

26/2004

Raport Badawczy
Research Report

RB/24/2004

**Metody aproksymacji
przestrzenno-czasowej
pomiarów środowiskowych
przy użyciu metod
geostatystycznych**

L. Bogdan, W. Kozłowski

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences



POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr hab. inż. Zbigniew Nahorski

Warszawa 2004

**Polska Akademia Nauk
Instytut Badań Systemowych**

Raport /2004

Lucyna Bogdan, Wojciech Kozłowski

**Metody aproksymacji przestrzenno-czasowej pomiarów
środowiskowych przy użyciu metod geostatystycznych**

Redakcja:
Jan Studziński

Warszawa 2004

Lucyna Bogdan, Wojciech Kozłowski

Metody aproksymacji przestrzenno-czasowej pomiarów środowiskowych przy użyciu metod geostatystycznych

Spis treści

1. Wprowadzenie
 2. Monitoring środowiska
 3. Aproksymacja danych pomiarowych z monitoringu środowiska
 4. Metody krigingowe aproksymacji danych
 5. Algorytm obliczeniowy metody krigingowej
 6. Modele wiariogramów procedury krigingowej
 7. Przykład aproksymacji danych z użyciem metody krigingowej
 8. Ocena efektywności metod krigingowych
 9. Wnioski końcowe
- Literatura

1. Wprowadzenie

Temat raportu obejmuje problemy aproksymacji przestrzenno – czasowej wyników pomiarów środowiskowych, przy użyciu metod geostatycznych. Metody te są wykorzystywane do tworzenia map topograficznych, warstw i izolini. W literaturze przedmiotu wyróżnia się znaczną liczbę metod, zaliczanych do grupy geostatycznych. Jedną z nich jest procedura krigingowa, potraktowana w sposób szczególny, biorąc pod uwagę cel realizowanego projektu badawczego oraz przewidywane rezultaty w zakresie poznawczym i użytkowym. Kriging umożliwia skonstruowanie między innymi numerycznego modelu terenu.

Opracowanie niniejsze składa się z ośmiu rozdziałów. Rozdział pierwszy dotyczy zagadnień monitoringu środowiska. W rozdziale drugim przedstawiono postępowanie prowadzone w celu aproksymacji wyników pomiarów wykonanych w ramach monitoringu środowiska. Skupiono uwagę na numerycznym modelu terenu i zaprezentowano fragmenty map opracowanych w ramach wybranego programu numerycznego SURFER 7, posiadającego dziewięć metod aproksymacji danych.

Rozdział 3 zawiera opis metody krigingowej aproksymacji danych, uwypuklających specyfikę procedury krigingu polegającą na ustaleniu wartości współczynników wagowych.

W rozdziale czwartym zamieszczono algorytm obliczeniowy metody krigingowej, zawierający 12 kroków, stanowiących elementarne zadania, prowadzące do oszacowania parametrów położenia punktów, np. tworzących rzeźbę terenu.

W rozdziale 5 znajdują się wybrane modele wariogramów procedury krigingowej przytoczone z literatury światowej. Natomiast przykład aproksymacji danych przy zastosowaniu metody krigingowej przytoczono w rozdziale 6.

Raport zakończono syntetyczną oceną efektywności metody krigingowej i wnioskami końcowymi.

2. Monitoring środowiska

Na podstawie ustawy z dnia 27 kwietnia 2001 r. o prawie ochrony środowiska w Polsce źródłem informacji o środowisku jest państwowy monitoring środowiska [10]. Państwowy monitoring środowiska stanowi system pomiarów, ocen i prognoz stanu środowiska oraz gromadzenia, przetwarzania i rozpowszechniania informacji o środowisku [11,12,13]. Państwowy monitoring środowiska wspomaga działania na rzecz ochrony środowiska poprzez systematyczne informowanie organów administracji i społeczeństwa o:

- 1) jakości elementów przyrodniczych, dotrzymany standardów jakości środowiska określonych przepisami oraz obszarach występowania przekroczeń tych standardów,
- 2) występujących zmian jakości elementów przyrodniczych i przyczynach tych zmian, w tym powiązaniach przyczynowo-skutkowych, występujących pomiędzy emisjami i stanem elementów przyrodniczych.

Państwowy monitoring środowiska obejmuje uzyskiwane na podstawie badań monitoringowych informacje w zakresie:

- 1) jakości powietrza,
- 2) jakości wód śródlądowych powierzchniowych i podziemnych oraz morskich wód wewnętrznych i wód morza terytorialnego,
- 3) jakości gleby i ziemi,
- 4) hałasu,
- 5) promieniowania jonizującego i pól elektromagnetycznych,

- 6) stanu zasobów środowiska, w tym lasów,
- 7) rodzajów i ilości substancji lub energii wprowadzanych do powietrza, wód, gleby i ziemi,
- 8) wytwarzania i gospodarowania odpadami.

Badania monitoringowe przeprowadza się w sposób cykliczny, stosując ujednoczone metody zbierania, gromadzenia i przetwarzania danych.

Państwowy monitoring środowiska zbiera dane na podstawie:

- 1) pomiarów dokonywanych przez organy administracji, obowiązane na podstawie ustawy do wykonywania badań monitoringowych,
- 2) danych zbieranych w ramach statystyki publicznej, określanych corocznie w programach badań statystycznych statystyki publicznej,
- 3) informacji udostępnionych przez inne organy administracji,
- 4) pomiarów stanu środowiska, wielkości i rodzajów emisji, a także ewidencji, do których prowadzenia obowiązane są podmioty z mocy prawa albo na mocy decyzji,
- 5) innych niż wymienione w pkt 4 informacji, uzyskanych odpłatnie lub nieodpłatnie od podmiotów niebędących organami administracji.

Informacje dotyczące:

- 1) klasyfikacji stref, o której mowa w art. 88 ust. 2 i art. 89 ust. 1,
- 2) wyników pomiarów, o których mowa w art. 90 ust. 1 i 2,
- 3) obszarów, na których obowiązują ograniczenia wynikające z przepisów wydanych na podstawie art. 92 ust. 1,
- 4) wyników badań, o których mowa w art. 109 ust. 2,
- 5) terenów, o których mowa w art. 110,

- 6) wyników pomiarów, o których mowa w art. 118 ust. 1,
 - 7) terenów, o których mowa w art. 118 ust. 6 i art. 119 ust. 1,
 - 8) wyników pomiarów, o których mowa w art. 123 ust. 2,
 - 9) terenów, o których mowa w art. 124,
 - 9a) emisji i poboru wód, zgromadzone w wojewódzkiej bazie informacji o korzystaniu ze środowiska, o której mowa w art. 286a ust. 1,
 - 10) wyników badań, o których mowa w art. 49 ust. 2 i 3 ustawy - Prawo wodne,
- są umieszczane w szczególności w elektronicznych bazach danych, dostępnych za pośrednictwem publicznych sieci telekomunikacyjnych.

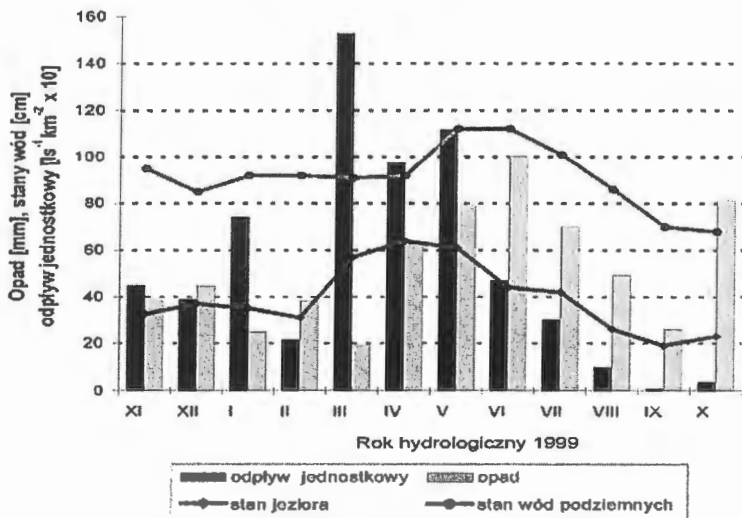
Dostępne bazy danych prowadzą:

- 1) wojewoda - w zakresie informacji, o których mowa w ust. 1 pkt 3, oraz, z zastrzeżeniem pkt 2, w zakresie informacji, o których mowa w ust. 1 pkt 6 i 7,
- 2) starosta - w zakresie informacji, o których mowa w ust. 1 pkt 4 i 5, oraz, gdy dotyczy to terenów, o których mowa w art. 117 ust. 2 pkt 1 i ust. 3, w zakresie informacji, o których mowa w ust. 1 pkt 6 i 7,
- 3) wojewódzki inspektor ochrony środowiska - w zakresie informacji, o których mowa w ust. 1 pkt 1, 2, 8, 9, 9a i 10.

3. Aproksymacja danych pomiarowych z monitoringu środowiska

Dane pomiarowe umieszcza się w raportach, których cykliczność powstawania reguluje ustawa. Do przetwarzania danych pomiarowych z monitoringu środowiska stosuje się przede wszystkim statystykę ogólną. W raportach podawane są sumy dzienne, miesięczne, roczne lub wartości średnie arytmetyczne wyliczane z odpowiedniego, ustalonego w ustawie, okresu czasu.

Dane przetworzone prezentowane są w postaci tabel lub wykresów. Na rysunku 1 przedstawiono przykładowy wykres pochodzący z raportu realizacji programu Zintegrowanego Monitoringu Środowiska Przyrodniczego (<http://main.amu.edu.pl/~zmsp/stan99/stan99.html>).



Rys. 1. Miesięczne sumy opadów, średnie miesięczne stany wód jeziora Łękek, poziom wód gruntowych i odpływ jednostkowy w Stacji Bazowej Puszcza Borecka w roku hydrologicznym 1999.

Metody aproksymacji danych pomiarowych stosuje się w szczególności w geologii, geofizyce do tworzenia numerycznych modeli terenu, np. map, warstw i izolinii. Numeryczne modele terenu spełniają rolę nośnika informacji o topografii terenu w środowisku GIS [Geographic Information System]. Na mapach tradycyjnych (papierowych) rolę tę spełniają

poziomice. GIS stosuje wiele sposobów kodowania informacji o wysokościach terenu. Najbardziej popularnym jest format rastrowy. Do jego utworzenia wymagany jest proces interpolacji nieregularnie rozmieszczonych punktów do regularnej siatki. Podstawowym celem numerycznego modelowania terenu jest określenie wysokości terenu z możliwie jak najmniejszym błędem oraz wierne oddanie kształtu formy terenu. Realizacja tego celu, to wykonywanie ortofotomap oraz analiza form terenu: zasięgi zlewni, kierunki spływu, kąty nachylenia zboczy, itp. [Erdas Field Guide, 1998]. Najprostszym sposobem uzyskania informacji topograficznej jest wektoryzacja poziomic map analogowych. Model rastrowy uzyskuje się w tej metodzie na drodze interpolacji werteksów izolinii do regularnej siatki (GRID).

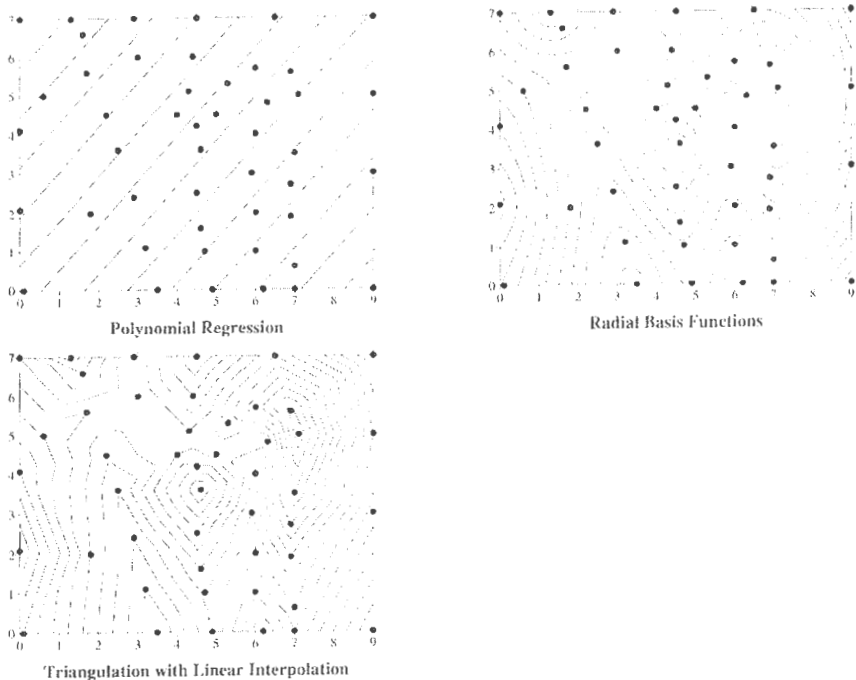
Jednym z programów GIS jest program SURFER 7. Program posiada dziewięć metod aproksymacji danych pomiarowych pozwalających stworzyć mapy:

1. Metoda odwrotnej odległości -- *Inverse Distance to a Power*
2. Metoda krigingowa – *Kriging*
3. Metoda minimalnych krzywizn – *Minimum Curvature*
4. Zmodyfikowana metoda Shepard'a – *Modified Shepard's Method*
5. Metoda naturalnych sąsiadów – *Natural Neighbor*
6. Metoda najbliższych sąsiadów – *Nearest Neighbor*
7. Metoda aproksymacji wielomianem – *Polynomial Regression*
8. Metoda funkcji promieni bazowych – *Radial Basic Functions*
9. Metoda triangulacji z liniową interpolacją – *Triangulation with Linear Interpolation.*

Na rysunkach 2 i 3 przedstawiono mapy zrealizowane z wykorzystaniem wyżej wymienionych metod w programie SURFER 7, przyjmując jednakowe punkty bazowe.



Rys.2. Mapy wykonane metodami: odwrotnej odległości, krigingowej, minimalnych krzywizn, zmodyfikowanej metody Shepard'a, naturalnych sąsiadów i najbliższych sąsiadów.



Rys.3. Mapy wykonane metodami: aproksymacji wielomianem, funkcji promieni bazowych i triangulacji z liniową interpolacją.

4. Metody krigingowe aproksymacji danych

Prezentowana w niniejszym rozdziale metody krigingowe umożliwiają szacowanie jakości i wielkości złóż oraz ilustrowanie rozmieszczenia wartości parametrów złożowych za pomocą map izarytm (np. warstwic). Metoda geostatystyczna krigingu jest szczególnie wykorzystywana do oceny wskaźników zanieczyszczeń i zasobów złóż.

W ujęciu geostatystycznym parametr złożowy traktowany jest jako tzw. zmienna zregionalizowana (zwana również przestrzenną lub zlokalizowaną), którą definiuje się jako ciągłą funkcję współrzędnych przestrzeni. Wartości tej zmiennej zregionalizowanej znane są tylko w obrębie próbek geologicznych lub pól pomiarowych o znikom małych rozmiarach w porównaniu z przestrzenią złożową. Noszą one nazwę bazy geometrycznej pomiarów [1,2].

Aby względem zmiennej zregionalizowanej można było przeprowadzić interpretację statystyczną, nakłada się na nią pewne ograniczenia. W szczególności przyjmuje się hipotezę słabej stacjonarności, co oznacza, że wartość oczekiwana zmiennej nie zależy od miejsca pomiaru, zaś jej kowariancja jest jedynie funkcją odległości pomiędzy punktami pomiarów. W praktyce ze względu na to, że hipoteza słabej stacjonarności w odniesieniu do realnych parametrów złożowych jest zbyt rygorystyczna, stosuje się znacznie łagodniejsze ograniczenie, które zakłada słabą stacjonarność nie tyle samej zmiennej zregionalizowanej, lecz jej przyrostów. Istotne znaczenie ma tu wariancja przyrostów, która definiuje podstawową funkcję charakterystyczną geostatystyki, zwaną wariogramem

$$D^2[Z(x+h) - Z(x)] = E[Z(x+h) - Z(x)]^2 = 2 \gamma(h) \quad (1)$$

gdzie:

D , E - operatory wariancji i wartości oczekiwanej,

$2\gamma(h)$ -wariogram,

$\gamma(h)$ - semiwariogram (półwariogram),

$Z(x+h), Z(x)$ - wartości zmiennej zregionalizowanej w punkcie początkowym i odległym o h .

W zastosowaniach metod geostatystycznych wykorzystuje się najczęściej połowę wartości wariogramu, tzw. semiwariogram. Podstawę geostatystycznego opisu zmienności stanowi funkcja ujmująca zależność pomiędzy średnim zróżnicowaniem wartości parametrów złożowych, a odległością pomiędzy miejscami ich pomiarów. W warunkach rutynowych pomiarów wartości parametrów złożowych postać semiwariogramu dla dyskretnej i regularnej sieci pomiarów określa się z klasycznej formuły G. Matherona [3,4,5]

$$\gamma(h) = \frac{1}{2n_h} \sum_{i=1}^{n_h} (z_{h+i} - z_i)^2 \quad (2)$$

gdzie z_i, z_{i+h} są wartościami parametru złożowego w punktach oddalonych o wektor h , natomiast n_h jest liczbą par punktów pomiarowych odległych o wektor h . Semiwariogram, którego postać została określona na podstawie wyników pomiarów w złożu, nosi nazwę semiwariogramu empirycznego i przedstawia on w syntetycznej formie strukturę zróżnicowania parametrów złożowych.

Wyznaczanie semiwariogramu w istocie polega na obliczaniu średniego kwadratu różnic dla wszystkich par utworzonych z wartości parametru złożowego, określonych w punkcie wyróżnionym (bazowym) i w każdym z punktów, który znalazł się w obszarze grupowania danych, a następnie na przypisaniu średniego kwadratu różnic średniej odległości pomiędzy punktem bazowym a punktami z rozpatrywanego sektora zliczania. Następnie całą procedurę powtarza się dla

kolejnego przedziału odległości i dalej, dla kolejnych punktów pomiarowych, które przejmują rolę punktów bazowych.

Semiwariogram empiryczny w formie wykresu punktowego nie może być wykorzystany jednak do rozwiązywania zadań oceny parametrów geologicznych. By można to było wykonać, przybliża się go różnymi funkcjami analitycznymi, które w dalszym postępowaniu traktowane są jako geostatystyczne modele zmienności. Do najczęściej używanych zalicza się model sferyczny Matherona opisany równaniem [6,7,8]

$$\gamma(h) = C \left[\frac{3}{2} \frac{h}{a} - \frac{h^3}{2a^3} \right] + C_0 \quad \text{dla } h \leq a \quad (3)$$

oraz

$$\gamma(h) = C_0 + C = \delta^2 \quad \text{dla } h \geq a \quad (4)$$

Z definicji semiwariogramu powinno wynikać, że jego wartość dla $h = 0$ wynosi również zero. Jednakże dla malejących do zera wartości h , realne semiwariogramy empiryczne rzadko dążą do zera, na ogół dążą do pewnej wartości określanej w literaturze geostatystycznej jako stałej *efektu samorodków* C_0 (*nugget effect*). Charakteryzuje ona zmienność lokalną badanego parametru złożowego i odpowiada składnikowi losowemu zmienności dla $h \rightarrow 0$.

Do aproksymacji semiwariogramów empirycznych modelami teoretycznymi stosowane są najczęściej metody automatycznego dopasowania metodą *najmniejszych kwadratów*. Jest ona szczególnie przydatna przy dużej skali obliczeń. Wykonana poprawnie procedura obliczeniowa wymaga zastosowania aproksymacji ważonej ze względu na różną dokładność

oceny poszczególnych wartości semiwariogramu empirycznego, co wynika z różnej liczebności par danych, na podstawie których są wyznaczone. Dlatego zazwyczaj pomija się wartości semiwariogramu określone dla zbyt ubogiej liczby danych (np. kilku par danych).

Metoda krigingu jest geostatystyczną metodą szacowania średnich wartości parametrów złożowych i ich wartości w punktach złoża, opartą na zmienności wyrażonej semiwariogramem. Estymator wartości średniej parametru ma postać średniej ważonej i określony jest wzorem[1,2,9]:

$$z_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot z_i \quad (5)$$

gdzie λ_i jest współczynnikiem wagowym krigingu, a z_i jest wartością parametru złożowego w i -tym punkcie pomiarowym.

Specyfika procedury krigingu polega na ustalaniu wartości współczynników wagowych. Winny być one tak dobrane, by spełniły dwa postulaty: nieobciążoności i maksymalnej efektywności. Pierwszy postulat jest spełniony, gdy

$$E(z_i - m) = 0 \quad (6)$$

skąd wynika wymóg, aby

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (7)$$

Drugi postulat oznacza, iż wariancja różnicy pomiędzy rzeczywistą, średnią wartością parametru m i jej oceną z_i winna być możliwie najmniejsza, co można zapisać następująco

$$\sigma^2 = E[(z_i - m)^2] = \min \quad (8)$$

Warunkiem koniecznym do spełnienia postulat minimalizacji błędu jest zerowanie się pierwszych pochodnych wariancji z uwagi na wszystkie współczynniki wagowe, tzn.

$$\frac{\partial \left[\sigma^2 - 2\nu \sum_{i=1}^n \lambda_i \right]}{\partial z_i} = 0, \text{ dla } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (9)$$

gdzie ν jest mnożnikiem Lagrange'a.

W wyniku różniczkowania otrzymuje się układ n równań z n niewiadomymi współczynnikami wagowymi w_{ik} , który w uproszczonej postaci można zapisać następująco

$$\gamma(x_i, x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(x_i, x_0) + \nu \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (10)$$

lub w postaci macierzowej [2,3,4]

$$\begin{bmatrix} \gamma(x_i, x_j) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_i \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(x_i, x_0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

gdzie $\gamma(x_i, x_j)$ jest średnią wartością semiwariogramu dla odcinków łączących punkty pomiarów (opróbowań) $z(x_i)$ oraz $z(x_j)$, x_i, x_j – odległość między punktami x_i i x_j , natomiast x_i i x_j są określonymi punktami pomiaru przy wykorzystaniu przyjętego modelu zmienności badanego parametru. Rozwiązanie przedstawionego układu równań prowadzi do ustalenia liczbowych wartości współczynników wagowych, które są niezbędne do szacowania średniej wartości parametru z minimalnym błędem. Są one również konieczne do wyznaczenia przeciętnej wielkości błędu, zwanego *błędem krigingu*, którego wariancję określa wzór

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \gamma(x_i, x_j) + v - \gamma(x_i, x_0) \quad (12)$$

Metoda krigingu, ze względu na powyższe własności, stanowi dogodną metodę interpolacyjną, wysoce przydatną przy sporządzaniu map izarytm (izolinii) parametrów złożowych. Z uwagi na minimalizację błędu oceny parametru, procedura krigingu zapewnia większą dokładność w porównaniu z innymi procedurami interpolacyjnymi, np. opartymi na ważeniu odwrotności odległości (lub ich kwadratu) węzła interpolacyjnego od punktów pomiaru. Zasady zastosowania tej metody polegają na nałożeniu na mapę rozmieszczenia punktów pomiarowych (otworów, próbek) na ogół kwadratowej sieci punktów (interpolacyjnych), w których będzie wykonana interpolacja wartości parametru. Przy ocenie wartości parametru złożowego w tych punktach bierze się pod uwagę wszystkie obserwacje w złożu, które znajdują się w obrębie koła o założonej z góry wielkości promienia, którego środek stanowi punkt interpolacyjny. Promień tego koła dobiera się uwzględniając zasięg semiwariogramu oraz charakter rozmieszczenia obserwacji w złożu. Wagi

poszczególnych obserwacji określa się rozwiązując wspomniany wcześniej układ równań krigingu.

Ze względu na ogromną liczbę punktów interpolacji, realizacja zadania możliwa jest wyłącznie przy zastosowaniu komputerów. Mając określone wagi obserwacji dla poszczególnych punktów interpolacji, komputer określa dla każdego z nich wartości parametru (jako średnią ważoną w myśl procedury krigingu) oraz błąd krigingu. Metoda krigingu pozwala zatem na oszacowanie (predykcję) wartości zmiennej dla określonych punktów interpolacyjnych z danych otaczających punktów pomiarowych, a z nieregularnej siatki pomiarowej uzyskuje się regularny rozkład przestrzenny zmiennej w układzie geograficznym.

5. Algorytm obliczeniowy metody krigingowej

Algorytm obejmuje 12 kroków, których kolejność w treści podano poniżej:

Krok 1. Wyznaczamy położenie, np. współrzędne geograficzne punktu x_0 , którego wartość z_0 zamierzamy oszacować, np. wysokość nad poziomem morza.

Krok 2. Wyznaczamy zbiór punktów bazowych, których znamy położenie, oraz wartości z .

Krok 3. Tworzymy tabelę wartości Z dla poszczególnych punktów bazowych:

	x_1	x_2	x_3
z_1	z_1	z_2	z_3

Krok 4. Tworzymy symetryczną macierz Q odległości między punktami bazowymi:

	x_1	x_2	x_3
x_1	$h_{11} = 0$	h_{12}	h_{13}
x_2	h_{21}	$h_{22} = 0$	h_{23}
x_3	h_{31}	h_{32}	$h_{33} = 0$

Krok 5. Wybieramy model wariogramu oraz wyznaczamy stałe. Przeważnie wybierany jest model sferyczny. Wartość zmiennej h nie będzie większa niż maksymalna odległość pomiędzy punktami bazowymi. Stała C i stała a powinny być mniejsze od maksymalnej odległości pomiędzy punktami bazowymi h .

$$\gamma(h) = C \left[\frac{3h}{2a} - \frac{h^3}{2a^3} \right] + C_0 \quad \text{dla } h \leq a$$

$$\gamma(h) = C_0 + C = \delta^2 \quad \text{dla } h \geq a$$

Krok 6. Macierz symetryczną Q transformujemy na Q_i , czyli wyliczamy wartość $\gamma(h_{ij})$ oraz dopisujemy wiersz i kolumnę *jedynek*:

	x_1	x_2	x_3	
x_1	$\gamma(h_{11})$	$\gamma(h_{12})$	$\gamma(h_{13})$	1
x_2	$\gamma(h_{31})$	$\gamma(h_{32})$	$\gamma(h_{33})$	1
x_3	$\gamma(h_{31})$	$\gamma(h_{32})$	$\gamma(h_{33})$	1
	1	1	1	1

Krok 7. Transformowaną macierz Q_i odwracamy i otrzymujemy $Q_i^{(-1)}$.

Krok 8. Tworzymy macierz S odległości punktu x_0 od punktów bazowych:

	x_0
x_1	h_{10}
x_2	h_{20}
x_3	h_{30}

Krok 9. Transformujemy macierz S na S_0 , czyli wyliczamy wartości $\gamma(h_{i0})$ oraz dopisujemy kolumnę *jedynek*:

	x_0
x_1	$\gamma(h_{10})$
x_2	$\gamma(h_{20})$
x_3	$\gamma(h_{30})$
	1

Krok 10. Obliczamy wagi krigingu λ_i oraz współczynnik Lagrange'a z równania macierzowego:

$$\begin{bmatrix} \gamma(x_i, x_j) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_i \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(x_i, x_0) \\ 1 \end{bmatrix}$$

lub

$$[Q_i^{(-1)}] \cdot [S_i] = \begin{bmatrix} \lambda_i \\ \nu \end{bmatrix}$$

Krok 11. Wyliczenie szukanej wartości z_0 punktu x_0

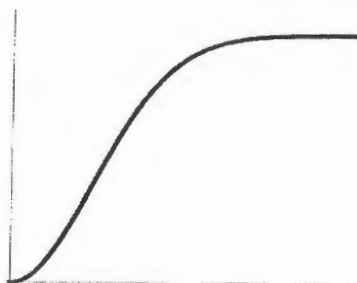
$$z_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot z_i$$

wykorzystując dane z tabeli Z oraz z *Kroku 9*.

Krok 12. Wykonanie wariogramu i sprawdzenie poprawności wybranego modelu metodą najmniejszych kwadratów. Jeżeli wyniki są niezadawalające, należy wybrać inny model lub inne stałe modelu i powtórzyć operację od początku.

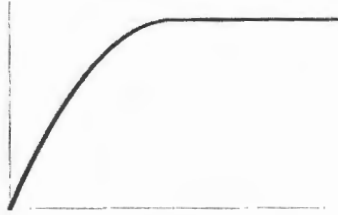
6. Modele wariogramów procedury krigingowej

Poniżej przedstawiono modele semiwariogramów opracowane przez autorów: Cressie (1991), Alfredo (1980), Pannatier (1996) oraz Kitanidisa (1997).



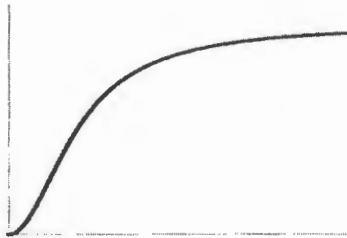
Gaussian Model
Pannatier (1996, p. 50)

$$\gamma(h) = C[1 - e^{-h^2}]$$



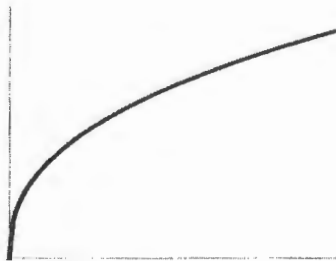
Quadratic Model
Alfaro (1980, p. 31)

$$\gamma(h) = \begin{cases} C[2h - h^2] & h < 1 \\ C & h \geq 1 \end{cases}$$



Rational Quadratic Model
Cressie (1991, p. 61)

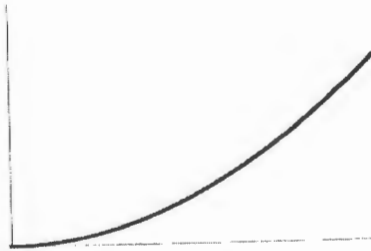
$$\gamma(h) = C \left[\frac{h^2}{1 + h^2} \right]$$



$$0 < h < 1$$

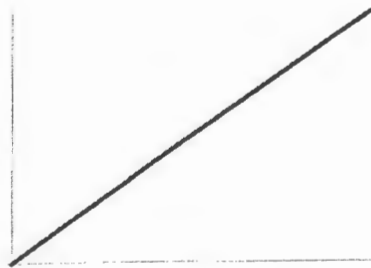
Power Models
Pannatier (1996, p. 51)

$$\gamma(h) = C[h^n]$$



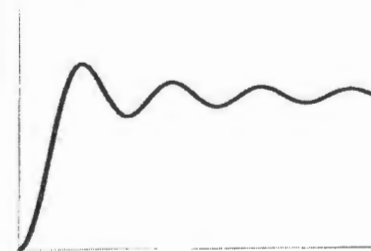
$1 < h < 2$
Power Models
 Pannatier (1996, p. 51)

$$\gamma(h) = C[h^n]$$



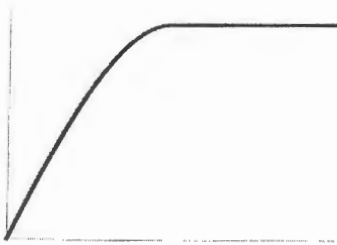
Linear Model
 Kitanidis (1997, p. 61)

$$\gamma(h) = C(h)$$



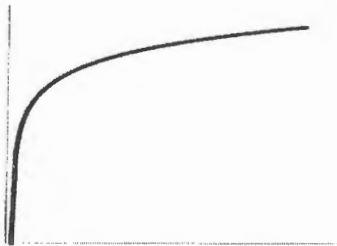
Wave (Hole Effect) Model
 Cressie (1991, p. 62)

$$\gamma(h) = C \left[1 - \frac{\sin h}{h} \right]$$



Spherical Model
Pannatier (1996, p. 48)

$$\gamma(h) = \begin{cases} C[1.5h - 0.5h^3] & h < 1 \\ C & h \geq 1 \end{cases}$$



Logarithmic Model
Kitanidis (1997, p. 61)

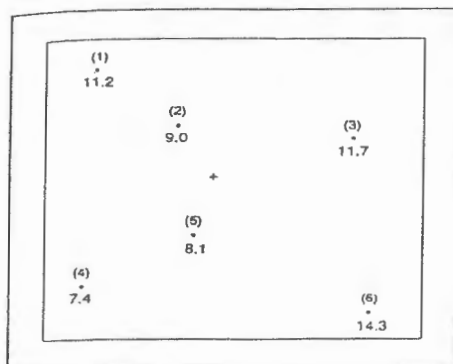
$$\gamma(h) = C[\log_e(h)] \quad h > 0$$

7. Przykład aproksymacji danych z użyciem metody krigingowej

Postępowanie polega na wykonaniu 12 zadań cząstkowych wyodrębnionych i uszeregowanych według kolejności zaprezentowanej poniżej:

Krok 1. Wyznaczamy położenie punktu x_0 (znajdującego się np. na teoretycznie wyodrębnionej powierzchni terenu), którego zamierzamy wyliczyć wartość z_0 .

Krok 2. Wyznaczamy zbiór punktów bazowych, których znamy położenie, oraz wartości z :



Krok 3. Tworzymy tabelę wartości Z dla poszczególnych punktów bazowych:

1	2	3	4	5	6
11.2	9.0	11.7	8.1	7.4	14.3

Krok 4. Tworzymy symetryczną macierz Q odległości między punktami bazowymi:

	1	2	3	4	5	6
1	0	2.7	8.8	6.4	7.5	11.9
2		0	6.5	4.2	6.4	9.2
3			0	7.2	10.5	7.0
4				0	3.4	6.1
5					0	8.4
6						0

Krok 5. Wybieramy model wariogramu oraz wyznaczamy stałą:

$$\gamma(h) = c_1 e^{\frac{-c_2 h}{a}} \quad \text{dla } h > 0$$

$$\gamma(h) = c_0 + c_1 \quad \text{dla } h = 0$$

dla $c_1 = 7$, $c_2 = 3$, $a = 10$, skąd otrzymujemy

$$\gamma(h) = 7e^{-0,3h}$$

Krok 6. Macierz symetryczną Q transformujemy na Q_1 , czyli wyliczamy wartość $\gamma(h_{ij})$ oraz dopisujemy wiersz i kolumnę jedynek:

7.0000	3.1140	0.4995	1.0262	0.7378	0.1971	1.000
3.1140	7.0000	0.9959	1.9856	1.0262	0.4430	1.000
0.4995	0.9959	7.0000	0.8073	0.2999	0.8572	1.000
1.0262	1.9856	0.8073	7.0000	2.5242	1.1229	1.000
0.7378	1.0262	0.2999	2.5242	7.0000	0.5632	1.000
0.1971	0.4430	0.8572	1.1229	0.5632	7.0000	1.000
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.000

Krok 7. Transformowaną macierz Q_1 odwracamy i otrzymujemy $Q_1^{(-1)}$:

0.1617	-0.0873	-0.206	-0.0110	-0.0240	-0.0189	0.1826
-0.0873	0.1864	-0.0278	-0.0443	-0.0147	-0.0124	0.1031
-0.0206	-0.0278	0.1261	-0.0208	-0.0186	-0.0383	0.2103
-0.0110	-0.0443	-0.0208	0.1738	-0.0662	-0.0315	0.1020
-0.0240	-0.0147	-0.0186	-0.0662	0.1475	-0.0240	0.1867
-0.0189	-0.0124	-0.0383	-0.0315	-0.0240	0.1251	0.2153
0.1826	0.1031	0.2103	0.1020	0.1867	0.2153	-1.9890

Krok 8. Tworzymy macierz S odległości punktu x_0 od punktów bazowych:

0-1	0-2	0-3	0-4	0-5	0-6
5.0	2.5	6.0	5.1	2.0	7.0

Krok 9. Transformujemy macierz S na S_b , czyli wyliczamy wartości $\gamma(h_{i0})$ oraz dopisujemy kolumnę jedynek:

0-1	0-2	0-3	0-4	0-5	0-6	
1.5619	3.3066	1.1571	1.5157	3.8417	0.8572	1.0000

Krok 10. Wyliczamy wagi krigingu λ_i oraz współczynnik Lagrange'a z równania macierzewego:

1	2	3	4	5	6	
-0.0021	0.4168	0.0964	-0.1035	0.5247	0.0678	-0.0634

Krok 11. Wylczenie szukanej wartości z_0 punktu x_0

$$z_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot z_i$$

wykorzystując dane z tabeli Z oraz z Kroku 9:

$$\begin{aligned} z_0 &= (11.2)(-0.0021) + (9.0)(0.4168) + (11.7)(0.0964) + \\ &\quad (8.1)(-0.1035) + (7.4)(0.5247) + (14.3)(0.0678) \\ &= 8.87 \end{aligned}$$

Krok 12. Wykonanie wariogramu i sprawdzenie poprawności wybranego modelu metodą najmniejszych kwadratów. Jeżeli wyniki są niezadawalające, należy wybrać inny model lub inne stałe modelu i powtórzyć operację od początku.

8. Ocena efektywności metod krigingowych

Wykonana analiza literatury przedmiotu upoważnia do pozytywnej oceny metod krigingowych i wyróżnienia ich jako właściwego narzędzia celem konstruowania map przedstawiających niezbędne cechy charakteryzujące teren, np. rzeźbę, wielkość opadów atmosferycznych, parametry geologiczne oraz charakterystyki dotyczące zanieczyszczenia powierzchni.

Metoda krigingowa polega na szacowaniu średnich wartości parametrów złożowych i ich wartości w poszczególnych punktach złoża i jest oparta na zmienności zdefiniowanej semiwariogramem. Do specyfiki krigingu należy ustalenie wartości współczynników wagowych, przyjmując do spełnienia dwa postulaty: nieobciążalności i maksymalną efektywność.

Zalety metody krigingu uwidaczniają się w świetle metodologii obliczeń, które zademonstrowano na przykładzie opisującym algorytm obliczeniowy parametrów punktów na przykładowej mapie terenu.

Z uwagi na minimalizację błędów oceny parametru, procedura krigingu zapewnia większą dokładność w porównaniu z innymi procedurami interpolacyjnymi, np. opartymi na ważeniu odwrotności odległości (lub ich kwadratu) węzła interpolacyjnego od punktów pomiaru.

9. Wnioski końcowe

Metoda krigingowa, należąca do metod geostatycznych, jest jedną najpełniej odpowiadającą założeniom stawianym przy tworzeniu map numerycznych terenu. Kriging, ze względu na specyficzne właściwości stanowi dogodną metodę interpolacyjną, przydatną przy sporządzaniu map parametrów złożowych. Z uwagi na występującą znaczną liczbę punktów interpolacji, realizacja zadania krigingowego możliwa jest wyłącznie na drodze numerycznej. Mając sprecyzowane wagi obserwacji dla poszczególnych punktów interpolacji, komputer określa dla każdego z nich wartość parametru (jako średnią ważoną) oraz błąd krigingu. Metoda krigingowa umożliwia określenie wartości zmiennej dla przyjętych punktów interpolacyjnych na podstawie danych otaczających punkty pomiarowe.

Literatura

1. Cressie, N. A. C. (1991), *Statistics for Spatial Data*, John Wiley and Sons, Inc., New York
2. Deutsch C. V., Journel, A. G. (1998): *GSLIB – Geostatistical Software Library and User's Guide*, Oxford University Press, New York.
3. Furst J. (1998): *Anwendung von Geographischen Informationssystemen in Hydrologie und Wasserwirtschaft – Studienblätter und Materialien zur Vorlesung im SS 1998*, WUM – Universitätsverlag der Hochschulgemeinschaft an der Universität Wien GmbH.
4. Isaaks, E. H., Srivastava, R. M. (1989): *Applied Geostatistics*, Oxford University Press, New York.
5. Kitanidis, P.K. (1997): *Introduction to Geostatistics*, Cambridge University Press, Melbourne, Australia.
6. Maidment, D. R.(1993): *Handbook of Hydrology*, McGraw – Hill, Inc. U.S.A.

7. Pannatier, Y. (1996): *VARIOWIN Software for Spatial Data Analysis in 2D*, Springer – Verlag Berlin Heidelberg.
8. *Surfre 7 – User's Guide*, Golden Software, Inc. 1999 Colorado U.S.A.
9. Wackernagel, H. (1998): *Multivariate geostatistics – An Introduction with Applications* Springer – Verlag Berlin Heidelberg.
10. Rozporządzenie Ministra Środowiska z dnia 27 kwietnia 2001 r. o prawie ochrony środowiska.
11. Rozporządzenie Ministra Środowiska z dnia 9 grudnia 2002 r. w sprawie zakresu, czasu, sposobu oraz warunków prowadzenia monitoringu składowisk odpadów.
12. Rozporządzenie Ministra Środowiska z dnia 27 lutego 2003 r. w sprawie rodzajów wyników pomiarów prowadzonych w związku z eksploatacją instalacji lub urządzenia, przekazywanych właściwym organom ochrony środowiska oraz terminu i sposobów ich prezentacji.
13. Rozporządzenie Ministra Środowiska z dnia 13 czerwca 2003 r. w sprawie wymagań w zakresie prowadzenia pomiarów wielkości emisji.
14. <http://main.amu.edu.pl/~zmsp/stan99/stan99.html>.

