Raport Badawczy

Research Report

RB/58/2005

Aktywne zarządzanie portfelem obligacji

A. Jakubowski

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr inż. Roman Kulikowski

Warszawa 2005

Andrzej Jakubowski

Instytut Badań Systemowych PAN
Warszawa

AKTYWNE ZARZĄDZANIE PORTFELEM OBLIGACJI*

Wstęp

Przedmiotem prowadzonych rozważań będzie zagadnienie aktywnego zarządzania inwestycjami na rynku obligacji w warunkach ryzyka nieoczekiwanych zmian stóp procentowych. Pod pojęciem aktywnego zarządzania, rozumie się tu optymalizację portfela obligacji ze względu na maksymalizację oczekiwanej stopy zwrotu z podejmowanych decyzji inwestycyjnych, przy zadanym poziomie ryzyka. Jest to – obok tzw. immunizacji portfela ze względu na ryzyko stóp procentowych – jedno z podstawowych zagadnień dotyczących zarządzania portfelem obligacji w warunkach niepewności.

W pracy, sformułowano model portfelowy zarządzania aktywnego inwestycjami na rynku obligacji, przy upraszczającym założeniu płaskiej struktury terminowej stóp procentowych. Założenie to oznacza, że krótko-, średnio-, i długoterminowe stopy procentowe *spot* (wyznaczane w skali roku) mają tę samą wartość, przy czym możliwe są jedynie równoległe przesunięcia tych stóp w górę lub w dół. Opracowany model zarządzania portfelem obligacji jest odpowiednikiem modelu H. Markowitza sformułowanego dla rynku akcji. Zarys takiego modelu dla rynku obligacji podany w monografii E.J. Eltona i M.J. Grubera (*Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, 1995, 5-th ed.) zawierał szereg błędów, które zostały poprawione.

W kolejnych punktach pracy przedstawiono szczegółowe założenia oraz sformułowano model jednoindeksowy dla rynku obligacji, będący w pewnym sensie odpowiednikiem modelu Sharpe'a rozpatrywanego powszechnie dla

---

* W: T. Trzaskalik (red.), *Modelowanie Preferencji a Ryzyko '05*, Wyd. Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice, 2005 (w druku).

rynku akcji (*single-index model*). Wskazano na podobieństwa i różnice pomiędzy analizowanymi modelami. Przedstawiono również model portfela rynkowego obligacji. Sformułowano opis matematyczny oraz dokonano interpretacji następujących parametrów modelu jednoindeksowego obligacji: spodziewanej stopy zwrotu (*anticipated return*), oczekiwanej stopy zwrotu (*expected return*), nieoczekiwanej stopy zwrotu (*excess return*) oraz wartości oczekiwanej nieoczekiwanej stopy zwrotu (*expected excess return*). Podano również zależność wariancji oraz kowariancji stóp zwrotu od parametrów okresowości (*duration*) analizowanych obligacji.

Niejako w tle głównego nurtu prowadzonych rozważań, przedstawiono w zsyntetyzowanej formie zagadnienie dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych *spot* oraz problem wyceny obligacji. Przedstawiono również skrótowo zagadnienie kwantyfikacji ryzyka stóp procentowych na rynku obligacji, za pomocą parametrów okresowości (*duration*) i wypukłości (*convexity*). Jednym z ważniejszych punktów pracy było wprowadzenie nowego – dotychczas nie rozpatrywanego w literaturze przedmiotu - pojęcia „oczekiwanej okresowości" obligacji (*expected duration*), będącej miarą wrażliwości oczekiwanej wartości przyszłej obligacji na nieoczekiwane zmiany stóp procentowych.

Prezentowane wyniki stanowią pewne istotnie nowe rozwiązania w stosunku do istniejących opracowań z zakresu aktywnego zarządzania portfelem obligacji; por. *Bierwag* (1987), *Ho* (1990), *Zenios* (1993) *Fabozzi, Fong* (1994), *Elton, Gruber* (1995), *Dattarey'a, Fabozzi* (1995), *Fabozzi* (2000). Przedstawiono również dyskusję warunków stosowalności zaproponowanego podejścia w praktyce. Chodzi w tym przypadku o analizę stabilności w czasie parametrów rozpatrywanego modelu. Niektórzy badacze twierdzą, że ze względu na niestabilność tych parametrów, zastosowanie w praktyce klasycznego podejścia Markowitza w odniesieniu do rynku obligacji – nie jest możliwe; *Fabozzi, Fong* (1994). Zdaniem autora niniejszej pracy, stwierdzenie to nie jest w ogólnym przypadku prawdziwe. Zastosowanie zaproponowanej metody zarządzania portfelowego może być szczególnie obiecujące w przypadku obligacji długoterminowych, w którym problemem niestabilności parametrów modelu nie jest tak znaczący.

W zakończeniu pracy, omówiono skrótowo wyniki dalszych badań autora dotyczące uogólnienia zaproponowanego modelu na przypadek krzywej dochodowości o dowolnym kształcie, w których przyjęto, że dynamika zmian tej krzywej jest ograniczona do proporcjonalnych zmian poziomu analizowanych stóp procentowych *spot; Jakubowski* (2004). W celu opracowania modelu portfelowego dla powyższego przypadku, dokonano uogólnienia tzw. wzoru Babcocka. Wzór ten – rozpatrywany dotychczas przy założeniu płaskiej krzywej dochodowości – wyraża zależność stopy zwrotu z inwestycji w obligacje od wielkości nieoczekiwanej zmiany rynkowej stopy procentowej, przy zadanym horyzoncie czasowym; por. *Bierwag* (1987).

Ze względu na brak miejsca, w pracy nie podano szczegółowych wyprowadzeń wszystkich prezentowanych wzorów i twierdzeń. Wyprowadzenia te – wraz z obszernym opisem i interpretacją można znaleźć w cytowanym powyżej opracowaniu autora: *Jakubowski*, (2004). W opracowaniu tym, przedstawiono również uogólnienie prezentowanych w niniejszej pracy modeli jednoindeksowych obligacji, dla przypadku rynku niezrównoważonego, na którym ceny rynkowe obligacji nie są równe tzw. wartościom wewnętrznym (*intrinsic values*) tych walorów.

1. Zagadnienie stosowalności analizy portfelowej na rynku obligacji

Metody analizy portfelowej, w odniesieniu do rynku dłużnych papierów wartościowych, wiążą się z próbami zastosowania klasycznej teorii portfela *H. Markowitza* (1987) dla celów aktywnego zarządzania inwestycjami w obligacje. Chodzi w tym przypadku o rozwiązanie zagadnienia dywersyfikacji ryzyka stopy procentowej, a więc o taką konstrukcję portfela, która zapewniłaby minimalną wartość odchylenia standardowego stopy zwrotu z portfela obligacji, przy zadanej wartości oczekiwanej tej stopy zwrotu. Możliwe jest też sformułowanie zagadnienia równoważnego, a mianowicie problemu maksymalizacji wartości oczekiwanej stopy zwrotu przy zadanym poziomie ryzyka, mierzonym odchyleniem standardowym tej stopy zwrotu.

Jak wiadomo, podstawy analizy portfelowej H. Markowitza odnosiły się pierwotnie wyłącznie do rynku akcji. Co więcej pomiędzy rynkami akcji i obligacji występują pewne istotne różnice. A mianowicie, „czas życia" akcji jest w zasadzie nieskończony; tzn. raz wyemitowanej akcji nie można umorzyć, akcję tę można co najwyżej sprzedać. Tak więc, poza niezbyt częstym przypadkiem bankructwa przedsiębiorstwa emitującego akcje, możemy przyjąć, że każda analizowana akcja istnieje nieskończenie długo. Nieskończenie długie są też szeregi czasowe dotyczące podstawowego parametru akcji, jakim jest stopa zwroty z inwestycji w tę akcję, czy też stopa zwrotu z inwestycji polegającej na zakupie portfela akcji. Wynikają stąd duże możliwości estymacji takich parametrów jak oczekiwana stopa zwrotu, odchylenie standardowe tej stopy zwrotu (jako miara ryzyka) czy też – a raczej przede wszystkim – współczynniki korelacji pomiędzy stopami zwrotu z poszczególnych akcji.

Natomiast w przypadku rynku obligacji sytuacja jest inna. Każda obligacja (poza specjalną klasą tych walorów, tzw. *perpentuities* – czyli konsoli) ma skończony „czas życia", określony przez ściśle ustalony termin wykupu tej obligacji przez emitenta. Z upływem czasu bieżącego zmieniają się (a więc są niestabilne) podstawowe parametry obligacji, tj. parametry okresowości (*duration*) oraz wypukłości (*convexity*). Między innymi, można łatwo wykazać, że parametr okresowości jest (poza pewnym szczególnym przypadkiem) funkcją malejącą czasu bieżącego; *Francis* (1991). Owa niestabilność parametrów obligacji stała się przyczyną kontrowersji co do możliwości przetransponowania podstawowych idei H. Markowitza dotyczących modelu dywersyfikacji inwestycji – na grunt teorii rynku obligacji. Niekiedy, opinie co do tej możliwości są wręcz diametralnie odmienne.

W pracy *Fabozzi, Fong* (1994), s. 153-154, stwierdzono bowiem:

„Both the variance/covariance approach and the traditional Markowitz formulation assist managers in making asset allocation decisions. For equity optimization, minimization of the standard deviation or variance of portfolio returns is the customary risk objective". ... „In bond analysis, however, no such convention is available. Because a fixed income security has a finite life, its covariance with other bonds changes with time, if for no other reason – than shortening of the maturity of each bond with time". ... „The problem thus becomes one of estimation. Indeed, if a covariance matrix could be created, the bond optimization process could paraller the analysis for stock".

Jak widać jest to zdecydowana negacja możliwości zastosowania podejścia M. Markowitza w stosunku do rynku obligacji. Natomiast w pracy *Eltona, Grubera* (1995), s. 553, stwierdzono wręcz coś przeciwnego; a mianowicie:

„... we discussed methods of estimating the variance – covariance structure of common stock returns. The general principles discussed are equally as applicable to bonds as they are to stocks. However, they are special characteristics of bonds that suggest that some modification and respecification would be useful."

Tak więc ci z kolei autorzy w sposób zdecydowany akceptują możliwość przeniesienia teorii portfela Markowitza na rynek obligacji. Stwierdzają oni jedynie, że pewne modyfikacje czy też „respecyfikacje" są pożądane. Cytowani autorzy przedstawiają również pewien zarys metody zastosowania analizy portfelowej na rynku obligacji. Niestety część podanych przez nich wzorów jest błędna.

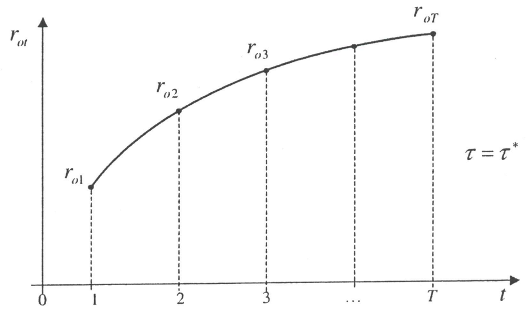
Jak już wspomniano, zagadnienie zastosowania analizy portfelowej na rynku obligacji będzie zasadniczym przedmiotem rozważań niniejszej pracy. A mianowicie, przedstawimy próbę sformułowania odpowiedzi na problem na ile – czy też przy jakich warunkach – zastosowanie teorii H. Markowitza na rynku obligacji jest jednak możliwe.

2. Struktura terminowa stóp procentowych – zagadnienie wyceny obligacji

Zagadnienie zarządzania portfelem obligacji wiąże się ściśle z pojęciem *struktury terminowej stóp procentowych*. Struktura ta odzwierciedla funkcyjną zależność wartości poszczególnych stóp procentowych od terminów zapadalności zobowiązań, dla których te stopy się rozpatruje. W analizowanym przypadku przyjmuje się, że rynkowe stopy procentowe *spot* r_{0t} rozpatrywane dla poszczególnych terminów $t = 1,2,3,...,T$, są określone przez rentowności do wykupu YTM (*yield to maturity*) obligacji czysto-dyskontowych. Rentowności te stanowią pewien „wzorzec", według którego dokonuje się wyceny wszystkich innych funkcjonujących w danym sektorze rynku finansowego obligacji wielokuponowych, jak też i innych instrumentów finansowych.

Krzywa dochodowości. Graficznym zobrazowaniem struktury terminowej stóp procentowych *spot* jest krzywa dochodowości (*yield curve*). Krzywa ta, przedstawiająca zależność rentowności do wykupu $YTM = r_{0t}$ obligacji czysto-dyskontowych od terminów wykupu tych obligacji $t = 1,...,T$ - może mieć różny kształt. Może to być krzywa rosnąca, malejąca lub (w przybliżeniu) stała. Kształt krzywej dochodowości zależy od szeregu czynników związanych zarówno z funkcjonowaniem analizowanego rynku finansowego, jak również od bieżącej sytuacji gospodarczej danego kraju. Ponadto, kształt tej krzywej zmienia się dynamicznie w czasie co jest właśnie źródłem ryzyka stóp procentowych. Na rysunku 2.1, przedstawiono dla ilustracji rosnącą postać krzywej dochodowości.

Problematyka analizy, modelowania oraz prognozowania zmian struktury terminowej rynkowych stóp procentowych *spot* r_{0t} $(t = 1,...,T)$ została obszernie przedstawiona m.in. przez autora niniejszej pracy w publikacji *Jakubowski* (1996).



Rys. 2.1. Struktura terminowa stóp procentowych *spot* r_{0t} określonych dla terminów zapadalności $t = 1,...,T$, rozpatrywana w chwili bieżącej $\tau = \tau^*$. Stopy r_{0t} wyrażane są w skali roku.

Zagadnienie wyceny. Jak wspomniano, krzywa dochodowości stanowi pewien wzorzec stóp procentowych *spot* r_{0t} $(t = 1,...,T)$, za pomocą którego można dokonywać wyceny różnych papierów wartościowych. Wyceny tej dokonuje się poprzez dyskontowanie w czasie (do chwili bieżącej) przyszłych wpływów pieniężnych związanych z rozpatrywanym instrumentem finansowym. W szczególności, każdą obligację o stałym oprocentowaniu, związaną z wypłatami w kolejnych latach $t = 1,2,...,(T-1)$ odsetek C oraz w roku T - odsetek C plus wartość nominalna N - możemy rozpatrywać jako sumę obligacji czysto-dyskontowych. A zatem, wartość bieżąca takiej obligacji (*present value*) jest równa

$$PV = \frac{C}{1+r_{01}} + \frac{C}{(1+r_{01})^2} + \ldots + \frac{C+N}{(1+r_{0T})^T}. \qquad (2.1)$$

Wartość tę nazywa się również często wartością wewnętrzną obligacji (*intrinsic value*). Natomiast sam wzór (2.1) jest nazywany wzorem wyceny obligacji.

W teorii rynków kapitałowych dowodzi się (*Elton, Gruber,* 1995), że gdy rynek obligacji znajduje się w równowadze, strumienie pieniężne pochodzące od różnych obligacji powinny być dla tych samych okresów $t = 1,...,T$, dyskontowane według tych samych stóp procentowych *spot* $r_{01}, r_{02},..., r_{0T}$. Tym samym , można w tym celu stosować „wzorcowe" stopy procentowe *spot* określone na podstawie rentowności do wykupu *YTM* obligacji czysto-dyskontowych. Wynika to z zastosowania tzw. prawa jednej ceny (*the law of one price*) w stosunku do rozpatrywanego rynku obligacji. Prawo to oznacza, że w przypadku, gdy chwilowa cena bieżąca P analizowanej obligacji jest różna od jej wartości równowagowej PV, to na skutek arbitrażu cena ta - po pewnym okresie przejściowym - staje się zbieżna do wartości PV.

Określenie struktury terminowej stóp procentowych przez rentowności do wykupu $r_{01}, r_{02}, \ldots, r_{0T}$ *obligacji czysto-dyskontowych* ma zasadnicze znaczenie nie tylko ze względu na wycenę wartości obligacji. Znając przebieg rozpatrywanej krzywej dochodowości, a także dynamikę zmian tego przebiegu z upływem czasu bieżącego, potrafimy oszacować wpływ zmian rynkowych stóp procentowych na wartość rozpatrywanych obligacji, a tym samym na stopę zwrotu z dokonywanych inwestycji.

Stopa zwrotu za jeden okres odsetkowy. Stopa zwrotu R z inwestycji w daną obligację liczona za jeden okres odsetkowy (tzw. *period-by-period return*), wynika ogólnie rzecz biorąc z dwóch składowych: dochodów z wypłacanych odsetek C oraz z zysków lub strat związanych ze zmianą bieżącej ceny P obligacji. Z kolei zmiana ceny obligacji wynikać może ze zmiany wartości równowagowej obligacji oraz określonych działań spekulacyjnych na rozpatrywanym rynku (tzw. arbitraż cenowy). Pomijając dla uproszczenia owe działania spekulacyjne (jako charakterystyczne dla okresów przejściowych) otrzymamy, że cena bieżąca P obligacji jest równa jej wartości równowagowej PV określonej wzorem (2.1). Ze wzoru tego można wywnioskować, że zmiana wartości bieżącej obligacji wynika z oddziaływania dwóch czynników: zmiany wartości obligacji w czasie (w miarę upływu kolejnych okresów odsetkowych zanikają kolejne człony zależności (2.1)) oraz - nieoczekiwanej zmiany rynkowych stóp procentowych r_{0t}, $t = 1, \ldots, T$. Ze wzoru wyceny (2.1) wynika bowiem bezpośrednio, że nieoczekiwany wzrost rynkowych stóp procentowych *spot* r_{0t} $t = 1, \ldots, T$, a więc przesunięcie się krzywej dochodowości w górę – powoduje spadek wartości bieżącej PV obligacji. Natomiast spadek tych stóp procentowych, a więc ruch krzywej dochodowości w dół – powoduje wzrost wartości bieżącej PV.

3. Kwantyfikacja ryzyka stopy procentowej na rynku obligacji – parametry okresowości i wypukłości

Z przeprowadzonych w poprzednim punkcie rozważań wynika, że bieżąca cena rynkowa obligacji może podlegać ciągłym oraz nieoczekiwanym fluktuacjom (*price volatility*) - ze względu na zmiany obowiązujących w danym momencie rynkowych stóp procentowych, za pomocą których dyskontujemy w czasie do chwili bieżącej wszystkie przyszłe wpływy pieniężne związane z posiadaniem obligacji (tj. odsetki oraz nominał). Często trudne do przewidzenia zmiany rynkowych stóp procentowych oraz wynikające stąd zmiany ceny obligacji (czy też szerzej - instrumentów finansowych) są źródłem ryzyka stóp procentowych. Ryzyko to wyraża się tzw. nieoczekiwaną stopą zwrotu (*excess return*); Elton, Gruber (1995). W związku z tym istotna jest - z punktu widzenia zarówno inwestora jak i emitenta - wrażliwość (lub też przeciwnie - odporność) ceny rozpatrywanej obligacji na zmiany rynkowych stóp procentowych. Parametrami umożliwiającymi pomiar takiej wrażliwości jest **okresowość** (*duration*) oraz **wypukłość** (*convexity*) obligacji.

Klasyczne definicje (*Macaulaya*) tych parametrów związane są z przyjęciem silnie ograniczającego założenia, że wszystkie rynkowe stopy procentowe *spot* są sobie równe, niezależnie od terminów zapadalności zobowiązań, tj.

$$r_{0t} = r; \qquad \forall t = 1,..,T. \tag{3.1}$$

Oznacza to, że struktura terminowa stóp procentowych wyrażona krzywą dochodowości obligacji czysto-dyskontowych jest „płaska", przy czym zachodzi to dla dowolnej chwili bieżącej $\tau = 1,2,3,...$. Z powyższego założenia wynika bezpośrednio, że jeżeli chodzi o zmiany rynkowej stopy procentowej r (w tym przypadku już tylko jednej) to możliwe są jedynie równoległe przesunięcia w górę lub w dół rozpatrywanej krzywej dochodowości o wartość dr, tj.

$$dr_{0t} = dr; \qquad \forall t = 1,..,T, \tag{3.2}$$

gdzie dr - przyrost skończony.

3.1. Okresowość obligacji (*duration*)

Przedstawimy teraz wzory określające parametr okresowości obligacji. Z równania (2.1) wyceny obligacji, uwzględniając warunek (3.1) oraz zakładając, że analizowany rynek jest w równowadze (tj. $P = PV$), mamy

$$P = P(r) = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t}, \tag{3.3}$$

gdzie C_t - przyszłe strumienie finansowe wynikające z faktu nabycia obligacji, tj. $C_t = C$ ($t = 1,...,T-1$) oraz $C_T = C + N$; C - wartość kuponu, N - wartość nominalna.

Dla małych zmian dr rynkowej stopy procentowej, odpowiadający tym zmianom dodatni lub ujemny przyrost dP wartości obligacji możemy aproksymować różniczką zupełną, tj.

$$dP = \frac{\partial P}{\partial r} dr. \tag{3.4}$$

Do dalszych rozważań wprowadzimy pojęcie współczynnika wagowego x_t, tj.

$$x_t \triangleq \left[C_t / (1+r)^t\right] / P = \left[C_t / (1+r)^t\right] \Big/ \sum_{t=1}^{T} \left[C_t / (1+r)^t\right]. \tag{3.5}$$

Współczynnik x_t określa więc udział wartości bieżącej strumienia finansowego C_t (zdyskontowanego na chwilę początkową za pomocą rynkowej stopy procentowej r) w wartości bieżącej P obligacji. Z (3.5) wynika bezpośrednio, że

$$\sum_{t=1}^{T} x_t = 1. \tag{3.6}$$

Z (3.4), uwzględniając (3.3) oraz (3.5), otrzymamy

$$dP = -\left[\sum_{t=1}^{T} tC_t (1+r)^{-t}\right] \frac{dr}{1+r} = -P \times \left(\sum_{t=1}^{T} t\, x_t\right) \frac{dr}{1+r} \quad . \tag{3.7}$$

Występujące w powyższym wzorze wyrażenie w nawiasie okrągłym nosi nazwę okresowości (Macaulaya) D obligacji. Mamy zatem

$$D = \sum_{t=1}^{T} t\, x_t = \sum_{t=1}^{T} \frac{tC_t}{(1+r)^t} \Big/ P \tag{3.8}$$

oraz z (3.7), (3.8), $$dP = -P \times D \frac{dr}{1+r}. \tag{3.9}$$

Uwzględniając dodatkowo, że $dr = d(1+r)$, z (3.9) otrzymamy

$$\frac{dP}{P} = -D\frac{d(1+r)}{1+r} \quad \text{oraz} \tag{3.10}$$

$$D = -\frac{dP}{P}\Big/\frac{d(1+r)}{1+r}. \tag{3.11}$$

Natomiast dla nieskończenie małych przyrostów dr, z (3.11) otrzymamy

$$D = -\frac{dP}{dr}\frac{1+r}{P} \xrightarrow[dr \to 0]{} -\frac{\partial P}{\partial r}\frac{1+r}{P}, \tag{3.12}$$

tak więc $$D = -\frac{\partial P}{\partial r}\frac{1+r}{P} \quad . \tag{3.13}$$

Wyprowadzone powyżej wzory (3.8), (3.11) i (3.13) określają trzy równoważne definicje parametru okresowości D obligacji. Między innymi, ze wzoru (3.8) wynika, że okresowość D obligacji jest pewną średnią ważoną chwil czasowych t, w których wypłacane są strumienie finansowe C_t wynikające z faktu posiadania analizowanej obligacji. Uśrednienie to odbywa się ze względu na wagi x_t dane wzorem (3.5). Inaczej mówiąc, parametr okresowości D jest więc pewnym *średnim ważonym okresem zwrotu* z inwestycji w obligacje; stąd też nazwa tego parametru. Parametr D jest wielkością mianowaną, wyrażaną w jednostkach czasu; np. w latach.

Parametr okresowości D obligacji czysto-dyskontowej. Dla obligacji czysto-dyskontowej (tj. dla $C = 0$) mamy

$$C_t = 0, \quad \text{dla} \quad t = 1, \ldots, T-1 \quad \text{oraz} \quad C_T = N. \tag{3.14}$$

A zatem, z (3.3), (3.14), $$P = P(r) = \frac{N}{(1+r)^T} \quad . \tag{3.15}$$

Z (3.8), (3.14) i (3.15) otrzymamy $$D = \frac{T \times N}{(1+r)^T}\Big/P = T. \tag{3.16}$$

Otrzymaliśmy więc, że w przypadku obligacji czysto-dyskontowej okresowość tej obligacji jest równa bezpośrednio terminowi T jej wykupu. Z porównania wzorów (3.8) i (3.16) wynika również, że spośród wszystkich obligacji o tym samym terminie wykupu T (*term to maturity*), obligacja czysto-dyskontowa ma największą okresowość $D_{max} = T$. Wynika to bezpośrednio stąd, że okresowość D obligacji wielokuponowych jest średnią ważoną terminów $t = 1,...,T$, przy czym suma wag x_t jest równa jedności (por. 3.6). Tak więc w tym przypadku, okresowość D musi być krótsza od najdłuższego z rozpatrywanych terminów; tj. T.

Zależność parametru okresowości D obligacji od upływu czasu bieżącego oraz od poziomu stopy procentowej. Z przedstawionych powyżej rozważań wynika jeszcze jeden ważny wniosek. A mianowicie z upływem czasu bieżącego $\tau = 1,2,3,...$, okresowość Macaulaya obligacji maleje, bowiem zmniejsza się okres do wykupu tych obligacji równy $T - \tau$. Istnieją co prawda inne niż prezentowana powyżej definicje okresowości D obligacji, dla których – w pewnych szczególnych okolicznościach (obligacje długoterminowe sprzedawane z dużym dyskontem) – powyższa zależność nie jest spełniona; *Francis* (1991). Przypadkiem tym nie będziemy się jednak dalej zajmować.

Istotna jest również zależność parametru okresowości D od poziomu rynkowej stopy procentowej r. A mianowicie, można wykazać (*Bierwag* 1987), że ze wzrostem stopy procentowej r - okresowość D obligacji maleje; przy czym, podobnie jak w przypadku zależności od upływu czasu bieżącego τ - jest to zależność w ogólnym przypadku nieliniowa.

Okresowość D obligacji jako współczynnik elastyczności. Dla ustalonej chwili τ czasu bieżącego oraz przy ustalonym poziomie rynkowej stopy procentowej r, okresowość obligacji zależy wyłącznie od strumieni finansowych C_t tej obligacji (a więc od odsetek C oraz wartości nominalnej N) oraz od okresu do wykupu T. Parametr okresowości D jest więc wewnętrzną cechą tej obligacji, wyrażającą jej wrażliwość na nieoczekiwane zmiany stopy procentowej r. Parametr ten jest zatem miernikiem ryzyka stopy procentowej na rynku obligacji. Wynika to zresztą bezpośrednio z definicji (3.11). A mianowicie, okresowość D obligacji jest *współczynnikiem elastyczności* (wziętym ze znakiem minus) ceny obligacji ze względu na zmianę czynnika jedność plus stopa procentowa r. Wyprowadzona powyżej zależność (3.10) pozwala zatem na przybliżone oszacowanie względnej zmiany (dP/P) wartości obligacji spowodowanej nieoczekiwaną zmianą rynkowej stopy procentowej, o ile tylko znana jest wartość parametru okresowości D, którą można bezpośrednio wyliczyć ze wzoru (3.8).

3.2. Wypukłość obligacji (*convexity*)

Wprowadzenie pojęcia parametru wypukłości V obligacji, umożliwia bardziej dokładne – niż wynika to ze wzoru (3.10) – oszacowanie wrażliwości wartości obligacji na ryzyko rynkowej stopy procentowej r. Wynika to z rozwinięcia przebiegu zależności wartości P obligacji od stopy procentowej r - w szereg Taylora. Dzięki temu nie musimy już dalej zakładać, że nieoczekiwane zmiany dr stopy procentowej są małe. Jak wykazały badania (por. np. *Zaremba* 1995), w przypadku zależności $P(r)$ danej wzorem (3.3) – wystarczającą dokładność uzyskuje się w analizowanym przypadku przez przybliżenie przyrostu dP tej funkcji przez dwa pierwsze człony rozwinięcia Taylora.

Definicja parametru V wypukłości obligacji, o wartości bieżącej danej wzorem (3.3) – jest następująca

$$V \triangleq \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\;\frac{(1+r)^2}{P}. \tag{3.17}$$

Ze wzorów (3.17) i (3.3), po przekształceniu, otrzymamy

$$V \triangleq \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} t(t+1)x_t = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{t(t+1)C_t}{(1+r)^t}\Big/P, \tag{3.18}$$

gdzie x_t - współczynnik wagowy określony zależnością (3.5).

Ponadto, rozwijając zależność $P(r)$ daną wzorem (3.3) w szereg Tylora, można wykazać, że zachodzi (por. m.in. *Jakubowski*, 2004).

$$\frac{dP}{P} = -D\times\Delta_r + V\times(\Delta_r)^2 \quad , \tag{3.19}$$

gdzie $\Delta_r = \dfrac{d(1+r)}{1+r}$; D - okresowość obligacji, V - wypukłość obligacji.

Parametr wypukłości V obligacji nie będzie dalej – w niniejszej pracy – szerzej omawiany. Szczegółową analizę tego parametru oraz jego interpretację można znaleźć m. in. w pracy *Jakubowski* (2004).

3.3. Parametry okresowości i wypukłości portfela obligacji

Wprowadzimy teraz wzory na okresowość i wypukłość portfela P obligacji. Ogólnie rzecz biorąc portfel P możemy traktować jako kombinację wypukłą obligacji O_i $(i=1,..,N)$, traktowanych jako elementy pewnej przestrzeni liniowej obligacji. Mamy zatem

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N} w_i O_i \text{ - portfel obligacji,} \tag{3.20}$$

gdzie w_i - udział wartościowy obligacji O_i w portfelu $\boldsymbol{P}$;

przy czym $w_i \in (0,1)$, $\forall i = 1,...,N$; oraz $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$. (3.21)

Można łatwo wykazać, że okresowość D_P portfela $\boldsymbol{P}$ obligacji jest kombinacją wypukłą okresowości D_i poszczególnych obligacji, wchodzących w skład tego portfela (por. *Jakubowski*, 2003b), tj.

$$D_P = \sum_{i=1}^{N} w_i D_i. \tag{3.22}$$

Również można łatwo wykazać, że charakter powyższej zależności przenosi się na parametr wypukłości V_P portfela $\boldsymbol{P}$ obligacji; tj.

$$V_P = \sum_{i=1}^{N} w_i V_i. \tag{3.23}$$

Przedstawione powyżej wzory (3.22) i (3.23) na okresowość i wypukłość portfela $\boldsymbol{P}$ obligacji mają duże znaczenie dla zastosowań praktycznych. A mianowicie, dobierając odpowiednio udziały wartościowe w_i poszczególnych obligacji O_i w portfelu $\boldsymbol{P}$ możemy utworzyć w ten sposób pewną obligację syntetyczną o odpowiednich – wymaganych przez nas – parametrach okresowości D_p i wypukłości V_p. Możemy więc w ten sposób kształtować odpowiednią wrażliwość analizowanego portfela obligacji na ryzyko stóp procentowych.

3.4. Oczekiwana okresowość obligacji

Wprowadzimy teraz pewne nowe pojęcie dotyczące *oczekiwanej okresowości* D^1 obligacji. Stosując to pojęcie, weźmiemy bardziej szczegółowo pod uwagę oddziaływanie „upływu czasu bieżącego” $\tau = 0,1,2,3,...$, na wartość parametru okresowości D. Prowadząc w dalszym ciągu rozważania dla płaskiej krzywej dochodowości, oznaczymy:

P_0 - wartość bieżąca obligacji w chwili $\tau = 0$, czyli

$$P_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t}, \tag{3.24}$$

D^0 - parametr **bieżącej okresowości** obligacji, rozpatrywany dla chwili $\tau = 0$, tj.

$$D^0 = D(\tau = 0) = -\frac{\Delta P_0}{P_0} \Big/ \frac{\Delta(1+r)}{1+r}, \tag{3.25}$$

czyli - dla nieskończenie małych Δr - otrzymamy

$$D^0 = -\frac{\partial P_0}{\partial r} \frac{1+r}{P_0} = \sum_{t=1}^{T} \frac{tC_t}{(1+r)^t} / P_0 . \tag{3.26}$$

Tak więc okresowość D^0 określa wrażliwość wartości bieżącej P_0 obligacji, rozpatrywanej w chwili $\tau = 0$, na zmianę stopy procentowej r o Δr jaka następuje w chwili $\tau = 0 + \varepsilon$, gdzie ε - dowolnie małe. Możemy wyobrazić sobie następującą sytuację: kupujemy w chwili $\tau = 0$ daną obligację według ceny P_0 i zastanawiamy się jaka będzie natychmiastowa zmiana wartości tej obligacji, o ile bezpośrednio po zakupie (tj. dla $\tau = 0 + \varepsilon$) stopa procentowa zmieni się o Δr. Odpowiedź na to pytanie możemy uzyskać wykorzystując właśnie parametr D^0; a mianowicie, z (3.25) mamy

$$\frac{\Delta P_0}{P_0} = -D^0 \frac{\Delta(1+r)}{1+r} = -D^0 \frac{\Delta r}{1+r}. \tag{3.27}$$

Załóżmy teraz, że nabyliśmy daną obligację w chwili $\tau = 0$, oraz - że przez pierwszy okres odsetkowy stopa procentowa r nie uległa zmianie. Zastanawiamy się jak wrażliwa będzie wartość przyszła posiadanej obligacji na zmianę stopy procentowej o Δr w chwili $\tau = 1 + \varepsilon$, tj. po upływie pierwszego okresu odsetkowego i wypłacie pierwszych odsetek wynoszących $C_1 = C$. Analizę powyższą prowadzimy w chwili obecnej, tj. dla $\tau = 0$. W tym celu wprowadzamy właśnie pojęcie *oczekiwanej okresowości* D^1, tj. przy oczekiwaniu, że stopa procentowa r nie ulegnie zmianie w okresie $\tau \in [0, 1]$.

Oznaczymy: P_1 - wartość przyszła obligacji w chwili $\tau = 1$, przy założeniu, że $r = const$, tj.

$$P_1 = \sum_{t=2}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^{t-1}}. \tag{3.28}$$

Wartość P_1 jest więc oczekiwaną (czy też spodziewaną) wartością przyszłą obligacji wyznaczoną w chwili $\tau = 0$ dla chwili $\tau = 1$, w warunkach stałości stopy procentowej r.

Parametr **oczekiwanej okresowości** D^1 obligacji definiujemy następująco:

D^1 - oczekiwana okresowość obligacji w chwili $\tau = 1$, przy założeniu, że $r = const$, tj.

$$D^1 = D(\tau = 1) \triangleq -\frac{\Delta P_1}{P_1} \Big/ \frac{\Delta(1+r)}{1+r}, \tag{3.29}$$

czyli, dla nieskończenie małych Δr, z (3.29) otrzymamy

$$D^1 = -\frac{\partial P_1}{\partial r} \frac{1+r}{P_1} \tag{3.30}$$

oraz z (3.28) i (3.30)

$$D^1 = \sum_{t=2}^{T} \frac{(t-1)C_t}{(1+r)^{t-1}} / P_1 . \tag{3.31}$$

Tak więc w chwili $\tau = 0$, przy założeniu, że stopa procentowa r nie ulegnie zmianie w ciągu pierwszego okresu odsetkowego, możemy oszacować wpływ zmiany tej stopy o Δr (w chwili $\tau = 1 + \varepsilon$) - na zmianę wartości P_1 obligacji; z definicji (3.29) mamy bowiem

$$\frac{\Delta P_1}{P_1} = -D^1 \frac{\Delta(1+r)}{1+r} = -D^1 \frac{\Delta r}{1+r}. \tag{3.32}$$

Podamy teraz lemat określający zależność funkcyjną pomiędzy parametrem *oczekiwanej okresowości* D^1 a parametrem *bieżącej okresowości* D^0. Dla przeprowadzenia dowodu tego lematu wykorzystano wprowadzone w tym punkcie wzory (3.26) i (3.31) umożliwiające wyznaczenie wartości tych parametrów. Założono również, że dla analizowanej obligacji zachodzi

$$D^0 > 1 . \tag{3.33}$$

Lemat 3.1. Zależność funkcyjna pomiędzy parametrem oczekiwanej okresowości D^1 a parametrem bieżącej okresowości D^0 obligacji wyraża się wzorem:

$$D^1 = (D^0 - 1)(1+r)\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{-1}, \tag{3.34}$$

gdzie r - rynkowa stopa procentowa, P_0 - wartość bieżąca obligacji w chwili $\tau = 0$, P_1 - wartość przyszła obligacji w chwili $\tau = 1$, wyznaczona przy założeniu, że stopa procentowa r nie uległa zmianie; oraz - z założenia (3.33), $D^0 > 1$.

Dowód: *Jakubowski* (2004).

4. Założenia modelu

Prowadzone dalej rozważania poprzedzimy sformułowaniem następujących założeń oraz definicji.

Płaska krzywa dochodowości. Warunek płaskiej krzywej dochodowości (*yield curve*), jaki przyjmiemy dla analizowanego rynku finansowego można formalnie zapisać następująco.

$$r_{0t} = const(t) = r; \qquad \forall\, t = 1,...,T , \tag{4.1}$$

gdzie r_{0t} - rynkowa stopa procentowa *spot* dla okresu $[0,t]$, t - termin zapadalności zobowiązań; w przypadku obligacji zero-kuponowych termin ten pokrywa się z tzw. okresem do wykupu (*term to maturity*).

Założymy również, że jedynymi możliwymi zmianami płaskiej krzywej dochodowości, jakie mogą nastąpić wraz z upływem czasu bieżącego $\tau = 0,1,2,3,\ldots$, są przesunięcia równoległe tej krzywej o tę samą wartość Δr w górę lub w dół. Zauważmy, że założenie to jest konieczne, ponieważ w przeciwnym przypadku początkowo płaska krzywa dochodowości (dla $\tau = 0$) przestawałaby być płaska dla przyszłych chwil τ. Mamy więc

$$\Delta r = \Delta r_t = const(t), \qquad \forall\, t = 1,...,T , \tag{4.2}$$

- nieoczekiwane przesunięcie płaskiej krzywej dochodowości o tę samą wartość.

Horyzont inwestycyjny. Zagadnienie aktywnego zarządzania portfelem obligacji rozpatrywać będziemy przy założeniu, że horyzont inwestycyjny jest równy jednemu (najbliższemu) okresowi odsetkowemu. Z powyższego wynika więc, że analizując portfele inwestycyjne, rozpatrywać będziemy tylko te obligacje (o różnych terminach wykupu), których okresy odsetkowe pokrywają się ze sobą. Ponadto przyjmiemy, że inwestycji w określone obligacje dokonujemy wyłącznie na początku danego okresu odsetkowego, tj. w chwilach:

$\tau = 0 + \varepsilon$, $\tau = 1 + \varepsilon$, $\tau = 2 + \varepsilon, \ldots$, gdzie $\varepsilon > 0$ - wartość dowolnie mała.

Klasa analizowanych obligacji. Prowadzone dalej rozważania dotyczyć będą obligacji długoterminowych o stałym oprocentowaniu. Chodzi w tym przypadku o to, że ogólnie rzecz biorąc, parametr okresowości obligacji D^0 jest silnie niestabilny z upływem czasu bieżącego. Okresowość D^0 maleje z czasem, przy czym spadek wartości D^0 jest tym silniejszy im krótszy jest okres do wykupu T (*term to maturity*) rozpatrywanej obligacji.

W najprostszym przypadku obligacji zero-kuponowych mamy:

dla $T = 15$, $D^0 = 15$; $T = 14$, $D^0 = 14$; ... ; $T = 2$, $D^0 = 2$; $T = 1$, $D^0 = 1$.

Tak więc dla okresu do wykupu równego $T = 15$ lat, po upływie 1 roku, procentowy spadek okresowości obligacji wynosi

$$\frac{\Delta D^0}{D^0} = \frac{14-15}{15} \times 100 = -6.7\%.$$

Natomiast dla okresu do wykupu równego $T = 2$ lata, po upływie 1 roku, mamy

$$\frac{\Delta D^0}{D^0} = \frac{1-2}{2} \times 100 = -50.0\%.$$

Powyższe wnioski pozostają również aktualne w przypadku obligacji o niezerowym kuponie (tj. dla $C_t \neq 0$), w którym spadek okresowości D^0 obligacji wraz z upływem czasu bieżącego τ ma charakter nieliniowy; *Bierwag* (1987), *Francis* (1991). Rosnąca niestabilność parametru okresowości D^0 analizowanych obligacji - wraz z upływem czasu bieżącego - staje się źródłem określonej niestabilności parametrów modelu zarządzania portfelowego rozpatrywanego w dalszej części pracy. Z tego też powodu prowadzone rozważania dotyczyć będą obligacji długoterminowych O_i o okresowościach

$$D_i^o >> 1 \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Dla tego typu obligacji, procentowa zmiana (tj. spadek) okresowości D_i^o po upływie jednego okresu odsetkowego nie będzie zbyt duża, co pokazaliśmy na przedstawionym powyżej przykładzie.

Rynek zrównoważony, rynek niezrównoważony. Wprowadzimy oznaczenia:

P_r - cena rynkowa obligacji, P_0 - wartość bieżąca obligacji.

Wartość bieżąca obligacji, określona w punkcie 3 wzorem (3.24) jest pewną wartością teoretyczną, wynikającą ze zdyskontowania na chwilę bieżącą wszystkich przyszłych strumieni finansowych C_t $(t = 1,\ldots,T)$, wynikających z faktu posiadania danej obligacji. Wartość ta jest często nazywana wartością wewnętrzną obligacji (*bond intrinsic value*).

O ***rynku zrównoważonym*** mówimy, gdy dla każdej obligacji O_i zachodzi

$$P_r^i = P_0^i, \qquad \forall\, i = 1,\ldots,n, \tag{4.4}$$

gdzie n - ogólna liczba rozpatrywanych obligacji.
W przeciwnym przypadku - mówimy, że ***rynek jest niezrównoważony***.

Oczywiście o zrównoważeniu lub niezrównoważeniu rynku możemy mówić również tylko w odniesieniu do danej obligacji O_i. Niezrównoważenie rynku danej obligacji wyrażające się różnicą ceny rynkowej P_r tej obligacji od jej wartości wewnętrznej P_0, wynikać może np. z określonych działań spekulacyjnych.

W pracy, rozpatrywać będziemy rynek zrównoważony obligacji. Oczywiście stan ogólnego zrównoważenia rynku jest pewnym stanem „idealnym", który w praktyce nigdy nie ma miejsca. Jednak w przypadku tzw. rynków efektywnych, rynki te są zbieżne do stanu równowagi, który może być w powyższym sensie traktowany jako pewien stan graniczny. Owa zbieżność do stanu równowagi rynkowej wynika z występujących powszechnie transakcji arbitrażowych charakteryzujących rynki efektywne. Jak już wspomnieliśmy, mówi się w tym przypadku o obowiązywaniu tzw. prawa jednej ceny.

5. Model jednoindeksowy dla rynku obligacji

Wyprowadzimy teraz podstawowe wzory wyrażające spodziewaną oraz rzeczywistą stopę zwrotu z inwestycji w obligacje, przy wprowadzonym wcześniej założeniu, że analizowany horyzont inwestycyjny jest równy jednemu okresowi odsetkowemu. Owe stopy zwrotu nazywane są w literaturze stopami zwrotu „z okresu na okres" (*period-by-period return*). Rozważania nasze poprowadzimy przy założeniu, że analizowany rynek kapitałowy jest w równowadze. Ponadto przyjmiemy, że na rynku tym obowiązuje płaska krzywa dochodowości. Uogólnienie otrzymanych wyników na przypadek rynku niezrównoważonego oraz dla krzywej dochodowości o dowolnym kształcie – przedstawiono w cytowanym już we wstępie opracowaniu autora (*Jakubowski*, 2004).

Pomijając dla uproszczenia zapisu indeks i obligacji O_i, wprowadzimy następujące oznaczenia

P_0 - wartość bieżąca obligacji w chwili $\tau = 0$,

P_1 - wartość przyszła obligacji w chwili $\tau = 1$ przy założeniu, że rynkowa stopa procentowa r nie zmieniła się; $r = const$,

P_1^* - wartość przyszła obligacji w chwili $\tau = 1$ przy założeniu, że stopa procentowa r zmieniła się (w chwili $\tau = 1 + \varepsilon$) o Δr, tj. $r^* = r + \Delta r$,

R^a - spodziewana stopa zwrotu (*anticipated return*) za jeden okres dla $r = const$,

R^* - rzeczywista stopa zwrotu (*realized return*) za jeden okres dla $r^* = r + \Delta r$.

Wzory na spodziewaną oraz rzeczywistą stopę zwrotu są następujące

$$R^a = \frac{C + P_1 - P_0}{P_0}, \quad \text{oraz} \quad R^* = \frac{C + P_1^* - P_0}{P_0}, \tag{5.1}$$

gdzie C - odsetki wypłacane za dany okres.

Ponadto zauważmy, że w myśl wprowadzonych w punkcie 3 wzorów (3.24) i (3.28) na bieżącą wartość wewnętrzną P_0 i P_1, wartości te są funkcjami stóp procentowych, tj.

$$P_0 = P_0(r); \quad P_1 = P_1(r) \text{ oraz } \quad P_1^* = P_1(r^*). \tag{5.2}$$

A zatem, ze wzorów (5.1) bezpośrednio wynika, że zachodzi również

$$R^a = R^a(r) \quad \text{oraz } R^* = R(r^*) = R(r + \Delta r). \tag{5.3}$$

Tak więc już na początku prowadzonych dalej rozważań możemy zauważyć, że dla danej stopy procentowej r, ***spodziewana stopa zwrotu*** R^a jest zmienną deterministyczną, którą możemy efektywnie obliczyć. Natomiast, gdy nieoczekiwaną zmianę Δr stopy procentowej traktować jako zmienną losową, to ***rzeczywista stopa zwrotu*** R^* z obligacji jest również zmienną losową. Wartości tej nie możemy więc a priori, tj. „deterministycznie" - wyznaczyć.

5.1. Spodziewana stopa zwrotu

Dla spodziewanej stopy zwrotu R^a obowiązuje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.1: W przypadku rynku zrównoważonego oraz płaskiej krzywej dochodowości, spodziewane stopy zwrotu R_i^a wszystkich występujących na tym rynku obligacji o stałym oprocentowaniu (w tym obligacji czysto-dyskontowych) są sobie równe. Stopy te są równe obowiązującej dla danego rynku stopie procentowej r, tj.

$$R_i^a = R^a = r; \qquad \forall i = 1,...,n, \tag{5.4}$$

gdzie n - liczba obligacji występujących na danym rynku.

Dowód: *Jakubowski* (2004).

Przedstawione powyżej twierdzenie o równości spodziewanych stóp zwrotu jest również prawdziwe dla dowolnych okresów inwestycyjnych, będących wielokrotnością jednego okresu odsetkowego. Możemy bowiem z łatwością udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.2: W przypadku rynku zrównoważonego oraz płaskiej krzywej dochodowości, spodziewane stopy zwrotu $R_i^a(K)$ - za ten sam okres inwestycyjny K - wszystkich występujących na tym rynku obligacji o stałym oprocentowaniu (w tym obligacji czysto-dyskontowych) są sobie równe. Stopy te są równe wartości:

$$R_i^a(K) = R^a(K) = (1+r)^K - 1; \qquad \forall i = 1,...,n, \tag{5.5}$$

gdzie K - okres inwestycyjny, r - rynkowa stopa procentowa.

Dowód: *Jakubowski* (2004).

Można również wykazać z łatwością następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.3: W przypadku rynku zrównoważonego oraz płaskiej krzywej dochodowości, rentowności do wykupu YTM_i wszystkich występujących na danym rynku obligacji o stałym oprocentowaniu (w tym obligacji czysto-dyskontowych) są sobie równe. Rentowności te są równe obowiązującej dla danego rynku stopie procentowej r, tj.

$$YTM_i = r; \qquad \forall i = 1,...,n. \tag{5.6}$$

Dowód: *Jakubowski* (2003a).

Przedstawione powyżej twierdzenia 5.1 - 5.3 wskazują jak duży jest stopień idealizacji zagadnienia, wynikający z założenia dla danego rynku kapitałowego płaskiej krzywej dochodowości oraz z przyjęcia hipotezy, że rynek ten jest w danej chwili zrównoważony. A mianowicie, okazuje się, że dla obowiązującej w danej chwili rynkowej stopy procentowej r - spodziewane stopy zwrotu z inwestycji (za ten sam okres) we wszystkie istniejące na danym rynku obligacje są takie same. Co więcej, identyczne są również rentowności do wykupu YTM tych obligacji, charakteryzujące tzw. wewnętrzną stopą zwrotu z obligacji, wyrażoną w skali jednego roku. Zauważmy, że pod pojęciem „wszystkie obligacje" rozumiemy w analizowanym przypadku obligacje o różnych terminach wykupu T oraz o różnych płatnościach odsetkowych (tj. kuponach) C_t; jak również – wszystkie obligacje czysto - dyskontowe.

5.2. Rzeczywista stopa zwrotu

Wyprowadzimy teraz wzór na rzeczywistą stopę zwrotu R_i^* z inwestycji w obligacje O_i przy horyzoncie czasowym równym jednemu okresowi odsetkowemu; indeks i - dla uproszczenia zapisu - początkowo pominiemy. W rozważaniach, wykorzystamy wprowadzoną w punkcie 3.4 koncepcję *oczekiwanej okresowości* D^1 obligacji.

Oznaczymy: $\Delta R = R^* - R^a$ - nieoczekiwana zmiana stopy zwrotu wywołana zmianą stopy procentowej r o wartość Δr.

Wartość ΔR będziemy nazywali krótko nieoczekiwaną stopą zwrotu (*excess return*); por. *Bierwag* (1987). Ze wzorów (5.1) mamy

$$\Delta R = R^* - R^a = \frac{C + P_1^* - P_0}{P_0} - \frac{C + P_1 - P_0}{P_0} = \frac{P_1^* - P_1}{P_0} = \frac{P_1^* - P_1}{P_1}\,\frac{P_1}{P_0}. \tag{5.7}$$

Biorąc pod uwagę definicję (3.29) oczekiwanej okresowości D^1 obligacji otrzymamy

$$\frac{P_1^* - P_1}{P_1} = -D^1\,\frac{\Delta r}{1+r}. \tag{5.8}$$

A zatem, z (5.7) i (5.8)

$$R^* - R^a = -D^1\,\frac{\Delta r}{1+r}\,\frac{P_1}{P_0}, \tag{5.9}$$

czyli

$$R^* = R^a - \left(D^1\,\frac{P_1}{P_0}\,\frac{1}{1+r}\right)\Delta r. \tag{5.10}$$

Ponadto, po przekształceniu wzoru (3.34) z Lematu 3.1, otrzymamy

$$D^1 \frac{P_1}{P_0} \frac{1}{1+r} = D^0 - 1, \tag{5.11}$$

gdzie $D^0 > 1$ na mocy założenia (4.3). A zatem, z (5.10) i (5.11) mamy

$$R^* = R^a - (D^0 - 1)\Delta r. \tag{5.12}$$

Korzystając teraz z Twierdzenia 5.1, mamy $R^a = r$ dla dowolnej obligacji. Uwzględniając to we wzorze (5.12), otrzymamy ostatecznie

$$R^* = r - (D^0 - 1)\Delta r. \tag{5.13}$$

Pewną odmianę wzoru (5.13) na rzeczywistą stopę zwrotu R^* z obligacji, przy założeniu, że rynek jest zrównoważony – można znaleźć w pracy *Babcocka* (1984). Wzór Babcocka (zwany także wzorem Babcocka-Langetiga; *Bierwag* (1987)) został wyprowadzony dla q okresów inwestycyjnych i ma następującą postać:

$$R^* = r - \left(\frac{D^0}{q} - 1 \right) \Delta r. \tag{5.14}$$

Oczywiście, dla $q = 1$ wzory (5.13) i (5.14) się pokrywają.

Należy przy tym zaznaczyć, że przedstawione przez nas powyżej wyprowadzenie wzoru (5.13) zostało dokonane niezależnie od metody zastosowanej przez G. Babcocka. A mianowicie, wzór Babcocka (5.14) został otrzymany droga rozwinięcia w szereg Taylora nieliniowej zależności wyjściowej pomiędzy rzeczywistą stopą zwrotu R^*, a rynkową stopą procentową r; po czym wzięto pod uwagę pierwszy składnik tego rozwinięcia. Natomiast w prezentowanej przez nas metodzie wyprowadzenia wzoru (5.13) wykorzystaliśmy nowe pojęcie tzw. oczekiwanej okresowości D^1. Ponadto wzór (5.13) można uogólnić – przy użyciu zastosowanej przez nas metodologii – na przypadek rynku niezrównoważonego; *Jakubowski* (2004).

Wprowadzając do wzoru (5.13) indeks i obligacji O_i, otrzymamy

$$R_i^* = r - \left(D_i^0 - 1\right)\Delta r \quad , \ \forall i = 1, \ldots, n. \tag{5.15}$$

Wyprowadzony powyżej wzór na rzeczywistą stopę zwrotu z obligacji O_i, rozpatrywanej na rynku zrównoważonym, ma zasadnicze znaczenie dla analizowanej w dalszej części pracy teorii.

5.3. Model jednoindeksowy

Sformułujemy teraz model jednoindeksowy dla rynku obligacji. Model ten będzie w pewnym sensie odpowiednikiem do modelu Sharpe'a rozpatrywanego powszechnie dla rynku akcji (*single-index model*); por. *Francis* (1991). Jednak podstawową różnicą między tymi modelami jest to, że model Sharpe'a jest modelem regresyjnym, natomiast przedstawiony poniżej model będzie wynikał bezpośrednio z wyprowadzonego w punkcie 5.2 wzoru (5.15).

Ujmując powyższe jeszcze inaczej, można stwierdzić, że pomimo podobieństwa obu liniowych modeli jednoindeksowych, różnica między tymi modelami tkwi przede wszystkim w sposobie identyfikacji parametrów występujących w tych modelach. W przypadku modelu dla rynku akcji parametry te (powszechnie oznaczane jako α_i, β_i) są wyznaczane na podstawie danych z przeszłości, w sposób typowy dla metody regresji liniowej. Natomiast dla sformułowanego poniżej modelu określonego dla rynku obligacji, parametr - będący odpowiednikiem parametru β_i akcji - może być efektywnie (*a priori*) obliczony na podstawie danych bieżących oraz wprowadzonej wcześniej koncepcji okresowości D_i obligacji .

Podstawowe oznaczenia i definicje. W przedstawionym poniżej opisie modelu będziemy wykorzystywali następujące wielkości, z których część była już analizowana w punktach 5.1 i 5.2 (indeks i obligacji chwilowo pomijamy):

r - znana w chwili bieżącej $\tau = 0$ rynkowa stopa procentowa; zmienna deterministyczna,

$r^* = r + \Delta r$ - nowa wartość stopy procentowej r wynikająca z nieoczekiwanej (losowej) zmiany Δr tej stopy; zmienna losowa,

R^a - spodziewana stopa zwrotu (*anticipated return*), przy założeniu, że $r = const$; zmienna deterministyczna,

R^* - rzeczywista stopa zwrotu (*realized return*), przy założeniu, że $r^* = r + \Delta r$; zmienna losowa,

$\overline{R}^* = E(R^*)$ - oczekiwana stopa zwrotu (*expected return*), tj. wartość oczekiwana rzeczywistej stopy zwrotu R^*,

$\Delta R = R^* - R^a$ - nieoczekiwana stopa zwrotu (*excess return*), tj. nieoczekiwana zmiana stopy zwrotu wywołana zmianą Δr stopy procentowej; zmienna losowa,

$\Delta R_e = E(\Delta R) = E(R^* - R^u)$ - wartość oczekiwana nieoczekiwanej zmiany stopy zwrotu (*expected excess return*).

Jak już wcześniej wspomniano, wszystkie rozpatrywane powyżej stopy zwrotu dotyczą horyzontu inwestycyjnego równego jednemu okresowi odsetkowemu analizowanych obligacji O_i; są to tzw. stopy zwrotu „z okresu na okres" (*period-by-period return*). Zakładamy przy tym, że wszystkie okresy odsetkowe obligacji pokrywają się ze sobą. Oznacza to że rozpatrujemy zbiór obligacji $\{O_i, i = 1,...,n\}$ będący pewnym podzbiorem zbioru wszystkich obligacji występujących na danym rynku kapitałowym. Mamy zatem

$$\{O_i,\ i = 1,...,n\} \subset A,$$

gdzie A - zbiór wszystkich obligacji na rynku; n - liczba wszystkich obligacji o tych samych okresach odsetkowych. Terminy do wykupu T_i obligacji O_i mogą być oczywiście różne; przy czym zakładamy, że rozpatrywane są wyłącznie obligacje długoterminowe, o parametrach okresowości $D_i^0 >> 1$. W praktyce oznacza to, że bierzemy pod uwagę obligacje o terminach do wykupu (*term to maturity*) $T_i \geq 5$ lat.

Portfel rynkowy obligacji. Wprowadzimy teraz do rozważań pewien umowny *portfel rynkowy* złożony obligacji o tych samych okresach odsetkowych, tj.

I_m - portfel utworzony ze zbioru wszystkich obligacji $\{O_i,\ i = 1,...,n\}$, oraz

$R_m \triangleq \sum_{i=1}^{n} X_i R_i^*$ - stopa zwrotu z portfela I_m za jeden okres odsetkowy, (5.16)

gdzie $X_i \in (0,1)$ - udział wartościowy obligacji O_i w portfelu I_m; $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$.

Stopę zwrotu R_m z portfela rynkowego I_m obligacji O_i $(i = 1,...,n)$ definiujemy więc jako średnią ważoną jednookresowych stóp zwrotu R_i^* z inwestycji w poszczególne obligacje, przy czym przyjmiemy, że

$$X_i = \frac{l_i P_i}{\sum_{i=1}^{n} l_i P_i}, \qquad \forall\, i = 1,\ldots,n, \tag{5.17}$$

gdzie l_i - liczba wyemitowanych obligacji O_i, P_i - cena „czysta" obligacji tj. cena na początku danego okresu odsetkowego.

Mając na uwadze powyższe oznaczenia i wprowadzając pojęcie *przestrzeni liniowej obligacji*, możemy formalnie zapisać portfel rynkowy I_m jako kombinację wypukłą

$$I_m = \bigcup_{i=1}^{n} X_i O_i \,. \tag{5.18}$$

Mamy ponadto: $R_i^* \triangleq \dfrac{C_i + P_1^i - P_0^i}{P_0^i}, \qquad i = 1,\dots,n,$ (5.19)

gdzie C_i - odsetki od obligacji O_i, P_0^i - cena rynkowa obligacji O_i na początku danego okresu odsetkowego, P_1^i - cena rynkowa obligacji O_i na początku następnego okresu odsetkowego.

Z powyższego wynika, że stopa zwrotu R_m portfela I_m jest zmienną losową; oznaczymy więc

$\overline{R}_m = E(R_m)$ - wartość oczekiwana stopy zwrotu R_m,

$\sigma_m^2 = E(R_m - \overline{R}_m)^2$ - wariancja stopy zwrotu R_m.

Dla celów dalszych rozważań zakładamy, że parametry $\overline{R}_m$, σ_m^2 rozkładu rynkowej stopy zwrotu R_m są określane na podstawie danych z przeszłości. Oznaczymy: M - okres obserwacji, $R_{m\nu}$ - wartość rynkowej stopy zwrotu w chwili ν. A zatem,

$$\overline{R}_m = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{M} R_{m\nu}\,, \qquad \sigma_m^2 = \frac{1}{M-1}\sum_{\nu=1}^{M}(R_{m\nu} - \overline{R}_m)^2 \;. \tag{5.20}$$

Ze wzoru (5.20) wynika, że w celu wyznaczenia estymatora wartości oczekiwanej $\overline{R}_m = E(R_m)$ musimy dokonać dwóch uśrednień; tzw. najpierw „uśrednienia po zbiorze", a później „uśrednienia po czasie".

Zmienna resztowa. W wyprowadzonym w punkcie 5.2 wzorze (5.15) na rzeczywistą stopę zwrotu R_i^* z obligacji O_i, wprowadzimy dodatkowo losowy składnik resztowy (*residual*) ε_i. Wprowadzenie tego składnika ma na celu uwzględnienie tych wszystkich sytuacji, w których wprowadzone przez nas wcześniej założenia mogą nie być spełnione.

Mamy więc: ε_i - losowa zmienna resztowa o parametrach

$E\varepsilon_j = 0;\quad \mathrm{var}(\varepsilon_i) = \sigma_{\varepsilon}^2;\quad \forall\, i = 1,\dots,n\,,$ przy czym zakładamy, że

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0\,, \qquad \forall\, i, j = 1,\dots,n\,;\; i \neq j\,, \tag{5.21}$$

oraz $\quad \text{cov}(\varepsilon_i, R_m) = E\,[\varepsilon_i (R_m - \overline{R}_m)] = 0, \qquad \forall\, i = 1,...,n\,.$ (5.22)

Sformułowanie modelu. Przedstawimy teraz trzy równoważne sformułowania modelu jednoindeksowego dla rynku obligacji. Sformułowania te oznaczymy kolejno jako modele I, II i III.

Uwzględniając we wzorze (5.15) na rzeczywistą stopę zwrotu R_i^* - dodatkowo - składnik resztowy ε_i, otrzymamy

$$R_i^* = r - (D_i^0 - 1)\,\Delta r + \varepsilon_i\,; \qquad i=1,\ldots,n. \tag{5.23}$$

Należy w tym miejscu zwrócić uwagę na błędną postać analogicznego wzoru, podaną na stronie 553 pracy *Eltona, Grubera* (1995). Podany w tej pracy wzór na rzeczywistą stopę zwrotu z obligacji (nazwaną przez w/w autorów jako – „*total return*") – nie ma żadnego merytorycznego uzasadnienia.

Zależność (5.23) można zapisać następująco:

Model jednoindeksowy I

$$R_i^* = R_i^a - B_i \Delta r + \varepsilon_i \qquad \forall\; i=1,\ldots,n, \tag{5.24}$$

gdzie $\quad R_i^a = r \quad$ - spodziewana stopa zwrotu, (5.25)

$B_i = (D_i^0 - 1) \quad$ - zmodyfikowany parametr okresowości. (5.26)

Wyjaśnimy teraz dokładniej jakie sytuacje uzasadniają wprowadzenie do modelu (5.24) zmiennej resztowej ε_i. Otóż przy wyprowadzeniu równoważnego wzoru (5.23) przyjęliśmy następujące założenia upraszczające, które w ogólnym przypadku mogą nie być spełnione:

(i) Rozpatrujemy rynek zrównoważony; a więc zakładamy, że ceny rynkowe P_0^i oraz P_1^i analizowanych obligacji są równe wartościom wewnętrznym tych obligacji w chwilach $\tau = 0$ oraz $\tau = 1$.

(ii) Struktura terminowa stóp procentowych jest płaska, tj. $r_{0t} = r$, $\forall\; t = 1,...,T$, a ponadto, możliwe są tylko przesunięcia równoległe Δr tej struktury.

(iii) Zmiana wartości obligacji P_1^i spowodowana zmianą Δr stopy procentowej może być oszacowana za pomocą parametru okresowości D_i^1, co jest prawdziwe tylko dla małych zmian Δr.

(iv) Przyjęliśmy, że okresy odsetkowe obligacji O_i $(i = 1,...,N)$ o różnych terminach do wykupu T_i - ściśle pokrywają się ze sobą. Mając na uwadze, że obligacje O_i mogą pochodzić z różnych emisji oraz - że analizujemy różne serie tych obligacji - wymaga to specjalnego doboru zbioru obligacji, co nie zawsze jest możliwe.

W analizowanym modelu przyjęto, że oddziaływanie wszystkich czynników wynikających z niespełnienia założeń (i)-(iv), reprezentowanych przez zmienną losową ε_i, „przeciętnie ulegnie zniesieniu" - co uzasadnia przyjęcie założenia, że $E\varepsilon_i = 0$, $\forall 1,...,n$.

Ponadto, kluczowym założeniem, jakie rozpatruje się w ramach modelu (5.24) jest to, że współczynniki korelacji pomiędzy zmiennymi ε_i, ε_j są dla $i \neq j$ równe zeru. Powyższe oznacza bowiem postulat, że głównym i jedynym czynnikiem obserwowanej na rynkach kapitałowych korelacji pomiędzy stopami zwrotu z różnych obligacji jest zmiana rynkowej stopy procentowej Δr. Tak więc ryzyko stopy procentowej, wyrażające się nieoczekiwaną zmianą Δr - jest wspólne dla wszystkich analizowanych obligacji. Ryzyko to możemy traktować jako pewne **ryzyko systematyczne** (*systematic risk*), oddziaływujące jednocześnie na stopę zwrotu wszystkich obligacji. Należy przy tym podkreślić przeciwny kierunek tych oddziaływań; tj. wzrost stopy procentowej $(\Delta r > 0)$ powoduje spadek R_i^* oraz spadek tej stopy $(\Delta r < 0)$ powoduje wzrost R_i^*. Wynika to bezpośrednio ze znaku „minus" występującym w modelu (5.24).

Natomiast zmienność składnika resztowego ε_i - mierzona wariancją $\sigma_{\varepsilon i}^2$ - reprezentuje w analizowanym modelu **ryzyko specyficzne** (*residual risk*), charakterystyczne tylko dla danej obligacji O_i. Jak to później pokażemy, ryzyko to można wyraźnie zmniejszyć (a teoretycznie nawet zredukować do zera) poprzez odpowiednią dywersyfikację przyjętego portfela inwestycyjnego. Chodzi w tym przypadku o odpowiedni dobór udziałów wartościowych poszczególnych obligacji w portfelu, dokonany na podstawie znajomości wzajemnych korelacji pomiędzy stopami zwrotu z inwestycji w te walory. Z tego też powodu ryzyko specyficzne papieru wartościowego nosi często w teorii portfela nazwę ryzyka dywersyfikowalnego; w odróżnieniu od rynkowego ryzyka systematycznego, którego nie można pomniejszyć za pomocą dywersyfikacji. Jak to wykazaliśmy powyżej, ryzyko to - przy pewnych założeniach upraszczających - wynika wprost z ryzyka stopy procentowej.

Powyższe uwagi uzasadniają zastosowanie w odniesieniu do modelu (5.24), wprowadzonej wcześniej koncepcji stopy zwrotu R_m z portfela rynkowego.

A mianowicie, ze wzorów (5.16) i (5.24) mamy

$$R_m \triangleq \sum_{i=1}^{n} X_i R_i^* = \sum_{i=1}^{n} X_i R_i^a - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i B_i \right) \Delta r + \sum_{i=1}^{n} X_i \varepsilon_i \,. \tag{5.27}$$

We wzorze tym, mamy:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i R_i^a = \sum_{i=1}^{n} X_i r = r \sum_{i=1}^{n} X_i = r \,, \tag{5.28}$$

bowiem $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$, z założenia. (5.29)

We wzorze (5.27) mamy również

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \varepsilon_i \approx 0 \,, \tag{5.30}$$

bo średnia ważona odpowiednio dużej liczby nieskorelowanych zmiennych losowych o zerowej wartości oczekiwanej jest zbieżna do zera, co można łatwo wykazać. Wystarczy w tym celu zauważyć, że wariancja wyrażenia (5.30) dla dowolnie dużych n - jest dowolnie mała; natomiast wartość oczekiwana tego wyrażenia jest oczywiście równa zeru.

Ponadto, we wzorze (5.27) oznaczymy

$B_m = \sum_{i=1}^{n} X_i B_i$ -parametr zmodyfikowanej okresowości portfela rynkowego. (5.31)

Biorąc pod uwagę (5.26) i (5.31), mamy

$$B_m = \sum_{i=1}^{n} X_i B_i = \sum_{i=1}^{n} X_i \left(D_i^0 - 1 \right) = \sum_{i=1}^{n} X_i D_i^0 - \sum_{i=1}^{n} X_i = D_m^0 - 1 \,, \tag{5.32}$$

gdzie $D_m^0 = \sum_{i=1}^{n} X_i D_i^0$ - okresowość portfela rynkowego. (5.33)

Jak już bowiem wspomnieliśmy w punkcie 3.3, można wykazać, że okresowość dowolnego portfela obligacji jest równa sumie ważonej parametrów okresowości D_i^0 poszczególnych obligacji wchodzących w skład tego portfela.

Model portfela rynkowego. Podstawiając wzory (5.28), (5.30) i (5.31) do zależności (5.27) otrzymamy

$$R_m = r - B_m \Delta r. \tag{5.34}$$

Wyprowadzony model portfela rynkowego jest odpowiednikiem modelu (5.24) rozpatrywanego dla pojedynczej akcji O_i. Zauważmy, że w przypadku modelu (5.34), *spodziewana stopa zwrotu z portfela* (wyznaczona dla $\Delta r = 0$) jest równa rynkowej stopie procentowej, tj.

$$R_m^a = \sum_{i=1}^{n} X_i R_i^a = r, \tag{5.35}$$

Ponadto, w modelu rynkowym nie występuje składnik ***ryzyka specyficznego*** reprezentowanego, w przypadku pojedynczej obligacji - przez zmienna resztową ε_i. W modelu tym występuje więc wyłącznie czynnik ***ryzyka systematycznego***, reprezentowanego przez zmienność Δr rynkowej stopy procentowej.

Z równania (5.34) modelu portfela rynkowego otrzymamy

$$\Delta r = \frac{1}{B_m}(r - R_m). \tag{5.36}$$

Wykorzystując wzór (5.36), model jednoindeksowy (5.24) sformułowany dla pojedynczej obligacji O_i, można wyrazić następująco:

Model jednoindeksowy II

$$R_i^* = R_i^a + \frac{B_i}{B_m}(R_m - r) + \varepsilon_i \quad , \quad \forall\ i=1,\dots,n. \tag{5.37}$$

Jest to główna postać rozpatrywanego w tym punkcie modelu stopy zwrotu z obligacji. Z modelu tego można bezpośrednio wyznaczyć podstawowe parametry, mające zasadnicze znaczenie dla aktywnego zarządzania portfelowego. Są to:

Spodziewana stopa zwrotu (*anticipated return*)

$$R_i^a = r, \qquad i=1,\dots,n, \tag{5.38}$$

Oczekiwana stopa zwrotu (*expected return*)

$$\overline{R}_i = E(R_i^*) = R_i^a + \frac{B_i}{B_m}(\overline{R}_m - r), \qquad i=1,\dots,n, \tag{5.39}$$

Wariancja stopy zwrotu

$$\text{var}\,(R_i^*) = \sigma_i^2 = \frac{B_i^2}{B_m^2}\,\sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2, \qquad i=1,\dots,n, \tag{5.40}$$

Kowariancja

$$\text{cov}\,(R_i, R_j) = \sigma_{ij} = \frac{B_i B_j}{B_m^2}\,\sigma_m^2, \qquad i,j=1,\dots,n;\ i \neq j\,. \tag{5.41}$$

Ponadto, z modelu (5.37) mamy:

Nieoczekiwana stopa zwrotu (*excess return*)

$$\Delta R_i \triangleq R_i^* - R_i^a = \frac{B_i}{B_m}(R_m - r) + \varepsilon_i, \qquad i=1,\dots,n, \tag{5.42}$$

Wartość oczekiwana nieoczekiwanej stopy zwrotu (*expected excess return*)

$$\Delta R_i^e \triangleq E(R_i^* - R_i^a) = \frac{B_i}{B_m}(\overline{R}_m - r)\,. \tag{5.43}$$

***Uwaga*:** Przedstawione powyżej parametry (5.39)-(5.43) można łatwo wyznaczyć bezpośrednio z równania (5.37) modelu. Tym niemniej, w przypadku obliczania kowariancji $\text{cov}(R_i, R_j)$ należy dodatkowo wziąć pod uwagę przyjęte wcześniej założenie (5.22), tj.

$$\text{cov}(\varepsilon_i, R_m) \triangleq E\,[\varepsilon_i(R_m - \overline{R}_m)] = 0\,, \quad \forall\, i=1,\dots,n\,. \tag{5.44}$$

Założenie to jest pewnym arbitralnym założeniem modelowym, którego prawdziwość należałoby sprawdzić na podstawie danych empirycznych. Przyjęty warunek nieskorelowania stopy zwrotu R_m portfela rynkowego i zmiennej resztowej ε_i jest niezwykle istotny; determinuje on bowiem rozłączność analizowanego w ramach powyższego modelu ryzyka systematycznego i ryzyka specyficznego danej obligacji. Rozłączność ta wynika bezpośrednio z addytywnej postaci wzoru (5.40), określającego wariancję σ_i^2 stopy zwrotu obligacji.

Na uwagę zasługuje w rozpatrywanym przypadku wskazanie kolejnego już błędu, występującego w zakresie omawianej powyżej tematyki – w pracy *Eltona, Grubera* (1995). A mianowicie na stronie 554 tej pracy, we wzorze na wariancję σ_i^2 rzeczywistej stopy zwrotu z analizowanej obligacji – nie uwzględniono składnika $\sigma_{\varepsilon i}^2$ reprezentującego wariancje zmiennej resztowej

ε_i. Jest to oczywiście ewidentnym niedopatrzeniem; szczególnie biorąc pod uwagę fakt, że jest to już piąte wydanie tej pracy.

Wyróżnienie wprowadzonych powyżej kategorii: spodziewanej stopy zwrotu (*anticipated return*), oczekiwanej stopy zwrotu (*expected return*), nieoczekiwanej stopy zwrotu (*excess return*) oraz wartości oczekiwanej nieoczekiwanej stopy zwrotu (*expected excess return*) - jest istotne dla właściwego zrozumienia większości zaawansowanych prac z dziedziny matematyki finansowej, odnoszących się do rynku obligacji; por. *Zenios* (1993). Jedną z zalet wyprowadzonego powyżej modelu jednoindeksowego (5.37) jest właśnie możliwość dokonania przejrzystej interpretacji tych pojęć.

Przedstawimy teraz trzecią postać modelu jednoindeksowego obligacji. A mianowicie, odejmując stronami wzory (5.37) i (5.39) otrzymamy

$$R_i^* - \overline{R}_i = \frac{B_i}{B_m}(R_m - \overline{R}_m) + \varepsilon_i, \qquad i=1,\ldots,n. \tag{5.45}$$

Ze wzoru (5.45) mamy zatem

Model jednoindeksowy III

$$R_i^* = \overline{R}_i + \frac{B_i}{B_m}(R_m - \overline{R}_m) + \varepsilon_i, \qquad \forall\, i=1,\ldots,n, \tag{5.46}$$

gdzie $\overline{R}_i$, $\overline{R}_m$ - wartości oczekiwane rzeczywistych stóp zwrotu z pojedynczej obligacji O_i i z portfela rynkowego I_m, dane wzorami (5.39) i (5.20).

Natomiast parametry B_i, B_m dane są wzorami (5.26) i (5.32), tj.

$$B_i = D_i^0 - 1, \qquad i=1,\ldots,n, \quad \text{oraz} \quad B_m = D_m^0 - 1. \tag{5.47}$$

Warto zauważyć, że wyprowadzony powyżej model (5.46) ma podobną postać do modelu przedstawionego w pracy *Eltona, Grubera* (1995), s.554; przy czym w pracy tej w miejsce zmodyfikowanych parametrów okresowości B_i i B_m wprowadzono parametry *bieżącej okresowości* D_i i D_m - co nie ma żadnego uzasadnienia.

Na zakończenie rozważań dotyczących jednoindeksowego modelu obligacji, należałoby wspomnieć o sposobie oszacowania wariancji $\sigma_{\varepsilon i}^2$ zmiennej resztowej ε_i - bez czego rozpatrywany model byłby niekompletny. Otóż wariancję tę można wyznaczyć na podstawie danych z przeszłości, wykorzystując model jednoindeksowy II dany równaniem (5.37); szczegóły – podano w raporcie autora (*Jakubowski*, 2004).

6. Zagadnienie Markowitza zarządzania portfelem obligacji

Sformułujemy teraz zagadnienie portfelowe Markowitza dla rynku obligacji. Zagadnienie to przedstawimy w podobny sposób, jak się to czyni dla rynku akcji ; por. (*Elton, Gruber*, 1995).

Dla rynku obligacji, wykorzystując model jednoindeksowy II dany wzorem (5.37) oraz przyjmując dla uproszczenia zapisu $R_i = R_i^*$ - rzeczywista stopa zwrotu z obligacji O_i, mamy

$$R_i = R_i^a + \frac{B_i}{B_m}(R_m - r) + \varepsilon_i \qquad i = 1,\dots,n\,, \tag{6.1}$$

$$\overline{R}_i = R_i^a + \frac{B_i}{B_m}(\overline{R}_m - r)\,; \quad \text{gdzie } R_i^a = r\,, \tag{6.2}$$

$$\operatorname{var}(R_i) = \sigma_i^2 = \frac{B_i^2}{B_m^2}\sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2 \qquad i = 1,\dots,n\,, \tag{6.3}$$

$$\operatorname{cov}(R_i, R_j) = \sigma_{ij} = \frac{B_i B_j}{B_m^2}\sigma_m^2\,; \quad i, j = 1,\dots,n \quad i \neq j\,. \tag{6.4}$$

Przyjmując oznaczenie

$$\beta_i = \frac{B_i}{B_m}\,, \quad i = 1,\dots,n\,, \quad \text{(parametr „beta" obligacji);} \tag{6.5}$$

$$\text{gdzie } B_i = D_i^o - 1, \qquad B_i = D_m^o - 1,$$

wzory (6.1)-(6.4) mają następującą postać

$$R_i = R_i^a + \beta_i(R_m - r) + \varepsilon_i\,; \qquad i = 1,\dots,n\,; \tag{6.6}$$

$$\overline{R}_i = R_i^a + \beta_i(\overline{R}_m - r)\,, \tag{6.7}$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2\sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2\,, \tag{6.8}$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i\beta_j\sigma_m^2\,. \tag{6.9}$$

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$\boldsymbol{P} = \bigcup_{i=1}^{N} w_i O_i \qquad \text{- portfel obligacji,}$$

w_i - udział wartościowy obligacji O_i w portfelu $\boldsymbol{P}$, $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$,

R_p - stopa zwrotu z portfela obligacji $\boldsymbol{P}$,

$\overline{R}_p$, V_p - wartość oczekiwana i wariancja stopy zwrotu R_p.

W przedstawionym ujęciu portfel P jest kombinacją wypukłą obligacji O_i $(i = 1,\dots,N)$, traktowanych jako elementy pewnej przestrzeni liniowej obligacji. Ogólnie rzecz biorąc, dla portfela P można łatwo wykazać następujące relacje (*Elton*, *Gruber*, 1995):

$$R_p = \sum_{i=1}^{N} w_i R_i \,, \tag{6.10}$$

$$\overline{R}_p \triangleq E(R_p) = \sum_{i=1}^{N} w_i \overline{R}_i \,, \tag{6.11}$$

$$V_p \triangleq \operatorname{var}(R_p) = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} \,. \tag{6.12}$$

Podstawiając do wzorów (6.11), (6.12) wartości $\overline{R}_i$, σ_i^2, σ_{ij} określone dla rynku obligacji wzorami (6.7)-(6.9), otrzymamy

$$\overline{R}_p = \sum_{i=1}^{N} w_i \overline{R}_i = \sum_{i=1}^{N} w_i \, [R_i^a + \beta_i (\overline{R}_m - r)] \,, \tag{6.13}$$

$$V_p = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 (\beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2) + \sum_{i} \sum_{j\neq i} w_i w_j \, \beta_i \beta_j \sigma_m^2 \,, \tag{6.14}$$

gdzie $\beta_i = B_i / B_m$, $i = 1,\dots,n$.

Optymalizacja portfela obligacji. Należy tak dobrać udziały wartościowe w_i obligacji O_i $(i = 1,\dots,N)$ wchodzących w skład analizowanego portfela P, aby przy zadanej w góry wartości oczekiwanej $\overline{R}_p^*$ stopy zwrotu z portfela P - wariancja V_p tej stopy zwrotu była minimalna. Mamy zatem

$$\hat{V}_p = \min_{\{w_i\}} V_p(w_1,\dots,w_i,\dots,w_N) \,, \tag{6.15}$$

przy ograniczeniach

$$\overline{R}_p = \sum_{i=1}^{N} w_i \overline{R}_i = \overline{R}_p^* \tag{6.16}$$

oraz $$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1, \quad w_i \in [0,1], \quad \forall\, i = 1,\dots,N \,; \tag{6.17}$$

gdzie wartości $\overline{R}_p(\cdot)$, $V_p(\cdot)$ są dane wzorami (6.13), (6.14).

Sformułowane powyżej zagadnienie optymalizacji (6.15)-(6.17) jest klasycznym *zadaniem programowania kwadratowego* i może być rozwiązane za pomocą jednej ze znanych metod. Również wszystkie pozostałe pojęcia, charakterystyczne dla analizy portfelowej rynku akcji - przenoszą się bez zmian na przypadek analizowanego powyżej rynku obligacji. Dotyczy to w szczególności analizy tzw. brzegu efektywnego (*effective frontier*) rozwiązań dopuszczalnych, analizy ryzyka systematycznego i ryzyka specyficznego pojedynczej obligacji, analizy ryzyka systematycznego i ryzyka specyficznego portfela obligacji, zagadnienia dywersyfikacji portfela i wielu innych problemów; zagadnienia te omówiono szczegółowo w cytowanym już raporcie autora *Jakubowski* (2004).

Istnieje jednak jedna podstawowa różnica pomiędzy modelem portfelowym Markowitza sformułowanym dla rynku akcji a analogicznym modelem określonym dla rynku obligacji. Otóż ze wzoru (6.12) na wariancję V_p stopy zwrotu z portfela $\boldsymbol{P}$ wynika, że byłoby korzystnie aby współczynniki korelacji jak największej liczby walorów dobieranych do portfela - były przeciwnych znaków. W przypadku portfela obligacji nie jest to jednak w praktyce możliwe. Ze wzoru (6.4) na kowariancję pomiędzy stopami zwrotu R_i oraz R_j obligacji mamy bowiem

$$\operatorname{cov}(R_i, R_j) \triangleq \sigma_{ij} = \frac{B_i B_j}{B_m^2}\sigma_m^2, \qquad i, j = 1,\ldots,n, \quad i \neq j, \tag{6.18}$$

gdzie $B_i = D_i^0 - 1 \quad (i = 1,\ldots,n)$ oraz $B_m = D_m^0 - 1$.

Biorąc zatem pod uwagę, że (z założenia) $D_i^0 > 1$, $\forall\, i = 1,\ldots,n$, wartości zmodyfikowanych okresowości B_i i B_j są dodatnie, a tym samym

$$\operatorname{cov}(R_i, R_j) > 0, \quad \forall\, i, j = 1,\ldots,n, \quad i \neq j. \tag{6.19}$$

Przedstawiona powyżej własność rynku obligacji O_i $(i = 1,\ldots,n)$ mówiąca o tym, że rzeczywiste stopy zwrotu z tych obligacji są zawsze dodatnio skorelowane, wyraźnie odróżnia ten rynek od rynku akcji, na którym ujemne korelacje jednak są możliwe.

Można stąd wysnuć wniosek, że możliwości jakie oferuje rynkowi obligacji teoria portfela są znacznie mniejsze niż to ma miejsce w przypadku akcji. Dla obligacji, nie można bowiem dobierać do portfela P walorów o przeciwnych korelacjach - co wyraźnie zmniejszyłoby wariancję V_p stopy zwrotu z portfela - bowiem walory takie praktycznie nie występują. Oczywiście powyższy wniosek jest prawdziwy jedynie pod warunkiem spełnienia szeregu założeń, jakie przyjęliśmy formułując model jednoindeksowy obligacji.

7. Zagadnienie stabilności parametrów modelu

W przypadku zastosowania w praktyce sformułowanego w niniejszej pracy modelu zarządzania portfelem obligacji może się pojawić pewien problem. Otóż w klasycznym zagadnieniu portfelowym Markowitza, zakłada się stabilność w czasie użytych w analizowanym modelu parametrów. W szczególności dotyczy to współczynników kowariancji $\operatorname{cov}(R_i, R_j)$ pomiędzy stopami zwrotu z aktywów wchodzących w skład portfela. W przypadku rynku akcji, obserwowana często niestabilność w czasie wartości tych kowariancji, powoduje zasadnicze trudności w zastosowaniu modelu Markowitza w praktyce rynków kapitałowych.

Zauważmy teraz, że podobne problemy mogą pojawić się w trakcie stosowania rozpatrywanego modelu zarządzania portfelowego dla rynku obligacji. Jak to bowiem wynika ze wzoru (6.18) na kowariancję pomiędzy stopami zwrotu R_i i R_j obligacji, parametr ten zależy od iloczynu zmodyfikowanych okresowości B_i, B_j obligacji O_i i O_j, podzielonego przez zmodyfikowaną okresowość B_m portfela rynkowego. Parametry B_i, B_j i B_m - podobnie jak parametry okresowości D_i^0, D_j^0 i D_m^0 - maleją z upływem czasu bieżącego. Dlatego też, należałoby przeprowadzić zarówno teoretyczne jak i empiryczne badania - jaka jest zależność od czasu kowariancji $\operatorname{cov}(R_i, R_j)$, $i, j = 1,...,n$; $i \neq j$, analizowanych obligacji. W przypadku, gdyby kowariancje te były wolno zmienne w czasie - w obszarze analizowanego horyzontu inwestycyjnego - zastosowanie zaproponowanego podejścia w praktyce mogłoby prowadzić do bardzo obiecujących wyników.

Zagadnienie analizy stabilności parametrów zaproponowanego modelu zarządzania portfelem obligacji można formalnie zapisać następująco.

Oznaczymy $D_i^0 = D_i^0(\tau)$ - parametr okresowości obligacji O_i jako funkcja (malejąca) czasu bieżącego $\tau = 1,2,3,...$. Biorąc pod uwagę wzory (6.5) oraz (5.32), (5.33) - parametr „beta" obligacji O_i możemy wyrazić następująco

$$\beta_i \triangleq \frac{B_i}{B_m} = \frac{D_i^0(\tau)-1}{\sum_{i=1}^{n} X_i D_i^0(\tau)-1} = \frac{D_i^0(\tau)-1}{D_m^0(\tau)-1}, \tag{7.1}$$

gdzie $D_m^0(\tau)$ - okresowość portfela rynkowego.

A zatem, z (6.18) i (7.1) otrzymamy

$$\operatorname{cov}(R_i, R_j) = \sigma_{ij}(\tau) = \beta_i(\tau)\beta_j(\tau)\sigma_m^2; \quad i, j = 1,...,n; \quad i \neq j. \tag{7.2}$$

Tak więc analiza stabilności ze względu na czas bieżący τ kowariancji $\sigma_{ij}(\tau)$ pomiędzy stopami zwrotu R_i i R_j rozpatrywanych obligacji, sprowadza się do analizy przebiegu w czasie parametrów $\beta_i(\tau)$ tych obligacji. Z kolei, zgodnie ze wzorem (7.1), parametr $\beta_i(\tau)$ jest ilorazem dwóch funkcji malejących z upływem czasu τ. Rodzi to więc nadzieję, że owe zmiany w czasie tych funkcji będą się wzajemnie kompensować; przynajmniej w stopniu uzasadniającym stosowalność w praktyce zaproponowanego modelu zarządzania portfelem obligacji. Bardziej szczegółowy charakter przebiegu funkcji $\beta_i(\tau)$ można by określić wprowadzając wzory na okresowość $D_i^0(\tau)$ obligacji, dla przypadku ciągłej kapitalizacji odsetek; por. *Jakubowski* (2003b).

Również wydaje się (lecz należałoby to sprawdzić), że założenie co do stabilności w czasie parametrów analizowanego modelu jest spełnione w przypadku, gdy rozpatrujemy zbiór długoterminowych obligacji O_i $(i = 1,...,n)$. Wówczas, dynamika zmian z upływem czasu bieżącego τ parametrów „beta" obligacji, a tym samym i współczynników kowariancji σ_{ij} - powinna być mała. Natomiast w przypadku obligacji krótkoterminowych (tj. o bliskich terminach do wykupu T_i) mogą się pojawić zasadnicze problemy, związane z zastosowaniem w praktyce zaproponowanego podejścia do zarządzania portfelem obligacji.

Na zakończenie tych rozważań należy podkreślić, że charakter zmienności w czasie rozpatrywanych powyżej parametrów $\beta_i(\tau)$ obligacji O_i $(i = 1,\ldots,n)$ - determinuje nie tylko analizę stabilności współczynników kowariancji (7.2) pomiędzy stopami zwrotu z obligacji wchodzących w skład danego portfela. Zmienność bądź stałość w czasie parametrów $\beta_i(\tau)$ oddziaływuje bowiem również na charakter zachowania się w czasie wartości oczekiwanej stóp zwrotu $\overline{R_i}$ z analizowanych obligacji oraz wariacji σ_i^2 tych stóp zwrotu. Wynika to bezpośrednio ze wzorów (6.7) i (6.8) określających te wartości; tj.

$$\overline{R}_i = R_i^a + \beta_i(\overline{R}_m - r), \tag{7.3}$$

gdzie $R_i^a = r, \qquad \forall\, i = 1,\ldots,n;$ oraz (7.4)

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2\, \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2. \tag{7.5}$$

Ponadto, zauważmy, że ze wzorów (7.3) i (7.4) określających wartość oczekiwaną $\overline{R}_i$ stóp zwrotu, mamy

$$\overline{R}_i = r + \beta_i\left(\overline{R}_m - r\right) = \left(1 - \beta_i\right) r + \beta_i\, \overline{R}_m. \tag{7.6}$$

Tak więc w trakcie analizy stabilności w czasie wartości oczekiwanych $\overline{R}_i$ pojawia się kolejny problem. Otóż jak to wynika z zależności (7.6), wartości te są liniowymi funkcjami (ze współczynnikiem nachylenia równym $1-\beta_i$) rynkowej stopy procentowej r. O stopie tej założyliśmy, że jest ona w chwili bieżącej zadana deterministycznie, jako realizacja (dla $\tau = 0$) pewnego procesu stochastycznego $r(\tau, \omega)$ opisującego ewolucję tej stopy w czasie; gdzie przez ω oznaczono losowe zdarzenie elementarne. Oczywiście dynamika w czasie (dla $\tau > 0$) tej realizacji $r(\tau)$ procesu $r(\tau, \omega)$ - wpływać będzie w określony sposób na dynamikę zmiany wartości oczekiwanej $\overline{R_i}\left(\tau\right)$, z upływem czasu bieżącego τ.

W celu pewnego ominięcia wskazanego powyżej problemu niestabilności oczekiwanej stopy zwrotu $\overline{R}_i$, możemy wziąć pod uwagę dwa założenia :

(i) Można przyjąć, że w analizowanym modelu rozpatrujemy tylko obligacje $O_i\left(i = 1,\ldots,n\right)$ o parametrach β_i bliskich jedności; powiedzmy przyjmujących wartości z przedziału $[0.8, 1.2]$. Wówczas, ze wzoru (7.6) bezpośrednio wynika, że wpływ wartości stopy procentowej r (a więc i zmienności w czasie tej wartości) na wartość oczekiwaną stopy zwrotu $\overline{R}_i$ będzie niewielki, w porównaniu ze stałym w czasie oddziaływaniem na tę wielkość - wartości oczekiwanej $\overline{R}_m$ stopy zwrotu z portfela rynkowego I_m.

(ii) Możemy również założyć, że we wszystkich wyprowadzonych powyżej zależnościach, determinujących analizowaną postać modelu zarządzania portfelowego na rynku obligacji – w miejsce bieżącej wartości rynkowej stopy procentowej r, wprowadzamy pewną długoterminową średnią wartości $\bar{r}$ tej stopy.

Oczywiście przyjęcie jednego z dwóch proponowanych powyżej założeń upraszczających będzie dosyć silnym odejściem od poziomu „rygoryzmu" reprezentowanego w prowadzonych dotąd rozważaniach. Niemniej wydaje się, że wobec przedstawionego powyżej problemu potencjalnej niestabilności w czasie oczekiwanej stopy zwrotu $\overline{R}_i$ z analizowanych obligacji – już nic bardziej rozsądnego w omawianym zakresie nie można uczynić.

8. Uwagi końcowe. Wyniki dalszych badań

Prezentowane w niniejszej pracy wyniki, dotyczące próby zastosowania teorii portfelowej Markowitza dla celów aktywnego zarządzania inwestycjami na rynku obligacji – zostały w istotny sposób uogólnione w cytowanym już kilkakrotnie raporcie wewnętrznym IBS PAN, opracowanym przez autora (*Jakubowski*, 2004). A mianowicie, w pracy tej sformułowano model portfelowy zarządzania obligacjami dla przypadku struktury terminowej stóp procentowych *spot* o dowolnym kształcie, przy czym założono, że dynamika zmian tej struktury wyraża się schematem:

$$\frac{d(1+r_{0t})}{1+r_{0t}} = \frac{d(1+r_{01})}{1+r_{01}}, \quad \forall\, t=1,\ldots,T. \tag{8.1}$$

Mówimy w tym przypadku o proporcjonalnych zmianach czynnika: jedność plus stopa procentowa *spot* r_{0t}, $(t=1,\ldots,T)$; czy też skrótowo (lecz niezbyt precyzyjnie) – o proporcjonalnych zmianach struktury terminowej stóp procentowych; por. *Zaremba* (1995). W omawianym modelu założono również, że dla analizowanego rynku kapitałowego spełnopna jest tzw. hipoteza czystych oczekiwań (*pure expectations*).

Przy spełnieniu sformułowanych powyżej założeń – w wyniku ciągu dosyć złożonych przekształceń i wyprowadzeń – uzyskano zaskakująco prosty rezultat. A mianowicie wykazano, że całość prezentowanych w niniejszej pracy wzorów, definiujących modele jednoindeksowe obligacji dla przypadku płaskiej krzywej dochodowości – przenosi się bez zmian na przypadek krzywej dochodowości o dowolnym kształcie – o ile tylko w miejsce rynkowej stopy procentowej r, wstawimy w analizowanych wzorach stopę procentową *spot* r_{01}, obowiązującą w najbliższym (tj. pierwszym) okresie odsetkowym rozpatrywanych obligacji.

W cytowanej pracy wskazano również, że jakiekolwiek odejście od wspomnianych założeń – powoduje już zasadnicze trudności w przeprowadzeniu przedstawionego w niniejszej pracy rozumowania. Na przykład, w przypadku przyjęcia , że na analizowanym rynku obowiązuje tzw. teoria preferencji płynności (*liquidity premium theory*) – pojawiają się już określone trudności w zdefiniowaniu wprowadzonego w niniejszej pracy nowego pojęcia „oczekiwanej okresowości" D^1 obligacji. Określone problemy pojawiają się również w przypadku, gdy rozpatrujemy bardziej ogólny – niż przedstawiony powyżej zależnością (8.1.) – schemat dynamiki zmian analizowanej struktury terminowej stóp procentowych, tj. schemat

$$\frac{d(1+r_{0t})}{1+r_{0t}} = L^{t-1}\frac{d(1+r_{01})}{1+r_{01}}, \quad \forall t=1,\ldots,T. \tag{8.2}$$

gdzie $L \in (0,1)$ – parametr szacowany na podstawie danych z przeszłości.

Reasumując przedstawione powyżej rozważania, można stwierdzić, że uzyskane dotychczas przez autora wyniki co do możliwości zastosowania teorii portfelowej Markowitza na rynku obligacji – jakkolwiek nie doprowadziły do ostatecznego rozwiązania omawianego problemu, umożliwiły one bardziej dokładne skonkretyzowanie analizowanych problemów i wynikających stąd trudności (por. punkt 7). Wydaje się, że w wyniku otrzymanych przekształceń i modeli – wiemy obecnie o wiele więcej niż to kryło się pod dosyć ogólnikowymi stwierdzeniami podanymi w cytowanej w punkcie 1 pracy *Fabozziego, Fonga* (1994) – że modelu Markowitza w ogóle nie da się w odniesieniu do rynku obligacji zastosować; bądź – niż to kryło się pod ogólną tezą *Eltona, Grubera* (1995) – że model ten można zastosować, ale po odpowiednich modyfikacjach.

Wydaje się, że sformułowana przez autora niniejszej pracy teza, że w przypadku, gdy rozpatrujemy obligacje długoterminowe – zastosowanie modelu portfelowego Markowitza ma sens – znajdzie potwierdzenie w dalszych badaniach. Dotyczy to szczególnie przypadku, gdy parametry „beta" analizowanych obligacji niezbyt odbiegają swymi wartościami od jedności. Jak to wskazano w punkcie 7 pracy, wymaga to jednak dalszych badań teoretycznych; oraz przede wszystkim – przeprowadzenia serii obliczeń eksperymentalnych.

Literatura

1. Babcock G.S. (1984). Duration as a Link Between Yield and Value. Journal of Portfolio Management, Summer & Fall.
2. Bierwag G.O. (1987). Duration Analysis - Managing Interest Rate Risk. Ballinger Press, Cambridge, Mass.
3. Dattatreya R.E., Fabozzi F.J. (1995). Active Total Return Management of Fixed-Income Portfolios. Irwin, Burr Ridge, Revised ed.
4. Elton E.J., Gruber M.J. (1995). Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. Wiley, New York, 5-th Ed.
5. Fabozzi F.J., Fong G. (1994). Advanced Fixed Income Portfolio Management – The State of Art. Probus Pub. Comp., Chicago.
6. Fabozzi F.J. (2000). Bond Markets - Analysis and Strategies. Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J., 4-th Ed.
7. Francis J.C. (1991). Investments - Analysis and Management. McGraw-Hill, New York, 5-th Ed.
8. Ho T.S.Y. (1990). Strategic Fixed Income Investment. Dow Jones-Irwin, Homewood, Ill.
9. Jakubowski A. (2003a). Zarządzanie portfelowe na rynku obligacji. Raport Badawczy IBS PAN, RB/59/2003, Warszawa, 2003.
10. Jakubowski A. (2003b). Zarządzanie inwestycjami na rynku obligacji. W: M.Krawczak, A.Jakubowski, P.Konieczny, R.Kulikowski et al., Aktywne Zarządzanie Inwestycjami Finansowymi. EXIT, Warszawa, Rozdz.6, s. 269-374.
11. Jakubowski A. (2004) Zarządzanie portfelem obligacji w przypadku proporcjonalnych zmian struktury terminowej stóp procentowych. Raport Badawczy IBS PAN, RB/41/2004, Warszawa.
12. Krawczak M., Miklewski A., Jakubowski A., Konieczny P. (2000). Zarządzanie Ryzykiem Inwestycyjnym. IBS PAN, Ser. Badania Systemowe, t. 25, Warszawa.
13. Krawczak M., Jakubowski A., Konieczny P., Kulikowski R., Miklewski A., Szkatuła G. (2003). Aktywne Zarządzanie Inwestycjami Finansowymi. EXIT, Warszawa.

14. Kulikowski R., Bury H., Jakubowski A. (1995). Analiza czynnikowa struktury czasowej stóp procentowych oraz inflacji w Polsce. Raport IBS PAN, PSWD 5/95, Warszawa.

15. Markowitz H.M. (1987). Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets. Basil Blackwell, New York.

16. Zaremba L.S. (1995). Solutions of immunization problem in case of proportional spot rate shifts. Working Paper WP-3-1995, Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences, Warsaw.

17. Zenios S.A., Ed. (1993). Financial Optimization. Cambridge University Press, Cambridge.