263/2005

# Raport Badawczy
# Research Report

**RB/45/2005**

# Wieloaspektowy statystyczny model sterowania procesem edukacyjnym

**M. Bereziński, M. Inkielman, D. Wagner**

**Instytut Badań Systemowych**
**Polska Akademia Nauk**

**Systems Research Institute**
**Polish Academy of Sciences**

# POLSKA AKADEMIA NAUK

## Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772


Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr inż. Roman Kulikowski


Warszawa 2005

# WIELOASPEKTOWY STATYSTYCZNY MODEL STEROWANIA PROCESEM EDUKACYJNYM

Mirosław Bereziński[1], Michał Inkielman[2], Dariusz Wagner[3]
Instytut Badań Systemowych PAN
01-447 Warszawa, Newelska 6
e-mail: [1]Miroslaw.Berezinski@ibspan.waw.pl
[2]Michal.Inkielman@ibspan.waw.pl
[3]Dariusz.Wagner@ibspan.waw.pl

**Streszczenie**
Matematycznym modelem procesu edukacyjnego w szkole wyższej może być stochastyczna sieć spływowo-rozpływowa, której węzły reprezentują kierunki studiów, semestry, jakościowe grupy studentów itp., a intensywności przejść między węzłami są wyrażone w kategoriach prawdopodobieństw przejść. Sterowanie procesem edukacyjnym może być rozumiane jako proces ukierunkowanego oddziaływania nań za pomocą takich czynników i w taki sposób, by stale maksymalizować wartości prawdopodobieństw przejść w przód. Aby móc to robić, trzeba dysponować narzędziem pozwalającym dynamicznie, wieloaspektowo i obiektywnie oceniać poziom wiedzy studentów oraz dzielić ich zbiorowość na grupy jednorodne na podstawie uzyskanych przez nich wyników. Kategoryzacja ta może być pomocna przy opracowywaniu formalnej, organizacyjnej i merytorycznej koncepcji indywidualizacji studiów. W pracy zaproponowano metodę przeprowadzania takiej kategoryzacji, opartą na traktowaniu zbiorowości studentów jako populacji statystycznej. Sformułowano kryterium jednorodności uwzględniające wieloaspektowość ocen studentów i przedstawiono iteracyjną procedurę prowadząca do podziału populacji studentów na grupy jednorodne. Z punktu widzenia statystyki matematycznej granice między niektórymi grupami mogą nie być istotne, podano zatem statystyczne kryterium badania istotności podziału. W przypadku, gdy granica między dwiema sąsiednimi grupami nie jest istotna łączy się je w jedną grupę. Podano przykład zastosowania metody w edukacji. Sformułowano podstawowe wnioski odnoszące się do procesu edukacyjnego.

**Słowa kluczowe:** edukacja, szkoła wyższa, sterowanie edukacją, pomiar dydaktyczny, niejednorodność zbiorowości studentów, podział na grupy jednorodne, ryzyko, nieokreśloność.

## 1. Wprowadzenie

Przepływ strumienia studentów przez uczelniany system edukacyjny szkoły wyższej jest procesem sterowalnym. Można nań patrzeć z różnych punktów widzenia. Jednym z możliwych jest traktowanie systemu edukacyjnego jako jednostki makroskopowej, której wyjście jest związane z wejściem za pomocą dynamiki procesu edukacyjnego. W każdym roku akademickim wejściem jest grupa młodzieży legitymującej się świadectwem ukończenia szkoły średniej i świadectwem maturalnym, która - z chwilą akceptacji ich kandydatur przez władze uczelni – zyskuje status studenta i rozpoczyna studia na wybranym wydziale. Studia są wielostopniowe. Po ukończeniu pierwszego stopnia (studia licencjackie lub inżynierskie) jego absolwenci albo opuszczają uczelnię, albo też dołączają do grupy studentów kontynuującej naukę na studiach magisterskich. W każdym roku akademickim ma się zatem do czynienia z dwiema grupami absolwentów uczelni: tymi, którzy opuszczają uczelnię z tytułem licencjata lub inżyniera oraz tymi, którzy opuszczają ją z tytułem magistra.

Grupy osób podejmujących studia na uczelni, rozpatrywane na przestrzeni pewnej liczby lat akademickich, tworzą strumień wejścia, natomiast analogicznie rozpatrywane grupy absolwentów tworzą strumienie absolwentów. Każdy z tych strumieni ma określoną specyfikę ilościową i jakościową, na którą w dużej mierze mogą oddziaływać władze uczelni, postępując zgodnie z obowiązującym w kraju prawem uczelnianym oraz statutem własnej uczelni. Powstaje jednak pytanie, za pomocą jakich czynników i w jaki sposób można świadomie i celowo kształtować dynamikę procesu edukacyjnego, aby w ramach istniejących zadań programowych oraz uwarunkowań kadrowych, organizacyjnych, finansowych, administracyjnych, prawnych, lokalowych i innych osiągać na koniec każdego roku akademickiego jak najlepszy końcowy efekt edukacyjny. Wbrew pozorom nie to zadanie łatwe, ponieważ obiektem sterowania są ludzie.

Sterowanie dynamiką przepływu studentów przez uczelniany system edukacyjny jest złożonym wieloaspektowym i wielokontekstowym procesem decyzyjnym. Dla racjonalnego prowadzeniu tego procesu, wdrażania podejmowanych w jego toku decyzji, monitorowania i oceniania ich skutków, a następnie zwrotnego wykorzystania tej wiedzy do optymalnego kształtowania procesu edukacyjnego są potrzebne matematyczne modele jego dynamiki. Można ją opisywać w różnoraki sposób. Zawsze jednak, z uwagi na właściwe procesowi edukacyjnemu czynniki ryzyka i nieokreśloności powinno się konstruować modele uwzględniające te cechy, np. modele probabilistyczno-statystyczne.

Czynniki ryzyka i nieokreśloności związane z realizacją procesu edukacyjnego dotyczą zarówno poszczególnych studentów, jak i całej uczelni jako systemowej jednostki edukacyjnej. Już sam wybór przez przyszłego studenta tej a nie innej uczelni oraz tego a nie innego kierunku studiów jest obciążony ryzykiem nietrafności tej decyzji. Zarówno osobisty stosunek studenta do nauki, jak też jakość programów nauczania oraz tryb i styl prowadzenia zajęć edukacyjnych mają bezpośredni wpływ na jego przyszłą karierę zawodową. Dobrze wykształcony absolwent będzie skutecznie konkurował z absolwentami innych uczelni przy ubieganiu się o intratną posadę, potrafi nie gorzej niż inni zorganizować i prowadzić własne przedsiębiorstwo, tworzyć nowe miejsca pracy itp. Aby to jednak osiągnąć, musi już w toku studiów zrozumieć, że z każdą jego decyzją, nawet tą dotyczącą jego zachowań jako podmiotu procesu edukacyjnego, jest zawsze związana jakaś forma ryzyka i nauczyć się skutecznego postępowania w takich sytuacjach. Ryzyko jest związane także z realizacją procesu edukacyjnego przez uczelnię. Program studiów jest przygotowany w taki sposób, by był zgodny z obowiązującymi w tej mierze standardami ustalonymi przez władze edukacyjne kraju, ale jakość i poziom jego realizacji zależą zarówno od rzeczywistego poziomu wiedzy osób podejmujących studia (jej formalnym potwierdzeniem jest świadectwo ukończenia szkoły średniej i świadectwo maturalne), jak i od osobistego stosunku studenta do nauki oraz merytorycznego poziomu i pedagogiczno-dydaktycznych umiejętności kadry prowadzącej zajęcia. Źle przygotowani kandydaci i niewłaściwie dobrana kadra dydaktyczna stwarzają ryzyko dużego odsiewu i promowania absolwentów o niskim poziomie wiedzy fachowej, co musi negatywnie rzutować na jakość uczelni. Ważne jest więc, aby proces edukacyjny był realizowany w sposób gwarantujący studentowi zdobycie pełnych kwalifikacji zawodowych na jak najwyższym poziomie, a zarazem minimalizujący ryzyko niskiej całościowej oceny uczelnianego procesu edukacyjnego.

## 2. Konteks pracy, jej cel i zakres

Praca jest kontynuacją tematyki badawczej prowadzonej przez autorów w poprzednich latach, dotyczącej teorii kapitału intelektualnego, z uwzględnieniem matematycznego modelowania dynamicznych aspektów procesu edukacyjnego prowadzonego w szkole wyższej (Bereziński 2002, 2003a, 2004; Bereziński, Falkowska-Singer i Wagner 2001; Bereziński i Hołubiec 2004). Szczególny akcent był położony na konstruowanie stochastycznego sieciowego modelu przepływu studentów przez proces edukacyjny, jako narzędzia wspomagających długofalowe kształtowanie polityki edukacyjnej uczelni w zakresie naboru i trybu kształcenia studentów (Bereziński 2003b; Bereziński, Inkielman i Wagner 2004a, 2004b). W dotychczas wykonanych pracach przeanalizowano podstawowe cechy i uwarunkowania procesu edukacyjnego, wynikające ze specyfiki organizacji szkoły wyższej, z indywidulanych predyspozycji intelektualnych młodzieży podejmującej studia oraz z osobistego podejścia studentów do nauki. W wyniku tych analiz sformułowano system założeń, które położono u podstaw modelu dynamiki przepływu studentów przez proces edukacyjny. Model miał postać otwartego, niejednorodnego, pochłaniającego łańcucha Markowa. Wprowadzono pojęcie wektora stanu procesu edukacyjnego, oszacowano liczbę możliwych stanów, wytestowano hipotezę o niezależności stanów, skonstruowano macierz przejścia między stanami i wytestowano hipotezy o niejednorodności i rzędzie łańcucha. Specyficzna struktura macierzy przejścia pozwoliła otrzymać analityczne formuły, wyrażające oszacowania, jakie muszą spełniać prawdopodobieństwa przejścia. Model został pozytywnie zweryfikowany na danych rzeczywistych dotyczących jednego z wydziałów szkoły wyższej, przy przyjęciu 5. letniego cyklu studiów. Z uwagi na niekompletność zbioru danych i niemożność jego uzupełnienia, do estymacji macierzy przejścia użyto odpowiednich metod matematycznych, wspomaganych pracą zespołu ekspertów.

Wysoka zgodność wyników otrzymanych za pomocą modelu z historycznymi danymi rzeczywistymi skłoniła do kontynuowania prac nad modelem w 2005 r. W szczególności dotyczyły one kwestii sterowania dynamiką przepływu studentów przez system edukacyjny szkoły. Ponieważ rozważania toczyły się w kontekście skonstruowanego w poprzednich latach stochastycznego sieciowego modelu procesu edukacyjnego, więc przyjęto, że sterowanie dynamiką przejścia studentów powinno odbywać się poprzez celowe kształtowanie przez władze i kadrę uczelni tych czynników, które pozytywnie stymulująco wpływają na wartości i kierunek zmian prawdopodobieństw przejść.

Wiadomo, że pod względem stopnia opanowania wiedzy przedmiotowej i umiejętności jej wykorzystania zbiorowość studentów jest silnie niejednorodna. Nie wszyscy studenci rozpoczynają studia z takim samym przygotowaniem wyniesionym ze szkoły średniej. Część studentów słabszych zdoła nadrobić braki, inni mogą borykać się z trudnościami nawet przez cały okres studiów. Są tacy, którym nauka nie przysparza kłopotów, ale są i tacy, którzy nową wiedzę przyswajają z dużym trudem. Część studentów uczy się systematycznie, część jednak albo robi to nieregularnie, albo wręcz odkłada naukę na okres bezpośrednio poprzedzający kolokwia lub egzaminy.

Te sytuacje i postawy znajdują odbicie zarówno w wewnętrznych wynikach nauczania, jak i w zewnętrznych ocenach szkoły wyższej, robionych przez władze edukacyjne kraju, placówki naukowo-badawcze, redakcje czasopism itp. (Muszyński 1971; Konarzewski 2004; Kropiwnicki 2002; Stróżyński 2000). Metodologią sprawdzania oraz oceniania stopnia i jakości opanowania przez studenta wcześniej zaplanowanych treści programowych zajmuje się teoria pomiaru dydaktycznego (zob., np., Niemierko 1999). Chociaż zwraca się w niej uwagę to, że – na przykład – całościowa semestralna ocena studenta nie może być li tylko średnią arytmetyczną ocen semestralnych z poszczególnych przedmiotów lecz musi mieć charakter wieloaspektowy, ilościowo-jakościowy, uwzględniający również inne czynniki, to mimo wszystko w szkolnictwie powszechne jest posługiwanie się tą średnią jako miernikiem wiedzy studenta. A przecież wynik egzaminu zależy nie tylko od wiedzy studenta, ale także od formy egzaminu, od osobowości egzaminatora, od kondycji psychicznej studenta, uwarunkowań losowych itp.[1] Zdając sobie sprawę z tych uwarunkowań dydaktycy od dawna zwracają uwagę na konieczność indywidualizacji edukacji (zob.., np., Nawroczyński 1957; Flechsig i Haller

[1] Jedni wolą egzaminy testowe, inni tradycyjne, jedni lepiej wypadają na egzaminach pisemnych niż ustnych, drudzy – odwrotnie. Egzaminator może być wybitnym specjalistą w swojej dziedzinie, ale nie mieć umiejętności pedagogicznych i nie umieć sprawdzić rzeczywistego stanu wiedzy studenta. Student może być bardzo dobrze przygotowany do egzaminu, ale nie umieć uzewnętrznić swej wiedzy (paraliżuje go osoba egzaminatora, przeżywa silny stres wywołany sama świadomością konieczności poddania się egzaminowi itp.)

1975; Arends 1988; Okoń 1995; Kupisiewicz 2000; Półturzycki 2002). Mimo dużych wysiłków ze strony pedagogów urzeczywistnienie tego zamiaru wciąż napotyka na opory. Podstawowy z nich wynika z mieszania pojęć nauczania indywidualnego i indywidualizacji nauczania. Nauczanie indywidualne dotyczy osób, których aktualny stan zdrowia uniemożliwia lub poważnie utrudnia w jakimś okresie uczestniczenie w zajęciach obowiązkowych prowadzonych w szkole. Indywidualizacja nauczania oznacza, że osoba prowadząca zajęcia kieruje swoją uwagę na poszczególnych studentów i dostosowuje nauczania do ich predyspozycji. W nauczaniu zindywidualizowanym prowadzący zajęcia musi umieć oceniać uzdolnienia oraz wiadomości studentów i organizować grupy, najlepiej jednorodne, tj. o zbliżonym poziomie wiedzy i podobnych kompetencjach przedmiotowych. Grupy takie nie mogą być ustanowione raz na zawsze, ale muszą być tworzone przez prowadzących zajęcia w sposób dynamiczny. Studenci, którzy na jednych zajęciach u tej samej osoby byli w jednej grupie, na innych mogą być włączeni do innej grupy. Indywidualizacja nauczania pozwala prowadzącemu zajęcia na zróżnicowanie zadań stawianych poszczególnym grupom i taki dobór treści nauczania, aby jak najlepiej odpowiadały one możliwościom i potrzebom studentów należących do danej grupy.

Powstaje pytanie, jak pomóc władzom i pracownikom dydaktycznym wyższej uczelni w rozpoznawaniu predyspozycji studentów i tworzeniu takich grup. Metodą wspomagającą to mogą być statystyczne metody badania jednorodności populacji i – w razie stwierdzenia istotnej niejednorodności – podziału populacji niejednorodnej na zbiory jednorodne w sensie z góry ustalonego kryterium. Kryterium to może być jednoaspektowe (jednowymiarowe[2]) lub wieloaspektowe (wielowymiarowe[3]). W pracy interesuje nas przede wszystkim ten drugi

[2] Można, na przykład, dokonać podziału zbiorowości studentów ze względu na semestralną oceną z jakiegoś przedmiotu, średnią semestralną ze wszystkich otrzymanych ocen, zdolność płatniczą itp.

[3] Można dzielić zbiorowość studentów równocześnie z punktu widzenia wielu cech, na przykład z punktu widzenia wyników osiąganych w nauce oraz zdolności płatniczej (klasyfikacja dwuaspektowa), bądź równocze-

przypadek, jako sytuacja ogólniejsza i bardziej poprawna z pedagogicznego i dydaktycznego punktu widzenia. Przyjmujemy, że zbiorowość studentów spełnia w wystarczającym stopniu warunki uprawniające do uważania jej za populację statystyczną, w matematycznym rozumieniu tego pojęcia.

Zasadniczym celem pracy jest opracowanie statystycznego modelu sterowania procesem edukacyjnym. Przez sterowanie rozumiemy takie świadome oddziaływanie władz uczelni na prawdopodobieństwa przejścia studentów przez ten proces[4], aby maksymalizować szanse ukończenia uczelni przez jak największą liczbę studentów, jak najlepiej przygotowanych do przyszłej pracy zawodowej. Ponieważ zbiorowość studentów jest bardzo zróżnicowana pod wieloma względami, więc stosowanie jednej strategii sterowania w odniesieniu do wszystkich studentów jest niewłaściwe. Z tego powodu u podstaw modelu leży koncepcja podziału całej zbiorowości na grupy jednorodne w sensie z góry ustalonego systemu cech. Kategoryzacja ta może być pomocna przy opracowywaniu formalnej, organizacyjnej i merytorycznej koncepcji sterowania jakością procesu edukacyjnego, na przykład przez indywidualizację studiów. Omówiono tradycyjną metodę testowania jednorodności dwóch zbiorów statystycznych i uogólniono ją na przypadek wielu zbiorów. Sformułowano wieloaspektowe kryterium jednorodności i podano iteracyjną procedurę prowadzącą do wieloaspektowego podziału populacji studentów na grupy jednorodne. Z uwagi na na ogół dużą liczebność populacji studentów liczba zbiorów otrzymanych w wyniku użycia tej metody może być duża, ale – z punktu widzenia statystyki matematycznej – granice między niektórymi z nich mogą nie być istotne. Z tego powodu sformułowano statystyczne kryterium badania istotności różnic między sąsied-

śnie z punktu widzenia semestralnych ocen z matematyki, informatyki i ekonomii (klasyfikacja trójaspektowa) itd.

[4] Można to robić poprzez doskonalenie organizacji pracy pionu administracyjno-finansowego i edukacyjnego, świadczenie pomocy socjalnej, indywidualizację nauczania itp.

nimi grupami. W przypadku, gdy różnice między dwoma zbiorami nie są istotne łączy się te zbiory w jeden. Podano przykład zastosowania tej metody w edukacji. W zakończeniu pracy sformułowano podstawowe wnioski wynikające z metody dla procesu edukacyjnego.

## 3. Wieloaspektowy podział populacji studentów na zbiory jednorodne

### 3.1. Ogólna koncepcja kryterium jednorodności dwóch zbiorów

Populacje statystyczne mogą być jednowymiarowe lub wielowymiarowe, przy czym w obu przypadkach mogą być one jednorodne lub niejednorodne. Populacja jednorodna – to zbiorowość elementów jednotypowych w sensie posiadania jakiejś cechy lub zbioru cech. Zbiorowość jednorodna w świetle pewnej cechy lub zbioru cech może nie być jednorodna w świetle innej cechy lub innego zbioru cech. Pojęcie jednorodności zbiorowości ma więc charakter umowny.

Podstawowy aparat statystyki matematycznej odnosi się do zbiorowości jednorodnych. Z tego powodu, jeżeli zbiorowość jest niejednorodna, to trzeba ją najprzód podzielić na rodzinę parami rozłącznych i wyczerpujących ją zbiorowości jednorodnych i do każdej z nich odrębnie stosować rozumowanie statystyczne. Problemem tym zajmowało się w przeszłości wielu wybitnych probabilistów i statystyków, takich jak Hotelling (1951), Anderson (1958), Fisher (1958), Kullback (1959), Bołszew i Smirnow 1968; Day (1969), Rabinowicz (1973), Kadibur i Jelisiejewa (1975), Lehmann (1986) i inni.

Na ogół rozpatrywano niejednorodną zbiorowość statystyczną, którą arbitralnie dzielono na dwa rozłączne i wyczerpujące ją zbiory i badano jednorodność jednego z nich w stosunku do drugiego. Jeżeli którakolwiek z grup okazała się niejednorodna, to postępowanie to powtarzano w odniesieniu do niej dopóty, dopóki nie otrzymano zbiorowości jednorodnych. Formalnie ideę tę przedstawiano w następujący sposób. Załóżmy, że wyjściowa zbiorowość została podzielona na dwie rozłączne i w pełni ją wyczerpujące części, z których pierwsza jest zbiorem liczącym *n*, a druga – zbiorem liczącym *m* elementów. Niech $X_i$ $(i=1,2,...,n)$ i $Y_j$ $(j=1,2,...,m)$ będą zmiennymi losowymi, przyjmującymi – odpowiednio – wartości $x_i$ $(i=1,2,...,n)$ i $y_j$ $(i=1,2,...,n)$. Elementy pierwszego zbioru są więc realizacjami zmiennych losowych $X_i$, a drugiego – realizacjami zmiennych losowych $Y_j$. Niech $F_n(x)$ będzie dystrybuantą empiryczną odpowiadającą pierwszemu zbiorowi, a $G_m(x)$ - drugiemu. Rozpatrywano statystyki

$$W_{mn}^{-} = -\inf_{-\infty<x<\infty}[G_m(x) - F_n(x)] \tag{1}$$

$$W_{mn}^{+} = \sup_{-\infty<x<\infty}[G_m(x) - F_n(x)] \tag{2}$$

i testowano hipotezę zerową

$$H_0 : \mathbf{E}[F_n(\mathrm{x})] \equiv \mathbf{E}[G_m(x)], \tag{3}$$

głoszącą, że wartości oczekiwane rozkładów $F_n(x)$ i $G_m(x)$ są takie same. Jeżeli równość ta była spełniona, to przyjmowano, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, iż zmienne losowe $W_{mn}^{-}$ i $W_{mn}^{+}$ występujące w hipotezach alternatywnych

$$H_1^-: \inf_{-\infty<x<\infty} \mathbf{E}[G_m(x) - F_n(x)] \tag{4}$$

$$H_1^+: \sup_{-\infty<x<\infty} \mathbf{E}[G_m(x) - F_n(x)] \tag{5}$$

mają taki sam rozkład prawdopodobieństwa i uznawano, że zbiory są jednorodne.

Istnieje wiele szczególnych, mniej lub bardziej skomplikowanych, wersji tej metody. Każda z nich ma swoje zalety, ale ponieważ wszystkie wywodzą się z tej samej idei ogólnej, więc każda z nich ma również wady i niedostatki właściwe tej idei. Podstawową z nich jest to, że – z punktu widzenia zastosowań – statystyki (1) i (2) dotyczą sytuacji abstrakcyjnych, ponieważ zakładają, że badana zbiorowość zawiera nieskończenie wiele elementów. Tymczasem faktyczne zbiorowości statystyczne są zawsze skończone. Wnioskowanie o ich jednorodności na podstawie statystyk określonych na zbiorach nieskończonych może doprowadzić do odrzucenia hipotezy o jednorodności, gdy jest ona prawdziwa, lub do przyjęcia hipotezy o jednorodności, gdy jest ona fałszywa[5]. Istnieje zatem potrzeba konstruowania takich metod podziału skończonych niejednorodnych – jednowymiarowych i wielowymiarowych – zbiorów zbiorowości statystycznych na zbiory jednorodne, w których kryteria podziału będą uwzględniały skończoność rzeczywistych zbiorowości.

### 3.2. Uszczegółowienie kryterium jednorodności zbioru i rodziny zbiorów

Niech $Z$ będzie skończoną niejednorodną zbiorowością statystyczną liczącą $n$ elementów. Każdy jej element $z$ jest realizacją pewnej zmiennej losowej $X_z$ o dystrybuancie

[5] W statystyce matematycznej pierwszy z tych przypadków nazywa się błędem pierwszego rodzaju, a drugi – błędem drugiego rodzaju (zob., np., Hellwig 1980; Pawłowski 1980).

$F_z(Y)$. Oznaczmy zbiór zmiennych losowych $X_z$ symbolem $X^z$ i niech $Y'$ będzie zbiorem wartości zmiennej losowej $Y$. Na zbiorze $X^z$ wprowadzamy relację równoważności określoną następująco: zmienne losowe $X_{z1}$ i $X_{z2}$ są wzajemnie sobie równoważne, jeżeli mają taki sam rozkład prawdopodobieństwa, tj. jeżeli $F_{z1}(Y) = F_{z2}(Y)$. Wprowadzenie tej relacji pozwala rozbić zbiór $X^z$ na klasy równoważności. Niech $l$ będzie liczbą tych klas. Podziałowi zbioru $X^z$ na $l$ klas równoważności odpowiada podział populacji $Z$ na $l$ takich rozłącznych zbiorów $Z_k$ $(k = 1,2,...,l)$, że

$$Z = Z_1 \cup Z_2 \cup ... \cup Z_l. \tag{6}$$

Jeżeli $l = 1$, to cała rozpatrywana zbiorowość jest jednorodna. W przeciwnym przypadku jest ona niejednorodna.

Rozpatrzmy jakikolwiek podzbiór $X^R$ zbioru $X^z$. Jeżeli dla każdej pary elementów $z_1, z_2 \in R$ i dla każdego $Y \subset Y'$ jest spełniona równość

$$F_{z_1}(Y) - F_{z_2}(Y) = 0. \tag{7}$$

to powiemy, że jest on jednorodny. Niech $X^{R'}$ będzie pewną rodziną podzbiorów zbioru $X^R$. Powiemy, że jest ona rodziną zbiorów jednorodnych, jeżeli dla każdego $R \subset R'$ i dla każdego $Y \in Y'$ jest spełniony warunek

$$F_{z_1}(Y) \in R(Y) - F_{z_2}(Y) \in R(Y) = 0. \tag{8}$$

Powiemy też, że rodzina $R'$ zbiorów jednorodnych jest zbiorem jednorodnym, jeżeli dla każdej pary jej podzbiorów $R_1, R_2 \subset R'$ i dla każdego $Y \in Y'$ ma miejsce równość

$$F_z(Y) \in R_1(Y) - F_z(Y) \in R_2(Y) = 0. \tag{9}$$

Często mówi się i jest to poprawne, że zbiorowość niejednorodna to taka, która nie jest jednorodna, lecz jest to określenie niekonstruktywne. Aby móc sprawdzać jednorodność zbiorowości statystycznych, trzeba dysponować formalną definicją niejednorodności. Można ją wprowadzić poprzez zaprzeczenie sformułowanym wyżej warunkom jednorodności. Jeżeli więc dla pewnego podzbioru $X^R$ zbioru $X^z$ istnieje taka para elementów $z_1, z_2 \in R$, że dla co najmniej jednego $Y \in Y'$

$$F_{z_1}(Y) - F_{z_2}(Y) > 0, \tag{10}$$

lub

$$F_{z_1}(Y) - F_{z_2}(Y) < 0, \tag{11}$$

to powiemy, że zbiór $X^R$ jest niejednorodny. A zatem, jeżeli jakaś rodzina zbiorów zawiera choćby tylko jeden zbiór niejednorodny, to jest to rodzina niejednorodna. Zwróćmy uwagę, że są możliwe różne stopnie nasilenia niejednorodności rodziny zbiorów. Niejednorodność może być całkowita (ma to miejsce wtedy, gdy wszystkie elementy rodziny zbiorów są niejednorodne), lub częściowa (gdy co najmniej jeden z nich jest jednorodny). W praktyce zdecydowanie dominuje ta druga sytuacja.

### 3.3. Hipoteza o jednorodności w przypadku wielowymiarowych rozkładów normalnych

Dotychczas nie przyjmowaliśmy żadnych założeń odnośnie do postaci rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych losowych, których realizacjami są elementy zbiorowości $Z$. W zasadzie mogą to być rozkłady dowolne, jednak ogólna teoria wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa jest jeszcze zbyt słabo rozwinięta, by na podstawie jej dorobku móc podejmować próby opracowywania metod podziału niejednorodnych zbiorowości na jednorodne w innych przypadkach niż normalny. Z tego powodu w analizach teoretycznych powszechnie przyjmuje się, że elementy abstrakcyjnych wielowymiarowych zbiorowości $Z$ są realizacjami zmiennych losowych normalnych[6]. W tym przypadku (zob., np., Anderson 1958; Kendall i Stuart 1960, Morrison 1990), statystycznym modelem $n$-elementowego zbioru $m$-wymiarowych obserwacji jest $n$-elementowy zbiór $m$-wymiarowych normalnych zmiennych losowych $X_i$ $(i=1,2,...,n)$ o gęstościach

$$f(X,\Theta_z,\Sigma_z)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}\,|\Sigma_z|^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{1}{2}(X-\Theta_z)^T\Sigma_z^{-1}(X-\Theta_z)\right], \tag{12}$$

gdzie $X^T=(\xi_{z1},\xi_{z2},...,\xi_{zm})$ - wektor zmiennych losowych, $\Theta_z^T=(\Theta_{z1},\Theta_{z2},...,\Theta_{zm})$ - wektor wartości oczekiwanych zmiennych losowych $\xi_{zj}$ $(j=1,2,...,m)$, $\Sigma_z$ - macierz kowariancji,

[6] Nie jest to tożsame z założeniem, że rozkłady w populacjach empirycznych będą normalne.

$(\cdot)^T$ - operacja transpozycji, $|\cdot|$ - symbol wyznacznika. Wielowymiarowym odpowiednikiem warunku jednorodności (7) staje się formuła

$$F(X,\Theta_{z_1},\Sigma_{z_1}) - F(X,\Theta_{z_2},\Sigma_{z_2}) = 0, \tag{13}$$

która musi być spełniona dla każdego wektora $X \in X'$. Warunek (11) jest równoważny żądaniu, by dla każdej pary elementów $z_1, z_2$ zbioru $Z$ zachodziła równość wartości oczekiwanych i równość macierzy kowariancji, tzn. by $\Theta_{z_1} = \Theta_{z_2}$ i $\Sigma_{z_1} = \Sigma_{z_2}$.

Wielowymiarowymi odpowiednikami warunków niejednorodności (10) i (11) są nierówności

$$F(X,\Theta_{z_1},\Sigma_{z_1}) - F(X,\Theta_{z_2},\Sigma_{z_2}) > 0, \tag{14}$$

lub

$$F(X,\Theta_{z_1},\Sigma_{z_1}) - F(X,\Theta_{z_2},\Sigma_{z_2}) < 0, \tag{15}$$

z których jedna albo druga musi być spełniona dla co najmniej jednego $X \in X'$. W przypadku, gdy dla każdej pary $z_1, z_2 \in Z$ jest spełniony warunek $\Sigma_{z_1} = \Sigma_{z_2}$, to nierówności (14) i (15) są równoważne żądaniu, by dla co najmniej jednej pary $z_1, z_2 \in Z$ zachodziła relacja $\Theta_{z_1} \neq \Theta_{z_2}$.

Wielowymiarowym odpowiednikiem kryterium (9) jest stwierdzenie, że rodzina zbiorów $X^z$ jest jednorodna, jeżeli dla każdej pary zbiorów $X^{R^k}, X^{R^l}$ należących do tej rodziny zachodzi równość

$$\frac{1}{n_l}\sum_{z\in R^l}\Theta_z - \frac{1}{n_k}\sum_{z\in R^k}\Theta_z = \mathrm{O}, \tag{16}$$

gdzie $\mathrm{O} = \underbrace{(0,0,...,0)}_{m}$. Jeżeli więc zbiór $X^z$ jest niejednorodny i jeżeli $l = 2$ (dzielenie zbioru na dwie części), to w zbiorze wszystkich możliwych jego podziałów istnieje co najmniej jeden taki podział, że

$$\frac{1}{n_l}\sum_{z\in R^l}\Theta_z - \frac{1}{n_k}\sum_{z\in R^k}\Theta_z \neq \mathrm{O}. \tag{17}$$

Szczególnym przypadkiem tych rozważań jest sytuacja, gdy dla każdego $z \in Z$ zmienne losowe $\xi_{zj}$ $(j = 1,2,...,m)$, odpowiadające aspektowi $j$, są niezależne i mają takie same wariancje. Wtedy miarą jednorodności $m$-wymiarowej normalnej zbiorowości statystycznej jest funkcja

$$d(Q) = \frac{1}{n_l}\sum_{z\in R^l}\Theta_z - \frac{1}{n_k}\sum_{z\in R^k}\Theta_z \tag{18}$$

gdzie $Q$ jest podzbiorem zbioru $P$ wszystkich możliwych podziałów badanej zbiorowości na dwie części. W tym przypadku hipotezą zerową jest stwierdzenie, że w badanej $m$-wymiarowej zbiorowości funkcja $d(Q)$ jest równa zero. Przyjęcie tej hipotezy jest równoznaczne z uznaniem, że nie ma podstaw do uważania, iż ta zbiorowość nie jest jednorodna. W praktyce oznacza to z reguły przyjęcie postulatu jednorodności.

Załóżmy, że przedmiotem badań jest zbiorowość jakichkolwiek obiektów i przyjmijmy, że każdy z nich jest scharakteryzowany za pomocą $m$ cech ilościowych. Załóżmy, że przeprowadzono $n$ obserwacji i zapiszmy wynki $i$-tej obserwacji w postaci wektora

$$X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}), \qquad (i = 1,2,\dots,n). \tag{19}$$

Zbiór wszystkich wyników można przedstawić w postaci prostokątnej macierzy danych

$$X = \begin{pmatrix} X \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{im} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{nm} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Dane zawarte w tej macierzy tej macierzy mogą być uważane za realizacje $m$ niezależnych zmiennych losowych. Przyjmiemy, że są to zmienne normalne. Niech $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_j, \dots, \Theta_m)$ będzie wektorem wartości oczekiwanych tych zmiennych. Z uwagi na niezależność zmiennych macierz kowariancji ma postać

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_{ii} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \sigma_{mm} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Zbiór danych będzie jednorodny, jeżeli dla każdej pary elementów $z_1, z_2 \in Z$ będzie spełniona równość

$$\Theta_{z_1} - \Theta_{z_2} = \underbrace{(0,...,0,...0)}_{m} \quad (22)$$

i równocześnie dla wszystkich podzbiorów $Q$ zbioru $P$ będzie spełniony warunek

$$d(Q) = \underbrace{(0,...,0,...0)}_{m}. \quad (23)$$

Hipotezą alternatywną jest zbiór alternatyw określonych nierównością

$$H_1 : \ d(Q) \neq \underbrace{(0,..., 0,... 0)}_{m}, \quad (24)$$

która – wystarczy, żeby była spełniona dla co najmniej jednego $Q$, aby cały zbiór był niejednorodny.

## 3.4. Kryterium weryfikacji hipotezy zerowej o jednorodności wielowymiarowego zbioru danych

Dla skonstruowania kryterium weryfikacji hipotezy o jednorodności wielowymiarowego zbioru danych statystycznych wykorzystamy koncepcję Hotellinga badania jednorodności w przypadku dwóch zbiorów danych (Hotelling 1951). Zbudował on statystykę

$$T^2 = n(\overline{X} - \Theta)^T \Sigma^{-1} (\overline{X} - \Theta) \tag{25}$$

gdzie $\overline{X}$ jest wektorem wartości średnich, $\Sigma$ - macierzą kowariancji. Uogólnimy podejście Hotellinga na przypadek podziału zbioru danych na wiele podzbiorów.

Aby to zrobić, spójrzmy na macierz danych (20) jako na jedną z możliwych realizacji zmiennej losowej macierzowej

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_i \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1j} & \cdots & \xi_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{i1} & \cdots & \xi_{ij} & \cdots & \xi_{im} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nj} & \cdots & \xi_{nm} \end{pmatrix} \tag{26}$$

i podzielmy tę macierz w dowolny sposób na dwie rozłączne części, zawierające – odpowiednio – $n_1$ i $n_2 = n - n_1$ wierszy. Strukturę tego podziału można zilustrować następującym zapisem

$$\begin{matrix} n_1\left\{\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right. \\ n_2\left\{\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right. \end{matrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_{n_1} \\ K_{n_1+1} \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1j} & \cdots & \xi_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n_1 1} & \cdots & \xi_{n_1 j} & \cdots & \xi_{n_1 m} \\ \xi_{n_1+1,1} & \cdots & \xi_{n_1+1,j} & \cdots & \xi_{n_1+1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n1} & \cdots & \xi_{nj} & \cdots & \xi_{nm} \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n_1 \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n_2 \end{matrix} \tag{27}$$

Oznaczmy górną z tych macierzy przez $K^1$, a dolną przez $K^2$. Statystycznym estymatorem $m$-wymiarowej różnicy $d(Q)$ dla każdego zbioru podziałów $Q$ będzie wektorowa zmienna losowa $\hat{K}(Q) = (\hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_j, \ldots, \hat{\xi}_m)$, określona w następujący sposób

$$\hat{K}(Q) = \frac{1}{n_1}\sum_{z \in R^1} K_l - \frac{1}{n_2}\sum_{z \in R^2} K_l \,. \tag{28}$$

Jej składowymi są jednowymiarowe zmienne losowe, określone formułą

$$\hat{\xi}_j = \frac{1}{n_1}\sum_{l \in R^1} \xi_{lj} - \frac{1}{n_2}\sum_{l \in R^2} \xi_{lj} \,, \qquad (j = 1,2,\ldots,m) \,. \tag{29}$$

Występujące w tej formule wartości średnie są estymatorami nieznanych wartości oczekiwanych $\Theta'_j$ i $\Theta_j$.

Przyjmijmy, że $\xi_j$ są zmiennymi normalnymi o wariancjach $\sigma_j^2$ $(j = 1,2,\ldots,m)$. Skoro tak, to zmienne $\frac{1}{n_1}\sum_{l \in R^1} \xi_{lj}$ oraz $\frac{1}{n_2}\sum_{l \in R^2} \xi_{lj}$ też mają rozkłady normalne. Ich wartości oczekiwane wynoszą – odpowiednio – $\Theta'_j$ i $\Theta_j$, zaś wariancje przyjmują wartości $\frac{\sigma^2}{n_1}$ i $\frac{\sigma^2}{n_2}$. Zmienne losowe $\hat{\xi}_j$ $(j = 1,2,\ldots,m)$, określone wzorem (29), jako sumy dwóch niezależnych zmiennych losowych normalnych też są zmiennymi normalnymi. Ich wartości oczekiwane wyrażają się formułami

$$\mathbf{E}(\hat{\xi}_j) = \Theta'_j - \Theta_j \,, \qquad (j = 1,2,\ldots,m) \,, \tag{30}$$

a wariancje wynoszą

$$\hat{\mathbf{D}}(\hat{\xi}_j) = \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \sigma_j^2, \qquad (j = 1,2,\dots,m)\,. \tag{31}$$

Wartości zmiennych losowych $\hat{\xi}_j$ oblicza się na podstawie macierzy danych za pomocą formuł

$$\hat{x}_j = \frac{1}{n_1} \sum_{l \in R^1} x_{lj} - \frac{1}{n_2} \sum_{l \in R^2} x_{lj}\,, \qquad (j = 1,2,\dots,m)\,, \tag{32}$$

Bazując na tych rozważaniach można dla każdego $Q \in P$, odpowiadającego hipotezie zerowej (24), skonstruować funkcję wiarogodności $L(Q)$ i wykorzystać ją do zbudowania kryterium weryfikacji hipotezy o jednorodności. Funkcja ta ma postać

$$L(Q) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \left( \prod_{j=1}^{m} D(\hat{\xi}_j) \right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left( -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \frac{[\hat{x}_j - (\Theta'_j - \Theta_j)]^2}{D(\hat{\xi}_j)} \right). \tag{33}$$

W przypadku, gdyby hipoteza o jednorodności była prawdziwa spełniony byłby warunek $\Theta'_j = \Theta_j$ i funkcja ta wyrażałaby się wzorem

$$L(Q) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \left( \prod_{j=1}^{m} D(\hat{\xi}_j) \right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left( -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \frac{\hat{x}_j^2}{D(\hat{\xi}_j)} \right). \tag{34}$$

O zachowaniu się tej funkcji decyduje przede wszystkim wykładnik funkcji *exp*. Wartość sumy stojącej w tym wykładniku oblicza się posługując wzorem

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{(\bar{\xi}'_j - \bar{\xi})^2}{D^2(\hat{\xi}_j)} \tag{35}$$

Ponieważ liczbowa wartość licznika wyrażenia stojącego pod znakiem sumy jest kwadratem wartości wyrażenia (32), zaś mianownik wyraża się formułą

$$D^2(\hat{\xi}_j) = \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} \sigma_j^2 \tag{36}$$

więc wyrażenie (35) jest sumą kwadratów $m$ zmiennych losowych postaci

$$\frac{(\bar{\xi}'_j - \bar{\xi}_j)^2}{\sigma_j} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \,. \tag{37}$$

Są to zmienne normalne o zerowych wartościach oczekiwanych[7] i wariancji równej jeden. Pozwala to sądzić, że w przypadku prawdziwości hipotezy zerowej suma (35) ma rozkład $\chi^2$ o $m$ stopniach swobody. Wobec tego, kryterium weryfikacji hipotezy o jednorodności dwóch zbiorów może być funkcja

$$U(\rho^2) = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \sum_{j=1}^{m} \frac{(\bar{x}'_j - \bar{x}_j)^2}{\hat{\sigma}_j^2} \,, \tag{38}$$

gdzie $n_1$ jest licznością jednego, a $n_2$ - licznością drugiego z porównywanych zbiorów, empiryczne wartości wielkości $\bar{x}'_{j1}$ i $\bar{x}_j$ oblicza się według formuł

---

[7] Tak jak to jest przyjęte w hipotezie zerowej.

$$\bar{x}'_j = \frac{1}{n_1}\sum_{l\in R^1} x_{lj}, \qquad \bar{x}_j = \frac{1}{n_2}\sum_{l\in R^2} x_{lj}, \tag{39}$$

zaś empiryczną wartość wariancji $\sigma_j^2$ według formuły

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n_1+n_2-1}\left[\sum_{l\in R^1} x_{lj}^2 + \sum_{l\cup R^2} x_{lj}^2 - \frac{1}{n_1+n_2}\left(\sum_{l\in R^1} x_{lj} + \sum_{l\in R^2} x_{lj}\right)^2\right]. \tag{40}$$

Po uwzględniu formuł (39) i (40) w wyrażeniu (38) i wykonaniu odpowiednich przekształceń nadamu kryterium jednorodności dwóch zbiorów taką postać

$$U(Q) = \frac{n_1+n_2-1}{n_1 n_2 (n_1+n_2)} \sum_{j=1}^{m} \frac{\left(n_2 \sum_{l\in R^1} x_{lj} - n_1 \sum_{l\in R^2} x_{lj}\right)^2}{\sum_{l\in Z} x_{lj}^2 - \frac{1}{n_1+n_2}\left(\sum_{l\in Z} x_{lj}\right)^2}. \tag{41}$$

Jeżeli dla wszystkich $Q \in P$ jest spełniony warunek

$$U(Q) \le \chi^2_{\alpha;m}, \tag{42}$$

gdzie $\alpha$ jest poziomem istotności, $m$ – liczbą stopni swobody, to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o jednorodności obu zbiorów (które mogą być częściami większego zbioru). Jeżeli nierówność ta nie jest spełniona, to hipotezę zerową odrzuca się – testowane zbiory są niejednorodne.

### 3.5. Weryfikacja hipotezy o jednorodności w przypadku populacji wielowymiarowej

Poważnym ograniczeniem kryterium (41) jest to, że nie można z niego korzystać dla równoczesnego badania jednorodności większej liczby zbiorów niż dwa. Aby dostosować to kryterium do tej ogólniejszej sytuacji trzeba przyjąć dodatkowe ograniczenia. Przypuśćmy, że w jakiś sposób udało się wyróżnić w zbiorze cech cechę dominującą[8] i załóżmy, że wyniki obserwacji zostały uszeregowane na czas badania w kolejności wzrastania lub niemalenia wartości tego czynnika. Tak więc, jeżeli analizowana zbiorowość liczy $n$ elementów, to zbiór liniowo uporządkowanych podziałów tego zbioru zawiera $n-1$ elementów. Jeżeli przyjąć, że statystycznym modelem tego zbioru jest $X^z$, to czynność grupowania elementów tego zbioru według $m$ cech równocześnie powinna być poprzedzona sprawdzeniem jego jednorodności. Grupować można bowiem tylko elementy jednorodne i tylko do jednorodnych zbiorów danych można stosować wnioskowanie statystyczne.

Załóżmy, że badany zbiór został przedstawiony w postaci macierzy danych. Numery wierszy tej macierzy, $j = 1,2,...,n$, będą określały położenie elementu badanego zbioru w szeregu podzbiorów. Rozbijmy zbiór numerów wierszy na dwa podzbiory: $R^k = \{1,2,...,k\}$ i $R^{n-k} = \{k+1, k+2,...,n\}$. Zbiór $X^{R^1}$ będzie więc odpowiadał pierwszemu wierszowi macierzy, zaś zbiór $X^{R^{n-1}}$ będzie zawierał jako elementy pozostałe $n-1$ jej wierszy. Elementami zbioru $X^{R^2}$ będą dwa pierwsze wiersze macierzy danych, a pozostałe będą tworzyły zbiór $X^{R^{n-2}}$. W ogólnym przypadku, zbiór $X^{R^k}$ będzie zawierał $k$ pierwszych wierszy macierzy danych, a wszystkie pozostałe będą tworzyły zbiór $X^{R^{n-k}}$.

[8] Można to zrobić za pomocą analizy korelacyjnej, analizy czynnikowej, metody składowych głównych, metod opartych na analizie zawartości informacyjnej itp.

W tym przypadku funkcja $d(Q)$[9] jest określona na zbiorze podziałów $P$ zbioru $R^z$ na wyczerpujące go i wzajemnie dopełniające się dwa zbiory, $R^k$ i $R^{n-k}$, i przyjmuje postać

$$d(Q) = \frac{1}{k}\sum_{z\in R^k}\Theta_z - \frac{1}{n-k}\sum_{z\in R^{n-k}}\Theta_z \tag{43}$$

Ponieważ założyliśmy, że zmienne losowe występujące w zadaniu są normalne, więc hipoteza zerowa o jednorodności uszeregowanego zbioru zbiorów może być sformułowana w sposób podobny do (22)-(24), jako równoczesna weryfikacja $n-1$ hipotez zerowych postaci

$$H_0: \ d(Q) = \underbrace{(0,...,0,...0)}_{m} \tag{44}$$

dla każdego $Q$ należącego do zbioru $P$, przy hipotezie alternatywnej

$$H_1: \ d(Q) \neq \underbrace{(0,...,0,...0)}_{m} \tag{45}$$

dla co najmniej jednego podziału $Q$.

Przeprowadzając rozumowanie analogiczne do tego, które doprowadziło do otrzymania formuły (41), stwierdzimy, że w obecnie rozpatrywanym przypadku kryterium jednorodności jest statystyka

---

[9] Por. wzór (18).

$$U(k,n-k)=\frac{n-1}{nk(n-k)}\sum_{j=1}^{n}\frac{\left((n-k)\sum_{i=1}^{k}x_{ij}-k\sum_{i=k+1}^{n}x_{ij}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}x_{ij}^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_{ij}\right)^2}. \tag{46}$$

Jest ona określona na zbiorze wszystkich podziałów rozpatrywanego zbioru na dwa wyczerpujące go i wzajemnie dopełniające się podzbiory i ma podobnie jak statystyka (41) rozkład $\chi^2$ o $m$ stopniach swobody. W przypadku, gdy dla wszystkich podziałów $(k,n-k)$

$$U(k,n-k)\leq\chi^2_{\alpha;m}, \tag{47}$$

uważa się, że przy danym poziomie istotności $\alpha$ nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej i przyjmuje się, że rozpatrywany zbiór jest jednorodny. Jeżeli jednak dla co najmniej jednego podziału $(k,n-k)$ nierówność ta nie jest spełniona, to hipotezę zerową odrzuca się na korzyść hipotezy o niejednorodności.

Rekapitulując, postępowanie związane z weryfikacją hipotezy o statystycznej jednorodności zbioru danych, przedstawionego w postaci macierzy danych zawierającej tyle kolumn, ile cech jest analizowanych, i tyle wierszy, ile przeprowadzono obserwacji, sprowadza się do wykonania po kolei następujących czynności:

1. Zidentyfikowania cechy dominującej.
2. Uszeregowania wierszy macierzy danych w kolejności wzrastania wartości cechy dominującej.
3. Obliczenia sumy elementów, kwadratu sumy elementów oraz sumy kwadratów elementów dla każdej kolumny otrzymanej macierzy.

4. Obliczenia wartości mianownika wyrażenia (46). Jest ona stała w całym procesie obliczeniowym.
5. Obliczenia wartości statystyki (46) kolejno dla podziałów $(1,n-1)$, $(2,n-2)$, ..., $(n-1,1)$ i sprawdzenie, czy jest spełniona nierówność (47).

### 3.6. Podział wielowymiarowego zbioru danych na zbiory jednorodne

Procedura przedstawiona w poprzednim podrozdziale pozwala rozstrzygnąć, czy macierz danych jest zbiorem jednorodnym, czy niejednorodnym, ale nie jest procedurą konstruktywną, bo – w przypadku stwierdzenia niejednorodności – nie mówi, w jaki sposób dokonać podziału macierzy na zbiory jednorodne. Wydaje się jednak oczywiste, że podziału tego należy dokonywać kierując się maksymalną wartością statystyki $U(k,n-k)$. Za pierwszy podział macierzy danych na dwa zbiory, $R^k$ i $R^{n-k}$, przyjmiemy więc ten, któremu odpowiada największa wartość tej statystyki. Tak jak poprzednio, do pierwszego zbioru zaliczymy $k$ początkowych wierszy macierzy danych, a wszystkie pozostałe wiersze będą tworzyły drugi zbiór.

Zauważmy, że podział ten jest bezpośrednią konsekwencją przyjęcia hipotezy o niejednorodności macierzy danych. Ale przyjęcie tej hipotezy oznacza, że jest spełniona relacja (45). Skoro tak, to wartości średnie w obu zbiorach, odpowiadające poszczególnym cechom, są różne: $\Theta^k = (\Theta_1^k, \Theta_2^k, ..., \Theta_m^k)$, $\Theta^{n-k} = (\Theta_1^{n-k}, \Theta_2^{n-k}, ..., \Theta_m^{n-k})$. Funkcja wiarogodności wielowymiarowych zmiennych losowych, będących sumami jednowymiarowych niezależnych zmiennych losowych normalnych o parametrach odpowiednio $\Theta_j^k$ i $\frac{\sigma_j^2}{k}$ oraz $\Theta_j^{n-k}$ i $\frac{\sigma_j^2}{n-k}$ będzie miała postać

$$L(H)=(2\pi)^{-\frac{m}{2}}[k(n-k)]^{\frac{m}{2}}\prod_{j=1}^{m}\sigma_j^{-1}\exp\left(-\frac{k(n-k)}{2n}\sum_{j=1}^{m}\frac{(x_j^k-\Theta_j^k)^2+(x_j^{n-k}-\Theta_j^{n-k})^2}{\sigma_j^2}\right). \qquad (48)$$

W przypadku prawdziwości hipotezy o niejednorodności, tzn. gdy $\Theta^k \neq \Theta^{n-k}$, funkcja ta powinna osiągać wartość maksymalną, co będzie miało miejsce wtedy, gdy wykładnik funkcji *e*, czyli wyrażenie

$$-\frac{k(n-k)}{2n}\sum_{j=1}^{m}\frac{(x_j^k-\Theta_j^k)^2+(x_j^{n-k}-\Theta_j^{n-k})^2}{\sigma_j^2} \qquad (49)$$

osiągnie minimum. Rozumując analogicznie jak w przypadku wyprowadzania formuły (38) można wykazać, że minimalna wartość tego wyrażenia odpowiada maksymalnej wartości kryterium (46), która wyraża się wzorem

$$\frac{n_{R^k}n_{R^{n-k}}}{n}\frac{(x_j^k-x_j^{n-k})^2}{\sigma_j^2}, \qquad (50)$$

gdzie estymatory wielkości $x_j^k$ i $x_j^{n-k}$ są określone formułą (32), a estymator wariancji $\sigma_j^2$ ma postać (40). Po uwzględnieniu tego i wykonaniu stosownych przekształceń otrzymamy, że funkcja wiarogodności (48) przyjmuje wartość maksymalną przy takim podziale niejednorodnego zbioru danych na dwie części, przy którym statystyka (46) przyjmuje wartość maksymalną. A zatem, kolejnych podziałów macierzy danych na dwa zbiory jednorodne dokonuje się odnajdując każdorazowo największą wartość statystyki $U(k,n-k)$ i zaliczając do jednego zbioru wszystkie podziały, dla których wartość tej statystyki nie przekracza jej wartości maksymalnej, a do drugiego – wszystkie pozostałe podziały.

### 3.6. Badanie istotności granic między podziałami

Często zdarza się, zwłaszcza gdy liczność niejednorodnego zbioru danych jest duża, że liczba jego jednorodnych składowych (zbiorów) też jest duża. Ze statystycznego punktu widzenia, granice między sąsiednimi zbiorami jednorodnymi mogą być istotne lub nieistotne. Po rozbiciu wyjściowego zbioru danych na składowe jednorodne trzeba więc zweryfikować hipotezy o istotności podziałów między sąsiednimi zbiorami jednorodnymi. Ponieważ przy przyjętych przez nas założeniach o jednorodności dwóch porównywanych zbiorów świadczy równość wielowymiarowych wartości średnich, więc jeżeli wartości te w sąsiednich zbiorach jednorodnych nie różnią się istotnie, to zbiory te należy połączyć w jedną grupę. Jeżeli jednak różnica ta jest istotna, to trzeba zachować odrębność zbiorów.

Załóżmy, że badana zbiorowość statystyczna okazała się niejednorodna i została podzielona na $l$ wyczerpujących ją i wzajemnie rozłącznych zbiorów jednorodnych $Z_1, Z_2, \ldots, Z_l$. Niech $\Theta_k$ będzie wielowymiarową wartością średnią w zbiorze $Z_k$ $(k = 1,2,\ldots,l)$. Rozpatrzmy dwa sąsiednie zbiory, $Z_k$ i $Z_{k+1}$. Hipotezę zerową o nieistotności granicy między tymi zbiorami można zapisać w następującej postaci

$$H_0: \quad \Theta_k - \Theta_{k+1} = \underbrace{(0,0,\ldots,0)}_{m}. \tag{51}$$

Hipotezą alternatywną jest

$$H_1: \quad \Theta_k - \Theta_{k+1} \neq \underbrace{(0,0,\ldots,0)}_{m}. \tag{52}$$

Przyjęcie hipotezy $H_0$ oznacza, że granica między zbiorami jednorodnymi nie jest istotna i dlatego zbiory te należy połączyć w jeden, tj. utworzyć zbiór $Z_k \cup Z_{k+1}$. Odrzucenie hipotezy $H_0$ jest równoznaczne z przyjęciem hipotezy alternatywnej $H_1$, tzn. uznaniem, że granica między zbiorami jest istotna i musi być zachowana. W tym przypadku należy zweryfikować hipotezę zerową

$$H_0: \quad \Theta_{k+1} - \Theta_{k+2} = \underbrace{(0,0,\ldots,0)}_{m}, \tag{53}$$

wobec hipotezy alternatywnej

$$H_1: \quad \Theta_{k+1} - \Theta_{k+2} \neq \underbrace{(0,0,\ldots,0)}_{m}. \tag{54}$$

Postępowanie to należy kontynuować, aż do wyczerpania wszystkich zbiorów jednorodnych. Rozumując analogicznie jak w przypadku ustalania postaci kryteriów (38), (41) i (46) otrzymuje się następującą statystykę, jako kryterium badania istotności podziału niejednorodnego zbioru danych na zbiory jednorodne

$$U(Z_k, Z_{k+1}) = \frac{n_k + n_{k+1} - 1}{n_k n_{k+1}(n_k + n_{k+1})} \sum_{j=1}^{n} \frac{\left( n_{k+1} \sum_{z \in Z_k} x_{zj} - n_k \sum_{z \in Z_{k+1}} x_{zj} \right)^2}{\sum_{z \in Z_k \cup Z_{k+1}} x_{zj}^2 - \frac{1}{n_k + n_{k+1}} \left( \sum_{z \in Z_k \cup Z_{k+1}} x_{zj} \right)^2}. \tag{55}$$

Obliczoną według tej formuły wartość liczbową porównuje się z odczytaną z tablic statystycznych wartością $\chi^2_{\alpha;m}$. Jeżeli $U(Z_k, Z_{k+1}) > \chi^2_{\alpha;m}$ to należy uznać, że granica między zbiorami $Z_k$ i $Z_{k+1}$ jest istotna i przejść do badania istotności granicy między zbiorami $Z_{k+1}$ i $Z_{k+2}$. Jeżeli jednak $U(Z_k, Z_{k+1}) < \chi^2_{\alpha:m}$ to oznacza to, że granica między zbiorami $Z_k$ i $Z_{k+1}$ jest nieistotna i zbiory te należy ze sobą połączyć i przejść do weryfikacji hipotezy o istotności granicy między tak otrzymanym zbiorem, a zbiorem $Z_{k+2}$ itd.

## 3.7. Przykład zastosowania metody

Powyższa metoda została użyta do podziału rzeczywistej zbiorowości studentów, liczącej 30 osób, na grupy jednorodne w sensie trzech cech: poziomu wiedzy informatycznej, poziomu wiedzy matematycznej oraz poziomu wiedzy ekonomicznej. Poziomy wiedzy były ocenione na podstawie trzech kolejno przeprowadzonych testów z każdego z tych przedmiotów. Wyniki ocen punktowych zostały przeliczone na stopnie w sześciostopniowej skali (1 – niedostateczny, 2 – dopuszczający, 3 – dostateczny, 4 – dobry, 5 – bardzo dobry, 6 – celujący). Wyniki te są przedstawione w tablicy 1. W tablicy 2 są podane kolejne podziały zbioru studentów na dwa podzbiory, a także odpowiadające tym podziałom wartości statystyki $U(k, n-k)$. Hipotezę o jednorodności testowano na poziomie istotności $\alpha = 0.05$. Z tablic statystycznych rozkładu $\chi^2$ odczytano wartość odpowiadającą trzem stopniom swobody i poziomowi istotności $\alpha = 0.05$. Wynosi ona $\chi^2_{0,05;3}$= 7,815. Porównując wartości $U(k, n-k)$ z wartością krytyczną $\chi^2$ stwierdza się, że badana zbiorowość studentów jest niejednorodna. Dzielimy więc ją na dwa zbiory, przyjmując za kryterium podziału maksymalną wartość statystyki $U(k, n-k)$. Wartość ta jest największa dla $k = 11$ i wynosi 9.9183. W związku z tym do jednego zbioru zaliczamy pierwszych jedenastu studentów, a do drugiego – dziewiętnastu pozostałych. Oznaczmy pierwszy zbiór przez $Z_1$, a drugi przez $Z_2$. Trzeba sprawdzić jednorodność każdego z nich. Wyniki uzyskane dla zbioru $Z_1$ są podane w tablicy 3, w wyniki związane z badaniem jednorodności zbioru $Z_2$ - w tablicy 4.

Tablica 1

Zestawienie ocen (macierz danych)

| Lp. | Informatyka | Matematyka | Ekonomia |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 3 | 4 |
| 2 | 2 | 4 | 4 |
| 3 | 4 | 3 | 6 |
| 4 | 4 | 3 | 4 |
| 5 | 5 | 3 | 2 |
| 6 | 3 | 4 | 4 |
| 7 | 3 | 2 | 2 |
| 8 | 3 | 2 | 2 |
| 9 | 2 | 2 | 3 |
| 10 | 3 | 2 | 2 |
| 11 | 2 | 3 | 2 |
| 12 | 4 | 4 | 5 |
| 13 | 3 | 3 | 4 |
| 14 | 4 | 3 | 3 |
| 15 | 6 | 4 | 3 |
| 16 | 4 | 5 | 5 |
| 17 | 5 | 4 | 4 |
| 18 | 3 | 4 | 5 |
| 19 | 4 | 2 | 3 |
| 20 | 4 | 3 | 2 |
| 21 | 5 | 4 | 5 |
| 22 | 4 | 5 | 4 |
| 23 | 4 | 3 | 3 |
| 24 | 3 | 2 | 2 |
| 25 | 4 | 3 | 3 |
| 26 | 3 | 2 | 5 |
| 27 | 4 | 3 | 3 |
| 28 | 4 | 4 | 5 |
| 29 | 6 | 5 | 6 |
| 30 | 5 | 3 | 2 |

Tablica 2

Podziały i wartości statystyki $U(k, n-k)$

| Lp. | *k,n-k* | $U(k,n-k)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1,29 | 1,4527 |
| 2 | 2,28 | 0,6352 |
| 3 | 3,27 | 2,5910 |
| 4 | 4,26 | 2,4919 |
| 5 | 5,25 | 0,8477 |
| 6 | 6,24 | 0,9480 |
| 7 | 7,23 | 0,3239 |
| 8 | 8,22 | 1,1356 |
| 9 | 9,21 | 3,6145 |
| 10 | 10,2 | 6,4125 |
| 11 | 11,19 | **9,9183** |
| 12 | 12,18 | 7,4672 |
| 13 | 13,17 | 8,7047 |
| 14 | 14,16 | 8,8592 |
| 15 | 15,15 | 5,3015 |
| 16 | 16,14 | 3,0775 |
| 17 | 17,13 | 1,5940 |
| 18 | 18,12 | 2,0132 |
| 19 | 19,11 | 2,2904 |
| 20 | 20,1 | 2,7945 |
| 21 | 21,9 | 1,1201 |
| 22 | 22,8 | 1,0058 |
| 23 | 23,7 | 0,9959 |
| 24 | 24,6 | 2,6384 |
| 25 | 25,5 | 3,4010 |
| 26 | 26,4 | 5,4355 |
| 27 | 27,3 | 7,5298 |
| 28 | 28,2 | 7,0527 |
| 29 | 29,1 | 2,8881 |
| 30 | | |

Tablica 3

Wyniki badania jednorodności zbioru $Z_1$

| Lp. | Informatyka | Matematyka | Ekonomia | $U(k,n-k)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 3 | 4 | 3,1761 |
| 2 | 2 | 4 | 4 | 3,0476 |
| 3 | 4 | 3 | 6 | 7,6245 |
| 4 | 4 | 3 | 4 | 9,4478 |
| 5 | 5 | 3 | 2 | 9,8304 |
| 6 | 3 | 4 | 4 | **14,6308** |
| 7 | 3 | 2 | 2 | 9,7759 |
| 8 | 3 | 2 | 2 | 6,3925 |
| 9 | 2 | 2 | 3 | 3,5731 |
| 10 | 3 | 2 | 2 | 2,3983 |
| 11 | 2 | 3 | 2 | |

Tablica 4

Wyniki badania jednorodności zbioru $Z_2$

| Lp. | Informatyka | Matematyka | Ekonomia | $U(k,n-k)$ |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 4 | 4 | 5 | 1,3723 |
| 13 | 3 | 3 | 4 | 1,9485 |
| 14 | 4 | 3 | 3 | 1,2453 |
| 15 | 6 | 4 | 3 | 0,0623 |
| 16 | 4 | 5 | 5 | 0,9913 |
| 17 | 5 | 4 | 4 | 1,8119 |
| 18 | 3 | 4 | 5 | 2,6732 |
| 19 | 4 | 2 | 3 | 0,7647 |
| 20 | 4 | 3 | 2 | 0,1712 |
| 21 | 5 | 4 | 5 | 0,5796 |
| 22 | 4 | 5 | 4 | 2,0731 |
| 23 | 4 | 3 | 3 | 1,3492 |
| 24 | 3 | 2 | 2 | 0,7778 |
| 25 | 4 | 3 | 3 | 1,2905 |
| 26 | 3 | 2 | 5 | 2,7660 |
| 27 | 4 | 3 | 3 | 4,8902 |
| 28 | 4 | 4 | 5 | 5,7207 |
| 29 | 6 | 5 | 6 | 3,4226 |
| 30 | 5 | 3 | 2 | |

Największą wartością statystyki $U(k,n-k)$ dla zbioru $Z_1$ jest 14.6308, przy czym jest ona osiągana dla $k=6$. Ponieważ wartość ta jest większa niż $\chi^2_{0,05;3}$ = 7.815, więc zbiór ten jest niejednorodny. Dzielimy go więc na dwie części: zbiór $Z_1^1$ obejmujący sześciu pierwszych studentów oraz zbiór $Z_1^2$ obejmujący pięciu pozostałych.

Jeśli chodzi o zbiór $Z_2$, to wartości statystyki $U(k,n-k)$, odpowiadające wszystkim podziałom, spełniają nierówność $U(k,n-k) \le \chi^2_{0.05;3}$. A zatem zbiór $Z_2$ jest jednorodny.

Dla zbadania jednorodności zbiorów $Z_1^1$ i $Z_1^2$ obliczono wartości statystyki $U(k,n-k)$, których maksymalnymi wartościami są, odpowiednio, $U_{max} = 2.6098$ oraz $U_{max} = 5.75$. W pierwszym przypadku wartość $U_{max}$ odpowiada wierszowi o numerze $k=5$, w drugim – wierszowi o numerze $k=4$. Wyniki obliczeń są podane w tablicach 5 i 6. Jak widać, zbiory $Z_1^1$ i $Z_1^2$ są jednorodne.

Tablica 5

Wyniki badania jednorodności zbioru $Z_1^1$

| Lp. | Informatyka | Matematyka | Ekonomia | $U(l,n-l)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 3 | 4 | 1,6951 |
| 2 | 2 | 4 | 4 | 0,5564 |
| 3 | 4 | 3 | 6 | 1,7886 |
| 4 | 4 | 3 | 4 | 2,2485 |
| 5 | 5 | 3 | 2 | 2,6098 |
| 6 | 3 | 4 | 4 | |

Tablica 6

Wyniki badania jednorodności zbioru $Z_1^2$

| Lp. | Informatyka | Matematyka | Ekonomia | $U(l, n-l)$ |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 3 | 2 | 2 | 1,6667 |
| 8 | 3 | 2 | 2 | 3,1110 |
| 9 | 2 | 2 | 3 | 2,2778 |
| 10 | 3 | 2 | 2 | 5,7500 |
| 11 | 2 | 3 | 2 | |

Wyjściowy zbiór studentów został więc podzielony na trzy jednorodne grupy, liczące – odpowiednio – dziewiętnaście, sześć i pięć osób. Podział ten wskazuje na konieczność indywidualizacji nauczania, na przykład poprzez przygotowanie dla każdej grupy innej ścieżki edukacyjnej, ale tak skonstruowanej, by żaden ze studentów nie poniósł uszczerbku merytorycznego. Każdy student musi bowiem opanować co najmniej określone minimum wiedzy, ale może to osiągnąć w różnoraki sposób.

## 4. Uwagi końcowe i wnioski

Na sterowanie procesem edukacyjnym trzeba patrzeć jako na świadome oddziaływanie nań w celu wyposażenia jego uczestników (studentów) w jak największy zasób specjalistycznej wiedzy teoretycznej oraz w umiejętność jej stosowania, niezbędnych przyszłemu absolwentowi dla znalezienia pracy odpowiadającej jego wykształceniu, możliwościom i aspiracjom oraz dla dobrego wykonywania zawodu. Jest to więc oddziaływanie sprzyjające kształtowaniu intelektualnego kapitału studenta, a przez to także intelektualnego kapitału społeczeństwa. Tematowi temu autorzy pracy poświęcili już szereg prac (Bereziński 2002, 2003a,b, 2004; Bereziński, Falkowska i Wagner 2001; Bereziński i Hołubiec 2004; Bereziński, Inkielman i Wagner 2004a,b, 2005). Zwrócono w nich, między innymi, uwagę na to, iż specyfiką sterowania procesem edukacyjnym jest to, że w czynności bierze udział zarówno strona reprezentująca szkołę wyższą, jak i sami studenci. W niniejszej pracy rozpatrzono tylko ten aspekt sterowania, który jest realizowany przez szkołę. Tematowi sterowania procesem edukacyjnym przez samego studenta jest poświęcona praca Berezińskiego, Inkielmana i Wagnera (2005).

W pracy nawiązano do lansowanej we współczesnej pedagogice koncepcji sterowania procesem edukacyjnym poprzez indywidualizację nauczania. Wdrożenie tej koncepcji wymaga umiejętności dynamicznego dzielenia zbiorowości studentów na grupy jednorodne w pewnym z góry ustalonym sensie. W pracy zwrócono uwagę, że mogą się do tego przydać metody wielowymiarowej analizy statystycznej. Podkreślono, że jednym z warunków stosowania wnioskowania statystycznego jest jednorodność zbiorowości, której ono dotyczy. Tymczasem zbiorowość studentów jest silnie niejednorodna i to pod wieloma względami. Zachodzi więc konieczność dzielenia jej na zbiory jednorodne w sensie z góry ustalonego wskaźnika wielowymiarowego. Istotą tradycyjnych algorytmów robienia tego jest arbitralny podział niejednorodnej zbiorowości na dwie części i weryfikacja ich jednorodności za pomocą testu $T^2$ Hotellinga. Wadą tego podejścia jest niemożność równoczesnej weryfikacji jednorodności wielu podzbiorów badanej zbiorowości niejednorodnej. W pracy pokazano, że jeżeli wśród rozpatrywanych cech istnieje cecha wiodąca i jeżeli pierwotną zbiorowość uporządkować w kolejności niemalejących wartości tej cechy, to można tak zmodyfikować metodą Hotellinga, że otrzyma się algorytm podziału uporządkowanej niejednorodnej zbiorowości na rozłączne i całkowicie ją wyczerpujące części jednorodne. Przez analogię do statystyki $T^2$ wprowadzono statystykę $U$, która pełni rolę kryterium dyskryminacyjnego. Pokazano, że o jednorodności lub niejednorodności zbioru wnioskuje się na podstawie maksymalnej wartości tej statystyki.

zbioru niejednorodnego może być bardzo duża, przy czym – ze statystycznego punktu widzenia - nie wszystkie te zbiory muszą w istotny sposób różnić się między sobą. Podano więc aplikację statystyki $U$, pozwalającą weryfikować hipotezę o istotnej odrębności poszczególnych zbiorów jednorodnych. W przypadku, gdy różnica między zbiorami jest mało istotna, łączy się je w jedną grupę.

Dużym uproszczeniem statystyki wielowymiarowej jest powszechność przyjmowania, że rozpatrywane zmienne losowe, skalarne i wielowymiarowe, są niezależne i mają rozkład normalny. Pozwala to korzystać z twierdzeń granicznych rachunku prawdopodobieństwa. W pracy również przyjęto te założenia. Zwraca się jednak uwagę na to, że nie jest to równoznacze uznaniu, że rzeczywiste zbiory danych są realizacjami zmiennych losowych normalnych. Chodzi przede wszystkim o sformułowanie przy wyidealizowanych założeniach teoretycznych statystycznego modelu podziału zbiorowości niejednorodnej na części jednorodne. Model ten ma pełnić rolę punktu odniesienia informując, jak wyglądałby ten podział, gdyby rzeczywiste rozkłady prawdodpodobieństwa były bliskie rozkładowi normalnemu.

W pracy podano prosty przykład, ilustrujący mechanizm stosowania metody. Przykład dotyczy sprawdzenia jednorodności trzydziestoosobowej grupy studentów, przy czym cechami, które należało wziąć pod uwagę, były oceny z informatyki, matematyki i ekonomii. Pokazano, że grupa jest niejednorodna w sensie tych cech i dzieli się na trzy grupy jednorodne. Taki podział może być podstawą do opracowania koncepcji odrębnych ścieżek edukacyjnych (mieszczących się jednak w obowiązujących ramach programowych) dla każdej z wyróżnionych grup studentów.

Metoda ma wiele potencjalnych zastosowań na polu edukacji. Można ją wykorzystać do tworzenia grup zajęciowych z poszczególnych przedmiotów. Dydaktycy wiedzą, że tym lepsza jest organizacja zajęć i skuteczność procesu edukacyjnego, im bardziej jednorodna jest grupa słuchaczy. Tradycyjny sposób tworzenia grup zajęciowych na ogół nie spełnia tego warunku. W grupie są zarówno studenci bardzo dobrzy z danego przedmiotu, jak i słabi. Chociaż pewien stopień zróżnicowania grupy jest konieczny, to jednak nadmierne zróżnicowanie utrudnia prowadzenie procesu edukacyjnego. W tej sytuacji koncepcja tworzenia grup jednorodnych w statystycznym znaczeniu tego pojęcia i umożliwienie przepływów między takimi grupami wydają się korzystne. Są bowiem zgodne z ideą indywidualizacji edukacji.

W pracy przyjęto, że o jednorodności zbiorów danych można wnioskować na podstawie wartości średnich. Ze statystyki wiadomo, że wartość średnia jest dobrym statystycznym reprezentantem populacji jednorodnej. Posługiwanie się średnią w przypadku populacji niejednorodnej daje mylny obraz rzeczywistości. Na przykład, średnia ocena z jakiegoś przedmiotu w statystycznie niejednorodnej grupie zajęciowej jest – z metodologicznego punktu widzenia – złą charakterystyką grupy. Grupę należy podzielić na podgrupy jednorodne i obliczać średnią dla każdej z nich odrębnie.

Przedstawiona metoda ma zakres zastosowań daleko wychodzący poza edukację. Może być stosowana zawsze wtedy, gdy ma się do czynienia z niejednorodną populacją statystyczną, którą trzeba podzielić na części statystycznie jednorodne.

## Literatura


Anderson T, (1958). Introduction to multivariate statistical analysis. John Wiley, New York.

Arends R.I. (1988). Learning to teach. Meridan Books, New York.

Bereziński M. (2002). Kapitał intelektualny: termodynamiczny model wiedzy. *Raport Badawczy RB/82/2002, Instytut Badań Systemowych PAN*, Warszawa.

Bereziński M. (2003a). Ku nowej teorii kapitału intelektualnego. *Raport Badawczy RB/74/2003, Instytut Badań Systemowych PAN*, Warszawa.

Bereziński M. (2003b). Markowski model procesu edukacyjnego na wyższej uczelni. *Raport Badawczy RB/73/2003, Instytut Badań Systemowych PAN*, Warszawa.

Bereziński M. (2004). A possibility of applying quantum mechanics methodology in the theory of knowledge creating. W: J. Kacprzyk, Z. Nahorski i D. Wagner, Zastosowanie badań operacyjnych w nauce, technice i ekonomii. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa.

Bereziński M., Falkowska-Singer Z., Wagner D. (2001). Interakcyjna rola matematyki w nauczaniu przedmiotów matematyczno-przyrodniczych. *Raport Badawczy RB/31/2001, Instytut Badań Systemowych PAN*, Warszawa.

Bereziński M., Hołubiec J. (2004). Ku humanizacji teorii kapitału intelektualnego. *Mazowieckie Studia Humanistyczne*, **10**, 207-239.

Bereziński M., Inkielman M., Wagner D. (2004a). Markowskie modele procesów edukacyjnych. *Raport Badawczy RB/63/2004, Instytut Badań Systemowych PAN*, Warszawa.

Bereziński M., Inkielman M., Wagner D. (2004b). Sieciowy stochastyczny model procesu kształcenia w szkole wyższej. W: Z. Bubnicki, R. Kulikowski i J. Kacprzyk, XV Krajowa Konferencja Automatyki, **3**, 359-364.

Bereziński M., Inkielman M., Wagner D. (2005). Model sterowania czasem pracy własnej ucznia lub studenta. *Raport Badawczy RB/44/2005, Instytut Badań Systemowych PAN*, Warszawa.

Bloomfield S.D., Updegrove D.A. (1981). A modelling system for higher education. *Decision Sciences*, **12**, 310-321.

Bolszew L.N., Smirnow N.W. (1968). Tablicy matematiczieskoj statistiki. Wyczislitielnyj Cientr ANSSSR, Moskwa.

Day N.E. (1969). Estimating the components of a mixture of normal distributions. *Biometrika*, **56**, 463-474.

Fisher W.D. (1958). On grupping for maximum homogenity. *Journal of the American Statistical Association*, **53**, 789-798.

Flechsig K.H., Haller H.D. (1975). Einführung in didaktisches Handeln. Klett Verlag, Stuttgart.

Hellwig Z. (1980). Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Hotelling H. (1951). A generalized T-test and measure of multivariate dispersion. W: Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. University of California Press, Berkeley, 23-41.

Jeziorska J. (2004). Wybrane metody nauczania i uczenia się. Centrum Katechetyczne Archidiecezji Warszawskiej, Warszawa.

Kadibur T.S., Jelisiejewa I.I. (1975). Woprosy mietodiki analiticzeskoj gruppirowki. *Nauczny-je Zapiski LFEI*, **42**, 216-223.

Kendall M.G. Stuart A. (1960). The advanced theory of statistics. Vol. 3. Griffin, London.

Kropiwnicki J., red. (2002). Mierzenie jakości w szkole (placówce). Wydawnictwo Nauczycielskie, Jelenia Góra.

Kullback S. (1959). Information theory and statistics. John Wiley, New York.

Kupisiewicz Cz. (2000). Dydaktyka ogólna. Oficyna Wydawnicza GRAF PUNKT, Warszawa.

Lehmann E.L. (1986). Testing statistical hipotesis. Jon Wiley, New York.

Morrison D.F. (1990). Wielowymiarowa analiza statystyczna. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Muszyński H. (1971). Wstęp do metodologii pedagogiki. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Nawroczyński B. (1957). Zasady nauczania. Ossolineum, Wrocław.

Niemierko B. (1999). Pomiar wyników kształcenia. Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.

Okoń W. (1995). Wprowadzenie do dydaktyki ogólne. Wydawnictwo Żak, Warszawa.

Pawłowski Z. (1980). Statystyka matematyczna. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Półturzycki J. (2002). Dydaktyka dla nauczycieli. Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock.

Stróżyński K., red. (2000). Jakość szkoły - jej planowanie i diagnoza. Wydawnictwo Nauczycielskie, Jelenia Góra.

Zaczyński W.P. (1997). Statystyka w pracy badawczej nauczyciela. Wydawnictwo Akademickie „Żak", Warszawa.