

142/2004

Raport Badawczy
Research Report

RB/55/2004

Podjęcie geometryczne
Saari'ego.
Konstrukcja profili dla
czterech obiektów

H. Bury, D. Wagner

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences



POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr hab. inż. Janusz Kacprzyk

Warszawa 2004

Wprowadzenie

Jak wiadomo, stosowanie różnych metod wyznaczania oceny grupowej, dla tych samych ocen ekspertów, prowadzi niekiedy do różnych wyników. Próbę wyjaśnienia tych rozbieżności podjął D.G. Saari [5]. Opracowana przez niego metoda analizy wyników ekspertyzy wykorzystuje pojęcie tzw. profili [3, 4].

Saari [5] zaproponował podejście geometryczne, tzn. przedstawienie zbioru obiektów w postaci figury na płaszczyźnie (dla $n=3$ jest to trójkąt równoboczny) lub bryły w przestrzeni (dla $n=4$ jest to czworościan foremny). Uporządkowania obiektów są wyznaczane jako odpowiednie elementy trójkąta równobocznego lub figur powstałych z rozwinięcia na płaszczyźnie siatki bryły. Podejście to ma oczywiste zalety, między innymi łatwość interpretacji uzyskanych wyników, ale również podstawowe wady wiążące się z szybkim wzrostem wymiarowości problemu wraz ze wzrostem liczby obiektów.

W metodzie Saari'ego zakłada się, że oceny ekspertów mają postać uporządkowań, w których nie występują równoważności. Jeżeli liczba obiektów wynosi n , to mogą być one uporządkowane na $n!$ różnych sposobów. Liczba możliwych uporządkowań wynosi:

$$\text{dla } n=3 \quad 3!=6$$

$$\text{dla } n=4 \quad 4!=24$$

$$\text{dla } n=5 \quad 5!=120.$$

Wymiarowość zadań rośnie więc bardzo szybko, co przy większej liczbie rozpatrywanych obiektów utrudnia bezpośrednią interpretację geometryczną.

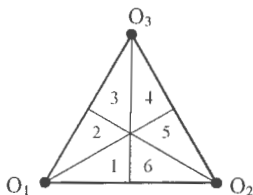
Załóżmy, że t_j oznacza liczbę ekspertów, których opinia ma postać uporządkowania P^j , ($j=1, \dots, n!$). Jeżeli liczba ekspertów, których opinie bierzemy pod uwagę jest równa K , to

$$\sum_{j=1}^K t_j = K \tag{1}$$

Profilem T będziemy nazywać wektor o $n!$ składowych t_j $T = (t_1, \dots, t_{n!})$.

Profil zawiera – przy przyjętych założeniach – pełny opis wyników ekspertyzy.

W przypadku trzech obiektów rozważania można prowadzić na płaszczyźnie. Rozpatrywaną figurą jest, jak wspomniano, trójkąt równoboczny, którego wierzchołki odpowiadają analizowanym obiektom. Poszczególnym uporządkowaniom odpowiadają mniejsze trójkąty opisane jako (1) + (6) na rys. 1, wyznaczone w wyniku podziału trójkąta $O_1O_2O_3$ przez wysokości odpowiednich boków.



Rys. 1. Reprezentacja uporządkowań obiektów dla $n=3$.

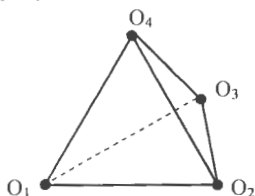
Tabela 1.

Trójkąt	Odpowiada uporządkowaniu
1	$P^1: O_1 > O_2 > O_3$ ¹⁾
2	$P^2: O_1 > O_3 > O_2$
3	$P^3: O_3 > O_1 > O_2$
4	$P^4: O_3 > O_2 > O_1$
5	$P^5: O_2 > O_3 > O_1$
6	$P^6: O_2 > O_1 > O_3$

¹⁾ Sposób odwzorowania uporządkowań obiektów przez trójkąty (1) + (6) jest następujący. W trójkącie (1) mającym z trójkątem $O_1O_2O_3$ wspólny wierzchołek O_1 oraz wspólny fragment boku O_1O_2 pierwsze miejsce zajmuje obiekt O_1 , drugą pozycję zajmuje obiekt O_2 zaś trzecie miejsce obiekt O_3 . Odwzorowania uporządkowań przez pozostałe trójkąty (2) + (6) są tworzone analogicznie.

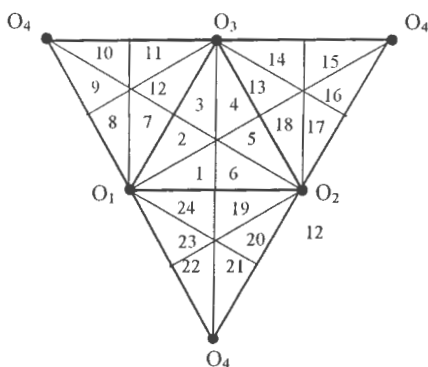
W przypadku czterech obiektów należy rozpatrywać w przestrzeni trójwymiarowej bryłę mającą postać ostrosłupa foremnego o podstawie trójkątnej (czworościan foremny).

Wierzchołkami ostrosłupa są rozpatrywane obiekty O_1, \dots, O_4 (rys. 2).



Rys. 2. Reprezentacja uporządkowań obiektów dla $n=4$.

Po rozwinięciu ścian bocznych czworościanu na płaszczyźnie otrzymujemy układ czterech trójkątów połączonych krawędziami.



Rys. 3. Reprezentacja uporządkowań obiektów na płaszczyźnie dla $n=4$.

W przypadku czterech obiektów liczba możliwych uporządkowań, przy założeniu, że w ocenach ekspertów nie występują oceny równoważne, wynosi – jak podano wyżej – 24.

Na rys. 3 przedstawiono przyjętą przez Saari'ego [4, 5] numerację uporządkowań na podstawie numeracji pól trójkątów dla $n=3$.

Sposób odwzorowania uporządkowań obiektów przez trójki (1) ÷ (6) jest następujący. W trójce wyznaczonym przez obiekty $O_1O_2O_3$ wyznaczamy uporządkowania trzech obiektów O_1, O_2, O_3 wg schematu podanego dla trzech obiektów w Tabeli 1 a następnie w każdym z sześciu uporządkowań na ostatnim miejscu umieszczamy obiekt O_4 . W trójce wyznaczonym przez obiekty $O_1O_3O_4$ wyznaczamy uporządkowania obiektów O_1, O_3, O_4 wg schematu dla trzech obiektów a następnie na ostatnim miejscu umieszczamy obiekt O_2 . Otrzymane uporządkowania są reprezentowane przez trójki (7) ÷ (12). W analogiczny sposób tworzymy uporządkowania obiektów $O_1O_2O_4$ na ostatnim miejscu umieszczając obiekt O_3 - otrzymujemy trójki (13) ÷ (18) oraz uporządkowania obiektów $O_3O_2O_4$ na ostatnim miejscu umieszczając obiekt O_1 - otrzymujemy trójki (19) ÷ (24). Powyższe uporządkowania podano w Tabeli 2.

W pracy [1] przyjęto inną konwencję numeracji uporządkowań. Ustawiając kolejno każdy z czterech obiektów na pierwszym miejscu otrzymano grupy po sześć uporządkowań. Podano je w Tabeli 2, z lewej strony, w nawiasach prostokątnych.

Tabela 2.

$[P^1]$	$P^1:$	O_1	$>$	O_2	$>$	O_3	$>$	O_4
$[P^6]$	$P^2:$	O_1	$>$	O_3	$>$	O_2	$>$	O_4
$[P^{13}]$	$P^3:$	O_3	$>$	O_1	$>$	O_2	$>$	O_4
$[P^{18}]$	$P^4:$	O_3	$>$	O_2	$>$	O_1	$>$	O_4
$[P^{12}]$	$P^5:$	O_2	$>$	O_3	$>$	O_1	$>$	O_4
$[P^7]$	$P^6:$	O_2	$>$	O_1	$>$	O_3	$>$	O_4
$[P^{17}]$	$P^{13}:$	O_3	$>$	O_2	$>$	O_4	$>$	O_1
$[P^{16}]$	$P^{14}:$	O_3	$>$	O_4	$>$	O_2	$>$	O_1
$[P^{22}]$	$P^{15}:$	O_4	$>$	O_3	$>$	O_2	$>$	O_1
$[P^{23}]$	$P^{16}:$	O_4	$>$	O_2	$>$	O_3	$>$	O_1
$[P^{10}]$	$P^{17}:$	O_2	$>$	O_4	$>$	O_3	$>$	O_1
$[P^{11}]$	$P^{18}:$	O_2	$>$	O_3	$>$	O_4	$>$	O_1
$[P^5]$	$P^7:$	O_1	$>$	O_3	$>$	O_4	$>$	O_2
$[P^4]$	$P^8:$	O_1	$>$	O_4	$>$	O_3	$>$	O_2
$[P^{20}]$	$P^9:$	O_4	$>$	O_1	$>$	O_3	$>$	O_2
$[P^{21}]$	$P^{10}:$	O_4	$>$	O_3	$>$	O_1	$>$	O_2
$[P^{15}]$	$P^{11}:$	O_3	$>$	O_4	$>$	O_1	$>$	O_2
$[P^{14}]$	$P^{12}:$	O_3	$>$	O_1	$>$	O_4	$>$	O_2
$[P^8]$	$P^{19}:$	O_2	$>$	O_1	$>$	O_4	$>$	O_3
$[P^9]$	$P^{20}:$	O_2	$>$	O_4	$>$	O_1	$>$	O_3
$[P^{24}]$	$P^{21}:$	O_4	$>$	O_2	$>$	O_1	$>$	O_3
$[P^{19}]$	$P^{22}:$	O_4	$>$	O_1	$>$	O_2	$>$	O_3
$[P^3]$	$P^{23}:$	O_1	$>$	O_4	$>$	O_2	$>$	O_3
$[P^2]$	$P^{24}:$	O_1	$>$	O_2	$>$	O_4	$>$	O_3

Podstawę podejścia Saari'ego stanowi dekompozycja profilu na składowe, które w określony sposób wpływają na ocenę grupową tworzoną bądź przy użyciu metod, których podstawę stanowią porównania parami bądź przy użyciu metod, których podstawę stanowi analiza miejsca zajmowanego przez obiekt w uporządkowaniu – nazywanych dalej metodami pozycyjnymi.

W przypadku trzech obiektów profil dekomponuje się na trzy składowe (będące różnicami odpowiednich profili [3]). W przypadku trzech obiektów istnieją trzy profile podstawowe B_i^3

($i=1, 2, 3$). Ze względu na wiążącą te profile zależność $\sum_{i=1}^3 B_i^3 = \mathbf{0}$ ¹⁾ wystarczy uwzględnić

dwa profile. Przyjmiemy, że będą to profile B_1^3 i B_2^3 .

Analogiczna zależność obowiązuje dla profilu przeciwnego, dlatego uwzględniamy również tylko dwa profile R_1^3 i R_2^3 .

Zatem

$$T^3 = b_1^3 B_1^3 + b_2^3 B_2^3 + r_1^3 R_1^3 + r_2^3 R_2^3 + c^3 C^3 + j^3 J^3 \quad (2)$$

gdzie

1° profil podstawowy B^3 o dwóch składowych B_1^3 ²⁾, B_2^3 , odpowiadającym dowolnym dwóm spośród trzech obiektów O_1, O_2, O_3 ,

2° profil przeciwny R^3 dwóch składowych R_1^3, R_2^3 , odpowiadającym dowolnym dwóm spośród trzech obiektów O_1, O_2, O_3 ,

3° profil Condorceta o jednej składowej C^3

oraz

4° profil jednostkowy o jednej składowej J^3 .

¹⁾ $\mathbf{O} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

²⁾ Górny indeks wskazuje liczbę rozważanych obiektów, dolny wskazuje numer składowej danego profilu.

Saari pokazał [5], jak –mając dany profil T^3 – wyznaczyć współczynniki b_i^3 , r_i^3 , c^3 oraz j^3 .

Przy dekompozycji profilu wykorzystuje się tzw. pojęcie różnicy profili.

Definicja [4, 5]. Różnicą profili nazywamy różnicę składowych dwóch profili odpowiadających tej samej liczbie ekspertów. Szóstka liczb (dla $n=3$) stanowi różnicę profili wtedy i tylko wtedy, gdy ich suma wynosi zero.

Definicja [4, 5]. Profil podstawowy (rozumiany jako różnica profili) określony dla obiektu O_i ($i = 1, 2, 3$) zawiera jedynkę na pozycji odpowiadającej profilom związanym z uporządkowaniami, w których obiekt O_i jest umieszczony na pierwszej pozycji oraz -1 na pozycji odpowiadającej profilom związanym z uporządkowaniami, w których obiekt O_i jest umieszczony na ostatnim miejscu.

Z analizy zależności definiujących poszczególne typy profili składowych odpowiadających określonym uporządkowaniom bezpośrednio wynika, że

$$B_1 = (1, 1, 0, -1, -1, 0) ; B_2 = (0, -1, -1, 0, 1, 1) ;$$

Definicja [4, 5]. Różnica profili przeciwstawnych określona dla obiektu O_i ($i = 1, 2, 3$) zawiera 1 na pozycji odpowiadającej profilom związanym z uporządkowaniami, w których obiekt O_i znajduje się na pierwszej lub ostatniej pozycji oraz -2 na pozycji odpowiadającej profilom, związanym z uporządkowaniami, w których obiekt O_i zajmuje pozycję środkową.

$$R_1 = (1, 1, -2, 1, 1, -2) ; R_2 = (-2, 1, 1, -2, 1, 1) ;$$

Definicja [4, 5]. Profilem Condorceta nazywamy profil będący różnicą profili o postaci $C^3 = (1, -1, 1, -1, 1, -1)$.

Definicja [4, 5]. Profilem jednostkowym nazywamy profil o postaci $J^3 = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Zależności definiujące poszczególne typy profili składowych odpowiadających określonym uporządkowaniom przedstawiono w Tabeli 3.

Tabela 3.

Uporządkowanie składowe profilu	P^1	P^2	P^3	P^4	P^5	P^6
B_1^3	1	1	0	-1	-1	0
B_2^3	0	-1	-1	0	1	1
R_1^3	1	1	-2	1	1	-2
B_3^3	-2	1	1	-2	1	1
C^3	1	-1	1	-1	1	-1
J^3	1	1	1	1	1	1

Zadanie dekompozycji sprowadza się do znalezienia współczynników stojących przy składowych profilu. Jeżeli oznaczymy przez T^3 wektor (o wymiarze 6×1) określający profil uzyskany w wyniku ekspertyzy a przez A macierz (o wymiarze 6×6) utworzoną na podstawie Tabeli 3, wówczas

$$T^3 = A \cdot [b_1^3, b_2^3, r_1^3, r_2^3, c^3, j^3]^T, \quad (3)$$

$$\text{gdzie } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } [b_1^3, b_2^3, r_1^3, r_2^3, c^3, j^3]^T$$

jest wektorem współczynników stojących przy składowych profilu podanych w Tabeli 3. Aby wyznaczyć te współczynniki należy odwrócić macierz A .

W przypadku czterech obiektów bezpośrednie uogólnienie podejścia stosowanego dla trzech obiektów nastęrcza pewne trudności. Próbę takiego uogólnienia pokazano w pracy [1].

Zakładając, że w ocenach ekspertów nie występują oceny równoważne dla $n=4$ mamy $4!=24$ różne uporządkowania.

W tym przypadku istnieją cztery profile podstawowe B_i^4 ($i=1, 2, 3, 4$). Ze względu na wiążącą te profile zależność $\sum_{i=1}^4 B_i^4 = 0$ wystarczy uwzględnić trzy profile. Przyjmijmy, że

będą to profile B_1^4 , B_2^4 i B_3^4 . Podobny wniosek obowiązuje dla profilu przeciwnego.

Profile podstawowy i przeciwny są określone analogicznie, jak w przypadku trzech obiektów.

W rozpatrywanym przypadku mamy więc następujące profile składowe:

- 1° profil podstawowy o trzech składowych B_1^4 , B_2^4 , B_3^4 odpowiadających dowolnym trzem spośród czterech obiektów O_1, O_2, O_3, O_4 ,
- 2° profil przeciwny o trzech składowych R_1^4 , R_2^4 , R_3^4 odpowiadających dowolnym trzem spośród czterech obiektów O_1, O_2, O_3, O_4 ,
- 3° profil Condorceta o trzech składowych C_1^4 , C_2^4 , C_3^4 odpowiadających trzem cyklom Condorceta dla obiektów O_1, O_2, O_3, O_4 ,
- 4° profil jednostkowy o jednej składowej J^4 .

Zadanie dekompozycji można zatem zapisać w postaci

$$T^{-1} = A_{(24 \times 10)} [b_1^4, b_2^4, b_3^4, r_1^4, r_2^4, r_3^4, c_1^4, c_2^4, c_3^4, j]^T, \quad (4)$$

gdzie

- T^{-1} jest wektorem o wymiarze (24×1) określającym profil uzyskany w wyniku ekspertyzy,

- A jest macierzą profili określoną [1] na podstawie Tabeli 2,

$[b_1^4, b_2^4, b_3^4, r_1^4, r_2^4, r_3^4, c_1^4, c_2^4, c_3^4, j]^T$ jest wektorem współczynników stojących przy odpowiednich składowych profili.

Z zapisu równania (4) wynika, że podejście zastosowane do wyznaczenia współczynników b_i^3, r_i^3 ($i = 1, 2$), c^3 oraz j^3 nie może być powtórzone w przypadku $n=4$, ponieważ macierz A nie jest kwadratowa.

Równanie macierzowe (4) jest nadokreślone. Można je rozwiązać stosując metodę opisaną przez Mańczaka i Nahorskiego [2].

W pracy [1] przedstawiono próbę rozwiązania równania (4), przy czym uzyskane rozwiązanie jest zależne od $(24-10)=14$ dowolnych stałych. W cytowanej pracy zaproponowano założenia, które umożliwiają ustalenie wartości tych stałych. W wyniku uzyskano rozwiązanie w postaci

$$[b_1^4, b_2^4, b_3^4, r_1^4, r_2^4, r_3^4, c_1^4, c_2^4, c_3^4, j]^T = B T^4,$$

gdzie B jest macierzą o wymiarach (24×10) taką, że $B \cdot A = I$.

Uzyskano następującą postać macierzy B [1]

$$[b_{st}] = \frac{1}{24} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & -2 & 2 & -2 & -2 & 2 & 2 & -2 & 2 & -2 & -2 & 2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & -2 & 2 & -2 & -2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & -2 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & -2 & -2 & 2 & -2 & 2 & 2 & -2 & -2 & 2 & -2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 & -3 & 3 & -3 & 3 & -3 & 3 & -3 & 3 & -3 & 3 & -3 & 3 & -3 & 3 & -3 & 3 & -3 & 3 & -3 & 3 & -3 & 3 & -3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 & -3 & 3 & -3 & 3 & -3 & 3 & -3 & 3 & -3 & 3 & -3 & -3 & 3 & -3 & 3 & -3 & 3 & -3 & 3 & -3 & 3 & -3 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 & -3 & 3 & 3 & -3 & -3 & -3 & 3 & -3 & -3 & 3 & 3 & -3 & 3 & -3 & 3 & -3 & 3 & 3 & -3 & 3 & -3 & 3 & -3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 \end{matrix} \end{matrix} \quad (5)$$

W macierzy tej zacięniowano elementy, których wartość została ustalona arbitralnie.

Po oddaniu publikacji [1] do druku autorzy uzyskali dostęp do dwuczęściowej, fundamentalnej pracy D.G. Saari'ego opublikowanej z czasopiśmie *Economic Theory*. Pierwsza część tej pracy dotyczy metod, których podstawę stanowi porównywanie parami [6], druga dotyczy metod pozycyjnych [7]. W pracach tych wprowadzono nowe rodzaje profili. Saari zaproponował aby w przypadku czterech obiektów uwzględnić następujące profile: podstawowy, podwójnie przeciwstawny, odstępstwa, skorygowany profil odstępstwa, Condorceta oraz jednostkowy. Uwzględniając je otrzymujemy macierz A o pełnym rządzie równym 24. Zatem, wyznaczając macierz odwrotną A^{-1} można określić wartości współczynników stojących przy poszczególnych składowych rozpatrywanych profili. W następnych punktach zostaną szczegółowo omówione nowe profile zaproponowane przez Saari'ego.

1. Profil zmieniający symetrię

Dzielimy zbiór obiektów \mathcal{O} na dwa rozłączne podzbiory $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$, z których każdy zawiera przynajmniej dwa obiekty. Niech r_t będzie ostrym uporządkowaniem zbioru \mathcal{O}_t ($t=1, 2$). Permutację tego uporządkowania oznaczmy przez $\sigma_t(r_t)$, przez $\bar{\sigma}_t$ oznaczmy permutację, która uporządkowanie r_t przekształca w uporządkowanie przeciwstawne \bar{r}_t ¹⁾.

W profilu, w którym 1 głos jest przyporządkowany uporządkowaniu $r_1 > r_2$ a -1 głos jest przyporządkowany uporządkowaniu $r_1 > \sigma_2(r_2)$ różnice w rozkładzie głosów dla metody większości i porównań parami są równe zero. Różnice głosów dla metody większości i porównań parami dla obiektów należących do zbioru \mathcal{O}_2 zależą od wybranej permutacji σ_2 . Różnice te nie mają jednak wpływu na różnicę rozkładu głosów dla metody większości i porównań parami, jeżeli w profilu przyporządkujemy 1 głos uporządkowaniu $\sigma_1(r_1) > r_2$ oraz

¹⁾ Dla uporządkowania $P=(O_1, O_2, \dots, O_n)$ uporządkowanie przeciwstawne ma postać $\bar{P}=(O_n, O_{n-1}, \dots, O_2, O_1)$.

(-1) głos uporządkowaniu $\sigma_1(r_1) > \sigma_2(r_2)$. Tak skonstruowany profil nosi nazwę profilu zmieniającego symetrię.

Tabela 4.

Profil	Liczba głosów	Uporządkowanie	Liczba głosów	Uporządkowanie
a	1	$r_1 > r_2$	-1	$r_1 > \sigma_2(r_2)$
b	1	$\sigma_1(r_1) > \sigma_2(r_2)$	-1	$\sigma_1(r_1) > r_2$

Dla $n=4$ i $\sigma = \bar{\sigma}$ profil ten nosi nazwę profilu podwójnie przeciwnego.

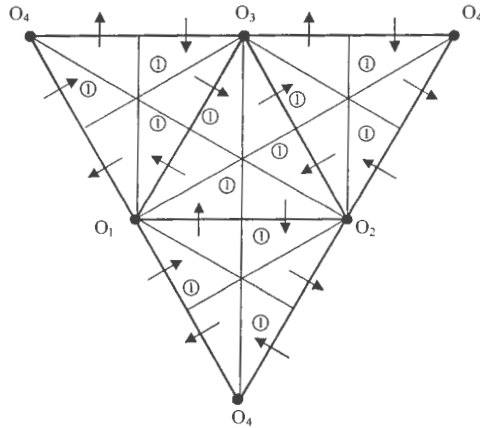
Przykłady tych profili (dla $n=4$) są podane np. w pierwszym wierszu Tabeli 5.

2. Profil podwójnie przeciwny

Jak podano we Wprowadzeniu ostrosłup reprezentujący uporządkowania czterech obiektów można przedstawić na płaszczyźnie w postaci czterech trójkątów połączonych krawędziami (rys. 3).

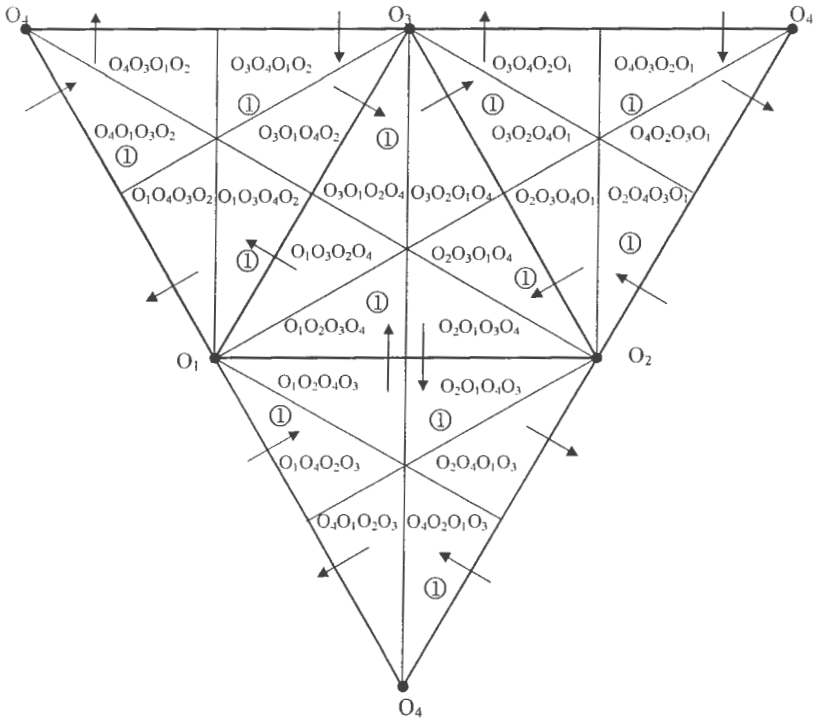
Przyjmujemy, że na każdej ze ścian są dane uporządkowania tworzące paradoks Condorceta dla trzech obiektów wyznaczonych przez wierzchołki danej ściany (uporządkowaniom tym odpowiadają \odot umieszczone w odpowiednich polach trójkąta).

Na rys. 4 przedstawiono uporządkowania tworzące paradoks Condorceta. Każdej z sześciu krawędzi ostrosłupa odpowiada profil podwójnie przeciwny wyznaczony przez cztery uporządkowania. Założymy, że uporządkowania te są określone przez strzałki, przy czym przyjmuje się, że początek strzałki odpowiada uporządkowaniu, któremu jest przyporządkowany (-1) głos (ekspert) a grot strzałki odpowiada uporządkowaniu, któremu jest przyporządkowany 1 głos. Na każdej krawędzi występują więc dwie strzałki przeciwnie skierowane.



Rys.4. Uporządkowania tworzące paradoks Condorceta dla $n=4$.

Przyporządkowanie pól trójkątów uporządkowaniom czterech obiektów podano na rys. 5.



Rys.5. Przyporządkowanie pól trójkątów określonym uporządkowaniom dla $n=4$.

W każdym z uporządkowań pierwsze trzy obiekty są wyznaczone przez wierzchołki trójkąta. Przy nanoszeniu strzałek przyjęto konwencję, że grot strzałki znajduje się w polu, w którym jest jedynka a drugi koniec strzałki w polu, w którym nie ma jedynki. Łatwo zauważyć, że można również przyjąć zasadę odwrotną. Przy przyjętej zasadzie uporządkowania składające się na poszczególne profile będą jak następuje.

Tabela 5.

Lp.	Krawędź	Liczba głosów	Uporządkowanie	Liczba głosów	Uporządkowanie
1	O_1O_2	-1	$(O_2 > O_1) > (O_3 > O_4)$	1	$(O_2 > O_1) > (O_4 > O_3)$
		1	$(O_1 > O_2) > (O_3 > O_4)$	-1	$(O_1 > O_2) > (O_4 > O_3)$
2	O_1O_3	-1	$(O_1 > O_3) > (O_2 > O_4)$	1	$(O_1 > O_3) > (O_4 > O_2)$
		1	$(O_3 > O_1) > (O_2 > O_4)$	-1	$(O_3 > O_1) > (O_4 > O_2)$
3	O_1O_4	-1	$(O_4 > O_1) > (O_2 > O_3)$	1	$(O_4 > O_1) > (O_3 > O_2)$
		1	$(O_1 > O_4) > (O_2 > O_3)$	-1	$(O_1 > O_4) > (O_3 > O_2)$
4	O_2O_3	-1	$(O_3 > O_2) > (O_1 > O_4)$	1	$(O_3 > O_2) > (O_4 > O_1)$
		1	$(O_2 > O_3) > (O_1 > O_4)$	-1	$(O_2 > O_3) > (O_4 > O_1)$
5	O_2O_4	-1	$(O_4 > O_2) > (O_3 > O_1)$	1	$(O_4 > O_2) > (O_1 > O_3)$
		1	$(O_2 > O_4) > (O_3 > O_1)$	-1	$(O_2 > O_4) > (O_1 > O_3)$
6	O_3O_4	-1	$(O_3 > O_4) > (O_2 > O_1)$	1	$(O_3 > O_4) > (O_1 > O_2)$
		1	$(O_4 > O_3) > (O_2 > O_1)$	-1	$(O_4 > O_3) > (O_1 > O_2)$

Zgodnie z przyjętą przez Saari'ego numeracją uporządkowań postać 6 profili podwójnie przeciwstawnych – utworzonych zgodnie z Tabelą 5 - jest jak następuje:

Tabela 6.

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1					-1						
2		-1	1				1					-1
3								-1	1			
4				-1	1							
5												
6										-1	1	
Σ	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
J^4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\Sigma+J^4$	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0

P	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1							1					-1
2												
3										-1	1	
4	1					-1						
5				-1	1			-1	1			
6		-1	1									
Σ	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
J^4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\Sigma+J^4$	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0

Saari udowodnił następujące twierdzenia [6].

Twierdzenie 1

Dla $n \geq 3$ istnieje $[n! - 2^{n-1}(n-2) - 2]$ – wymiarowa podprzestrzeń w przestrzeni profili $S_n(n!)$ nazywana jądrem ogólnym i oznaczana jako $\mathcal{K}\mathcal{K}^n$. Jeżeli $T^n \in \mathcal{K}\mathcal{K}^n$ to zastosowanie dowolnych metod wyznaczania oceny grupowej, których podstawę stanowią zarówno porównania parami, jak również informacja o pozycji obiektu w uporządkowaniu dla dowolnego zbioru obiektów prowadzi do pełnej równoważności obiektów.

Twierdzenie 2.

Podprzestrzeń \mathcal{N}^4 jest rozpięta przez sześć profili podwójnie przeciwstawnych, to znaczy wszystkie wektory należące do tego jądra mogą być przedstawione jako ważona suma tych profili i profilu jednostkowego J^4 .

Dla $n \geq 5$ wszystkie profile zmieniające symetrię należą do \mathcal{N}^n . Wszystkie profile należące do ogólnego jądra można przedstawić jako sumę ważoną profilu jednostkowego J^n oraz profili należących do \mathcal{N}^n .

Przystępując do konstrukcji profili podwójnie przeciwstawnych założyliśmy, że w każdym z trójkątów tworzących ściany rozpatrywanego ostrosłupa występują uporządkowania prowadzące do paradoksu Condorceta.

Zgodnie z przyjętą przez Saari'ego numeracją uporządkowań profil wyjściowy miał postać:

Tabela 7.

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1		1		1		1		1		1	

P	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	1		1		1		1		1		1	

A zatem, zgodnie z twierdzeniem 2 suma sześciu profili podwójnie przeciwstawnych oraz profilu jednostkowego J^4 z dokładnością do stałej powinna być taka, jak w Tabeli 7. Ostatni wiersz Tabeli 6 potwierdza ten wniosek.

3. Profil odstępstwa – podstawowy i skorygowany

Jak wielokrotnie podkreślano w literaturze [3, 5] wyniki zastosowania metod tworzenia oceny grupowej na podstawie porównań parami oraz metod pozycyjnych mogą się istotnie różnić.

Ocena grupowa uzyskana za pomocą wybranej metody może również zmieniać się przy zmianie liczby rozpatrywanych obiektów.

Aby uwzględnić tę sytuację, Saari wprowadził pojęcie tak zwanego profilu odstępstwa. Istotność tej propozycji wynika z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 3 [7].

Dla danego profilu T^n wyznaczonego dla zbioru \mathcal{O} n obiektów, oceny grupowe uzyskane w wyniku zastosowania dowolnej metody pozycyjnej są jednoznacznie określone przez wynik uzyskany na podstawie porównań parami oraz profil odstępstwa określony dla zbioru $\mathcal{O} \subset \mathcal{A}^2$ obiektów. Profil ten będzie nazywany profilem skorygowanym.

Definicja

Profil odstępstwa - oznaczony D_i^n - odpowiadający obiektowi O_i należącemu do zbioru $n \geq 3$

tworzy się przyporządkowując liczbę $(-1)^n \binom{n-1}{s-1}$ głosów każdemu uporządkowaniu,

w którym obiekt O_i znajduje się na pozycji $s, s=1, \dots, n$.

Dla $n=3$ mamy

$$\text{Obiekt } O_i \left\{ \begin{array}{lll} \text{na pozycji pierwszej} & - \text{ liczba głosów} & (-1)^i \binom{2}{0} = -1 \\ \text{na pozycji drugiej} & - \text{ liczba głosów} & (-1)^2 \binom{2}{1} = 2 \\ \text{na pozycji trzeciej} & - \text{ liczba głosów} & (-1)^3 \binom{2}{2} = -1 \end{array} \right. \quad (6)$$

Z podanej definicji bezpośrednio wynika, że dla $n=3$ profil odstępstwa pokrywa się z profilem przeciwnym R_i^3 .

Dla $n=4$ mamy

$$\text{Obiekt } O_i \left\{ \begin{array}{lll} \text{na pozycji pierwszej} & - \text{ liczba głosów} & (-1)^i \binom{3}{0} = -1 \\ \text{na pozycji drugiej} & - \text{ liczba głosów} & (-1)^2 \binom{3}{1} = 3 \\ \text{na pozycji trzeciej} & - \text{ liczba głosów} & (-1)^3 \binom{3}{2} = -3 \\ \text{na pozycji czwartej} & - \text{ liczba głosów} & (-1)^4 \binom{3}{3} = 1 \end{array} \right. \quad (7)$$

Definicja

Jeżeli ze zbioru \mathcal{O} liczącego n obiektów zostanie wyodrębniony zbiór \mathcal{S} liczący j obiektów, $3 \leq j \leq n$, to można utworzyć skorygowany profil odstępstwa $D_{i,s}^j$, który powstaje z profilu D_i^j w wyniku dodania wszystkich możliwych uporządkowań obiektów nie będących elementami zbioru \mathcal{S} , w których zajmują pozycje niższe niż obiekty ze zbioru \mathcal{O}^c . Liczba uporządkowań obiektów nie należących do zbioru \mathcal{S} jest równa $(n-j)!$

W przypadku czterech obiektów $\mathcal{O} = \{O_1, O_2, O_3, O_4\}$ możemy utworzyć profile D_{i, \mathcal{S}_i}^3 gdzie \mathcal{S}_i jest zbiorem trzech obiektów, $O_i \in \mathcal{S}_i$. W rozpatrywanym przypadku możemy utworzyć

$\binom{4}{3} = 4$ różne zbiory trójelementowe, a zatem $l=4$. Będą to zbiory:

$\mathcal{S}_1 = \{O_1, O_2, O_3\}$, $\mathcal{S}_2 = \{O_1, O_2, O_4\}$, $\mathcal{S}_3 = \{O_1, O_3, O_4\}$, $\mathcal{S}_4 = \{O_2, O_3, O_4\}$.

Wiadomo również [7], że zachodzi następujący związek:

$$\sum_{O_i \in \mathcal{S}_i} D_{i, \mathcal{S}_i}^k = 0 \quad (8)$$

Zatem dla każdego ze zbiorów \mathcal{S}_j ($j=1, 2, 3$) wystarczy utworzyć dwa profile; trzeci jest wyznaczany z równości (8).

Utworzymy więc 8 następujących profili:

$$\begin{aligned} & D_{1, (O_1, O_2, O_3)}^3, D_{2, (O_1, O_2, O_3)}^3 \\ & D_{1, (O_1, O_2, O_4)}^3, D_{2, (O_1, O_2, O_4)}^3 \\ & D_{1, (O_1, O_3, O_4)}^3, D_{3, (O_1, O_3, O_4)}^3 \\ & D_{3, (O_1, O_3, O_4)}^3, D_{2, (O_2, O_3, O_4)}^3 \end{aligned} \quad (9)$$

Do zbiorów \mathcal{S}_i ($i=1, \dots, 4$) nie należą: \mathcal{S}_1 – obiekt O_1 , \mathcal{S}_2 – obiekt O_2 , \mathcal{S}_3 – obiekt O_3 , \mathcal{S}_4 – obiekt O_4 . Z trzech obiektów należących do zbioru \mathcal{S}_1 możemy utworzyć $3!=6$ uporządkowań. A zatem liczba wszystkich uporządkowań, które należy wziąć pod uwagę wynosi 24.

W przypadku profili $D_{1,(o_1,o_2,o_3)}^3$ oraz $D_{2,(o_1,o_2,o_3)}^3$ będą to uporządkowania:

$$\begin{aligned}
 P^1: & \quad O_1 > O_2 > O_3 | > O_4 \\
 P^6: & \quad O_1 > O_3 > O_2 | > O_4 \\
 P^7: & \quad O_2 > O_1 > O_3 | > O_4 \\
 P^{12}: & \quad O_2 > O_3 > O_1 | > O_4 \\
 P^{13}: & \quad O_3 > O_1 > O_2 | > O_4 \\
 P^{18}: & \quad O_3 > O_2 > O_1 | > O_4.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

W profilu $D_{1,(o_1,o_2,o_3)}^3$ (-1) będą przypisane uporządkowaniom P^1 , P^6 (O_1 na pierwszej pozycji) oraz P^{12} , P^{18} (O_1 na trzeciej pozycji), a 2 będą przypisane uporządkowaniom P^7 i P^{13} (O_1 na drugiej pozycji).

W profilu $D_{2,(o_1,o_2,o_3)}^3$ (-1) będą przypisane uporządkowaniom P^7 , P^{12} (O_2 na pierwszej pozycji) oraz P^6 , P^{13} (O_2 na trzeciej pozycji), a 2 będą przypisane uporządkowaniom P^1 i P^{18} (O_2 na drugiej pozycji).

W przypadku profili $D_{1,(o_1,o_3,o_4)}^3$ oraz $D_{2,(o_1,o_3,o_4)}^3$ będą to uporządkowania:

$$\begin{aligned}
 P^2: & \quad O_1 > O_2 > O_4 | > O_3 \\
 P^3: & \quad O_1 > O_4 > O_2 | > O_3 \\
 P^8: & \quad O_2 > O_1 > O_4 | > O_3 \\
 P^9: & \quad O_2 > O_4 > O_1 | > O_3 \\
 P^{19}: & \quad O_4 > O_1 > O_2 | > O_3 \\
 P^{24}: & \quad O_4 > O_2 > O_1 | > O_3.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

W profilu $D_{1,(o_1,o_3,o_4)}^3$ (-1) będą przypisane uporządkowaniom P^2 , P^3 (O_1 na pierwszej pozycji) oraz P^9 , P^{24} (O_1 na trzeciej pozycji), a 2 będą przypisane uporządkowaniom P^8 i P^{19} (O_1 na drugiej pozycji).

W profilu $D_{2,(O_1, O_3, O_4)}^3$ (-1) będą przypisane uporządkowaniom P^8 , P^9 (O_2 na pierwszej pozycji) oraz P^3 , P^{19} (O_2 na trzeciej pozycji), a 2 będą przypisane uporządkowaniom P^2 i P^{24} (O_2 na drugiej pozycji).

W przypadku profili $D_{1,(O_1, O_3, O_4)}^3$ oraz $D_{3,(O_1, O_3, O_4)}^3$ będą to uporządkowania:

$$\begin{aligned}
 P^5: & \quad O_1 > O_3 > O_4 | > O_2 \\
 P^4: & \quad O_1 > O_4 > O_3 | > O_2 \\
 P^{14}: & \quad O_3 > O_1 > O_4 | > O_2 \\
 P^{15}: & \quad O_3 > O_4 > O_1 | > O_2 \\
 P^{20}: & \quad O_4 > O_1 > O_3 | > O_2 \\
 P^{21}: & \quad O_4 > O_3 > O_1 | > O_2.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

W profilu $D_{1,(O_1, O_3, O_4)}^3$ (-1) będą przypisane uporządkowaniom P^4 , P^5 (O_1 na pierwszej pozycji) oraz P^{15} , P^{21} (O_1 na trzeciej pozycji), a 2 będą przypisane uporządkowaniom P^{14} i P^{20} (O_1 na drugiej pozycji).

W profilu $D_{3,(O_1, O_3, O_4)}^3$ (-1) będą przypisane uporządkowaniom P^{14} , P^{15} (O_3 na pierwszej pozycji) oraz P^4 , P^{20} (O_3 na trzeciej pozycji), a 2 będą przypisane uporządkowaniom P^5 i P^{21} (O_3 na drugiej pozycji).

W przypadku profili $D_{2,(O_1, O_3, O_4)}^3$ oraz $D_{3,(O_2, O_3, O_4)}^3$ będą to uporządkowania:

$$\begin{aligned}
 P^{11}: & \quad O_2 > O_3 > O_4 | > O_1 \\
 P^{10}: & \quad O_2 > O_4 > O_3 | > O_1 \\
 P^{17}: & \quad O_3 > O_2 > O_4 | > O_1 \\
 P^{16}: & \quad O_3 > O_4 > O_2 | > O_1 \\
 P^{23}: & \quad O_4 > O_2 > O_3 | > O_1 \\
 P^{22}: & \quad O_4 > O_3 > O_2 | > O_1.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

W profilu $D_{2,(O_1,O_2,O_3)}^3$ (-1) będą przypisane uporządkowaniom P^{10} , P^{11} (O_2 na pierwszej pozycji) oraz P^{16} , P^{23} (O_2 na trzeciej pozycji), a 2 będą przypisane uporządkowaniom P^{17} i P^{23} (O_2 na drugiej pozycji).

W profilu $D_{3,(O_1,O_2,O_3)}^3$ (-1) będą przypisane uporządkowaniom P^{16} , P^{17} (O_3 na pierwszej pozycji) oraz P^{10} , P^{23} (O_3 na trzeciej pozycji), a 2 będą przypisane uporządkowaniom P^{11} i P^{22} (O_3 na drugiej pozycji).

Stosując numerację uporządkowań przyjętą przez Saari'ego [6, 7], skorygowane profile odstępstwa można zapisać w postaci:

Tabela 8.

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$D_{O_1,(O_1,O_2,O_3)}^3$	-1	-1	2	-1	-1	2						
$D_{O_2,(O_1,O_2,O_3)}^3$	2	-1	-1	2	-1	-1						
$D_{O_1,(O_1,O_2,O_4)}^3$												
$D_{O_2,(O_1,O_2,O_4)}^3$												
$D_{O_1,(O_1,O_2,O_3,O_4)}^1$							-1	-1	2	-1	-1	2
$D_{O_1,(O_1,O_2,O_3,O_4)}^1$							2	-1	-1	2	-1	-1
$D_{O_2,(O_1,O_2,O_3,O_4)}^1$												
$D_{O_3,(O_1,O_2,O_3,O_4)}^3$												

Tabela 8 cd.

P	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$D_{0_1, (0_1, 0_2, 0_3)}^3$												
$D_{0_2, (0_1, 0_2, 0_3)}^3$												
$D_{0_1, (0_1, 0_2, 0_4)}^3$	2	-1	-1	2	-1	-1						
$D_{0_2, (0_1, 0_2, 0_4)}^3$	-1	-1	2	-1	-1	2						
$D_{0_1, (0_1, 0_3, 0_4)}^3$												
$D_{0_2, (0_1, 0_3, 0_4)}^3$												
$D_{0_1, (0_1, 0_3, 0_4)}^3$												
$D_{0_2, (0_1, 0_3, 0_4)}^3$							2	-1	-1	2	-1	-1
$D_{0_3, (0_1, 0_3, 0_4)}^3$							-1	-1	2	-1	-1	2

Podobnie, profile odstępstwa są jak następuje:

Tabela 9.

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D_1^4	-1	-1	3	-3	-3	3	-1	-1	3	-3	-3	3
D_2^4	3	-3	-3	3	-1	-1	1	1	1	1	1	1
D_3^4	-3	3	-1	-1	3	-3	3	-3	-3	3	-1	-1

P	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
D_1^4	1	1	1	1	1	1	3	-3	-3	3	-1	-1
D_2^4	-3	-3	-3	3	-1	-1	-1	-1	3	-3	-3	3
D_3^4	-1	-1	3	-3	-3	3	1	1	1	1	1	1

4. Profil podstawowy

W przypadku czterech obiektów istnieją cztery profile podstawowe B_i^4 ($i=1, 2, 3, 4$).

Ze względu na wiążącą te profile zależność

$$\sum_{i=1}^4 B_i^4 = 0$$

wystarczy uwzględnić trzy profile. Przyjmujemy, że będą to profile B_1^4 , B_2^4 i B_3^4 .

Zgodnie z zasadami konstrukcji profili podstawowych [5] postać rozpatrywanych profili jest jak następuje:

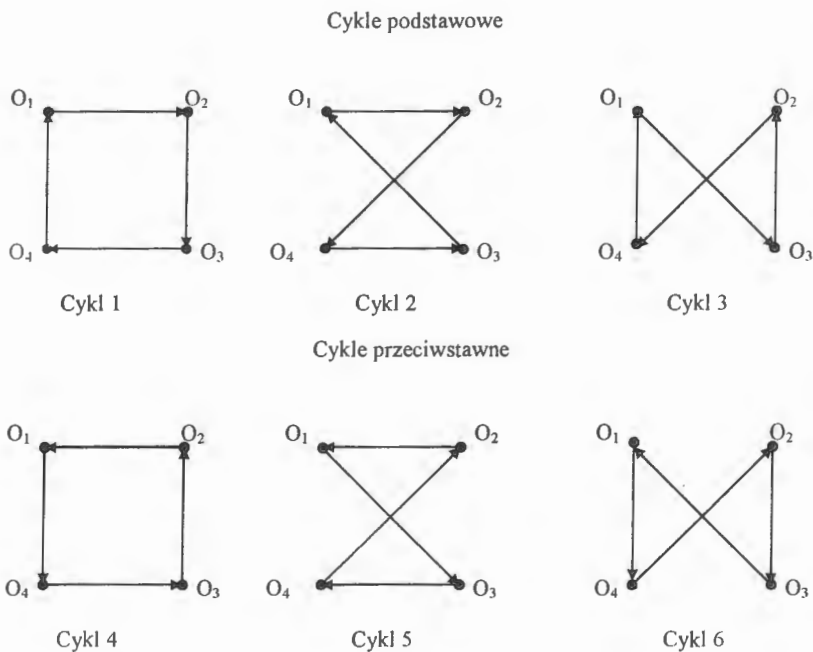
Tabela 10.

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B_1^4	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
B_2^4	0	0	0	0	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
B_3^4	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1

P	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
B_1^4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	1	1
B_2^4	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
B_3^4	1	1	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1

5. Profil Condorceta

W przypadku czterech obiektów mogą wystąpić trzy cykle podstawowe i, odpowiadające im, cykle przeciwstawne. Są one przedstawione na rys. 6.



Rys. 6. Cykle dla $n=4$.

Wybór cyklu podstawowego ma charakter arbitralny.

Stosując numerację uporządkowań przyjętą przez Saari'ego można przyjąć, że cykle są utworzone przez następujące uporządkowania.

Tabela 11.

Cykl 1 tworzą uporządkowania: $P^1, P^{11}, P^{18}, P^{22}$

Cykl 4 tworzą uporządkowania: P^4, P^8, P^{15}, P^{19}

Cykl 2 tworzą uporządkowania: $P^3, P^{10}, P^{17}, P^{24}$

Cykl 5 tworzą uporządkowania: P^6, P^7, P^{14}, P^{21}

Cykl 3 tworzą uporządkowania: P^2, P^9, P^{13}, P^{20}

Cykl 6 tworzą uporządkowania: $P^5, P^{12}, P^{16}, P^{23}$.

Cykl podstawowy i przeciwny tworzą profil Condorceta. W rozpatrywanym przypadku mamy więc trzy profile Condorceta: C_1^4 (cykl 1 i 4), C_2^4 (cykl 2 i 5) oraz C_3^4 (cykl 3 i 6).

Postać tych profili jest jak następuje:

Tabela 12.

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C_1^4	1			-1				-1			1	
C_2^4			1			-1	-1			1		
C_3^4		1			-1				1			-1

P	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
C_1^4			-1			1	-1			1		
C_2^4		-1			1				-1			1
C_3^4	1			-1				1			-1	

6. Profil jednostkowy

Zgodnie z definicją [5] profil jednostkowy nie jest różnicą profili; jest to profil, w którym każdemu z $n!$ ekspertów jest przyporządkowany jeden głos. W rozpatrywanym przypadku jeden głos jest przyporządkowany do każdego z 24 uporządkowań. Dla profilu jednostkowego każda pozycyjna metoda tworzenia oceny grupowej dla dowolnego zbioru obiektów prowadzi do równoważności wszystkich obiektów. Dodanie wielokrotności profilu jednostkowego do profilu będącego różnicą profili nie powoduje zmiany przewag wyznaczonych dla tego profilu. Takie podejście stosowane jest wówczas, gdy w profilu będącym przedmiotem oceny występują ujemne liczby głosów.

7. Analiza profilu

Założmy, że dany jest profil opisujący wyniki ekspertyzy. Liczbę głosów ekspertów, których ocena ma postać uporządkowania P^s ($s = 1, \dots, 24$), oznaczmy przez p_s . Oczywiście

$$\sum_{s=1}^{24} p_s = K \quad (14)$$

gdzie K – całkowita liczba ekspertów.

Można zatem sformułować zadania przedstawienia tego profilu jako sumy profili rozpatrywanych w pracy, to znaczy zapisać profil T w postaci

$$T^4 = \sum_{j=1}^3 b_j B_j^4 + \sum_{j=1}^3 c_j C_j^4 + \sum_{j=1}^3 d_j D_j^4 + \sum_{j=1}^2 \sum_{t=1}^3 d_{jt} D_{jt}^4 + \sum_{b=1}^3 r_b R_{pb}^4 + jJ^4 \quad (15)$$

gdzie

B_j^4 - profil podstawowy odpowiadający obiektowi O_j ($j=1, 2, 3$), (16)

C_j^4 - profil Condorceta ($j=1, 2, 3$),

D_j^4 - profil odstępstwa ($j=1, 2, 3$),

D_{μ}^4 - skorygowany profil odstępstwa,

$$D_{11}^3 = D_{1,(O_1,O_2,O_3)}^3,$$

$$D_{21}^3 = D_{2,(O_1,O_2,O_3)}^3,$$

$$D_{12}^3 = D_{1,(O_1,O_2,O_4)}^3,$$

$$D_{22}^3 = D_{2,(O_1,O_2,O_4)}^3,$$

$$D_{13}^3 = D_{1,(O_1,O_3,O_4)}^3,$$

$$D_{23}^3 = D_{3,(O_1,O_2,O_3)}^3,$$

$$D_{14}^4 = D_{2,(O_1,O_2,O_4)}^3,$$

$$D_{24}^4 = D_{3,(O_1,O_2,O_4)}^3,$$

R_{pb}^4 - profil podwójnie przeciwny ($b=1, \dots, 6$)

R_{p1}^4 - profil odpowiadający krawędzi O_1O_2

R_{p2}^4 - profil odpowiadający krawędzi O_1O_3

R_{p3}^4 - profil odpowiadający krawędzi O_1O_4

R_{p4}^4 - profil odpowiadający krawędzi O_2O_3

R_{p5}^4 - profil odpowiadający krawędzi O_2O_4

R_{p6}^4 - profil odpowiadający krawędzi O_3O_4

J^4 - profil jednostkowy.

Każdy z wymienionych profili jest wektorem o 24 składowych i liczba tych profili również wynosi 24. Można zatem utworzyć macierz A o wymiarach (24x24).

Równanie (15) można więc zapisać w postaci:

$$T^4 = A[b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3, d_{11}, d_{21}, d_{12}, d_{22}, d_{13}, d_{23}, d_{14}, d_{24}, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, j]^T \quad (17)$$

Jeżeli macierz A nie jest osobliwa, to

$$A^{-1}T^4 = [b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3, d_{11}, d_{21}, d_{12}, d_{22}, d_{13}, d_{23}, d_{14}, d_{24}, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, j]^T \quad (18)$$

Równanie (18) pozwala wyznaczyć współczynniki przy poszczególnych profilach we wzorze (17). Znajomość tych współczynników umożliwia dekompozycję profilu T^4 na poszczególne składowe.

Macierz A ma następującą postać:

Tabela 13.

B_1^4	B_2^4	B_3^4	C_1^4	C_2^4	C_3^4	D_1^4	D_2^4	D_3^4	D_{11}^4	D_{21}^4	D_{12}^4	D_{22}^4	D_{13}^4	D_{23}^4	D_{14}^4	D_{24}^4	R_{p1}^4	R_{p2}^4	R_{p3}^4	R_{p4}^4	R_{p5}^4	R_{p6}^4	J^4	
1	0	0	1	0	0	-1	3	-3	-1	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	
1	0	0	0	0	1	-1	-3	3	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	
0	0	1	0	1	0	3	-3	-1	2	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	
0	0	1	-1	0	0	-3	3	-1	-1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	
0	1	0	0	0	-1	-3	-1	3	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	
0	1	0	0	-1	0	3	-1	-3	2	-1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	
1	-1	0	0	-1	0	-1	1	3	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	1	0	0	0	0	1	
1	-1	0	-1	0	0	-1	1	-3	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	
0	-1	0	0	0	1	3	1	-3	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	
0	-1	0	0	1	0	-3	1	3	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	
0	-1	1	1	0	0	-3	1	-1	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	
0	-1	1	0	0	-1	3	1	-1	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	
-1	0	1	0	0	1	1	3	-1	0	0	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	1	0	0	1	
-1	0	1	0	-1	0	1	-3	-1	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	-1	1
-1	0	0	-1	0	0	1	-3	3	0	0	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	0	0	0	1	1
-1	0	0	0	0	-1	1	3	-3	0	0	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0	0	-1	0	1
-1	1	0	0	1	0	1	-1	-3	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	1	0	1
-1	1	0	1	0	0	1	-1	3	0	0	0	0	0	0	-1	2	0	0	0	-1	0	0	0	1
0	1	-1	-1	0	0	3	-1	1	0	0	2	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	-1	0	0	1	-3	-1	1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	1
0	0	-1	0	-1	0	-3	3	1	0	0	-1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	-1	1	0	0	3	-3	1	0	0	2	-1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1
1	0	-1	0	0	-1	-1	-3	1	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	-1	0	1	0	-1	3	1	0	0	-1	2	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1

Macierz odwrotna A^{-1} ma postać

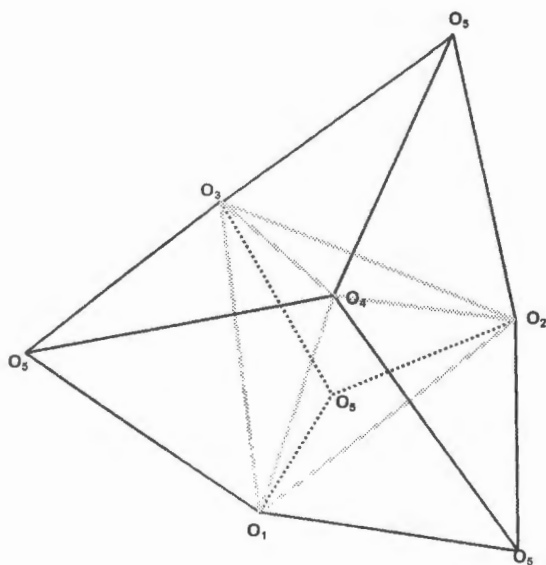
Tabela 14.

3	3	2	1	1	2	2	1	-1	-2	-1	1	-1	-2	-3	-3	-2	-1	1	-1	-2	-1	1	2
2	1	1	2	3	3	-1	-2	-3	-3	-2	-1	1	-1	-2	-1	1	2	2	1	-1	-2	-1	1
1	2	3	3	2	1	1	-1	-2	-1	1	2	2	1	-1	-2	-1	1	-1	-2	-3	-3	-2	-1
3	0	0	-3	0	0	0	-3	0	0	3	0	0	0	-3	0	0	3	-3	0	0	3	0	0
0	0	3	0	0	-3	-3	0	0	3	0	0	0	-3	0	0	3	0	0	0	-3	0	0	3
0	3	0	0	-3	0	0	0	3	0	0	-3	3	0	0	-3	0	0	0	3	0	0	-3	0
0	0	-1	-2	-2	-1	2	1	-1	-2	-1	1	2	1	0	0	1	2	1	-1	-2	-1	1	2
-1	-2	-2	-1	0	0	2	1	0	0	1	2	1	-1	-2	-1	1	2	2	1	-1	-2	-1	1
-2	-1	0	0	-1	-2	1	-1	-2	-1	1	2	2	1	-1	-2	-1	1	2	1	0	0	1	2
0	-4	4	0	-4	4	-4	-4	-4	4	4	4	0	0	0	-4	-4	-4	4	4	4	0	0	0
4	-4	0	4	-4	0	-4	-4	-4	0	0	0	4	4	4	-4	-4	-4	0	0	0	4	4	4
0	0	0	4	4	4	-4	-4	4	4	4	-4	-4	0	0	-4	-4	4	-4	0	4	-4	0	4
4	4	4	0	0	0	-4	-4	0	0	0	-4	-4	4	4	4	-4	-4	0	-4	4	0	-4	4
0	0	4	4	4	0	0	-4	4	0	-4	4	-4	-4	0	0	0	-4	-4	4	4	4	-4	-4
4	4	0	0	0	4	4	-4	0	4	-4	0	-4	-4	4	4	4	-4	-4	0	0	0	-4	-4
0	4	4	4	0	0	-4	0	0	0	-4	-4	4	-4	0	4	-4	0	-4	-4	4	4	4	-4
4	0	0	0	4	4	-4	4	4	4	-4	-4	0	-4	4	0	-4	4	-4	-4	0	0	0	-4
6	3	6	-6	-3	-6	0	0	-3	0	0	3	-3	0	0	3	0	0	6	3	6	-6	-3	-6
-3	-6	6	3	6	-6	6	3	6	-6	-3	-6	0	0	-3	0	0	3	-3	0	0	3	0	0
0	0	-3	0	0	3	-3	-6	6	3	6	-6	0	3	0	0	-3	0	6	-6	-3	-6	6	3
6	-6	-3	-6	6	3	-3	0	0	3	0	0	6	3	6	-6	-3	-6	0	0	-3	0	0	3
-3	0	0	3	0	0	0	3	0	0	-3	0	6	-6	-3	-6	6	3	-3	-6	6	3	6	-6
0	3	0	0	-3	0	6	-6	-3	-6	6	3	-3	-6	6	3	6	-6	0	3	0	0	-3	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$\frac{1}{24}$

Wnioski końcowe

W pracy przedstawiono zagadnienie dekompozycji profilu dla przypadku czterech obiektów dokonywane zgodnie z podejściem zaproponowanym przez D.G. Saari'ego. Ze względu na stosowanie interpretacji graficznej przypadek większej liczby obiektów nastręcza znaczne trudności. W przypadku $n=5$ obiektów liczba możliwych uporządkowań wynosi $5!=120$. Interpretację graficzną można – zdaniem autorów – przedstawić w postaci bryły skonstruowanej z pięciu czworościanów foremnych połączonych ścianami. W tym przypadku rozpatrywanie profili o których mowa w pracy sprowadza się do rozpatrywania odpowiednich rozwinięć bryły.



Rys. 7. Propozycja interpretacji graficznej dla $n=5$ obiektów.

Literatura

1. Bury H., Wagner D.: Analiza ocen ekspertów metodą Saari'ego. Przypadek czterech obiektów, *Badania operacyjne i systemowe 2004. Podejmowanie decyzji. Podstawy metodyczne i zastosowania*, pod red. R. Kulikowskiego, J. Kacprzyka, R. Słowińskiego. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2004.
2. Mańczak K., Nahorski Z.: *Komputerowa identyfikacja obiektów dynamicznych*, PWN Warszawa, 1983.
3. Nurmi H.: *Comparing voting systems*, Dordrecht, D.Reidel, 1987.
4. Nurmi H.: Some techniques of preference profile analysis. Paper presented at NPO meeting on "Power and Fairness", Bad Segeberg, September 3-6, 2000.
5. Saari D.G.: *Geometry of voting*. Berlin Heidelberg NewYork. Springer Verlag 1994
6. Saari D.G.: *Mathematical structure of voting paradoxes. I. Pairwise votes*. *Economic Theory*, vol,15, 2000,pp.1-53
7. Saari D.G.: *Mathematical structure of voting paradoxes. II. Positional votes*. *Economic Theory*, vol,15, 2000,pp.55-102





