \frac{4}{10}, 0\right) \tag{6}$$

Definicja 2 [4]

Zbiór $\mathcal{S}^n$ o postaci

$$\mathcal{S}^n = \left\{ w^n = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j^n v_j^n, \quad \lambda_j^n \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^n = 1 \right\} \tag{7}$$

jest nazywany sympleksem wektorów głosowania odpowiadających zbiorowi n kandydatów.

Załóżmy, że dany jest zbiór (k-1) kandydatów, dla którego ocenę grupową wyznacza się przy użyciu wektora głosowania w^{k-1}. Metodę tworzenia oceny grupowej dla zbioru k kandydatów wspomnianą we Wprowadzeniu można zapisać w postaci liniowego przekształcenia

$$g_k : \mathcal{S}^{k-1} \to \mathcal{S}^k, \qquad k = 4, \ldots, n \tag{8}$$

Zatem $g_k(w^{k-1})$ jest wektorem głosowania odpowiadającym zbiorowi k kandydatów [4]

$$g_k(w^{k-1}) = g_k\left(\sum_{j=1}^{k-2} \lambda_j^{k-1} v_j^{k-1}\right) = \sum_{j=1}^{k-2} \lambda_j^{k-1} g_k(v_j^{k-1}) \tag{9}$$

Zależność (9) określa klasę wektorów głosowania odpowiadających zbiorowi k kandydatów, które można przedstawić w postaci

$$w^k = \sum_{j=1}^{k-2} \lambda_j^{k-1} g_k(v_j^{k-1}), \quad \sum_{j=1}^{k-2} \lambda_j^{k-1} = 1 \tag{10}$$

Przestrzeń wszystkich wektorów głosowania, które można przedstawić w postaci (10) oznaczymy przez $\mathscr{D}^k$. Przestrzeń ta jest rozpięta przez wektory u_j^k o postaci [4]

$$u_j^k = g_k(v_j^{k-1}) = \frac{1}{k-1}\Big(\underbrace{k-1}_{\text{pozycja 1}}, \ldots, \underbrace{k-1}_{\text{pozycja j}}, \underbrace{j}_{\text{pozycja j+1}}, 0, \ldots, \underbrace{0}_{\text{pozycja k}}\Big) = (1, \ldots, 1, \frac{j}{k-1}, 0, \ldots, 0) \qquad (11)$$

$$j = 1, \ldots, k-2$$

Metodę, której zastosowania przedstawiono w Przykładach 1 i 2, można opisać za pomocą następującego schematu:

1. Dany jest wektor głosowania w^k dla k kandydatów
2. Aby wyznaczyć wektor głosowania odpowiadający zbiorowi (k+s) kandydatów należy określić wektor głosowania o postaci $g_{k+s}\ldots(g_{k+2}(g_{k+1}(w^k)))$, k=3, ..., n.

W przykładach podanych poniżej przedstawiamy szczegółowy tok postępowania związany z zastosowaniem omawianej metody.

Przykład 3.

Załóżmy, że chcemy utworzyć wektor głosowania dla rozszerzonego (tzn. powiększonego o jeden) zbioru kandydatów przy użyciu znormalizowanego wektora głosowania $v_2^3 = (1, 1, 0)$. W tym celu tworzymy wektor u_2^4.

Zgodnie z (11) mamy (dla k=4)

$$u_2^4 = (1, 1, \frac{2}{3}, 0) \qquad (12)$$

Na podstawie (7) wektor (12) można zapisać w postaci

$$u_2^4 = \lambda_1^4 v_1^4 + \lambda_2^4 v_2^4 + \lambda_3^4 v_3^4, \qquad \sum_{t=1}^{3} \lambda_t^4 = 1 \qquad (13)$$

gdzie, zgodnie z (1)

$$v_1^4 = (1, 0, 0, 0) \qquad v_2^4 = (1, 1, 0, 0) \qquad v_3^4 = (1, 1, 1, 0) \tag{14}$$

Podstawiając zależność (14) do (13) otrzymujemy

$$u_2^4 = (\lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_3^4, \lambda_2^4 + \lambda_3^4, \lambda_3^4, 0) \tag{15}$$

skąd, porównując (12) i (13) mamy

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i^4 = 1, \qquad \lambda_2^4 + \lambda_3^4 = 1, \quad \lambda_3^4 = \frac{2}{3} \tag{16}$$

W rezultacie otrzymujemy

$$\lambda_1^4 = 0, \quad \lambda_2^4 = 1 - \lambda_3^4 = \frac{1}{3} \quad \text{oraz} \quad \lambda_3^4 = \frac{2}{3} \tag{17}$$

Wektor u_2^4 (13) można więc zapisać następująco

$$u_2^4 = \frac{1}{3} v_2^4 + \frac{2}{3} v_3^4 \tag{18}$$

Aby zastosować znormalizowany wektor głosowania v_2^3 do rozszerzonego (k=5) zbioru obiektów należy posłużyć się operatorem $g_5(w^4)$.

Zgodnie z zależnością (9) mamy

$$w^5 = g_5(w^4) = g_5\left(\frac{1}{3} v_2^4 + \frac{2}{3} v_3^4\right) = \frac{1}{3} g_5(v_2^4) + \frac{2}{3} g_5(v_3^4) \tag{19}$$

Na podstawie (11) mamy

$$u_2^5 = g_5(v_2^4) = \frac{1}{4}(4, 4, 2, 0, 0) = \left(1, 1, \frac{2}{4}, 0, 0\right) \tag{20}$$

oraz

$$u_3^5 = g_5(v_3^4) = \frac{1}{4}(4, 4, 4, 3, 0) = \left(1, 1, 1, \frac{3}{4}, 0\right) \tag{21}$$

Ostatecznie zależność (19) przyjmuje postać

$$w^5 = g_5(w^4) = \frac{1}{3}u_2^5 + \frac{2}{3}u_3^5 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{12}, 0, 0\right) + \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{6}{12}, 0\right) = \left(1, 1, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, 0\right) \tag{22}$$

Wynik ten jest zgodny z zależnością (4) otrzymaną na podstawie bezpośredniego zliczania głosów.

Przykład 4.

Przyjmiemy, że należy zastosować znormalizowany wektor głosowania v_2^3 do rozszerzonego (k=6) zbioru obiektów.

Zgodnie z (22) oraz (1) mamy

$$w^5 = \left(1, 1, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, 0\right) = \lambda_1^5 v_1^5 + \lambda_2^5 v_2^5 + \lambda_3^5 v_3^5 + \lambda_4^5 v_4^5, \qquad \sum_{i=1}^{4} \lambda_i^5 = 1 \tag{23}$$

gdzie

$$v_1^5 = (1, 0, 0, 0, 0), \qquad v_2^5 = (1, 1, 0, 0, 0), \qquad v_3^5 = (1, 1, 1, 0, 0), \qquad v_4^5 = (1, 1, 1, 1, 0) \tag{24}$$

Podstawiając zależność (24) do wzoru (23) otrzymujemy

$$w^5 = (\lambda_1^5 + \lambda_2^5 + \lambda_3^5 + \lambda_4^5, \lambda_2^5 + \lambda_3^5 + \lambda_4^5, \lambda_3^5 + \lambda_4^5, \lambda_4^5, 0) \tag{25}$$

skąd, na podstawie (23) i (24), mamy

$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i^5 = 1, \qquad \lambda_2^5 + \lambda_3^5 + \lambda_4^5 = 1, \qquad \lambda_3^5 + \lambda_4^5 = \frac{5}{6}, \quad \lambda_4^5 = \frac{3}{6} \tag{26}$$

W rezultacie otrzymujemy $\lambda_1^5 = 0, \quad \lambda_2^5 = \frac{1}{6}, \quad \lambda_3^5 = \frac{2}{6}, \quad \lambda_4^5 = \frac{3}{6}$.

Wektor głosowania w^5 można więc zapisać jak następuje

$$w^5 = \lambda_2^5 v_2^5 + \lambda_3^5 v_3^5 + \lambda_4^5 v_4^5 = \frac{1}{6} v_2^5 + \frac{2}{6} v_3^5 + \frac{3}{6} v_4^5 \tag{27}$$

Aby zastosować znormalizowany wektor głosowania v_2^3 do rozszerzonego (k=6) zbioru obiektów, należy posłużyć się operatorem $g_6(w^5)$.

Zgodnie z (9) mamy

$$w^6 = g_6(w^5) = g_6\left(\frac{1}{6}v_2^5 + \frac{2}{6}v_3^5 + \frac{3}{6}v_4^5\right) = \frac{1}{6}g_6(v_2^5) + \frac{2}{6}g_6(v_3^5) + \frac{3}{6}g_6(v_4^5) = \frac{1}{6}u_2^6 + \frac{2}{6}u_3^6 + \frac{3}{6}u_4^6 \quad (28)$$

gdzie zgodnie z (11) mamy

$$u_2^6 = (1, 1, \frac{2}{5}, 0, 0, 0); \quad u_3^6 = (1, 1, 1, \frac{3}{5}, 0, 0); \quad u_4^6 = (1, 1, 1, 1, \frac{4}{5}, 0); \quad (29)$$

Podstawiając zależność (29) do wzoru (28) otrzymujemy

$$\begin{aligned} w^6 = g_6(w^5) &= \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{30}, 0, 0, 0\right) + \left(\frac{2}{6}, \frac{2}{6}, \frac{2}{6}, \frac{6}{30}, 0, 0\right) + \left(\frac{3}{6}, \frac{3}{6}, \frac{3}{6}, \frac{3}{6}, \frac{12}{30}, 0\right) \\ &= \left(1, 1, \frac{9}{10}, \frac{7}{10}, \frac{4}{10}, 0\right) \end{aligned} \quad (30)$$

Wynik ten pokrywa się z wzorem (6) uzyskanym w rezultacie bezpośredniego zliczania głosów.

2. Przypadek ogólny

Załóżmy, że dany jest wektor u_ℓ^k o postaci

$$u_\ell^k = \Big(\underset{\text{pozycja } 1}{1}, \ldots, \underset{\text{pozycja } \ell}{1}, \frac{\ell}{k-1}, 0, \ldots, \underset{\text{pozycja } k}{0}\Big) = \left(1, \ldots, 1, \vartheta_{\ell+1}^k, 0, \ldots, 0\right), \quad \ell = 1, \ldots, k-2 \quad (31)$$

Aby zastosować ten wektor do rozszerzonego zbioru (k+1) obiektów, zastosujemy procedurę przedstawioną w poprzednich rozważaniach. W tym celu przyjmiemy, że

$$u_\ell^k = \sum_{t=1}^{k-1} \lambda_t^k v_t^k, \quad \text{gdzie} \quad \sum_{t=1}^{k-1} \lambda_t^k = 1 \quad (32)$$

Z porównania wzorów (31) i (32) otrzymujemy

$$\sum_{t=1}^{k-1} \lambda_t^k = 1, \ldots, \quad \sum_{t=\ell}^{k-1} \lambda_t^k = 1, \quad \sum_{t=\ell+1}^{k-1} \lambda_t^k = \vartheta_{\ell+1}^k, \quad \sum_{t=\ell+2}^{k-1} \lambda_t^k = 0, \ldots, \quad \lambda_{k-1}^k = 0, \tag{33}$$

gdzie $\vartheta_{\ell+1}^k = \dfrac{\ell}{k-1}$.

Z analizy wzorów (33) otrzymujemy

$$\lambda_{k-1}^k = \ldots = \lambda_{\ell+2}^k = 0 \tag{34}$$

$$\sum_{t=\ell+1}^{k-1} \lambda_t^k = \lambda_{\ell+1}^k + \sum_{t=\ell+2}^{k-1} \lambda_t^k = \lambda_{\ell+1}^k = \vartheta_{\ell+1}^k \tag{35}$$

$$\sum_{t=\ell}^{k-1} \lambda_t^k = \lambda_\ell^k + \lambda_{\ell+1}^k + \sum_{t=\ell+2}^{k-1} \lambda_t^k = \lambda_\ell^k + \lambda_{\ell+1}^k = 1 \tag{36}$$

$$\lambda_1^k = \ldots = \lambda_{\ell-1}^k = 0, \text{ bowiem } \sum_{t=1}^{k-1} \lambda_t^k = 1. \tag{37}$$

Zależności (35) i (36) można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_\ell^k \\ \lambda_{\ell+1}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vartheta_{\ell+1}^k \end{bmatrix} \tag{38}$$

Wiadomo, że

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{39}$$

czyli
$$\begin{bmatrix} \lambda_\ell^k \\ \lambda_{\ell+1}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vartheta_{\ell+1}^k \end{bmatrix} \tag{40}$$

Z zależności (34) - (37) wynika, że

$$u_\ell^k = \lambda_\ell^k v_\ell^k + \lambda_{\ell+1}^k v_{\ell+1}^k \tag{41}$$

gdzie v_ℓ^k oraz $v_{\ell+1}^k$ spełniają równanie (40).

Aby zastosować wektor (31) do rozszerzonego zbioru (k+1) obiektów, należy wyznaczyć wektor $g_{k+1}(u_\ell^k)$. Na podstawie (41) mamy

$$\begin{aligned} g_{k+1}(u_\ell^k) &= g_{k+1}(\lambda_\ell^k v_\ell^k + \lambda_{\ell+1}^k v_{\ell+1}^k) = \lambda_\ell^k g_{k+1}(v_\ell^k) + \lambda_{\ell+1}^k g_{k+1}(v_{\ell+1}^k) \\ &= \lambda_\ell^k u_\ell^{k+1} + \lambda_{\ell+1}^k u_{\ell+1}^{k+1} = \lambda_\ell^k\left(1, \ldots, \underset{\text{pozycja } \ell}{1}, \frac{\ell+1}{k}, 0, \ldots, 0\right) \end{aligned} \tag{42}$$

Biorąc pod uwagę, że $\lambda_\ell^k + \lambda_{\ell+1}^k = 1$ (36) mamy

$$g_{k+1}(u_\ell^k) = \left(1, \ldots, \underset{\text{pozycja } \ell}{1}, \lambda_\ell^k \frac{\ell}{k} + \lambda_{\ell+1}^k, \lambda_{\ell+1}^k \frac{\ell+1}{k}, 0, \ldots, 0\right) \tag{43}$$

Z równania (40) wynika, że $\lambda_\ell^k = 1 - \vartheta_{\ell+1}^k$ oraz $\lambda_{\ell+1}^k = \vartheta_{\ell+1}^k$. Zatem

$$\begin{aligned} g_{k+1}(u_\ell^k) &= \left(1, \ldots, \underset{\text{pozycja } \ell}{1}, (1-\vartheta_{\ell+1}^k)\frac{\ell}{k} + \vartheta_{\ell+1}^k, \vartheta_{\ell+1}^k \frac{\ell+1}{k}, 0, \ldots, 0\right) = \\ &= \left(1, \ldots, \underset{\text{pozycja } \ell}{1}, \underset{\text{pozycja } \ell+1}{\frac{\ell}{k} + \vartheta_{\ell+1}^k\left(1-\frac{\ell}{k}\right)}, \underset{\text{pozycja } \ell+2}{\vartheta_{\ell+1}^k \frac{\ell+1}{k}}, 0, \ldots, 0\right) \end{aligned} \tag{44}$$

Dla $\ell=2$, k=4 mamy więc

$$\frac{\ell}{k} + \vartheta_{\ell+1}^k\left(1-\frac{\ell}{k}\right) = \frac{\ell}{k} + \frac{\ell}{k-1}\left(1-\frac{\ell}{k}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{6} \tag{45}$$

$$\vartheta_{\ell+1}^k \frac{\ell+1}{k} = \frac{\ell}{k-1}\cdot\frac{\ell+1}{k} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \tag{46}$$

$$\text{Zatem } g_5(u_2^4) = \left(1, 1, \frac{5}{6}, \frac{3}{6}, 0\right) \tag{47}$$

Wyrażenie (47) ma tę samą postać, co (22).

Przedstawiony sposób rozszerzania zbiorów kandydatów metodą rekurencyjnego stosowania wektorów głosowania określonych dla zbioru o mniejszej liczbie kandydatów pozwala na uogólnienie rozpatrywanego zagadnienia.

Załóżmy, że jest dany wektor o postaci

$$u_{\ell}^{k+s} = \Big(1, \ldots, \underset{\text{pozycja } \ell}{1}, \vartheta_{\ell+1}^{k+s}, \vartheta_{\ell+2}^{k+s}, \ldots, \vartheta_{\ell+s}^{k+s}, 0, \ldots, 0\Big) \tag{48}$$

Na podstawie poprzednich rozważań można przyjąć, że wektor ten można zapisać następująco[1]

$$u_{\ell}^{k+s} = \lambda_{\ell}^{k+s} v_{\ell}^{k+s} + \ldots + \lambda_{\ell+s+1}^{k+s} v_{\ell+s+1}^{k+s} = \sum_{t=\ell}^{\ell+s+1} \lambda_t^{k+s} v_t^{k+s} \tag{49}$$

Z porównania zależności (48) i (49) otrzymujemy

$$\sum_{t=\ell}^{\ell+s+1} \lambda_t^{k+s} = 1, \quad \sum_{t=\ell+1}^{\ell+s+1} \lambda_t^{k+s} = \vartheta_{\ell+1}^{k+s}, \ldots, \lambda_{\ell+s+1}^{k+s} = \vartheta_{\ell+s+1}^{k+s} \tag{50}$$

Zależność (50) można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{\ell+1}^{k+s} \\ \lambda_{\ell+2}^{k+s} \\ \vdots \\ \lambda_{\ell+s}^{k+s} \\ \lambda_{\ell+s+1}^{k+s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vartheta_{\ell+1}^{k+s} \\ \vartheta_{\ell+2}^{k+s} \\ \vdots \\ \vartheta_{\ell+s}^{k+s} \\ \vartheta_{\ell+s+1}^{k+s} \end{bmatrix} \tag{51}$$

Wiadomo, że macierz odwrotna do macierzy trójkątnej o elementach jednostkowych ma postać

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{52}$$

[1] Ogólna postać wektora u_{ℓ}^{k+s} jest, jak następuje $u_{\ell}^{k+s} = \sum_{t=s}^{k+s11} \lambda_t^{k+s} v_t^{k+s}$. Z porównania tej zależności z (48) wynika $\lambda_{\ell+s+1}^{k+s} = \ldots = \lambda_{k+s-1}^{k+s} = 0$ lub $\sum_{t=\ell+s+2}^{k+s-1} \lambda_t^{k+s} = 0$. Ponadto $\sum_{t=\ell}^{k+s-1} \lambda_t^{k+s} = 1$. Stąd $\sum_{t=1}^{k+s-1} \lambda_t^{k+s} = 1, \ldots, \sum_{t=\ell-1}^{k+s-1} \lambda_t^{k+s} = 1$. co oznacza, że
$\lambda_1^{k+s} = \ldots = \lambda_{\ell-1}^{k+s} = 0$, wynik ten uzasadnia zależność (49).

Równanie (51) można zatem zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} \lambda_{\ell+1}^{k+s} \\ \lambda_{\ell+2}^{k+s} \\ \vdots \\ \lambda_{\ell+s}^{k+s} \\ \lambda_{\ell+s+1}^{k+s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_{\ell+1}^{k+s} \\ \vartheta_{\ell+2}^{k+s} \\ \vdots \\ \vartheta_{\ell+s}^{k+s} \\ \vartheta_{\ell+s+1}^{k+s} \end{bmatrix} \tag{53}$$

oraz $\sum_{i=\ell}^{\ell+s+1} \lambda_i^{k+s} = 1$ (54)

Z równania (53) wynika

$$\begin{aligned} \lambda_{\ell+1}^{k+s} &= \vartheta_{\ell+1}^{k+s} - \vartheta_{\ell+2}^{k+s}, \\ \lambda_{\ell+2}^{k+s} &= \vartheta_{\ell+2}^{k+s} - \vartheta_{\ell+3}^{k+s}, \\ &\vdots \\ \lambda_{\ell+s-1}^{k+s} &= \vartheta_{\ell+s-1}^{k+s} - \vartheta_{\ell+s}^{k+s}, \\ \lambda_{\ell+s}^{k+s} &= \vartheta_{\ell+s}^{k+s} - \vartheta_{\ell+s+1}^{k+s} \\ \lambda_{\ell+s+1}^{k+s} &= \vartheta_{\ell+s+1}^{k+s} \end{aligned} \tag{55}$$

A zatem biorąc pod uwagę równanie (54) otrzymujemy

$$\sum_{i=\ell}^{\ell+s+1} \lambda_i^{k+s} = \vartheta_{\ell+1}^{k+s} + \lambda_\ell^{k+s} = 1 \tag{56}$$

stąd $\lambda_\ell^{k+s} = 1 - \vartheta_{\ell+1}^{k+s}$ (57)

Aby zastosować wektor u_ℓ^{k+s} do rozszerzonego zbioru (k+s+1) kandydatów, należy zastosować operator $g_{(k+s)+1}$.

$$\begin{aligned} g_{(k+s)+1}(u_\ell^{k+s}) &= \lambda_\ell^{k+s} g_{(k+s)+1}(v_\ell^{k+s}) + \ldots + \lambda_{\ell+s+1}^{k+s} g_{(k+s)+1}(v_{\ell+s+1}^{k+s}) \\ &= \lambda_\ell^{k+s} u_\ell^{k+s+1} + \ldots + \lambda_{\ell+s+1}^{k+s} u_{\ell+s+1}^{k+s+1} \end{aligned} \tag{58}$$

Wektory $u_\ell^{k+s+1}, \ldots, u_{\ell+s+1}^{k+s+1}$ mają postać

$$u_\ell^{k+s+1} = \left(1, \ldots, \underset{\ell\text{-ta pozycja}}{1}, \frac{\ell}{k+1}, 0, \ldots, 0 \right) \tag{59}$$

$\vdots$

$$u_{\ell+s+1}^{k+s+1} = \left(1, \ldots, \underset{\ell\text{-ta pozycja}}{1}, \ldots, 1, \underset{\text{pozycja } (\ell+s)+1}{\frac{\ell+s}{k+s}}, 0, \ldots, 0 \right) \tag{60}$$

A zatem wektor $g_{k+s+1}(u_\ell^{k+s})$ jest jak następuje

$$g_{k+s+1}(u_\ell^{k+s}) = (1, \ldots, 1, \vartheta_{\ell+1}^{k+s+1}, \ldots, \vartheta_{\ell+s}^{k+s+1}, \vartheta_{\ell+s+1}^{k+s+1}, 0, \ldots, 0) \tag{61}$$

gdzie

$$\vartheta_{\ell+1}^{k+s+1} = \lambda_\ell^{k+s}\frac{\ell}{k+s} + \lambda_{\ell+1}^{k+s} + \ldots + \lambda_{\ell+s}^{k+s} = \lambda_\ell^{k+s}\frac{\ell}{k+s} + \sum_{t=\ell+1}^{\ell+s}\lambda_t^{k+s} \tag{62}$$

$$\vartheta_{\ell+2}^{k+s+1} = \lambda_{\ell+1}^{k+s}\frac{\ell+1}{k+s} + \lambda_{\ell+2}^{k+s} + \ldots + \lambda_{\ell+s}^{k+s} = \lambda_{\ell+1}^{k+s}\frac{\ell+1}{k+s} + \sum_{t=\ell+2}^{\ell+s}\lambda_t^{k+s} \tag{63}$$

$\vdots$

$$\vartheta_{\ell+s+1}^{k+s+1} = \lambda_{\ell+s}^{k+s}\frac{\ell+s}{k+s} + \lambda_{\ell+s}^{k+s} \tag{64}$$

$$\vartheta_{\ell+s+2}^{k+s+1} = \lambda_{\ell+s+1}^{k+s}\frac{\ell+s+1}{k+s} \tag{65}$$

Uwzględniając zależności (55) otrzymujemy

$$\vartheta_{\ell+1}^{k+s+1} = \lambda_\ell^{k+s}\frac{\ell}{k+s} + \vartheta_{\ell+1}^{k+s} \tag{66}$$

$$\vartheta_{\ell+2}^{k+s+1} = \lambda_{\ell+1}^{k+s}\frac{\ell+1}{k+s} + \vartheta_{\ell+2}^{k+s} \tag{67}$$

$\vdots$

$$\vartheta_{\ell+s+1}^{k+s+1} = \lambda_{\ell+s}^{k+s}\frac{\ell+s}{k+s} + \vartheta_{\ell+s+1}^{k+s} \tag{68}$$

$$\vartheta_{\ell+s+2}^{k+s+1} = \lambda_{\ell+s+1}^{k+s}\frac{\ell+s+1}{k+s} \tag{69}$$

Podstawiając zależności (66)- (69) do wzorów (55) otrzymujemy

$$\vartheta_{\ell+1}^{k+s+1} = (1-\vartheta_{\ell+1}^{k+s})\frac{\ell}{k+s} + \vartheta_{\ell+1}^{k+s} = \frac{\ell}{k+s} + \vartheta_{\ell+1}^{k+s}\left(1-\frac{\ell}{k+s}\right) \tag{70}$$

$$\vartheta_{\ell+2}^{k+s+1} = (\vartheta_{\ell+1}^{k+s} - \vartheta_{\ell+2}^{k+s})\frac{\ell+1}{k+s} + \vartheta_{\ell+2}^{k+s} = \vartheta_{\ell+1}^{k+s}\frac{\ell+1}{k+s} + \vartheta_{\ell+2}^{k+s}\left(1-\frac{\ell+1}{k+s}\right) \tag{71}$$

$\vdots$

$$\vartheta_{\ell+s+1}^{k+s+1} = (\vartheta_{\ell+s}^{k+s} - \vartheta_{\ell+s+1}^{k+s})\frac{\ell+s}{k+s} + \vartheta_{\ell+s+1}^{k+s} = \vartheta_{\ell+s}^{k+s}\frac{\ell+s}{k+s} + \vartheta_{\ell+s+1}^{k+s}\left(1-\frac{\ell+s}{k+s}\right) \tag{72}$$

$$\vartheta_{\ell+s+2}^{k+s+1} = \vartheta_{\ell+s+1}^{k+s}\frac{\ell+s+1}{k+s} \tag{73}$$

Mamy zatem dla:

(i) s=0

$$\vartheta_{\ell+1}^{k+1} = \frac{\ell}{k} + \vartheta_{\ell+1}^{k+0}\left(1 - \frac{\ell}{k}\right) \tag{74}$$

$$\vartheta_{\ell+2}^{k+1} = \vartheta_{\ell+1}^{k+0}\,\frac{\ell+1}{k} \tag{75}$$

(ii) s=1

$$\vartheta_{\ell+1}^{k+2} = \frac{\ell}{k+1} + \vartheta_{\ell+1}^{k+1}\left(1 - \frac{\ell}{k+1}\right) \tag{76}$$

$$\vartheta_{\ell+2}^{k+2} = \vartheta_{\ell+1}^{k+1}\,\frac{\ell+1}{k+1} + \vartheta_{\ell+2}^{k+1}\left(1 - \frac{\ell+1}{k+1}\right) \tag{77}$$

$$\vartheta_{\ell+3}^{k+2} = \vartheta_{\ell+2}^{k+1}\,\frac{\ell+2}{k+1} \tag{78}$$

Uwzględniając zależności (74) i (75) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\vartheta_{\ell+1}^{k+2} &= \frac{\ell}{k+1} + \left[\frac{\ell}{k} + \vartheta_{\ell+1}^{k+0}\left(1 - \frac{\ell}{k}\right)\right]\left(1 - \frac{\ell}{k+1}\right)\\ &= \frac{\ell}{k}\left(1 - \frac{\ell}{k+1}\right) + \frac{\ell}{k+1} + \vartheta_{\ell+1}^{k+0}\left(1 - \frac{\ell}{k}\right)\left(1 - \frac{\ell}{k+1}\right)\end{aligned} \tag{79}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_{\ell+2}^{k+2} &= \left[\frac{\ell}{k} + \vartheta_{\ell+1}^{k+0}\left(1 - \frac{\ell}{k}\right)\right]\frac{\ell+1}{k+1} + \vartheta_{\ell+1}^{k+0}\,\frac{\ell+1}{k}\left(1 - \frac{\ell+1}{k+1}\right)\\ &= \frac{\ell}{k}\cdot\frac{\ell+1}{k+1} + 2\vartheta_{\ell+1}^{k+0}\left[\frac{\ell+1}{k+1}\left(1 - \frac{\ell}{k}\right)\right]\end{aligned} \tag{80}$$

$$\vartheta_{\ell+3}^{k+2} = \vartheta_{\ell+1}^{k+0}\,\frac{\ell+1}{k}\cdot\frac{\ell+2}{k+1} \tag{81}$$

(iii) s=2

$$\vartheta_{\ell+1}^{k+3} = \frac{\ell}{k+2} + \vartheta_{\ell+1}^{k+2}\left(1 - \frac{\ell}{k+2}\right) \tag{82}$$

$$\vartheta_{\ell+2}^{k+3} = \vartheta_{\ell+1}^{k+2}\,\frac{\ell+1}{k+2} + \vartheta_{\ell+2}^{k+2}\left(1 - \frac{\ell+1}{k+2}\right) \tag{83}$$

$$\vartheta_{\ell+3}^{k+3} = \vartheta_{\ell+2}^{k+2}\frac{\ell+2}{k+2} + \vartheta_{\ell+3}^{k+2}\left(1-\frac{\ell+2}{k+2}\right) \tag{84}$$

$$\vartheta_{\ell+4}^{k+3} = \vartheta_{\ell+3}^{k+2}\frac{\ell+3}{k+2} \tag{85}$$

Wykorzystując zależności (79) - (81) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\vartheta_{\ell+1}^{k+3} &= \frac{\ell}{k+2} + \vartheta_{\ell+1}^{k+2}\left(1-\frac{\ell}{k+2}\right) \\
&= \frac{\ell}{k+2} + \left[\frac{\ell}{k}\left(1-\frac{\ell}{k+1}\right) + \frac{\ell}{k+1} + \vartheta_{\ell+1}^{k+0}\left(1-\frac{\ell}{k}\right)\left(1-\frac{\ell}{k+1}\right)\right]\left(1-\frac{\ell}{k+2}\right) \\
&= \frac{\ell}{k}\left(1-\frac{\ell}{k+1}\right)\left(1-\frac{\ell}{k+2}\right) + \frac{\ell}{k+1}\left(1-\frac{\ell}{k+2}\right) + \frac{\ell}{k+2} \\
&+ \vartheta_{\ell+1}^{k+0}\left(1-\frac{\ell}{k}\right)\left(1-\frac{\ell}{k+1}\right)\left(1-\frac{\ell}{k+2}\right)
\end{aligned} \tag{86}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_{\ell+2}^{k+3} &= \vartheta_{\ell+1}^{k+2}\frac{\ell+1}{k+2} + \vartheta_{\ell+2}^{k+2}\left(1-\frac{\ell+1}{k+2}\right) \\
&= \left[\frac{\ell}{k}\left(1-\frac{\ell}{k+1}\right) + \frac{\ell}{k+1} + \vartheta_{\ell+1}^{k+0}\left(1-\frac{\ell}{k}\right)\left(1-\frac{\ell}{k+1}\right)\right]\frac{\ell+1}{k+2} \\
&+ \left[\frac{\ell}{k}\cdot\frac{\ell+1}{k+1} + 2\vartheta_{\ell+1}^{k+0}\left(1-\frac{\ell}{k}\right)\frac{\ell+1}{k+1}\right]\left(1-\frac{\ell+1}{k+2}\right) \\
&= \frac{\ell}{k}\left(1-\frac{\ell}{k+1}\right)\frac{\ell+1}{k+2} + \frac{\ell}{k+1}\cdot\frac{\ell+1}{k+2} + \frac{\ell}{k}\cdot\frac{\ell+1}{k+1}\left(1-\frac{\ell+1}{k+2}\right) \\
&+ \vartheta_{\ell+1}^{k+0}\left[\left(1-\frac{\ell}{k}\right)\left(1-\frac{\ell}{k+1}\right)\frac{\ell+1}{k+2} + 2\left(1-\frac{\ell}{k}\right)\left(1-\frac{\ell+1}{k+2}\right)\frac{\ell+1}{k+1}\right] \\
&= 2\frac{\ell}{k}\left(1-\frac{\ell}{k+1}\right)\frac{\ell+1}{k+2} + \frac{\ell}{k+1}\cdot\frac{\ell+1}{k+2} + 3\vartheta_{\ell+1}^{k+0}\left(1-\frac{\ell}{k}\right)\left(1-\frac{\ell}{k+1}\right)\frac{\ell+1}{k+2}
\end{aligned} \tag{87}$$

$$
\begin{aligned}
\vartheta_{\ell+3}^{k+3} &= \vartheta_{\ell+2}^{k+2}\frac{\ell+2}{k+2}+\vartheta_{\ell+3}^{k+2}\left(1-\frac{\ell+2}{k+2}\right)\\
&=\left[\frac{\ell}{k}\cdot\frac{\ell+1}{k+1}+2\vartheta_{\ell+1}^{k+0}\left(1-\frac{\ell}{k}\right)\frac{\ell+1}{k+1}\right]\frac{\ell+2}{k+2}+\vartheta_{\ell+1}^{k+0}\frac{\ell+1}{k}\cdot\frac{\ell+2}{k+1}\left(1-\frac{\ell+2}{k+2}\right)\\
&=\frac{\ell}{k}\cdot\frac{\ell+1}{k+1}\cdot\frac{\ell+2}{k+2}+\vartheta_{\ell+1}^{k+0}\left[2\left(1-\frac{\ell}{k}\right)\frac{\ell+1}{k+1}\cdot\frac{\ell+2}{k+2}+\frac{\ell+1}{k}\cdot\frac{\ell+2}{k+1}\left(1-\frac{\ell+2}{k+2}\right)\right]\\
&=\frac{\ell}{k}\cdot\frac{\ell+1}{k+1}\cdot\frac{\ell+2}{k+2}+3\vartheta_{\ell+1}^{k+0}\left(1-\frac{\ell}{k}\right)\frac{\ell+1}{k+1}\cdot\frac{\ell+2}{k+2}
\end{aligned}
\tag{88}
$$

Z definicji równań (70) - (73) oraz (74) i (75), (76) - (78), (82) - (85) wynika, że ten ostatni układ równań można zapisać w postaci macierzowej, jak następuje

$$
\begin{bmatrix}\vartheta_{\ell+1}^{k+s+1}\\ \vdots\\ \vdots\\ \vartheta_{\ell+s+2}^{k+s+1}\end{bmatrix}=A_s\cdot A_{s-1}\cdot\ldots\cdot A_2\cdot A_1\cdot A_0\cdot\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\\ \vartheta_{\ell+1}^{k+0}\end{bmatrix}
\tag{89}
$$

gdzie A_t, t=s,..., 0 mają następującą postać

$$
A_s=\begin{bmatrix}
\frac{\ell}{k+s} & 1-\frac{\ell}{k+s} & 0 & \ldots & \ldots & 0\\
0 & \frac{\ell+1}{k+s} & 1-\frac{\ell+1}{k+s} & 0 & \ldots & 0\\
0 & 0 & \frac{\ell+2}{k+s} & 1-\frac{\ell+2}{k+s} & \ldots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\ell+s+1}{k+s}
\end{bmatrix}
$$

$$
A_{s-1}=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\
0 & \frac{\ell}{k+s-1} & 1-\frac{\ell}{k+s-1} & 0 & \ldots & 0\\
0 & 0 & \frac{\ell+1}{k+s-1} & 1-\frac{\ell+1}{k+s-1} & \ldots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\ell+s}{k+s-1}
\end{bmatrix}
$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\ell}{k+2} & 1-\frac{\ell}{k+2} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\ell+1}{k+2} & 1-\frac{\ell+1}{k+2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{\ell+2}{k+2} & 1-\frac{\ell+2}{k+2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\ell+3}{k+2} \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\ell}{k+1} & 1-\frac{\ell}{k+1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\ell+1}{k+1} & 1-\frac{\ell+1}{k+1} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{\ell+2}{k+1} \end{bmatrix} \quad A_0 = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{\ell}{k} & 1-\frac{\ell}{k} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{\ell+1}{k} \end{bmatrix}$$

Z zależności (70) - (73) wynika ponadto, że

$$\sum_{z_1=1}^{s+2} \vartheta^{s+1}_{\ell+z_1} = \frac{\ell}{k+s} + \left(\sum_{z_2=1}^{s+1} \vartheta^{s}_{\ell+z_2} \right) \frac{k+s+1}{k+s} = \frac{\ell}{k+s} + \left(1 + \frac{1}{k+s}\right) \sum_{z_2=1}^{s+1} \vartheta^{s}_{\ell+z_2} \tag{90}$$

Mamy bowiem

$$\begin{aligned} \vartheta^{s}_{\ell+z_2}\left(1 - \frac{\ell+z_1-1}{k+s}\right) + \vartheta^{s}_{\ell+z_2}\left(\frac{\ell+z_1}{k+s}\right) &= \vartheta^{s}_{\ell+z_2}\left(\frac{k+s-\ell-z_1+1+\ell+z_1}{k+s}\right) \\ &= \vartheta^{s}_{\ell+z_2}\left(\frac{k+s+1}{k+s}\right) = \vartheta^{s}_{\ell+z_2}\left(1+\frac{1}{k+s}\right) \end{aligned} \tag{91}$$

dla $z_2 = 1, \dots, s+1$.

Zatem

(i) s=0

$$\vartheta^{1}_{\ell+1} + \vartheta^{1}_{\ell+2} = \frac{\ell}{k} + \vartheta^{0}_{\ell+1}\frac{k+1}{k} = \frac{\ell}{k} + \left(1+\frac{1}{k}\right)\vartheta^{0}_{\ell+1} \tag{92}$$

(ii) s=1

$$\vartheta^2_{\ell+1} + \vartheta^2_{\ell+2} + \vartheta^2_{\ell+3} = \frac{\ell}{k+1} + \frac{k+2}{k+1}\left(\vartheta^1_{\ell+1} + \vartheta^1_{\ell+2}\right) = \frac{\ell}{k+1} + \left(1 + \frac{1}{k}\right)\left(\vartheta^1_{\ell+1} + \vartheta^1_{\ell+2}\right) \tag{93}$$

(iii) s=2

$$\vartheta^3_{\ell+1} + \vartheta^3_{\ell+2} + \vartheta^3_{\ell+3} + \vartheta^3_{\ell+4} = \frac{\ell}{k+2} + \left(1 + \frac{k}{k+2}\right)\left(\vartheta^2_{\ell+1} + \vartheta^2_{\ell+2} + \vartheta^2_{\ell+3}\right) \tag{94}$$

Mamy również

$$\begin{aligned}\sum_{z_1=1}^{s+2} \vartheta^{s+1}_{\ell+z_1} &= \frac{\ell}{k+s} + \left(1 + \frac{1}{k+s}\right)\left(\sum_{z_2=1}^{s+1} \vartheta^{s}_{\ell+z_2}\right) \\ &= \frac{\ell}{k+s} + \left(1 + \frac{1}{k+s}\right)\left[\frac{\ell}{k+s-1} + \left(1 + \frac{1}{k+s-1}\right)\sum_{z_3=1}^{s} \vartheta^{s-1}_{\ell+z_3}\right] \\ &= \frac{\ell}{k+s} + \frac{\ell}{k+s-1}\left(1 + \frac{1}{k+s}\right) + \left(1 + \frac{1}{k+s}\right)\left(1 + \frac{1}{k+s-1}\right)\sum_{z_3=1}^{s} \vartheta^{s-1}_{\ell+z_3}\end{aligned} \tag{95}$$

W przypadku ogólnym mamy

$$\sum_{z_1=1}^{s+2} \vartheta^{s+1}_{\ell+z_1} = \frac{\ell}{k+s} + \sum_{\rho=1}^{s} \frac{\ell}{k+s-\rho} \prod_{\alpha=s-(\rho-1)}^{s} \left(1 + \frac{1}{k+\alpha}\right) + \prod_{\alpha=0}^{s}\left(1 + \frac{1}{k+\alpha}\right)\vartheta^0_{\ell+1} \tag{96}$$

dla s=1 mamy

$$\sum_{z_1=1}^{3} \vartheta^{2}_{\ell+z_1} = \frac{\ell}{k+1} + \frac{\ell}{k}\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) + \left(1 + \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)\vartheta^0_{\ell+1} \tag{97}$$

dla s=2 mamy

$$\begin{aligned}\sum_{z_1=1}^{4} \vartheta^{3}_{\ell+z_1} &= \frac{\ell}{k+2} + \sum_{\rho=1}^{2} \frac{\ell}{k+2-\rho} \prod_{\alpha=2-(\rho-1)}^{2} \left(1 + \frac{1}{k+\alpha}\right) + \prod_{\alpha=0}^{2}\left(1 + \frac{1}{k+\alpha}\right)\vartheta^0_{\ell+1} \\ &= \frac{\ell}{k+2} + \frac{\ell}{k+1}\left(1 + \frac{1}{k+2}\right) + \frac{\ell}{k}\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)\left(1 + \frac{1}{k+2}\right) \\ &+ \left(1 + \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)\left(1 + \frac{1}{k+2}\right)\vartheta^0_{\ell+1}\end{aligned} \tag{98}$$

dla s=3 mamy

$$\sum_{z_1=1}^{5}\vartheta^4_{\ell+z_1}=\frac{\ell}{k+3}+\sum_{\rho=1}^{3}\frac{\ell}{k+3-\rho}\prod_{\alpha=3-(\rho-1)}^{3}\left(1+\frac{1}{k+\alpha}\right)+\prod_{\alpha=0}^{3}\left(1+\frac{1}{k+\alpha}\right)\vartheta^0_{\ell+1}$$
$$=\frac{\ell}{k+3}+\frac{\ell}{k+2}\left(1+\frac{1}{k+3}\right)+\frac{\ell}{k+1}\left(1+\frac{1}{k+2}\right)\left(1+\frac{1}{k+3}\right)$$
$$+\frac{\ell}{k}\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\left(1+\frac{1}{k+2}\right)\left(1+\frac{1}{k+3}\right)$$
$$+\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\left(1+\frac{1}{k+2}\right)\left(1+\frac{1}{k+3}\right)\vartheta^0_{\ell+1} \tag{99}$$

Przykład 5

Wyznaczymy iloczyn macierzy odpowiadających s=0 oraz s=1 (oznaczymy go $A^{1,0}$). Zgodnie z (89) mamy

$$A^{1,0}=A_1\cdot A_0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{\ell}{k+1}&\left(1-\frac{1}{k+1}\right)&0\\0&0&\frac{\ell+1}{k+1}&1-\frac{\ell+1}{k+1}\\0&0&0&\frac{\ell+2}{k+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{\ell}{k}&1-\frac{\ell}{k}\\0&0&0&\frac{\ell+1}{k}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{\ell}{k+1}&\frac{\ell}{k}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)&\left(1-\frac{\ell}{k}\right)\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\\0&0&\frac{\ell}{k}\frac{\ell+1}{k+1}&2\left(1-\frac{\ell}{k}\right)\frac{\ell+1}{k+1}\\0&0&0&\frac{\ell+1}{k}\frac{\ell+2}{k+1}\end{bmatrix}$$

suma wierszy w kolumnie

$$1\qquad\frac{\ell}{k+1}\qquad\frac{\ell}{k}\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\qquad\frac{\ell+1}{k}\frac{\ell+2}{k+1} \tag{100}$$

Oznaczając przez $a^{(1,0)}_{ij}$ elementy macierzy (100), gdzie i – numer wiersza, j – numer kolumny otrzymujemy

$$a)\sum_{i=1}^{4}a^{(1,0)}_{i1}=1;\qquad b)\sum_{i=1}^{4}a^{(1,0)}_{i2}=\frac{\ell}{k+1};\qquad c)\sum_{i=1}^{4}a^{(1,0)}_{i3}=\frac{\ell}{k}\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$$
$$d)\sum_{i=1}^{4}a^{(1,0)}_{i4}=\left(1-\frac{\ell}{k}\right)\left[\left(1-\frac{\ell}{k+1}\right)+\frac{\ell+1}{k+1}\right]+\frac{\ell+1}{k+1}\left[\left(1-\frac{\ell}{k}\right)+\frac{\ell+2}{k}\right]=\left(1-\frac{\ell}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right) \tag{101}$$
$$+\frac{\ell+1}{k}\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\left[\left(1-\frac{\ell}{k}\right)+\frac{\ell+1}{k}\right]=\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$$

Zatem suma wierszy ostatniej kolumny nie zależy od ℓ.

Przykład 6

Wyznaczymy iloczyn macierzy odpowiadającej s=2 oraz macierzy $A^{1,0}$ i oznaczymy go $A^{2,0}$.

$$
A^{2,0}=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{\ell}{k+2} & 1-\frac{\ell}{k+2} & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{\ell+1}{k+2} & 1-\frac{\ell+1}{k+2} & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{\ell+2}{k+2} & 1-\frac{\ell+2}{k+2}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\ell+3}{k+2}
\end{bmatrix} A^{1,0} =
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{\ell}{k+2} & \frac{\ell}{k+1}\left(1-\frac{\ell}{k+2}\right) & \frac{\ell}{k}\left(1-\frac{\ell}{k+1}\right)\left(1-\frac{\ell}{k+2}\right) & \left(1-\frac{\ell}{k}\right)\left(1-\frac{\ell}{k+1}\right)\left(1-\frac{\ell}{k+2}\right)\\
0 & 0 & \frac{\ell}{k+1}\cdot\frac{\ell+1}{k+2} & 2\frac{\ell}{k}\left(1-\frac{\ell}{k+1}\right)\frac{\ell+1}{k+2} & 3\left(1-\frac{\ell}{k}\right)\left(1-\frac{\ell}{k+1}\right)\frac{\ell+1}{k+2}\\
0 & 0 & 0 & \frac{\ell}{k}\cdot\frac{\ell+1}{k+1}\cdot\frac{\ell+2}{k+2} & 3\left(1-\frac{\ell}{k}\right)\cdot\frac{\ell+1}{k+1}\cdot\frac{\ell+2}{k+2}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\ell+1}{k}\cdot\frac{\ell+2}{k+1}\cdot\frac{\ell+3}{k+2}
\end{bmatrix}
$$

suma wierszy w kolumnie

$$
1 \quad \frac{\ell}{k+2} \quad \frac{\ell}{k+1}\left(1+\frac{1}{k+2}\right) \quad \frac{\ell}{k}\left(1+\frac{\ell}{k+1}\right)\left(1+\frac{\ell}{k+2}\right) \quad \left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\left(1+\frac{1}{k+2}\right) \tag{102}
$$

Z postaci macierzy (102) bezpośrednio wynika, że

$$
a)\sum_{i=1}^{5} a_{i1}^{(2,0)} = 1; \qquad b)\sum_{i=1}^{5} a_{i2}^{(2,0)} = \frac{\ell}{k+2}; \qquad c)\sum_{i=1}^{5} a_{i3}^{(2,0)} = \frac{\ell}{k+1}\left(1+\frac{1}{k+2}\right)
$$

$$
d)\sum_{i=1}^{5} a_{i4}^{(2,0)} = \frac{\ell}{k}\left(1-\frac{\ell}{k+1}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)+\frac{\ell}{k}\cdot\frac{\ell+1}{k+1}\left[1+\frac{2}{k}\right]=\frac{\ell}{k}\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\left(1+\frac{1}{k+2}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
e)\sum_{i=1}^{5} a_{i5}^{(2,0)} &= \left(1-\frac{\ell}{k}\right)\left(1-\frac{\ell}{k+1}\right)\left(1+\frac{1}{k+2}\right)+2\left(1-\frac{\ell}{k}\right)\cdot\frac{\ell+1}{k+2}\left(1+\frac{2}{k+1}\right)+\frac{\ell+1}{k+1}\cdot\frac{\ell+2}{k+2}\left(1+\frac{3}{k}\right)\\
&=\left(1-\frac{\ell}{k}\right)\left(1-\frac{\ell}{k+1}\right)\left(1+\frac{1}{k+2}\right)+2\left(1-\frac{\ell}{k}\right)\cdot\frac{\ell+1}{k+1}\left(1+\frac{1}{k+2}\right)+\frac{\ell+1}{k}\cdot\frac{\ell+2}{k+1}\left(1+\frac{1}{k+2}\right)\\
&=\left(1-\frac{\ell}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+2}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)+\frac{\ell+1}{k+1}\left(1+\frac{1}{k+2}\right)\left(1+\frac{2}{k}\right)\\
&=\left(1-\frac{\ell}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+2}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)+\frac{\ell+1}{k}\left(1+\frac{1}{k+2}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{k+2}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)
\end{aligned}
$$

A zatem suma wierszy w ostatniej kolumnie nie zależy od ℓ.

Literatura

1. Bury H., Wagner D.: The Influence of a Change of the Number of Alternatives on a Group Judgement in Positional Methods
2. Gradsztejn I.S., Ryżik I.M. (1963) *Tablicy intiegralow, sum, riadow i proizwiedienij*. Gossudarstwiennoje Izdatielstwo Fizyko-Matiematiczeskoj Literatury, Moskwa.
3. Nurmi H. (1992) *Voting Paradoxes and How to Deal with Them*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.
4. Saari D.G. (2000b) Mathematical structure of voting paradoxes. II. Positional votes. *Economic Theory*, **15**, 55-102.