294/2005

Raport Badawczy

Research Report

RB/41/2004

Zarządzanie portfelem obligacji w przypadku proporcjonalnych zmian struktury terminowej stóp procentowych

A. Jakubowski

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof.. dr inż. Roman Kulikowski

Warszawa 2004

Andrzej Jakubowski

ZARZĄDZANIE PORTFELEM OBLIGACJI W PRZYPADKU PROPORCJONALNYCH ZMIAN STRUKTURY TERMINOWEJ STÓP PROCENTOWYCH*

Streszczenie

Przedmiotem rozważań jest zagadnienie aktywnego zarządzania portfelem obligacji, sformułowane przy założeniu, że struktura terminowa stóp procentowych *spot* może mieć dowolny kształt. Na początkowym etapie, sformułowano model portfelowy zarządzania aktywnego na rynku obligacji, przy upraszczającym założeniu płaskiej krzywej dochodowości, będącej obrazem graficznym analizowanej struktury terminowej. Założenie to oznacza, że krótko-, średnio-, i długoterminowe stopy procentowe *spot* mają tę samą wartość, przy czym możliwe są jedynie równoległe przesunięcia wartości tych stóp w górę lub w dół. Opracowany model zarządzania portfelem obligacji jest odpowiednikiem modelu H. Markowitza sformułowanego dla rynku akcji.

W dalszej części pracy, dokonano uogólnienia zaproponowanego modelu na przypadek krzywej dochodowości o dowolnym kształcie, przy czym przyjęto, że dynamika zmian tej krzywej jest ograniczona do proporcjonalnych zmian poziomu analizowanych stóp procentowych *spot* . W celu opracowania modelu portfelowego dla powyższego przypadku, dokonano uogólnienia wzoru Babococka-Langetiga. Wzór ten – wyprowadzony dotychczas przy założeniu płaskiej krzywej dochodowości – wyraża zależność stopy zwrotu z inwestycji w obligacje od wielkości nieoczekiwanej zmiany rynkowej stopy procentowej, przy zadanym horyzoncie czasowym.

Niejako w tle głównego nurtu prowadzonych rozważań, przedstawiono w zsyntetyzowanej formie opis matematyczny podstawowych zagadnień rozpatrywanych w ramach teorii struktury terminowej stóp procentowych oraz teorii obligacji. A mianowicie, omówiono skrótowo pojęcia bieżących stóp procentowych *spot*; stóp procentowych *forward* oraz oczekiwanych rocznych stóp procentowych *spot* , a także – przedstawiono podstawowe założenia teorii czystych oczekiwań i teorii preferencji płynności. W ramach każdej z tych teorii, wyprowadzono wzory na wycenę wartości bieżącej obligacji oraz wartości przyszłej obligacji. Przedstawiono również obszernie zagadnienia kwantyfikacji ryzyka stóp procentowych na rynku obligacji, za pomocą parametrów okresowości (*duration*) i wypukłości (*convexity*). Wprowadzono też nowe – dotychczas nie rozpatrywane w literaturze przedmiotu - pojęcie „oczekiwanej okresowości" obligacji, będącej miarą wrażliwości oczekiwanej wartości przyszłej obligacji na nieoczekiwane zmiany stóp procentowych.

---

* Niniejsza praca zostanie zgłoszona do publikacji w czasopiśmie naukowym NBP: *Bank i Kredyt*, Warszawa 2005

Spis treści

1. Wprowadzenie

Przedmiotem prowadzonych rozważań będzie zagadnienie aktywnego zarządzania portfelem obligacji, sformułowane przy założeniu, że struktura terminowa stóp procentowych ma dowolny kształt. Obrazem graficznym takiej struktury jest tzw. krzywa dochodowości (*yield curve*).

Na początkowym etapie, sformułowano model portfelowy zarządzania aktywnego inwestycjami na rynku obligacji, przy upraszczającym założeniu płaskiej struktury terminowej. Założenie to oznacza, że krótko-, średnio- i długoterminowe stopy procentowe *spot* (wyznaczane w skali roku) mają tę samą wartość, przy czym możliwe są jedynie równoległe przesunięcia wartości tych stóp w górę lub w dół. Opracowany model zarządzania portfelem obligacji jest odpowiednikiem modelu H. Markowitza sformułowanego dla rynku akcji. Zarys takiego modelu dla rynku obligacji podany w monografii E.J. Eltona i M. Grubera (*Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, 1995, 5-th ed.) zawierał szereg błędów, które zostały poprawione.

W dalszej części pracy, dokonano uogólnienia zaproponowanego modelu dla przypadku niepłaskiej struktury terminowej stóp procentowych, przy czym przyjęto, że dynamika zmian tej struktury jest ograniczona do proporcjonalnych zmian poziomu analizowanych stóp procentowych *spot*. W celu opracowania modelu portfelowego dla tego przypadku, dokonano uogólnienia wzoru Babcocka - Langetiga. Wzór ten - wyprowadzony dotychczas przy założeniu płaskiej krzywej dochodowości - wyraża zależność stopy zwrotu z inwestycji w obligacje od wielkości nieoczekiwanej zmiany rynkowej stopy procentowej, przy zadanym horyzoncie czasowym.

Prezentowane wyniki stanowią pewne istotnie nowe rozwiązania w stosunku do istniejących opracowań z zakresu aktywnego zarządzania portfelem obligacji; por. *Bierwag* (1987), *Ho* (1990), *Fabozzi, Fong* (1994), *Elton, Gruber* (1995), *Dattatreya, Fabozzi* (1995), *Fabozzi* (2000). Przedstawimy również dyskusję warunków stosowalności zaproponowanego podejścia w praktyce. Chodzi w tym przypadku o analizę stabilności w czasie parametrów rozpatrywanego modelu. Niektórzy badacze twierdzą, że ze względu na niestabilność tych parametrów, zastosowanie w praktyce klasycznego podejścia Markowitza w odniesieniu do rynku obligacji – nie jest możliwe; *Fabozzi, Fong* (1994). Zdaniem autora niniejszego opracowania, stwierdzenie to nie jest w ogólnym przypadku prawdziwe. Zastosowanie zaproponowanej metody zarządzania portfelowego może być szczególnie obiecujące w przypadku obligacji długoterminowych, w którym problem niestabilności parametrów modelu nie jest tak znaczący.

Prezentowane badania były już prowadzone przez autora w roku 1997. W stosunku do opracowania IBS PAN z tamtego okresu (*Jakubowski,* 1997b)uzyskano istotnie nowe rezultaty wiążące się z wyprowadzeniem zależności funkcyjnej pomiędzy parametrem tzw. oczekiwanej okresowości (*duration*) obligacji a wartością bieżącą tego parametru. Zdefiniowany przez autora parametr oczekiwanej okresowości jest miarą przyszłego wpływu ryzyka stopy procentowej na wartość obligacji w chwili o jeden okres odsetkowy wprzód.

Natomiast bieżący parametr okresowości jest miarą wpływu ryzyka stopy procentowej w chwili bieżącej. Wyprowadzenie zależności funkcyjnej pomiędzy w/w parametrami umożliwiło znaczne uproszczenie zapisu matematycznego analizowanego modelu; a tym samym - ułatwienie interpretacji uzyskanych wyników.

Niniejszy Raport Badawczy przedstawia również modyfikację oraz rozszerzenie uzyskanych przez autora wyników, przedstawionych w opracowaniu *Jakubowski* (2003a). A mianowicie, w Raporcie z 2003r. przedstawiono sformułowanie analizowanego modelu, ze szczególnym uwzględnieniem zagadnień dotyczących rynku niezrównoważonego obligacji. Na rynku tym, bieżące ceny rynkowe rozpatrywanych walorów są w ogólnym przypadku różne od tzw. wartości wewnętrznej tych walorów, wynikającej ze zdyskontowanych na chwilę bieżącą przyszłych strumieni pieniężnych. W obecnym raporcie, zagadnienie niezrównoważenia rynku obligacji potraktowano skrótowo (odnośne wzory matematyczne podano w Dodatku); natomiast omówiono bardziej obszernie uogólnienie proponowanego modelu dla przypadku struktury terminowej stóp procentowych o dowolnym kształcie. Prezentowane w tym zakresie wyprowadzenia wzorów oraz dowody twierdzeń nie były jak dotąd nigdzie publikowane.

2. Zagadnienia stosowalności analizy portfelowej na rynku obligacji

Metody analizy portfelowej, w odniesieniu do rynku dłużnych papierów wartościowych, wiążą się z próbami zastosowania klasycznej teorii portfela *H. Markowitza* (1959, 1987) dla celów aktywnego zarządzania inwestycjami w obligacje. Chodzi w tym przypadku o rozwiązanie zagadnienia dywersyfikacji ryzyka stopy procentowej, a więc taką konstrukcję portfela, która zapewniłaby minimalną wartość odchylenia standardowego stopy zwrotu z portfela obligacji, przy zadanej wartości oczekiwanej stopy zwrotu. Możliwe jest też sformułowanie zagadnienia równoważnego, a mianowicie problemu maksymalizacji wartości oczekiwanej stopy zwrotu przy zadanym poziomie ryzyka, mierzonym odchyleniem standardowym tej stopy zwrotu.

Jak wiadomo, podstawy analizy portfelowej H. Markowitza odnosiły się pierwotnie wyłącznie do rynku akcji. Co więcej pomiędzy rynkami akcji i obligacji występują pewne istotne różnice. A mianowicie, „czas życia" akcji jest w zasadzie nieskończony; tzn. raz wyemitowanej akcji nie można umorzyć, akcję tę można co najwyżej sprzedać. Tak więc, poza niezbyt częstym przypadkiem bankructwa przedsiębiorstwa emitującego akcje, możemy przyjąć, że każda analizowana akcja istnieje nieskończenie długo. Nieskończenie długie są też szeregi czasowe dotyczące podstawowego parametru akcji, jakim jest stopa zwroty z inwestycji w tę akcję, czy też stopa zwrotu z inwestycji polegającej na zakupie portfela akcji. Wynikają stąd duże możliwości estymacji takich parametrów jak oczekiwana stopa zwrotu, odchylenie standardowe tej stopy zwrotu (jako miara ryzyka) czy też – a raczej przede wszystkim – współczynniki korelacji pomiędzy stopami zwrotu z poszczególnych akcji.

Natomiast w przypadku rynku obligacji sytuacja jest inna. Każda obligacja (poza specjalną klasą tych walorów, tzw. *perpentuities* – konsole -) ma skończony „czas życia", określony przez ściśle ustalony termin wykupu tej obligacji przez emitenta. Z upływem czasu bieżącego zmieniają się (a więc są niestabilne) podstawowe parametry obligacji, tj. parametry okresowości (*duration*) oraz wypukłości (*convexity*). Między innymi, można łatwo wykazać, że parametr okresowości jest (poza pewnym szczególnym przypadkiem) funkcją malejącą czasu bieżącego; *Francis* (1991). Owa niestabilność parametrów obligacji stała się przyczyną kontrowersji co do możliwości przetransponowania podstawowych idei H. Markowitza dotyczących modelu dywersyfikacji inwestycji – na grunt teorii rynku obligacji. Niekiedy, opinie co do tej możliwości są wręcz diametralnie odmienne.

W pracy *Fabozzi, Fong* (1994), ss. 153-154, stwierdzono bowiem:

„Both the variance/covariance approach and the traditional Markowitz formulation assist managers in making asset allocation decisions. For equity optimization, minimization of the standard deviation or variance of portfolio returns is the customary risk objective". ... „In bond analysis, however, no such convention is available. Because a fixed income security has a finite life, its covariance with other bonds changes with time, if for no other reason – than shortening of the maturity of each bond with time". ... „The problem thus becomes one of estimation. Indeed, if a covariance matrix could be created, the bond optimization process could paraller the analysis for stock".

Jak widać jest to zdecydowana negacja możliwości zastosowania podejścia M. Markowitza w stosunku do rynku obligacji. Natomiast w pracy *Eltona, Grubera* (1995), s. 553, stwierdzono wręcz coś przeciwnego; a mianowicie:

„... we discussed methods of estimating the variance – covariance structure of common stock returns. The general principles discussed are equally as applicable to bonds as they are to stocks. However, they are special characteristics of bonds that suggest that some modification and respecification would be useful."

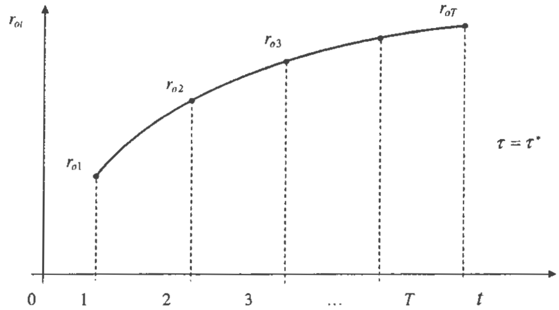
Tak więc ci z kolei autorzy w sposób zdecydowany akceptują możliwość przeniesienia teorii portfela Markowitza na rynek obligacji. Stwierdzają oni jedynie, że pewne modyfikacje czy też „respecyfikacje" są pożądane. Cytowani autorzy przedstawiają również pewien zarys metody zastosowania analizy portfelowej na rynku obligacji. Niestety część podanych przez nich wzorów jest błędna.

Zagadnienie analizy portfelowej na rynku obligacji zostanie szczegółowo omówione w niniejszej pracy. A mianowicie, przedstawimy próbę sformułowania odpowiedzi na problem na ile – czy też przy jakich warunkach – zastosowanie teorii H. Markowitza na rynku obligacji jest możliwe.

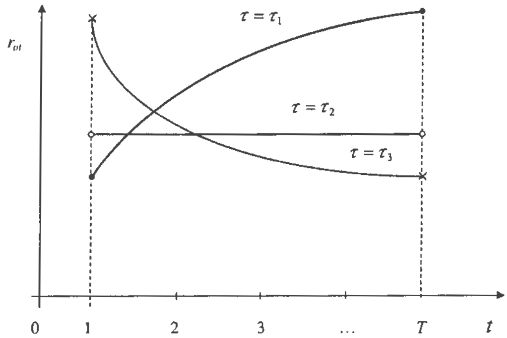
3. Struktura terminowa stóp procentowych – zagadnienie wyceny obligacji

Zagadnienie immunizacji portfela obligacji wiąże się ściśle z pojęciem *struktury terminowej stóp procentowych.* Struktura ta odzwierciedla funkcyjną zależność wartości poszczególnych stóp procentowych od terminów zapadalności zobowiązań, dla których te stopy się rozpatruje. W analizowanym przypadku przyjmuje się, że rynkowe stopy procentowe *spot* r_{0t} rozpatrywane dla poszczególnych terminów $t = 1,2,3,...,T$, są określone przez rentowności do wykupu *YTM* (*yield to maturity*) obligacji czysto-dyskontowych. Rentowności te stanowią pewien „wzorzec", według którego dokonuje się wyceny wszystkich innych funkcjonujących w danym sektorze rynku finansowego obligacji wielokuponowych, jak też i innych instrumentów finansowych.

Graficznym zobrazowaniem struktury terminowej stóp procentowych *spot* jest krzywa dochodowości (*yield curve*). Krzywa ta, przedstawiająca zależność rentowności do wykupu $YTM = r_{0t}$ obligacji czysto-dyskontowych od terminów wykupu tych obligacji $t = 1,...,T$ - może mieć różny kształt. Może to być krzywa rosnąca, malejąca lub (w przybliżeniu) stała; por. Rysunek 3.1 i 3.2. Kształt krzywej dochodowości zależy od szeregu czynników związanych zarówno z funkcjonowaniem analizowanego rynku



Rys.3.1. Struktura terminowa stóp procentowych *spot* r_{0t} określonych dla terminów zapadalności $t = 1,...,T$, rozpatrywana w chwili bieżącej $\tau = \tau^*$. Stopy r_{0t} wyrażane są w skali roku



Rys. .3.2 Ilustracja zmiany struktury terminowej stóp procentowych *spot* r_{0t} z upływem czasu bieżącego $\tau = \tau_1, \tau_2, \tau_3$; $t = 1,2,3,...,T$ - terminy zapadalności zobowiązań

finansowego, jak również od bieżącej sytuacji gospodarczej danego kraju. Ponadto, kształt tej krzywej zmienia się dynamicznie w czasie co jest właśnie źródłem ryzyka stóp procentowych.

Poziom stóp procentowych na jakim przebiega dla tych samych terminów zapadalności krzywa dochodowości zależy od sektora rynku, dla którego ta krzywa była identyfikowana. W zależności od sektora analizowanego rynku mamy bowiem krzywe dochodowości obligacji i bonów skarbowych, krzywe dochodowości obligacji municypalnych, krzywe dochodowości obligacji korporacyjnych itp. Ze względu na stopniowanie poziomu ryzyka inwestycyjnego, jakim obarczone są walory z różnych sektorów rozpatrywanego rynku, krzywa dochodowości obligacji korporacyjnych przebiega na ogół ponad krzywą dochodowości obligacji municypalnych (o wysokim ratingu). Natomiast obie te krzywe przebiegają powyżej krzywej dochodowości obligacji skarbowych. Wynika to bezpośrednio z faktu, że w przypadku obligacji skarbowych (tzw. *the Treasuries*) o praktycznie zerowym ryzyku niewypłacalności emitenta, „żądana" przez inwestorów stopa zwrotu jest najniższa; *Fabozzi, Fong* (1994).

Należy również zwrócić uwagę na fakt, że sam proces identyfikacji krzywej dochodowości jest procesem złożonym. Wynika to m.in. stąd, że na rynku nie ma na ogół wystarczającej liczby obligacji czysto-dyskontowych, pokrywających dostatecznie szeroki zakres analizowanych terminów zapadalności; na przykład, w przypadku obligacji skarbowych, analizuje się zakres terminów od 1 roku do 30 lat. Wykorzystuje się więc różne metody przybliżone (tzw. *boot-strapping*), w których podstawą do analiz są obligacje wielokuponowe; *Fabozzi* (1995). W celu określenia krzywej dochodowości wykorzystuje się również różne metody i techniki aproksymacji ciągłej przebiegów dyskretnych takie, jak metoda funkcji „spline" i inne; *Adams, Bloomfield* et al. (1993). Stosuje się również w tym przypadku metodę analizy regresyjnej; *Elton, Gruber* (1995).

Problematyka analizy, modelowania oraz prognozowania zmian struktury terminowej rynkowych stóp procentowych *spot* r_{0t} $(t=1,...,T)$ została obszernie przedstawiona przez autora niniejszej pracy w publikacji *Jakubowski* (1996).

Jak wspomniano, krzywa dochodowości stanowi pewien wzorzec stóp procentowych *spot* r_{0t} $(t=1,...,T)$, za pomocą którego można dokonywać wyceny różnych papierów wartościowych. Wyceny tej dokonuje się poprzez dyskontowanie w czasie (do chwili bieżącej) przyszłych wpływów pieniężnych związanych z rozpatrywanym instrumentem finansowym. W szczególności, każdą obligację o stałym oprocentowaniu, związaną z wypłatami w kolejnych latach $t=1,2,...,(T-1)$ odsetek C oraz w roku T - odsetek C plus wartość nominalna N - możemy rozpatrywać jako sumę obligacji czysto-dyskontowych. A zatem, wartość bieżąca takiej obligacji (*present value*) jest równa

$$PV=\frac{C}{1+r_{01}}+\frac{C}{(1+r_{02})^2}+\ldots+\frac{C+N}{(1+r_{0T})^T} \tag{3.1}$$

Wartość tę nazywa się również często wartością wewnętrzną obligacji (*intrinsic value*). Natomiast sam wzór (3.1) jest często nazywany wzorem wyceny obligacji.

W teorii rynków kapitałowych dowodzi się (*Elton, Gruber* 1995), że gdy rynek obligacji znajduje się w równowadze, strumienie pieniężne pochodzące od różnych obligacji powinny być dla tych samych okresów $t=1,...,T$, dyskontowane według tych samych stóp procentowych *spot* $r_{01}, r_{02},..., r_{0T}$. Tym samym , można w tym celu stosować „wzorcowe" stopy procentowe *spot* określone na podstawie rentowności do wykupu *YTM* obligacji czysto-dyskontowych. Wynika to z zastosowania tzw. prawa jednej ceny (*the law of one price*) w stosunku do rozpatrywanego rynku obligacji. Prawo to oznacza, że w przypadku, gdy chwilowa cena bieżąca P analizowanej obligacji jest różna od jej wartości równowagowej PV, to na skutek arbitrażu cena ta - po pewnym okresie przejściowym - staje się zbieżna do wartości PV. Zakłada się przy tym, że wspomniany okres przejściowy jest na ogół nie dłuższy niż czas trwania jednego okresu odsetkowego analizowanej obligacji, co znajduje potwierdzenie w badaniach empirycznych z tego zakresu. Oczywiście warunkiem aby zachodziła owa zbieżność ceny bieżącej obligacji P do jej wartości równowagowej PV jest odpowiednia efektywność rynku kapitałowego (*Jakubowski* 1996).

Określenie struktury terminowej stóp procentowych przez rentowności do wykupu $r_{01}, r_{02}, \ldots, r_{0T}$ *obligacji czysto-dyskontowych* ma zasadnicze znaczenie nie tylko ze względu na wycenę wartości obligacji. Znając przebieg rozpatrywanej krzywej dochodowości, a także dynamikę zmian tego przebiegu z upływem czasu bieżącego, potrafimy oszacować wpływ zmian rynkowych stóp procentowych na wartość rozpatrywanych obligacji, a tym samym na stopę zwrotu z dokonywanych inwestycji.

Stopa zwrotu R z inwestycji w daną obligację liczona za jeden okres odsetkowy (tzw. *period-by-period return*), wynika ogólnie rzecz biorąc z dwóch składowych: dochodów z wypłacanych odsetek C oraz z zysków lub strat związanych ze zmianą bieżącej ceny P obligacji. Z kolei zmiana ceny obligacji wynikać może ze zmiany wartości równowagowej obligacji oraz określonych działań spekulacyjnych na rozpatrywanym rynku (tzw. *arbitraż cenowy*). Pomijając dla uproszczenia owe działania spekulacyjne (jako charakterystyczne dla okresów przejściowych) otrzymamy, że cena bieżąca P obligacji jest równa jej wartości równowagowej PV określonej wzorem (3.1). Ze wzoru tego wynika, że zmiana wartości bieżącej obligacji wynika z oddziaływania dwóch czynników: zmiany wartości obligacji w czasie (w miarę upływu kolejnych okresów odsetkowych zanikają kolejne człony zależności (3.1)) oraz - nieoczekiwanej zmiany rynkowych stóp procentowych r_{0t}, $t = 1, \ldots, T$.

Ze wzoru wyceny (3.1) wynika bezpośrednio, że nieoczekiwany wzrost rynkowych stóp procentowych *spot* r_{0t} $t = 1, \ldots, T$, a więc przesunięcie się krzywej dochodowości w górę – powoduje spadek wartości bieżącej PV obligacji. Natomiast spadek tych stóp procentowych, a więc ruch krzywej dochodowości w dół – powoduje wzrost wartości bieżącej PV. Istotne są również wszelkiego rodzaju niespodziewane zmiany kształtu struktury terminowej stóp procentowych, prowadzące do zmiany nachylenia krzywej dochodowości, pojawienia się różnego rodzaju garbów (*hump-shaped curve*), itp. Mówi się w tym przypadku o tzw. ryzyku kształtu analizowanej krzywej (*shape risk*).

Na zakończenie tych uwag należy podkreślić, że o ile znajomość i umiejętność analizy struktury terminowej stóp procentowych jest niezmiernie istotna w przypadku wszelkiego rodzaju inwestycji na rynku finansowym, o tyle na rynku obligacji – jest to sprawa o zasadniczym znaczeniu. Wynika to wprost ze wzoru wyceny (3.1).

4. Kwantyfikacja ryzyka stopy procentowej na rynku obligacji – parametry okresowości i wypukłości

Z przeprowadzonych w poprzednim punkcie rozważań wynika, że bieżąca cena rynkowa obligacji może podlegać ciągłym oraz nieoczekiwanym fluktuacjom (*price volatility*) - ze względu na zmiany obowiązujących w danym momencie rynkowych stóp procentowych, za pomocą których dyskontujemy w czasie do chwili bieżącej wszystkie przyszłe wpływy pieniężne związane z posiadaniem obligacji (tj. odsetki oraz nominał). Często trudne do przewidzenia zmiany rynkowych stóp procentowych oraz wynikające stąd zmiany ceny obligacji (czy też szerzej - instrumentów finansowych) są źródłem ryzyka stóp procentowych. Ryzyko to wyraża się tzw. nieoczekiwaną stopą zwrotu (*excess return*); *Elton, Gruber* (1995). W związku z tym istotna jest - z punktu widzenia zarówno inwestora jak i emitenta - wrażliwość (lub też przeciwnie - odporność) ceny rozpatrywanej obligacji na zmiany rynkowych stóp procentowych. Parametrami umożliwiającymi pomiar takiej wrażliwości jest **okresowość** (*duration*) oraz **wypukłość** (*convexity*) obligacji.

Klasyczne definicje (Macaulaya) tych parametrów związane są z przyjęciem silnie ograniczającego założenia, że wszystkie rynkowe stopy procentowe *spot* są sobie równe, niezależnie od terminów zapadalności zobowiązań, tj.

$$r_{0t} = r; \qquad \forall t = 1,..,T. \tag{4.1}$$

Oznacza to, że struktura terminowa alkohol alkohol stóp procentowych wyrażona krzywą dochodowości skarbowych obligacji czysto-dyskontowych jest „płaska", przy czym zachodzi to dla dowolnej chwili bieżącej $\tau = 1,2,3,...$. Z powyższego założenia wynika bezpośrednio, że jeżeli chodzi o zmiany rynkowej stopy procentowej r (w tym przypadku już tylko jednej) to możliwe są jedynie równoległe przesunięcia w górę lub w dół rozpatrywanej krzywej dochodowości o wartość dr, tj.

$$dr_{0t} = dr; \qquad \forall t = 1,..,T, \tag{4.2}$$

gdzie $h = dr$ - przyrost skończony.

4.1. Okresowość obligacji (*duration*)

Wyprowadzenie wzoru określającego parametr okresowości obligacji jest następujące. Z równania (3.1) wyceny obligacji, uwzględniając warunek (4.1) oraz zakładając, że analizowany rynek jest w równowadze (tj. $P = PV$), mamy

$$P = P(r) = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t}, \tag{4.3}$$

gdzie C_t - przyszłe strumienie finansowe wynikające z faktu nabycia obligacji, tj. $C_t = C$ ($t = 1,...,T-1$) oraz $C_t = C + N$; C - wartość kuponu, N - wartość nominalna.

Dla małych zmian dr rynkowej stopy procentowej, odpowiadający tym zmianom dodatni lub ujemny przyrost dP wartości obligacji możemy aproksymować różniczką zupełną, tj.

$$dP = \frac{\partial P}{\partial r} dr. \tag{4.4}$$

Do dalszych rozważań wprowadzimy pojecie współczynnika wagowego x_t, tj.

$$x_t \triangleq \left[C_t /(1+r)^t\right] / P = \left[C_t /(1+r)^t\right] \Big/ \sum_{t=1}^{T} \left[C_t /(1+r)^t\right]. \tag{4.5}$$

Współczynnik x_t określa więc udział wartości bieżącej strumienia finansowego C_t (zdyskontowanego na chwilę początkową za pomocą rynkowej stopy procentowej r) w wartości bieżącej P obligacji. Z (4.5) wynika bezpośrednio, że

$$\sum_{t=1}^{T} x_t = 1. \tag{4.6}$$

Z (4.4), uwzględniając (4.3) i (4.5), otrzymamy

$$dP = -\left[\sum_{t=1}^{T} tC_t (1+r)^{-t}\right] \frac{dr}{1+r} = -P \times \left(\sum_{t=1}^{T} t\, x_t\right) \frac{dr}{1+r}. \tag{4.7}$$

Występujące w powyższym wzorze wyrażenie w nawiasie okrągłym nosi nazwę okresowości (Macaulaya) D obligacji. Mamy zatem

$$D = \sum_{t=1}^{T} t\, x_t = \sum_{t=1}^{T} \frac{tC_t}{(1+r)^t} \Big/ P \tag{4.8}$$

oraz z (4.7), (4.8)

$$dP = -P \times D \frac{dr}{1+r}. \tag{4.9}$$

Uwzględniając dodatkowo, że $dr = d(1+r)$, z (4.9) otrzymamy

$$\frac{dP}{P} = -D \frac{d(1+r)}{1+r} \quad \text{oraz} \tag{4.10}$$

$$D = -\frac{dP}{P} \Big/ \frac{d(1+r)}{1+r}. \tag{4.11}$$

Natomiast dla nieskończenie małych przyrostów dr, z (4.11) otrzymamy

$$D = -\frac{dP}{dr}\frac{1+r}{P} \xrightarrow[dr \to 0]{} -\frac{\partial P}{\partial r}\frac{1+r}{P}, \tag{4.12}$$

tak więc

$$D = -\frac{\partial P}{\partial r}\frac{1+r}{P}. \tag{4.13}$$

Wyprowadzone powyżej wzory (4.8), (4.11) i (4.13) określają trzy równoważne definicje parametru okresowości D obligacji. Między innymi, ze wzoru (4.8) wynika, że okresowość D obligacji jest pewną średnią ważoną chwil czasowych t, w których wypłacane są strumienie finansowe C_t wynikające z faktu posiadania analizowanej obligacji. Uśrednienie to odbywa się ze względu na wagi x_t dane wzorem (4.5). Inaczej mówiąc, parametr okresowości D jest więc pewnym *średnim ważonym okresem zwrotu* z inwestycji w obligacje; stąd też nazwa tego parametru. Parametr D jest wielkością mianowaną, wyrażaną w jednostkach czasu; np. w latach.

Parametr okresowości D obligacji czysto-dyskontowej. Dla obligacji czysto-dyskontowej (tj. dla $C=0$) mamy

$$C_t=0,\quad \text{dla}\quad t=1,\dots,T-1 \quad \text{oraz}\quad C_T=N. \tag{4.14}$$

A zatem, z (4.3), (4.14) $$P=P(r)=\frac{N}{(1+r)^T}. \tag{4.15}$$

Z (4.8), (4.14) i (4.15) otrzymamy

$$D=\frac{T\times N}{(1+r)^T}\Big/P=T. \tag{4.16}$$

Otrzymaliśmy więc, że w przypadku obligacji czysto-dyskontowej okresowość tej obligacji jest równa bezpośrednio terminowi T jej wykupu. Z porównania wzorów (4.8) i (4.16) wynika również, że spośród wszystkich obligacji o tym samym terminie wykupu T (*term to maturity*), obligacja czysto-dyskontowa ma największą okresowość $D_{max}=T$. Wynika to bezpośrednio stąd, że okresowość D obligacji wielokuponowych jest średnią ważoną terminów $t=1,\dots,T$, przy czym suma wag x_t jest równa jedności (por. 4.6). Tak więc okresowość D musi być krótsza od najdłuższego z rozpatrywanych terminów; tj. T.

Zależność parametru okresowości D obligacji od upływu czasu bieżącego oraz od poziomu stopy procentowej. Z przedstawionych powyżej rozważań wynika jeszcze jeden ważny wniosek. A mianowicie z upływem czasu bieżącego $\tau=1,2,3,\dots$, okresowość Macaulaya obligacji maleje, bowiem zmniejsza się okres do wykupu tych obligacji równy $T-\tau$. Istnieją co prawda inne niż prezentowana powyżej definicje okresowości D obligacji, dla których – w pewnych szczególnych okolicznościach (obligacje długoterminowe sprzedawane z dużym dyskontem) – powyższa zależność nie jest spełniona; *Francis* (1991). Przypadkiem tym nie będziemy się jednak dalej zajmować.

Istotna jest również zależność parametru okresowości D od poziomu rynkowej stopy procentowej r. A mianowicie, można wykazać (*Bierwag* 1987), że ze wzrostem stopy procentowej r - okresowość D obligacji maleje; przy czym, podobnie jak w przypadku zależności od upływu czasu bieżącego τ - jest to zależność w ogólnym przypadku nieliniowa.

Okresowość D obligacji jako współczynnik elastyczności. Dla ustalonej chwili τ czasu bieżącego oraz przy ustalonym poziomie rynkowej stopy procentowej r, okresowość obligacji zależy wyłącznie od strumieni finansowych C_t tej obligacji (a więc od odsetek C oraz wartości nominalnej N) oraz od okresu do wykupu T. Parametr okresowości D jest więc wewnętrzną cechą tej obligacji, wyrażającą jej wrażliwość na nieoczekiwane zmiany stopy procentowej r. Parametr ten jest zatem miernikiem ryzyka stopy procentowej na rynku obligacji. Wynika to zresztą bezpośrednio z definicji (4.11).

A mianowicie, okresowość D obligacji jest *współczynnikiem elastyczności* (wziętym ze znakiem minus) ceny obligacji ze względu na zmianę czynnika jedność plus stopa procentowa r. Okresowość D wyraża bowiem liczbowo procentowy spadek wartości P obligacji spowodowany wzrostem wartości $(1+r)$ o 1%. Bądź odwrotnie – wyraża ona procentowy wzrost wartości P wynikający ze spadku wartości $(1+r)$ o 1%. Wyprowadzona powyżej zależność (4.10) pozwala na przybliżone oszacowanie względnej zmiany (dP/P) wartości obligacji spowodowanej nieoczekiwaną zmianą rynkowej stopy procentowej, o ile tylko znana jest wartość parametru okresowości D, którą można bezpośrednio wyliczyć ze wzoru (4.8). Z tego też powodu wartość okresowości D jest jednym z podstawowych parametrów, który jest – obok rentowności do wykupu *YTM* - wymieniany w tablicach kwotowań rynkowych poszczególnych obligacji występujących na danym rynku. Dla rynku amerykańskiego, tablice takie są publikowane m.in. przez dziennik finansowy *The Wall Street Journal*.

Ze wzoru (4.13) wynika jeszcze jedna interpretacja parametru okresowości D obligacji. A mianowicie, parametr ten jest bezpośrednio zależny od pochodnej $(\partial P/\partial r)$ wartości obligacji względem stopy procentowej r. Pochodna ta jest często określana w literaturze przedmiotu mianem tzw. "dolarowej okresowości" (*dollar duration*); por. *Fabozzi* (2000). Natomiast w literaturze polskiej, okresowość D jest często w sposób mylący nazywana "trwałością obligacji". Otóż według autora niniejszej pracy, nazewnictwo to jest błędne i w wysokim stopniu nieuzasadnione. Bowiem z przedstawionych powyżej rozważań wynika, że parametr D charakteryzuje raczej "nietrwałość" niż "trwałość" obligacji. Im większa jest bowiem wartość D, w tym większym stopniu dana obligacja jest wrażliwa na ryzyko stopy procentowej, co wynika choćby z zależności (4.10). Trudno więc w tym przypadku mówić o "trwałości".

4.2. Wypukłość obligacji (*convexity*)

Wprowadzenie pojęcia parametru wypukłości V obligacji, umożliwia bardziej dokładne – niż wynika to ze wzoru (4.10) – oszacowanie wrażliwości wartości obligacji na ryzyko rynkowej stopy procentowej r. Wynika to z rozwinięcia przebiegu zależności wartości P obligacji od stopy procentowej r - w szereg Taylora. Dzięki temu nie musimy już dalej zakładać, że nieoczekiwane zmiany $h=dr$ stopy procentowej są małe. Jak wykazały badania (por. np. *Zaremba* 1995), w przypadku zależności $P(r)$ danej wzorem (4.3) – wystarczającą dokładność uzyskuje się w analizowanym przypadku przez przybliżenie przyrostu dP tej funkcji przez dwa pierwsze człony rozwinięcia Taylora. Mamy zatem

$$dP = P(r+dr) - P(r) = \frac{\partial P}{\partial r}dr + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}(dr)^2 \tag{4.17}$$

oraz biorąc pod uwagę postać funkcji $P(r)$ daną przez zależność (4.3),

$$dP = -\left[\sum_{t=1}^{T} tC_t(1+r)^{-t}\right]\frac{dr}{1+r} + \frac{1}{2}\left[\sum_{t=1}^{T} t(1+t)C_t(1+r)^{-t}\right]\left(\frac{dr}{1+r}\right)^2. \tag{4.18}$$

Z definicji (4.5) współczynnika wagowego x_t mamy

$$Px_t = C_t(1+r)^{-t}. \tag{4.19}$$

A zatem, z (4.18) i (4.19) otrzymamy

$$dP = P\left\{-\left[\sum_{t=1}^{T} tx_t\right]\frac{dr}{1+r}+\left[\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} t(t+1)x_t\right]\left(\frac{dr}{1+r}\right)^2\right\}, \tag{4.20}$$

a stąd

$$\frac{dP}{P} = -\left[\sum_{t=1}^{T} t\,x_t\right]\frac{dr}{1+r}+\left[\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} t(t+1)x_t\right]\left(\frac{dr}{1+r}\right)^2. \tag{4.21}$$

W powyższym wzorze, wyrażenie występujące w pierwszym nawiasie kwadratowym jest równe parametrowi *okresowości* D obligacji; por. (4.8). Natomiast wyrażenie w drugim nawiasie kwadratowym nazywane jest *wypukłością* V obligacji. Uwzględniając dodatkowo (4.5), mamy zatem

$$V \triangleq \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} t(t+1)x_t = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \frac{t(t+1)C_t}{(1+r)^t} \Big/ P. \tag{4.22}$$

Ponadto, z (4.21) oraz (4.8) i (4.22), uwzględniając $dr = d(1+r)$, otrzymamy

$$\frac{dP}{P} = -D\times\Delta_r + V\times(\Delta_r)^2, \tag{4.23}$$

gdzie $\Delta_r = \dfrac{d(1+r)}{1+r}$.

Biorąc pod uwagę (4.22) oraz wzór (4.3) określający funkcję $P(r)$, można łatwo sprawdzić, że zachodzi

$$V = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\quad\frac{(1+r)^2}{P}. \tag{4.24}$$

Wyrażenie (4.24) określa więc alternatywną w stosunku do (4.22) definicję wypukłości V obligacji.

Z porównania wyprowadzonych powyżej zależności (4.10) i (4.23) wynika, że oszacowanie względnej zmiany (dP/P) wartości obligacji tylko przy pomocy parametru okresowości D jest zbyt "pesymistyczne". A mianowicie, z (4.23) wynika, że zarówno przy spadku stopy procentowej r $(dr<0)$ jak i przy wzroście tej stopy $(dr>0)$ - wartość (dP/P) jest wyższa niż by to wynikało tylko z parametru okresowości D rozpatrywanego oddzielnie. Musimy więc w analizowanym przypadku uwzględnić "poprawkę" $V\times(\Delta_r)^2$ wynikającą z wypukłości zależności funkcyjnej $P(r)$. Ujmując to jeszcze inaczej, oszacowanie wartości (dP/P) tylko na podstawie parametru okresowości D wiąże się bezpośrednio z linearyzacją analizowanego zagadnienia. Zauważmy bowiem, że wartość okresowości D zależy bezpośrednio od pierwszej pochodnej $(\partial P/\partial r)$ przebiegu funkcji $P(r)$; por. (4.13). Natomiast wprowadzając do rozważań parametr wypukłości V bierzemy również pod uwagę drugą pochodną związku $P(r)$; wynika to bezpośrednio ze wzoru (4.24).

Z przeprowadzonych powyżej rozważań, a w szczególności ze wzoru (4.23) wypływa następujący ważny wniosek. A mianowicie, zakładając, że założenia co do dynamiki zmian analizowanej krzywej dochodowości są w przybliżeniu spełnione, spośród wszystkich obligacji o tej samej okresowości D zawsze opłaca się wybrać obligację o wyższej wypukłości V. Bowiem wówczas, wzrost wartości obligacji przy nieoczekiwanym spadku stóp procentowych będzie wyższy, natomiast spadek wartości tej obligacji towarzyszący wzrostowi stóp procentowych będzie niższy – niż w przypadku obligacji o mniejszej wypukłości. W teorii obligacji mówi się w tym przypadku o tzw. *efekcie wypukłości*. Ilustrację graficzną tego efektu można znaleźć m.in. w pracy *Jajugi* (1996).

4.3 Parametry okresowości i wypukłości portfela obligacji

Wprowadzimy teraz wzory na okresowość i wypukłość portfela P obligacji. Ogólnie rzecz biorąc portfel P możemy traktować jako kombinację wypukłą obligacji O_i $(i=1,..,N)$, traktowanych jako elementy pewnej przestrzeni liniowej obligacji. Mamy zatem

$$\mathsf{P} = \sum_{i=1}^{N} w_i O_i \text{ - portfel obligacji,} \tag{4.25}$$

gdzie w_i - udział wartościowy obligacji O_i w portfelu P;

$$\text{przy czym} \quad w_i \in (0,1),\ \forall i = 1,\dots,N; \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^{N} w_i = 1. \tag{4.26}$$

Można łatwo wykazać, że okresowość D_P portfela P obligacji jest kombinacją wypukłą okresowości D_i poszczególnych obligacji, wchodzących w skład tego portfela (por. *Krawczak*, *Jakubowski*, et al., 2003, Rozdz.6), tj.

$$D_P = \sum_{i=1}^{N} w_i D_i. \tag{4.27}$$

Również można łatwo wykazać, że charakter powyższej zależności przenosi się na parametr wypukłości V_P portfela P obligacji; tj.

$$V_P = \sum_{i=1}^{N} w_i V_i. \tag{4.28}$$

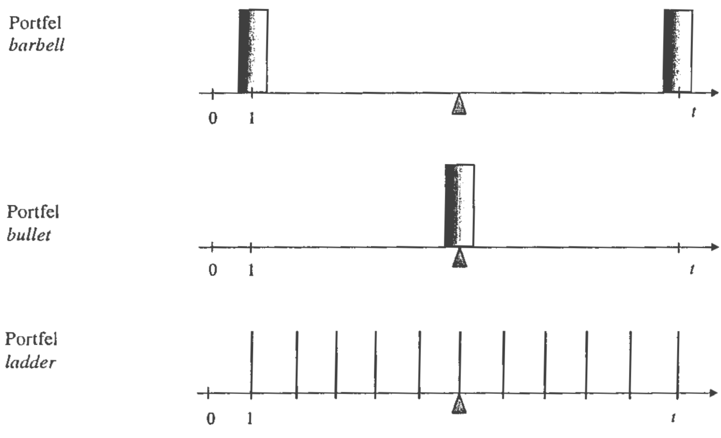
Przedstawione powyżej wzory (4.27) i (4.28) na okresowość i wypukłość portfela P obligacji mają duże znaczenie dla zastosowań praktycznych. A mianowicie, dobierając odpowiednio udziały wartościowe w_i poszczególnych obligacji O_i w portfelu P możemy utworzyć w ten sposób pewną obligację syntetyczną o odpowiednich – wymaganych przez nas – parametrach okresowości D_p i wypukłości V_p. Możemy więc w ten sposób kształtować odpowiednią wrażliwość analizowanego portfela obligacji na ryzyko stóp procentowych. Co więcej, wzory (4.27) i (4.28) można łatwo uogólnić na przypadek krzywej dochodowości o dowolnym kształcie o ile tylko dynamika zmian z upływem czasu bieżącego rynkowych stóp procentowych *spot* r_{0t}, przebiega według schematu :

$$\frac{d(1+r_{0t})}{1+r_{0t}} = L^{t-1}\frac{d(1+r_{01})}{1+r_{01}}; \qquad \forall t =,\dots,T, \tag{4.29}$$

gdzie $L \in (0,1)$ - parametr identyfikowany na podstawie danych z przeszłości, por. *Zaremba* (1995).

Portfele obligacji o maksymalnej wypukłości.

Z punktu widzenia zastosowań praktycznych, interesującym zagadnieniem jest poszukiwanie portfela obligacji o maksymalnej wypukłości, wśród klasy portfeli – o tym samym parametrze okresowości. Należy się bowiem spodziewać, że portfel taki – ponownie, przy zachowaniu stosownych założeń co do dynamiki zmian krzywej dochodowości – będzie zapewniał najwyższą nieoczekiwaną stopę zwrotu (dP/P). Otóż nie wnikając bliżej w szczegóły matematyczne można stwierdzić, że im większe jest rozproszenie strumieni finansowych C_t portfela obligacji wokół punktu na osi czasu wyznaczonym przez wartość parametru okresowości D tego portfela, tym większa jest jego wypukłość V. Natomiast portfelem spełniającym ów warunek największego rozproszenia rozpatrywanych strumieni finansowych C_t - jest tzw. portfel sztangowy (*barbell*);



Rys 4.1. Ilustracja rozkładu strumieni finansowych portfeli typu *barbell, bullet, ladder.*

por. rysunek 4.1. Fakt ten, udowodniono dla przypadku płaskiej krzywej dochodowości, jak i dla krzywej dochodowości o dowolnym kształcie – przy założonym schemacie (4.29) zmian stóp procentowych *spot* r_{0t} por. *Zaremba* (1998), *Zaremba, Smoleński* (1998). W drugiej z cytowanych prac, dowód ten uogólniono na przypadek jeszcze bardziej niż (4.29) ogólnego schematu dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych, tj. dla schematu

$$\frac{d(1+r_{ot})}{1+r_{ot}} = gt\,\frac{d(1+r_{o1})}{1+r_{o1}}; \qquad \forall\, t=1,\ldots,T, \tag{4.30}$$

gdzie $gt \neq 0$ - parametr identyfikowany na podstawie danych z przeszłości.

Na rysunku 4.1, oprócz portfela sztangowego (*barbell*), przedstawiono również rozkład strumieni finansowych portfela „o strukturze pocisku" (*bullet*) oraz portfela „o strukturze drabinowej" (*ladder*), przy czym założono, że wszystkie te portfele charakteryzują się tym samym parametrem okresowości D_p. Wartość tego parametru zilustrowana jest punktem podparcia „dźwigni" reprezentowanych na analizowanym rysunku przez osie czasu oraz strumienie finansowe rozpatrywanych portfeli obligacji. Otóż można wykazać, że portfel typu *bullet* jest portfelem o najmniejszym parametrze wypukłości V_P, spośród prezentowanych na rysunku portfeli; natomiast portfel typu *ladder* – stanowi przypadek pośredni. Należy przy tym dodać, że każdy z analizowanych powyżej portfeli można łatwo utworzyć kupując odpowiedni zestaw obligacji czysto dyskontowych. W przypadku portfela typu *barbell* będą to obligacje o możliwie najkrótszym oraz możliwie najdłuższym terminie wykupu T. W przypadku portfela typu *bullet* obligacje o tym samym (bądź zbliżonym) terminie wykupu. Natomiast w celu ukształtowania portfela typu *ladder*, należy wykupić obligacje czysto-dyskontowe o terminach wykupu pokrywających cały analizowany horyzont czasowy.

Prezentowane na rysunku 4.1 trzy rodzaje portfeli obligacji są szeroko analizowane w literaturze przedmiotu dotyczącej zarządzania portfelowego na rynku obligacji . Są to w przeważającej mierze prace empirycznej ukierunkowane na badania efektywności strategii inwestycyjnych, których podstawą jest konstrukcja jednego z trzech wyżej wymienionych typów modeli , w zależności od przewidywanej (czy też zakładanej) dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych (*spot*) $r_{ot}(t=1,\ldots,T)$; por. *Van Horne* (1994), *Dattatrey'a, Fabozzi* (1995). Bardziej obszerne omówienie tej tematyki zawiera praca *Krawczak, Jakubowski* et al. (2003) , Rozdz.6.

Podsumowując prowadzone dotychczas rozważania dotyczące parametrów okresowości D oraz wypukłości V obligacji oraz biorąc pod uwagę, że portfel P obligacji można traktować jako pewną, sztucznie wytworzoną obligacją syntetyczną, możemy sformułować następujące wnioski:

Wniosek 4.1 Spośród wszystkich obligacji o tym samym terminie wykupu T, obligacja czysto-dyskontowa jest obligacją o największej okresowości $D = T$.

Wniosek 4.2 Spośród wszystkich obligacji o tej samej okresowości D, obligacja czysto-dyskontowa jest obligacją o najmniejszej wypukłości V.

Wniosek 4.3 Spośród wszystkich obligacji (bądź portfeli obligacji) o tej samej okresowości D, obligacja sztangowa (*barbell*) jest obligacją o maksymalnej wypukłości.

Przedstawione powyżej Wnioski 4.1- 4.3 są prawdziwe, o ile tylko na rozpatrywanym rynku spełnione są odnośne założenia co do dynamiki zmian analizowanej struktury terminowej stóp procentowych reprezentowane przez schematy (4.2), (4.29) lub (4.30).

4.4. Oczekiwana okresowość obligacji

Wprowadzimy teraz pewno nowe pojęcie dotyczące *oczekiwanej okresowości* D^1 obligacji. Stosując to pojęcie, weźmiemy bardziej szczegółowo pod uwagę oddziaływanie „upływu czasu bieżącego” $\tau = 0,1,2,3,\ldots$, na wartość parametru okresowości D. Prowadząc w dalszym ciągu rozważania dla płaskiej krzywej dochodowości, oznaczymy:

P_0 - wartość bieżąca obligacji w chwili $\tau = 0$, czyli

$$P_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t}, \tag{4.31}$$

D^0 - parametr bieżącej okresowości obligacji, rozpatrywany dla chwili $\tau = 0$, tj.

$$D^0 = D(\tau = 0) = -\frac{\Delta P_0}{P_0} / \frac{\Delta r}{1+r}, \tag{4.32}$$

czyli - dla małych Δr - otrzymamy

$$D^0 = -\frac{\partial P_0}{\partial r}\frac{1+r}{P_0} = \sum_{t=1}^{T} \frac{t\,C_t}{(1+r)^t} / P_0 . \tag{4.33}$$

Tak więc okresowość D^0 określa nam wrażliwość wartości bieżącej P_0 obligacji, rozpatrywanej w chwili $\tau = 0$, na zmianę stopy procentowej r o Δr jaka następuje w chwili $\tau = 0 + \varepsilon$, gdzie ε - dowolnie małe. Możemy wyobrazić sobie następującą sytuację: kupujemy w chwili $\tau = 0$ daną obligację według ceny P_0 i zastanawiamy się jaka będzie natychmiastowa zmiana wartości tej obligacji, o ile bezpośrednio po zakupie (tj. dla $\tau = 0 + \varepsilon$) stopa procentowa zmieni się o Δr. Odpowiedź na to pytanie możemy uzyskać wykorzystując właśnie parametr D^0; a mianowicie, z (4.32) mamy

$$\frac{\Delta P_0}{P_0} = -D^0 \frac{\Delta r}{1+r}. \tag{4.34}$$

Załóżmy teraz, że nabyliśmy daną obligację w chwili $\tau = 0$, oraz - że przez pierwszy okres odsetkowy stopa procentowa r nie uległa zmianie. Zastanawiamy się jak wrażliwa będzie wartość przyszła posiadanej obligacji na zmianę stopy procentowej o Δr w chwili $\tau = 1 + \varepsilon$, tj. po upływie pierwszego okresu odsetkowego i wypłacie pierwszych odsetek wynoszących $C_1 = C$. Analizę powyższą prowadzimy w chwili obecnej, tj. dla $\tau = 0$. W tym celu wprowadzamy właśnie pojęcie *oczekiwanej okresowości* D^1, tj. przy oczekiwaniu, że stopa procentowa r nie ulegnie zmianie w okresie $\tau \in [0,1]$.

Oznaczmy

P_1 - wartość przyszła obligacji w chwili $\tau = 1$, przy założeniu, że $r = const$, tj.

$$P_1 = \sum_{t=2}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^{t-1}}. \tag{4.35}$$

Wartość P_1 jest więc oczekiwaną (czy też spodziewaną) wartością przyszłą obligacji wyznaczoną w chwili $\tau = 0$ dla chwili $\tau = 1$, w warunkach stałości stopy procentowej r.

Parametr **oczekiwanej okresowości** D^1 obligacji definiujemy następująco:
D^1 - oczekiwana okresowość obligacji w chwili $\tau = 1$, przy założeniu, że $r = const$, tj.

$$D^1 = D(\tau = 1) \triangleq -\frac{\Delta P_1}{P_1} \Big/ \frac{\Delta r}{1+r}, \tag{4.36}$$

czyli, dla małych Δr, z (4.36) otrzymamy

$$D^1 = -\frac{\partial P_1}{\partial r} \frac{1+r}{P_1} \tag{4.37}$$

oraz z (4.35) i (4.37)

$$D^1 = \sum_{t=2}^{T} \frac{(t-1)C_t}{(1+r)^{t-1}} / P_1 . \tag{4.38}$$

Tak więc w chwili $\tau = 0$, przy założeniu, że stopa procentowa r nie ulegnie zmianie w ciągu pierwszego okresu odsetkowego, możemy oszacować wpływ zmiany tej stopy o Δr (w chwili $\tau = 1 + \varepsilon$) - na zmianę wartości P_1 obligacji; z definicji (4.36) mamy bowiem

$$\frac{\Delta P_1}{P_1} = -D^1 \frac{\Delta r}{1+r} . \tag{4.39}$$

Wyprowadzimy teraz zależność funkcyjną pomiędzy parametrem *oczekiwanej okresowości* D^1 a parametrem *bieżącej okresowości* D^0. W tym celu wykorzystamy wyprowadzone w tym punkcie wzory (4.33) i (4.38) umożliwiające wyznaczenie wartości tych parametrów. Założymy również, że dla analizowanej obligacji zachodzi

$$D^0 > 1 . \tag{4.40}$$

Lemat 4.1

Zależność funkcyjna pomiędzy parametrem oczekiwanej okresowości D^1 a parametrem bieżącej okresowości D^0 obligacji wyraża się wzorem:

$$D^1 = (D^0 - 1)(1+r)\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{-1}, \tag{4.41}$$

gdzie r - rynkowa stopa procentowa, P_0 - wartość bieżąca obligacji w chwili $\tau = 0$, P_1 - wartość przyszła obligacji w chwili $\tau = 1$, wyznaczona przy założeniu, że stopa procentowa r nie uległa zmianie; oraz z założenia (4.40), $D^0 > 1$.

Dowód: Biorąc pod uwagę wzory (4.33) i (4.38) mamy

$$D^0 \stackrel{\Delta}{=} \sum_{t=1}^{T} \frac{tC_t}{(1+r)^t} / P_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{tC_t}{(1+r)^t} / P_0 - \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t} / P_0 + 1 =$$

$$= \sum_{t=1}^{T} \frac{tC_t}{(1+r)^t} / P_0 - \frac{C_1}{(1+r)} / P_0 - \sum_{t=2}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t} / P_0 + 1 =$$

$$= \sum_{t=2}^{T} \frac{tC_t}{(1+r)^t} / P_0 - \sum_{t=2}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t} / P_0 + 1 =$$

$$= \sum_{t=2}^{T} \frac{(t-1)C_t}{(1+r)^t} / P_0 + 1 = \left[\sum_{t=2}^{T} \frac{(t-1)C_t}{(1+r)^{t-1}} / P_0 \right] \frac{1}{1+r} + 1 =$$

$$= \left[\sum_{t=2}^{T} \frac{(t-1)C_t}{(1+r)^{t-1}} / P_1 \right] \left(\frac{P_1}{P_0} \right) \frac{1}{1+r} + 1 = D^1 \left(\frac{P_1}{P_0} \right) \frac{1}{1+r} + 1.$$

A zatem, $D^1 = (D^0 - 1)(1+r) \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{-1}$. **c.n.d.**

Omówiony powyżej pokrótce parametr bieżącej okresowości D^0 obligacji ma zasadnicze znaczenie przy stosowaniu tzw. techniki immunizacji portfela obligacji ze względu na ryzyko stóp procentowych. Chodzi w tym przypadku o takie zaprojektowanie udziałów wartościowych poszczególnych obligacji wchodzących w skład analizowanego portfela, aby wartość przyszła tego portfela (przy zadanym horyzoncie czasowym) była jak najmniej wrażliwa na nieoczekiwane zmiany rynkowych stóp procentowych. Zagadnienie to jest obszernie omawiane w literaturze (por. *Bierwag* 1983, 1987, *Dahl* 1993); w tym – również w pracach autora *et al.* (*Kulikowski, Bury, Jakubowski* 1995; *Jakubowski* 1997a).

Problematyka immunizacji portfela nie będzie dalej szerzej rozpatrywana. Natomiast naszą uwagę skupimy na zastosowaniu wprowadzonej powyżej koncepcji parametru oczekiwanej okresowości D^1 dla aktywnego zarządzania portfelem obligacji. W dalszej części pracy sformułujemy najpierw tzw. model jednoindeksowy dla rynku obligacji. Rozważania nasze rozpoczniemy od przypadku płaskiej krzywej dochodowości. Następnie, otrzymane wyniki uogólnimy na przypadek krzywej dochodowości o dowolnym kształcie. W tym celu, podamy pewne uogólnione definicje wprowadzonych w tym punkcje pojęć *okresowości* oraz *oczekiwanej okresowości* obligacji.

5. Założenia modelu – przypadek płaskiej krzywej dochodowości

Prowadzone dalej rozważania poprzedzimy sformułowaniem następujących założeń oraz definicji.

Płaska krzywa dochodowości. Warunek płaskiej krzywej dochodowości (*yield curve*), jaki przyjmiemy dla analizowanego rynku finansowego można formalnie zapisać następująco.

$$r_{0t} = const(t) = r; \qquad \forall t = 1,\dots,T, \tag{5.1}$$

gdzie r_{0t} - rynkowa stopa procentowa *spot* dla okresu $[0,t]$, t - termin zapadalności zobowiązań; w przypadku obligacji zero-kuponowych termin ten pokrywa się z tzw. okresem do wykupu (*term to maturity*).

Założymy również, że jedynymi możliwymi zmianami płaskiej krzywej dochodowości, jakie mogą nastąpić wraz z upływem czasu bieżącego $\tau = 0,1,2,3,\ldots$, są przesunięcia równoległe tej krzywej o tę samą wartość Δr w górę lub w dół. Zauważmy, że założenie to jest konieczne, ponieważ w przeciwnym przypadku początkowo płaska krzywa dochodowości (dla $\tau = 0$) przestawałaby być płaska dla przyszłych chwil τ. Mamy więc

$$\Delta r = \Delta r_t = const(t), \qquad \forall t = 1,\ldots,T \tag{5.2}$$

– nieoczekiwane przesunięcie płaskiej krzywej dochodowości o tę samą wartość.

Horyzont inwestycyjny. Zagadnienie aktywnego zarządzania portfelem obligacji rozpatrywać będziemy przy założeniu, że horyzont inwestycyjny jest równy jednemu (najbliższemu) okresowi odsetkowemu. Z powyższego wynika więc, że analizując portfele inwestycyjne, rozpatrywać będziemy tylko te obligacje (o różnych terminach wykupu), których okresy odsetkowe pokrywają się ze sobą. Ponadto przyjmiemy, że inwestycji w określone obligacje dokonujemy wyłącznie na początku danego okresu odsetkowego, tj. w chwilach:

$$\tau = 0 + \varepsilon,\ \tau = 1 + \varepsilon,\ \tau = 2 + \varepsilon, \ldots, \qquad \text{gdzie } \varepsilon > 0 \text{ - wartość dowolnie mała.}$$

Powyższe oznacza, że rozpatrujemy tylko tzw. ceny „czyste" P_c obligacji (*clean price*); ceny te są bowiem równe cenom „brudnym" P_b (*dirty price*) tylko na początku kolejnych okresów odsetkowych. W ogólnym przypadku mamy bowiem

$$P_b = P_c + \frac{q}{d} C, \tag{5.3}$$

gdzie q - liczba dni, które upłynęły od początku danego okresu odsetkowego do dnia zakupu obligacji (*settlement date*),

d - czas trwania okresu odsetkowego (w dniach),

$\frac{q}{d} C$ - odsetki, które narosły od początku danego okresu odsetkowego do dnia zakupu obligacji (*accrued interest*).

Cena czysta P_c obligacji ustalana jest jako określona część wartości nominalnej N; cena ta może być wyrażana kwotowo lub procentowo.

Klasa analizowanych obligacji. Prowadzone dalej rozważania dotyczyć będą *obligacji długoterminowych* o stałym oprocentowaniu. Chodzi w tym przypadku o to, że ogólnie rzecz biorąc, parametr okresowości obligacji D^0 jest silnie niestabilny z upływem czasu bieżącego. Okresowość D^0 maleje z czasem, przy czym spadek wartości D^0 jest tym silniejszy im krótszy jest okres do wykupu T (*term to maturity*) rozpatrywanej obligacji.

W najprostszym przypadku obligacji zero-kuponowych mamy: dla $T = 15$, $D^0 = 15$; $T = 14$, $D^0 = 14$; ... ; $T = 2$, $D^0 = 2$; $T = 1$, $D^0 = 1$.

Tak więc dla okresu do wykupu równego $T = 15$ lat, po upływie 1 roku, procentowy spadek okresowości obligacji wynosi $\frac{\Delta D^0}{D^0} = \frac{14-15}{15} \times 100 = -6.7\%$.

Natomiast dla okresu do wykupu równego $T = 3$ lata, po upływie 1 roku, mamy

$$\frac{\Delta D^0}{D^0} = \frac{2-3}{3} \times 100 = -33.3\%$$

oraz dla $T = 2$ lata, po upływie 1 roku

$$\frac{\Delta D^0}{D^0} = \frac{1-2}{2} \times 100 = -50.0\% .$$

Powyższe wnioski pozostają również aktualne w przypadku obligacji o niezerowym kuponie (tj. $C_t \neq 0$), w którym spadek okresowości D^0 obligacji wraz z upływem czasu bieżącego τ ma charakter nieliniowy; *Bierwag* (1987), *Francis* (1991).

Rosnąca niestabilność parametru okresowości D^0 analizowanych obligacji - wraz z upływem czasu bieżącego - staje się źródłem określonej niestabilności parametrów modelu zarządzania portfelowego rozpatrywanego w dalszej części pracy. Z tego też powodu prowadzone rozważania dotyczyć będą obligacji długoterminowych O_i o okresowościach

$$D_i^o >> 1 \qquad \forall\, i=1,\ldots,n. \tag{5.4}$$

Dla tego typu obligacji, procentowa zmiana (tj. spadek) okresowości D_i^o po upływie jednego okresu odsetkowego nie będzie zbyt duża, co pokazaliśmy na przedstawionym powyżej przykładzie.

Rynek zrównoważony, rynek niezrównoważony. Wprowadzimy oznaczenia:

P_r - cena rynkowa obligacji, P_0 - wartość bieżąca obligacji.

Wartość bieżąca obligacji, określona w punkcie 2 wzorem (4.31) jest pewną wartością teoretyczną, wynikającą ze zdyskontowania na chwilę bieżącą wszystkich przyszłych strumieni finansowych C_t $(t = 1,\ldots,T)$, wynikających z faktu posiadania danej obligacji. Wartość ta jest często nazywana wartością wewnętrzną obligacji (*bond intrinsic value*).

O *rynku zrównoważonym* mówimy, gdy dla każdej obligacji O_i zachodzi

$$P_r^i = P_0^i, \qquad \forall\, i=1,\ldots,n, \tag{5.5}$$

gdzie n - ogólna liczba rozpatrywanych obligacji.
W przeciwnym przypadku - mówimy, że *rynek jest niezrównoważony*.

Oczywiście o zrównoważeniu lub niezrównoważeniu rynku możemy mówić również tylko w odniesieniu do danej obligacji O_i. Niezrównoważenie rynku danej obligacji wyrażające się różnicą ceny rynkowej P_r tej obligacji od jej wartości wewnętrznej P_0, wynikać może np. z określonych działań spekulacyjnych. Wprowadzimy następującą miarę ρ_i niezrównoważenia rynku obligacji O_i:

$$\rho_i = \frac{P_o^i - P_r^i}{P_r^i}, \qquad \forall\, i=1,\ldots,n. \tag{5.6}$$

Wielkość ρ_i możemy więc traktować jako pewną stopę zwrotu wynikającą z nierównowagowej wyceny przez rynek bieżącej wartości wewnętrznej P_0 danej obligacji (tzw. *mispricing efect*). Wielkość tę będziemy nazywać skrótowo nierównowagową stopą zwrotu.

Jak już wspomnieliśmy teorii, w finansów dowodzi się, że w dłuższym okresie ceny rynkowe P_r obligacji są zbieżne do ich wartości wewnętrznych P_0. W dalszej części pracy założymy, że owo niezrównoważenie rynku danej obligacji trwa tylko jeden okres odsetkowy. Oznacza to, że nawet gdy w chwili $\tau = 0$ dla danej obligacji zachodzi

$$P_r(\tau = 0) \neq P_0(\tau = 0), \tag{5.7}$$

to już po upływie jednego okresu odsetkowego, mamy

$$P_r(\tau = 1) = P_0(\tau = 1). \tag{5.8}$$

Powyższe założenie, jakkolwiek nieco upraszczające - jest powszechnie przyjmowane w literaturze przedmiotu; por. *Elton, Gruber* (1995). Ma ono również zasadnicze znaczenie z punktu widzenia rozważań, prowadzonych w dalszej części tej pracy.

Oczywiście stan ogólnego zrównoważenia rynku jest pewnym stanem „idealnym", który w praktyce nigdy nie ma miejsca. Jednak w przypadku tzw. rynków efektywnych, rynki te są zbieżne do stanu równowagi, który może być w powyższym sensie traktowany jako pewien stan graniczny. Owa zbieżność do stanu równowagi rynkowej wynika z występujących powszechnie transakcji arbitrażowych charakteryzujących rynki efektywne. Mówi się w tym przypadku o obowiązywaniu tzw. prawa jednej ceny (*the law of one price*).

6. Model jednoindeksowy dla rynku obligacji

Wyprowadzimy teraz podstawowe wzory wyrażające spodziewaną oraz rzeczywistą stopę zwrotu z inwestycji w obligacje, przy wprowadzonym wcześniej założeniu, że analizowany horyzont inwestycyjny jest równy jednemu okresowi odsetkowemu. Owe stopy zwrotu nazywane są w literaturze stopami zwrotu „z okresu na okres" (*period-by-period return*). Rozważania nasze poprowadzimy przy założeniu, że analizowany rynek kapitałowy jest w równowadze; tj. $\rho_i = 0$, $i=1,\ldots,n$. Ponadto przyjmiemy, że na rynku tym obowiązuje płaska krzywa dochodowości. Uogólnienie otrzymanych wyników na przypadek rynku niezrównoważonego przedstawiono w Dodatku D.1.

Pomijając dla uproszczenia zapisu indeks i obligacji O_i, wprowadzimy następujące oznaczenia

P_0 - wartość bieżąca obligacji w chwili $\tau = 0$,

P_1 - wartość przyszła obligacji w chwili $\tau = 1$ przy założeniu, że rynkowa stopa procentowa r nie zmieniła się; $r = const$,

P_1^* - wartość przyszła obligacji w chwili $\tau = 1$ przy założeniu, że stopa procentowa r zmieniła się (w chwili $\tau = 1 + \varepsilon$) o Δr, tj. $r^* = r + \Delta r$,

R^a - spodziewana stopa zwrotu (*anticipated return*) za jeden okres dla $r = const$,

R^* - rzeczywista stopa zwrotu (*realized return*) za jeden okres dla $r^* = r + \Delta r$.

Wzory na spodziewaną oraz rzeczywistą stopę zwrotu są następujące

$$R^a = \frac{C + P_1 - P_0}{P_0}, \quad \text{oraz} \tag{6.1}$$

$$R^* = \frac{C + P_1^* - P_0}{P_0}, \tag{6.2}$$

gdzie C - odsetki wypłacane za dany okres.

Zależności (6.1), (6.2) obowiązują dla okresów poprzedzających ostatni okres odsetkowy; natomiast dla okresu ostatniego mamy

$$R^a = R^* = \frac{C + N - P_0}{P_0}, \tag{6.3}$$

gdzie N - wartość nominalna obligacji.

Ze wzoru (6.3) wynika bezpośrednio, że w przypadku obligacji kupionej na początku ostatniego okresu odsetkowego (tj. dla $\tau = T - 1$) nie występuje ryzyko stopy procentowej. Obligacja ta może być bowiem traktowana jako obligacja czysto-dyskontowa o „wartości nominalnej" równej $(C + N)$, która jest przetrzymywana do terminu wykupu. Przypadek ten, charakteryzujący się równością spodziewanej (R^a) i rzeczywistej (R^*) stopy zwrotu, pominiemy w dalszych rozważaniach - jako przypadek trywialny.

Ponadto zauważmy, że w myśl wprowadzonych w punkcie 4 wzorów (4.31) i (4.35) na bieżącą wartość wewnętrzną P_0 i P_1, wartości te są funkcjami stóp procentowych, tj.

$$P_0 = P_0(r); \quad P_1 = P_1(r) \text{ oraz } \quad P_1^* = P_1(r^*). \tag{6.4}$$

A zatem, ze wzorów (6.1) i (6.2) bezpośrednio wynika, że zachodzi również

$$R^a = R^a(r) \quad \text{oraz } R^* = R^*(r^*) \; R^* = (r + \Delta r). \tag{6.5}$$

Tak więc już na początku prowadzonych dalej rozważań możemy zauważyć, że dla danej stopy procentowej r, *spodziewana stopa zwrotu* R^a jest zmienną deterministyczną, którą możemy efektywnie obliczyć. Natomiast, gdy nieoczekiwaną zmianę Δr stopy procentowej traktować jako zmienną losową, to rzeczywista stopa zwrotu R^* z obligacji jest również zmienną losową. Wartości tej nie możemy więc a priori, tj. „deterministycznie" - wyznaczyć.

6.1. Spodziewana stopa zwrotu

Dla spodziewanej stopy zwrotu R^a udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.1

W przypadku rynku zrównoważonego oraz płaskiej krzywej dochodowości, spodziewane stopy zwrotu R_i^a wszystkich występujących na tym rynku obligacji o stałym oprocentowaniu (w tym obligacji czysto-dyskontowych) są sobie równe. Stopy te są równe obowiązującej dla danego rynku stopie procentowej r, tj.

$$R_i^a = R^a = r; \qquad \forall i = 1,\dots,n, \tag{6.6}$$

gdzie n - liczba obligacji występujących na danym rynku.

Dowód: Dla danej obligacji O_i, ze wzorów (4.31) i (4.35), mamy (indeks i - pomijamy)

$$P_0 \overset{\Delta}{=} \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C_T}{(1+r)^T}, \tag{6.7}$$

oraz

$$P_1 \overset{\Delta}{=} \frac{C_2}{1+r} + \frac{C_3}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C_T}{(1+r)^{T-1}}, \tag{6.8}$$

gdzie $C_t = C$ $(t = 1,\dots,T-1)$ oraz $C_T = C + N$.

A zatem, mnożąc równanie (6.7) przez $(1+r)$ otrzymamy

$$P_0(1+r) = C_1 + \left[\frac{C_2}{1+r} + \dots + \frac{C_T}{(1+r)^{T-1}}\right] = C_1 + P_1. \tag{6.9}$$

Czyli z (6.1) i (6.9)

$$R^a \overset{\Delta}{=} \frac{C_1 + P_1 - P_0}{P_0} = \frac{P_0(1+r) - P_0}{P_0} = r. \tag{6.10}$$

Wartość rynkowej stopy procentowej r nie zależy oczywiście od indeksu i obligacji O_i; tak więc równość (6.6) zachodzi dla wszystkich obligacji O_i, $i = 1,\dots,n$. **c.n.d.**

Udowodnione powyżej twierdzenie o równości spodziewanych stóp zwrotu jest również prawdziwe dla dowolnych okresów inwestycyjnych, będących wielokrotnością jednego okresu odsetkowego. Możemy bowiem z łatwością udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie 6.2

W przypadku rynku zrównoważonego oraz płaskiej krzywej dochodowości, spodziewane stopy zwrotu - $R_i^a(K)$ za ten sam okres inwestycyjny K - wszystkich występujących na tym rynku obligacji o stałym oprocentowaniu (w tym obligacji czysto-dyskontowych) są sobie równe. Stopy te są równe wartości:

$$R_i^a(K) = R^a(K) = (1+r)^K - 1; \qquad \forall i = 1,\dots,n, \tag{6.11}$$

gdzie K - okres inwestycyjny, r - rynkowa stopa procentowa.

Dowód: Oznaczymy $R_i^a(K)$ - spodziewana stopa zwrotu i -tej obligacji za okres K.

Z zasady procentu składanego, mamy

$$R_i^a(K) = (1 + R_i^a)^K - 1 \qquad \forall i = 1,\dots,n,$$

oraz - z Twierdzenia 6.1, $R_i^a = r \qquad \forall i = 1,\dots,n,$

zatem $\qquad R_i^a(K) = (1+r)^K - 1, \qquad \forall i = 1,\dots,n.$ **c.n.d.**

Można również wykazać z łatwością następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.3

W przypadku rynku zrównoważonego oraz płaskiej krzywej dochodowości, rentowności do wykupu YTM_i wszystkich występujących na danym rynku obligacji o stałym oprocentowaniu (w tym obligacji czysto-dyskontowych) są sobie równe. Rentowności te są równe obowiązującej dla danego rynku stopie procentowej r, tj.

$$YTM_i = r; \qquad \forall\, i = 1,\dots,n, \tag{6.12}$$

Dowód: *Jakubowski* (2003a).

Przedstawione powyżej twierdzenia 6.1 - 6.3 wskazują jak duży jest stopień idealizacji zagadnienia, wynikający z założenia dla danego rynku kapitałowego płaskiej krzywej dochodowości oraz z przyjęcia hipotezy, że rynek ten jest w danej chwili zrównoważony. A mianowicie, okazuje się, że dla obowiązującej w danej chwili rynkowej stopy procentowej r - spodziewane stopy zwrotu z inwestycji (za ten sam okres) we wszystkie istniejące na danym rynku obligacje są takie same. Co więcej, identyczne są również rentowności do wykupu YTM tych obligacji, charakteryzujące tzw. wewnętrzną stopą zwrotu z obligacji, wyrażoną w skali jednego roku. Zauważmy, że pod pojęciem „wszystkie obligacje" rozumiemy w analizowanym przypadku obligacje o różnych terminach wykupu T oraz o różnych płatnościach odsetkowych (tj. kuponach) C_t; jak również – wszystkie obligacje czysto - dyskontowe.

W dalszej części pracy wykażemy, że twierdzenia 6.1 i 6.2 (o spodziewanej stopie zwrotu) są również prawdziwe w przypadku, gdy na danym, zrównoważonym rynku obowiązuje krzywa dochodowości o dowolnym kształcie, przy czym dla rynku tego spełniona jest hipoteza „czystych oczekiwań" (*pure expectations*).

6.2. Rzeczywista stopa zwrotu R^*:

Wyprowadzimy teraz wzór na rzeczywistą stopę zwrotu R_i^* z inwestycji w obligacje O_i przy horyzoncie czasowym równym jednemu okresowi odsetkowemu; indeks i - dla uproszczenia zapisu - początkowo pominiemy. W rozważaniach, wykorzystamy wprowadzoną w punkcie 4.3 koncepcję *oczekiwanej okresowości* D^1 obligacji.

Oznaczymy

$\Delta R = R^* - R^a$ - nieoczekiwana zmiana stopy zwrotu wywołana zmianą stopy procentowej r o wartość Δr.

Wartość ΔR będziemy nazywali krótko nieoczekiwaną stopą zwrotu (*excess return*); por. *Elton, Gruber* (1995), *Bierwag* (1987). Ze wzorów (6.1) i (6.2) mamy

$$\Delta R = R^* - R^a = \frac{C + P_1^* - P_0}{P_0} - \frac{C + P_1 - P_0}{P_0} = \frac{P_1^* - P_1}{P_0} = \frac{P_1^* - P_1}{P_1}\frac{P_1}{P_0}. \qquad (6.13)$$

Biorąc pod uwagę definicję (4.36) oczekiwanej okresowości D^1 obligacji otrzymamy

$$\frac{P_1^* - P_1}{P_1} = -D^1 \frac{\Delta r}{1+r}. \qquad (6.14)$$

A zatem, z (6.13) i (6.14)

$$R^* - R^a = -D^1 \frac{\Delta r}{1+r}\frac{P_1}{P_0}, \qquad (6.15)$$

czyli
$$R^* = R^a - \left(D^1 \frac{P_1}{P_0}\frac{1}{1+r}\right)\Delta r. \qquad (6.16)$$

Ponadto, po przekształceniu wzoru (4.41) z Lematu 4.1, otrzymamy

$$D^1 \frac{P_1}{P_0}\frac{1}{1+r} = D^0 - 1, \qquad (6.17)$$

gdzie $D^0 > 1$ na mocy założenia (4.40).

A zatem, z (6.16) i (6.17) mamy

$$R^* = R^a - (D^0 - 1)\Delta r. \qquad (6.18)$$

Korzystając teraz z Twierdzenia 3.1, mamy $R^a = r$ dla dowolnej obligacji. Uwzględniając to we wzorze (6.18), otrzymamy ostatecznie

$$R^* = r - (D^0 - 1)\Delta r. \qquad (6.19)$$

Pewną odmianę wzoru (6.19) na rzeczywistą stopę zwrotu R^* z obligacji, przy założeniu, że rynek jest zrównoważony – można znaleźć w pracy *Bubcocka* (1984). Wzór Bubcocka (zwany także wzorem Bubcocka-Langetiga; *Bierwag* (1987)) został wyprowadzony dla q okresów inwestycyjnych i ma następującą postać:

$$R^* = r - \left(\frac{D^0}{q} - 1\right)\Delta r. \qquad (6.20)$$

Oczywiście dla $q = 1$ wzory powyższe się pokrywają

Należy przy tym zaznaczyć, że przedstawione przez nas powyżej wyprowadzenie wzoru (6.19) zostało dokonane niezależnie od metody zastosowanej przez G.Bubcocka. A mianowicie, wzór (6.20) został otrzymany droga rozwinięcia w szeregu Taylora nieliniowej zależności wyjściowej pomiędzy rzeczywistą stopą zwrotu R^* a rynkową stopą procentową r; po czym wzięto pod uwagę pierwszy składnik tego rozwinięcia. Natomiast w prezentowanej przez nas metodzie wyprowadzenia wzoru (6.19) wykorzystaliśmy nowe pojęcie tzw. oczekiwanej okresowości D^1. Ponadto wzór (6.19) można uogólnić – przy użyciu zastosowanej przez nas metodologii – na przypadek rynku niezrównoważonego. Uogólnienie to podaliśmy w dodatku D^1 niniejszej pracy ; por również *Jakubowski* (2003).

Wprowadzając do wzoru (6.19) indeks i obligacji O_i, otrzymamy

$$R_i^* = r - \left(D_i^0 - 1\right)\Delta r \quad , \ \forall i = 1, \ldots, n. \tag{6.21}$$

Wyprowadzony powyżej wzór na rzeczywistą stopę zwrotu z obligacji O_i, rozpatrywanej na rynku zrównoważonym, ma zasadnicze znaczenie dla analizowanej w dalszej części pracy teorii. Dlatego też dokonamy poniżej pewnej interpretacji tej zależności.

Dyskusja otrzymanego wyniku:

Wzór (6.21) zapiszemy w następującej postaci

$$R_i^* = R_i^a - B_i \, \Delta r , \tag{6.22}$$

gdzie $R_i^a = r$ - spodziewana stopa zwrotu, (6.23)

$B_i = D_i^0 - 1$ - zmodyfikowany parametr okresowości. (6.24)

A zatem

$$\Delta R_i \stackrel{\Delta}{=} R_i^* - R_i^a = - B_i \, \Delta r. \tag{6.25}$$

Wynika stąd, że nieoczekiwana zmiana ΔR_{ri} stopy zwrotu z inwestycji w obligację O_i, tj. odchylenie rzeczywistej stopy zwrotu od spodziewanej stopy zwrotu, jest proporcjonalna (ze znakiem minus) do zmiany Δr rynkowej stopy procentowej. Współczynnikiem proporcjonalności jest parametr B_i dany wzorem (6.24), który nazwaliśmy *zmodyfikowaną okresowością* obligacji O_i.

Zauważmy, że wzór (6.25) jest pewnym analogiem równania (4.34) z punktu 4, wynikającego z klasycznej definicji okresowości obligacji. W równaniu (6.25) chodzi jednak nie o wrażliwość wartości bieżącej P_0 obligacji na zmiany Δr stopy procentowej, a o wrażliwość rzeczywistej stopy zwrotu R^* z inwestycji w daną obligację O_i. Należałoby w tym miejscu przypomnieć, że horyzont czasowy analizowanej inwestycji jest równy (z założenia) jednemu okresowi odsetkowemu obligacji O_i.

Wyprowadzony powyżej wzór (6.21) na rzeczywistą stopę zwrotu z obligacji może być wykorzystany dla celów dalszych badań w różny sposób:

(i) Dla danych wartości r, D_i^0 oraz zadawanych skokowo zmian Δr możemy rozpatrywać różne wartości rzeczywistej stopy zwrotu R_i^*, a tym samym - analizować różne scenariusze sytuacyjne dotyczące aktywnego zarządzania portfelem obligacji. Taka analiza różnych wariantów jest często niezwykle pomocna w rzeczywistych przypadkach dotyczących inwestowania na rynku obligacji. Przykład analizy różnych scenariuszy zmian rynkowych stóp procentowych - stosowanej dla aktywnego zarządzania inwestycjami w obligacje - zawiera m.in. praca *Fabozziego* (1995).

(ii) W najnowszych pracach dotyczących *teorii struktury terminowej stóp procentowych* wykorzystuje się często modele stochastyczne dynamiki zmian Δr tych stóp. Jednym z pierwszych takich opracowań był model *CIR* - *Coxa, Ingersolla, Rossa* (1981) - w którym, dla opisu małych zmian dr stopy procentowej rozpatruje się pewien szczególny przypadek stochastycznego równania różniczkowego *Ito*, a mianowicie *równanie dyfuzji*. Model *CIR* mógłby więc być bezpośrednio powiązany z modelem (6.22), w celu modelowania dynamiki zmian w czasie - rzeczywistej stopy zwrotu w obligacje. W szczególności, można by w tym przypadku wykorzystać wersję dyskretną tego modelu, wiążą się z odwzorowaniem losowej zmiany Δr stopy procentowej za pomocą stochastycznego równania różniczkowego por. *Fabozzi, Fong* (1994).

(iii) Wzór (6.21) może być bezpośrednio wykorzystany do opracowania tzw. *modelu jednoindeksowego obligacji*, co prowadzi do sformułowania zagadnienia Markowitza zarządzania portfelowego - dla tego przypadku. Zagadnienie to rozwiniemy szerzej w następnych punktach niniejszej pracy.

6.3. Model jednoindeksowy

Sformułujemy teraz model jednoindeksowy dla rynku obligacji. Model ten będzie w pewnym sensie odpowiednikiem do modelu Sharpe'a rozpatrywanego powszechnie dla rynku akcji (*single-index model*); por. *Francis* (1991). Jednak podstawową różnicą między tymi modelami jest to, że model Sharpe'a jest modelem regresyjnym, natomiast przedstawiony poniżej model będzie wynikał bezpośrednio z wyprowadzonego w punkcie 6.2 wzoru (6.22).

Należy więc wyraźnie podkreślić, że model jednoindeksowy dla rynku obligacji nie jest w żadnym wypadku modelem regresyjnym. Natomiast, jak to dalej wykażemy, podobieństwo obu modeli tkwi wyłącznie w ich liniowości oraz w fakcie uwzględniania w obu przypadkach dwóch nieskorelowanych czynników. A mianowicie, *czynnika wspólnego* (indeksu) będącym z założenia wyłącznym źródłem korelacji pomiędzy analizowanymi walorami oraz *czynnika specyficznego* (zmienna resztowa), charakterystycznego tylko dla danego papieru wartościowego.

Ujmując powyższe jeszcze inaczej, można stwierdzić, że pomimo podobieństwa obu liniowych modeli jednoindeksowych, różnica między tymi modelami tkwi przede wszystkim w sposobie identyfikacji parametrów występujących w tych modelach. W przypadku modelu dla rynku akcji parametry te (powszechnie oznaczane jako α_i, β_i) są wyznaczane na podstawie danych z przeszłości, w sposób typowy dla metody regresji liniowej. Natomiast dla sformułowanego poniżej modelu określonego dla rynku obligacji, parametr - będący odpowiednikiem parametru β_i akcji - może być efektywnie (*a priori*) obliczony na podstawie danych bieżących oraz wprowadzonej wcześniej koncepcji okresowości D_i obligacji .

Podstawowe oznaczenia i definicje

W przedstawionym poniżej opisie modelu będziemy wykorzystywali następujące wielkości, z których część była już analizowana w punktach 6.1 i 6.2 (indeks i obligacji chwilowo pomijamy):

r - znana w chwili bieżącej $\tau = 0$ rynkowa stopa procentowa; zmienna deterministyczna,

$r^* = r + \Delta r$ - nowa wartość stopy procentowej r wynikająca z nieoczekiwanej (losowej) zmiany Δr tej stopy; zmienna losowa,

R^a - spodziewana stopa zwrotu (*anticipated return*), przy założeniu, że $r = const$; zmienna deterministyczna,

R^* - rzeczywista stopa zwrotu (*realized return*), przy założeniu, że $r^* = r + \Delta r$; zmienna losowa,

$\overline{R}^* = E(R^*)$ - oczekiwana stopa zwrotu (*expected return*), tj. wartość oczekiwana rzeczywistej stopy zwrotu R^*,

$\Delta R = R^* - R^a$ - nieoczekiwana stopa zwrotu (*excess return*), tj. nieoczekiwana zmiana stopy zwrotu wywołana zmianą Δr stopy procentowej; zmienna losowa,

$\Delta R_e = E(\Delta R) = E(R^* - R^a)$ - wartość oczekiwana nieoczekiwanej zmiany stopy zwrotu (*expected excess return*).

Jak już wcześniej wspomniano, wszystkie rozpatrywane powyżej stopy zwrotu dotyczą horyzontu inwestycyjnego równego jednemu okresowi odsetkowemu analizowanych obligacji O_i; są to tzw. stopy zwrotu „z okresu na okres" (*period-by-period return*). Zakładamy przy tym, że wszystkie okresy odsetkowe obligacji pokrywają się ze sobą. Oznacza to że rozpatrujemy zbiór obligacji $\{O_i,\ i = 1,\dots,n\}$ będący pewnym podzbiorem zbioru wszystkich obligacji występujących na danym rynku kapitałowym. Mamy zatem

$$\{O_i,\ i = 1,\dots,n\} \subset \mathcal{A} \ ,$$

gdzie $\mathcal{A}$ - zbiór wszystkich obligacji na rynku; n - liczba wszystkich obligacji o tych samych okresach odsetkowych. Terminy do wykupu T_i obligacji O_i mogą być oczywiście różne; przy czym zakładamy, że rozpatrywane są wyłącznie obligacje długoterminowe, o parametrach okresowości $D_i^0 >> 1$. W praktyce oznacza to, że bierzemy pod uwagę obligacje o terminach do wykupu (*term to maturity*) $T_i \geq 5$ lat.

Portfel rynkowy obligacji

Wprowadzimy teraz do rozważań pewien umowny *portfel rynkowy* złożony obligacji o tych samych okresach odsetkowych, tj.

I_m - portfel utworzony ze zbioru wszystkich obligacji $\{O_i,\ i = 1,\dots,n\}$, oraz

$R_m \overset{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{n} X_i R_i^*$ - stopa zwrotu z portfela I_m za jeden okres odsetkowy, (6.26) gdzie $X_i \in (0,1)$ - udział wartościowy obligacji O_i w portfelu I_m; $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$.

Stopę zwrotu R_m z portfela rynkowego I_m obligacji O_i $(i = 1,\dots,n)$ definiujemy więc jako średnią ważoną jednookresowych stóp zwrotu R_i^* z inwestycji w poszczególne obligacje, przy czym przyjmiemy, że

$$X_i = \frac{l_i P_i}{\sum_{i=1}^{n} l_i P_i}, \qquad \forall\, i = 1,\dots,n, \tag{6.27}$$

gdzie l_i - liczba wyemitowanych obligacji O_i, P_i - cena „czysta" obligacji tj. cena na początku danego okresu odsetkowego.

Mając na uwadze powyższe oznaczenia i wprowadzając pojęcie *przestrzeni liniowej obligacji*, możemy formalnie zapisać portfel rynkowy I_m jako kombinację wypukłą

$$I_m = \bigcup_{i=1}^{n} X_i O_i . \tag{6.28}$$

Mamy ponadto

$$R_i^* \stackrel{\Delta}{=} \frac{C_i + P_1^i - P_0^i}{P_0^i}, \qquad i = 1,\dots,n, \tag{6.29}$$

gdzie C_i - odsetki od obligacji O_i,

P_0^i - cena rynkowa obligacji O_i na początku danego okresu odsetkowego,

P_1^i - cena rynkowa obligacji O_i na początku następnego okresu odsetkowego.

Z powyższego wynika, że stopa zwrotu R_m portfela I_m jest zmienną losową; oznaczymy więc

$\overline{R}_m = E(R_m)$ - wartość oczekiwana stopy zwrotu R_m,

$\sigma_m^2 = E(R_m - \overline{R}_m)^2$ - wariancja stopy zwrotu R_m.

Dla celów dalszych rozważań zakładamy, że parametry $\overline{R}_m$, σ_m^2 rozkładu rynkowej stopy zwrotu R_m są określane na podstawie danych z przeszłości. Oznaczymy: M - okres obserwacji, $R_{m\nu}$ - wartość rynkowej stopy zwrotu w chwili ν. A zatem,

$$\overline{R}_m = \frac{1}{M} \sum_{\nu=1}^{M} R_{m\nu}, \tag{6.30}$$

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{\nu=1}^{M} (R_{m\nu} - \overline{R}_m)^2 . \tag{6.31}$$

Ze wzorów (6.26) i (6.30) wynika, że w celu wyznaczenia estymatora wartości oczekiwanej $\overline{R}_m = E(R_m)$ musimy dokonać dwóch uśrednień; tzw. najpierw „uśrednienia po zbiorze", a później „uśrednienia po czasie".

Zmienna resztowa

W wyprowadzonym w punkcie 6.2 wzorze (6.21) na rzeczywistą stopę zwrotu R_i^* z obligacji O_i, wprowadzimy dodatkowo losowy składnik resztowy (*residual*) ε_i. Wprowadzenie tego składnika ma na celu uwzględnienie tych wszystkich sytuacji, w których wprowadzone przez nas wcześniej założenia mogą nie być spełnione.

Mamy więc

ε_i - losowa zmienna resztowa o parametrach

$$E\varepsilon_j = 0; \quad \mathrm{var}(\varepsilon_i) = \sigma_{\varepsilon i}^2; \qquad \forall\, i = 1,\dots,n, \text{ przy czym zakładamy, że}$$

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0, \qquad \forall\, i, j = 1,\dots,n; \quad i \neq j, \tag{6.32}$$

oraz $$\mathrm{cov}(\varepsilon_i, R_m) = E\,[\varepsilon_i (R_m - \overline{R}_m)] = 0, \qquad \forall\, i = 1,\dots,n. \tag{6.33}$$

Sformułowanie modelu

Przedstawimy teraz trzy równoważne sformułowania modelu jednoindeksowego dla rynku obligacji. Sformułowania te oznaczymy kolejno jako modele I, II i III.

Uwzględniając we wzorze (6.21) na rzeczywistą stopę zwrotu R_i^* - dodatkowo - składnik resztowy ε_i, otrzymamy

$$R_i^* = r - (D_i^0 - 1)\,\Delta r + \varepsilon_i; \qquad i=1,\dots,n. \tag{6.34}$$

A zatem, uwzględniając wprowadzone wcześniej oznaczenia (6.23)-(6.24), mamy

Model jednoindeksowy I

$$R_i^* = R_i^a - B_i \Delta r + \varepsilon_i \qquad \forall\, i=1,\dots,n, \tag{6.35}$$

gdzie

$$R_i^a = r \qquad \text{- spodziewana stopa zwrotu,} \tag{6.36}$$

$$B_i = (D_i^0 - 1) \qquad \text{- zmodyfikowany parametr okresowości.} \tag{6.37}$$

Wyjaśnimy teraz dokładniej jakie sytuacje uzasadniają wprowadzenie do modelu (6.35) zmiennej resztowej ε_i. Otóż przy wyprowadzeniu wzoru (6.21) przyjęliśmy następujące założenia upraszczające, które w ogólnym przypadku mogą nie być spełnione:

(i) Cena rynkowa P_1^i obligacji jest równa jej wartości wewnętrznej w chwili $\tau = 1$ nawet w przypadku, gdy rynek w chwili $\tau = 0$ jest niezrównoważony, tj. $P_0^i \neq P_r$.

(ii) Struktura terminowa stóp procentowych jest płaska, tj. $r_{0t} = r$, $\forall\, t = 1,\dots,T$, a ponadto, możliwe są tylko przesunięcia równoległe Δr tej struktury.

(iii) Zmiana wartości obligacji P_1^i spowodowana zmianą Δr stopy procentowej może być oszacowana za pomocą parametru okresowości D_i^1, co jest prawdziwe tylko dla małych zmian Δr.

(iv) Przyjęliśmy, że okresy odsetkowe obligacji O_i $(i = 1,\dots,N)$ o różnych terminach do wykupu T_i - ściśle pokrywają się ze sobą. Mając na uwadze, że obligacje O_i mogą pochodzić z różnych emisji oraz - że analizujemy różne serie tych obligacji - wymaga to specjalnego doboru zbioru obligacji. Jednak, nawet wówczas, poszczególne okresy odsetkowe mogą być względem siebie - w praktyce - nieco przesunięte. Zjawisko to nosi w teorii finansów nazwę asynchronizmu (*asynchronous effect*). Oczywiście może to być źródłem pewnych dodatkowych błędów modelu.

Efekt *ścisłego synchronizmu* okresów odsetkowych zachodzi tylko pomiędzy obligacjami z tej samej emisji lecz z różnych serii - emitowanych na przykład co miesiąc, co pół roku lub co rok. Pokrywanie się ze sobą okresów odsetkowych jest wówczas zagwarantowane bezpośrednio poprzez prospekt emisyjny danej obligacji. Umożliwia to między innymi subskrypcję obligacji nowej serii na podstawie dotychczas posiadanej obligacji tej samej emisji, której okres istnienia właśnie się kończy. Subskrypcja ta odbywa się na ogół po promocyjnych cenach, w stosunku do ceny tej obligacji sprzedawanej w ofercie publicznej na rynku pierwotnym. Tak więc cena subskrypcyjna obligacji jest na ogół na mocy odnośnych przepisów niższa od ceny emisyjnej, co niesie określone korzyści dla dotychczasowych posiadaczy obligacji tej samej emisji. Zjawisko to nosi potocznie nazwę tzw. „rolowania" obligacji.

W analizowanym modelu przyjęto, że oddziaływanie wszystkich czynników wynikających z niespełnienia założeń (i)-(iv), reprezentowanych przez zmienną losową ε_i, „przeciętnie ulegnie zniesieniu" - co uzasadnia przyjęcie założenia, że $E\varepsilon_i = 0$, $\forall\, 1,\ldots,n$.

Ponadto, kluczowym założeniem, jakie rozpatruje się w ramach modelu (6.35) jest to, że współczynniki korelacji pomiędzy zmiennymi ε_i, ε_j są dla $i \neq j$ równe zeru.

Powyższe oznacza bowiem postulat, że głównym i jedynym czynnikiem obserwowanej na rynkach kapitałowych korelacji pomiędzy stopami zwrotu z różnych obligacji jest zmiana stopy procentowej Δr. Tak więc ryzyko stopy procentowej, wyrażające się zmianą Δr - jest wspólne dla wszystkich analizowanych obligacji. Ryzyko to możemy traktować jako pewne **ryzyko systematyczne** (*systematic risk*), oddziaływujące jednocześnie na stopę zwrotu wszystkich obligacji. Należy przy tym podkreślić przeciwny kierunek tych oddziaływań; tj. wzrost stopy procentowej ($\Delta r > 0$) powoduje spadek R_i^* oraz spadek tej stopy ($\Delta r < 0$) powoduje wzrost R_i^*. Wynika to bezpośrednio ze znaku „minus" występującym w modelu (6.35).

Natomiast zmienność składnika resztowego ε_i - mierzona wariancją $\sigma_{\varepsilon i}^2$ - reprezentuje w analizowanym modelu **ryzyko specyficzne** (*residual risk*), charakterystyczne tylko dla danej obligacji O_i. Jak to później pokażemy, ryzyko to można wyraźnie zmniejszyć (a teoretycznie nawet zredukować do zera) poprzez odpowiednią dywersyfikację przyjętego portfela inwestycyjnego. Chodzi w tym przypadku o odpowiedni dobór udziałów wartościowych poszczególnych obligacji w portfelu, dokonany na podstawie znajomości wzajemnych korelacji pomiędzy stopami zwrotu z inwestycji w te walory. Z tego też powodu ryzyko specyficzne papieru wartościowego nosi często w teorii portfela nazwę ryzyka dywersyfikowalnego; w odróżnieniu od rynkowego ryzyka systematycznego, którego nie można pomniejszyć za pomocą dywersyfikacji. Jak to wykazaliśmy powyżej, ryzyko to - przy pewnych założeniach upraszczających - wynika wprost z ryzyka stopy procentowej.

Powyższe uwagi uzasadniają zastosowanie w odniesieniu do modelu (6.35), wprowadzonej wcześniej koncepcji stopy zwrotu R_m z portfela rynkowego.

A mianowicie, ze wzorów (6.26) i (6.35) mamy

$$R_m \overset{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{n} X_i R_i^* = \sum_{i=1}^{n} X_i R_i^a - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i B_i \right) \Delta r + \sum_{i=1}^{n} X_i \varepsilon_i . \tag{6.38}$$

We wzorze tym, mamy:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i R_i^a = \sum_{i=1}^{n} X_i r = r \sum_{i=1}^{n} X_i = r , \tag{6.39}$$

$$\text{bowiem } \sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \text{, z założenia.} \tag{6.40}$$

We wzorze (6.38) mamy również

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \varepsilon_i \approx 0 , \tag{6.41}$$

bo średnia ważona dużej liczby nieskorelowanych zmiennych losowych o zerowej wartości oczekiwanej jest zbieżna do zera, co można łatwo wykazać. Wystarczy w tym celu zauważyć, że wariancja wyrażenia (6.41) dla dowolnie dużych n - jest dowolnie mała; natomiast wartość oczekiwana tego wyrażenia jest oczywiście równa zeru.

Ponadto, we wzorze (6.38) oznaczymy

$$B_m = \sum_{i=1}^{n} X_i B_i \text{ - parametr zmodyfikowanej okresowości portfela rynkowego.} \tag{6.42}$$

Biorąc pod uwagę (6.37) i (6.42), mamy

$$B_m = \sum_{i=1}^{n} X_i B_i = \sum_{i=1}^{n} X_i \left(D_i^0 - 1 \right) = \sum_{i=1}^{n} X_i D_i^0 - \sum_{i=1}^{n} X_i = D_m^0 - 1 , \tag{6.43}$$

$$\text{gdzie } D_m^0 = \sum_{i=1}^{n} X_i D_i^0 \text{ - okresowość portfela rynkowego.} \tag{6.44}$$

Jak już bowiem wspomnieliśmy w punkcie 4.3, można wykazać że okresowość dowolnego portfela obligacji jest równa sumie ważonej parametrów okresowości D_i^0 poszczególnych obligacji wchodzących w skład tego portfela.

Model portfela rynkowego

Podstawiając wzory (6.39), (6.41) i (6.42) do zależności (6.38) otrzymamy

$$R_m = r - B_m \Delta r . \tag{6.45}$$

Wyprowadzony model portfela rynkowego jest analogiem modelu (6.35) rozpatrywanego dla pojedynczej akcji O_i. Zauważmy, że w przypadku modelu (6.45), *spodziewana stopa zwrotu z portfela* (wyznaczona dla $\Delta r = 0$) jest równa rynkowej stopie procentowej, tj.

$$R_m^a = \sum_{i=1}^{n} X_i R_i^a = r, \tag{6.46}$$

Ponadto, w modelu rynkowym nie występuje składnik *ryzyka specyficznego* reprezentowanego, w przypadku pojedynczej obligacji - przez zmienna resztową ε_i. W modelu tym występuje więc wyłącznie czynnik *ryzyka systematycznego*, reprezentowanego przez zmienność Δr rynkowej stopy procentowej.

Z powyższego wynika, że o ile tylko dysponujemy odpowiednio dużym portfelem obligacji o tych samych okresach odsetkowych i potrafimy przewidzieć zmianę Δr rynkowej stopy procentowej, to oszacowanie stopy zwrotu na najbliższy okres z tak utworzonego portfela - jest już bardzo proste. Wystarczy w tym celu obliczyć parametr B_m zmodyfikowanej okresowości tego portfela na podstawie wzoru (6.43), a następnie zastosować model (6.45). Natomiast, gdy nie przewidujemy zmiany stopy procentowej (tj. zakładamy, że $\Delta r = 0$) - to oszacowanie stopy zwrotu z portfela rynkowego jest natychmiastowe: stopa zwrotu R_m jest bowiem w tym przypadku równa stopie procentowej r, jaka obowiązuje w danej chwili na rynku. Stopa ta powinna być oczywiście odniesiona do horyzontu czasowego równego okresowi odsetkowemu posiadanych obligacji. W praktyce rynków finansowych, obowiązujące w danej chwili stopy procentowe podawane są bowiem w skali roku (365 dni).

Wydaje się, że jest to niezmiernie interesujący wynik; przede wszystkim ze względu na prostotę modelu (6.45) portfela rynkowego. Ponadto, z równania modelu (6.45) otrzymamy

$$\Delta r = \frac{1}{B_m}(r - R_m), \tag{6.47}$$

a stąd
$$E(\Delta r) = \overline{\Delta r} = \frac{1}{B_m}(r - \overline{R}_m) \tag{6.48}$$

oraz
$$\operatorname{var}(\Delta r) = \frac{\sigma_m^2}{B_m^2}. \tag{6.49}$$

Tak więc znając (na podstawie danych empirycznych) wartości parametrów $\overline{R}_m$, σ_m^2 stopy zwrotu R_m indeksu rynkowego, ze wzorów (6.48), (6.49) możemy oszacować bezpośrednio wartość oczekiwaną i wariancję losowej zmiany Δr stopy procentowej. Oczywiście wartości te można by również dla Δr estymować na podstawie danych z przeszłości; podobnie, jak to czyniliśmy wyznaczając $\overline{R}_m$, σ_m^2. Wystarczyłoby w tym celu wziąć pod uwagę wartości $(\Delta r)_\nu$, $\nu = 1, \ldots, M$; M - okres obserwacji. Jednak mógłby tu pojawić się pewien problem. Otóż założyliśmy, że krzywa dochodowości jest płaska i możliwe są tylko równoległe przesunięcia tej krzywej, tj.

$$r_{0t} = r = const(t), \qquad \Delta r_{0t} = \Delta r = const(t). \tag{6.50}$$

Założenie powyższe dotyczy chwili bieżącej $\tau = 0$ oraz przyszłości. Natomiast nie oznacza to, że założenie to było spełnione w przeszłości - szczególnie dla długich okresów obserwacji M. Gdy tak nie jest - a należy się tego w praktyce spodziewać - to nie bardzo wiadomo, które z wartości nierównoległych przesunięć krzywej dochodowości $(\Delta r_{0t})_\nu$ wziąć pod uwagę w celu estymacji parametrów zmiennej losowej Δr. Sama zmienna Δr nie jest bowiem w tym przypadku dobrze zdefiniowana.

Jak widzimy więc, zastosowanie wzorów (6.48), (6.49) w celu oszacowania parametrów rozkładu zmiennej Δr, pozwala w pewien sposób na ominięcie powyższego problemu. A znajomość tych parametrów może być niezwykle przydatna dla celów dalszych analiz.

Możemy również odwrócić tok przedstawionego powyżej rozumowania. A mianowicie, załóżmy, że w przeszłości struktura terminowa stóp procentowych była rzeczywiście w przybliżeniu płaska (tj. $r_{0t} = r,\ t = 1,\ldots,T$) i obserwowaliśmy wyłącznie losowe przesunięcia równoległe Δr tej struktury (w górę lub w dół). Prawdziwość tego założenia można oczywiście z łatwością sprawdzić na podstawie danych empirycznych. Wówczas, na podstawie danych z przeszłości wartości Δr_ν $(\nu = 1,\ldots,M)$ możemy wyznaczyć estymatory wartości oczekiwanej i wariancji zmiennej losowej Δr, tj.

$$E(\Delta r) = \overline{\Delta r} = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{M} \Delta r_\nu \qquad \text{oraz} \qquad \operatorname{var}(\Delta r) = \sigma^2_{\Delta r} = \frac{1}{M-1}\sum_{\nu=1}^{M} (\Delta r_\nu - \overline{\Delta r})^2 .$$

Z modelu portfela rynkowego (6.45) otrzymamy wówczas oszacowanie wartości oczekiwanej i wariancji stopy zwrotu R_m, tj.

$$\overline{R}_m = r - B_m \overline{\Delta r} \qquad \text{oraz} \qquad \sigma^2_m = B^2_m\, \sigma^2_{\Delta r} .$$

Przedstawiony powyżej sposób określania parametrów $\overline{R}_m$ i σ^2_m rynkowej stopy zwrotu R_m, na podstawie znajomości analogicznych parametrów dla zmiennej losowej Δr, może mieć duże znaczenie w praktyce. A mianowicie, gdy na rynku istnieją wyłącznie obligacje O_i o niezbyt odległych terminach do wykupu T_i - powiedzmy obligacje 3-letnie, 4-letnie ,5-letnie - możemy mieć zbyt mało danych historycznych, umożliwiających odpowiednio wiarygodną estymację parametrów $\overline{R}_m$, σ^2_m dokonaną bezpośrednio - na podstawie danych z przeszłości.

Wykorzystując wzór (6.47), model jednoindeksowy (6.35) sformułowany dla pojedynczej obligacji O_i, można wyrazić następująco:

Model jednoindeksowy II

$$R^*_i = R^a_i + \frac{B_i}{B_m}(R_m - r) + \varepsilon_i \qquad \forall i = 1,\ldots,n, \tag{6.51}$$

Jest to ostateczna postać rozpatrywanego w tym punkcie modelu stopy zwrotu z obligacji. Z modelu tego można bezpośrednio wyznaczyć podstawowe parametry, mające zasadnicze znaczenie dla aktywnego zarządzania portfelowego. Są to:

- **Spodziewana stopa zwrotu** (*anticipated return*)

$$R^a_i = r\,, \qquad i = 1,\ldots,n, \tag{6.52}$$

- **Oczekiwana stopa zwrotu** (*expected return*)

$$\overline{R}_i = E(R^*_i) = R^a_i + \frac{B_i}{B_m}(\overline{R}_m - r), \qquad i = 1,\ldots,n, \tag{6.53}$$

— **Wariancja stopy zwrotu**

$$\operatorname{var}(R_i^*) = \sigma_i^2 = \frac{B_i^2}{B_m^2}\sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2, \qquad i=1,\dots,n, \tag{6.54}$$

— **Kowariancja**

$$\operatorname{cov}(R_i, R_j) = \sigma_{ij} = \frac{B_i B_j}{B_m^2}\sigma_m^2, \qquad i, j=1,\dots,n; i \neq j, \tag{6.55}$$

Ponadto, z modelu (6.51) mamy:

— **Nieoczekiwana stopa zwrotu** (*excess return*)

$$\Delta R_i \triangleq R_i^* - R_i^a = \frac{B_i}{B_m}(R_m - r) + \varepsilon_i, \qquad i=1,\dots,n, \tag{6.56}$$

— **Wartość oczekiwana nieoczekiwanej stopy zwrotu** (*expected excess return*)

$$\Delta R_i^e \triangleq E(R_i^* - R_i^a) = \frac{B_i}{B_m}(\overline{R}_m - r). \tag{6.57}$$

Uwaga: Przedstawione powyżej parametry (6.53)-(6.57) można łatwo wyznaczyć bezpośrednio z równania (6.51) modelu. Tym niemniej, w przypadku obliczania kowariancji $\operatorname{cov}(R_i, R_j)$ należy dodatkowo wziąć pod uwagę przyjęte wcześniej założenie (6.33), tj.

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_i, R_m) \overset{\Delta}{=} E[\varepsilon_i (R_m - \overline{R}_m)] = 0, \qquad \forall\, i = 1,\dots,n. \tag{6.58}$$

Założenie to jest pewnym arbitralnym założeniem modelowym, którego prawdziwość należałoby sprawdzić na podstawie danych empirycznych. Przyjęty warunek nieskorelowania stopy zwrotu R_m portfela rynkowego i zmiennej resztowej ε_i jest niezwykle istotny; determinuje on bowiem rozłączność analizowanego w ramach powyższego modelu ryzyka systematycznego i ryzyka specyficznego danej obligacji.

Natomiast w przypadku, gdy przedstawiony powyżej warunek nieskorelowania zmiennych losowych R_m i ε_i nie jest spełniony - wzór (6.55) na kowariancję $\operatorname{cov}(R_i, R_j)$ nie jest oczywiście prawdziwy. Powyższa uwaga jest o tyle istotna, że wzór (6.55) ma zasadnicze znaczenie z punktu widzenia rozpatrywanego w dalszej części pracy zagadnienia Markowitza zarządzania portfelem obligacji.

Z wyprowadzonych powyżej równoważnych postaci modelu jednoindeksowego obligacji O_i, danych równomianami (6.35) i (6.51), możemy również dokonać następujących interpretacji:

* ***Spodziewana stopa zwrotu:***

Z modelu (6.35) mamy

$$E(R_i^* \mid \Delta r = 0) = R_i^a = r \qquad i=1,\dots,n. \tag{6.59}$$

Spodziewana stopa zwrotu R_i^a jest więc *warunkową wartością oczekiwaną* rzeczywistej stopy zwrotu R_i^*, wyznaczoną przy warunku, że $\Delta r = 0$.

* ***Oczekiwana stopa zwrotu:***

Z modelu (6.51) mamy

$$E(R_i^*) = \overline{R}_i = R_i^a + \frac{B_i}{B_m}(\overline{R}_m - r) \quad , \qquad i=1,\dots,n. \tag{6.60}$$

Tak więc oczekiwana stopa zwrotu $\overline{R}_i$ jest *bezwarunkową wartością oczekiwaną* rzeczywistej stopy zwrotu R_i^*.

Ponadto, z równania (6.60) wynika, że *spodziewana stopa zwrotu* R_i^a jest częścią składową *oczekiwanej stopy zwrotu* $\overline{R}_i$, przy czym - zależnie od znaku wyrażenia $(\overline{R}_m - r)$ - wartość $\overline{R}_i$ może być zarówno większa, jak i mniejsza od wartości R_i^a. Różnica między tymi wartościami jest właśnie równa *wartości oczekiwanej nieoczekiwanej stopy zwrotu* ΔR_e^i danej wzorem (6.57).

Wyróżnienie wprowadzonych powyżej kategorii: spodziewanej stopy zwrotu (*anticipated return*), oczekiwanej stopy zwrotu (*expected return*) oraz wartości oczekiwanej nieoczekiwanej stopy zwrotu (*expected excess return*) jest istotne dla właściwego zrozumienia większości zaawansowanych prac z dziedziny matematyki finansowej, odnoszących się do rynku obligacji; por. *Dahl* (1993), *Zenios* (1993). Jedną z zalet wyprowadzonego powyżej modelu jednoindeksowego (6.51) jest właśnie możliwość dokonania przejrzystej interpretacji tych pojęć.

Przedstawimy teraz trzecią postać modelu jednoindeksowego obligacji. A mianowicie, odejmując stronami wzory (6.51) i (6.53) otrzymamy

$$R_i^* - \overline{R}_i = \frac{B_i}{B_m}(R_m - \overline{R}_m) + \varepsilon_i \qquad i=1,\dots,n, \tag{6.61}$$

Ze wzoru (6.61) mamy zatem

Model jednoindeksowy III

$$R_i^* = \overline{R}_i + \frac{B_i}{B_m}(R_m - \overline{R}_m) + \varepsilon_i \qquad i=1,\dots,n, \tag{6.62}$$

gdzie $\overline{R}_i$, $\overline{R}_m$ - wartości oczekiwane rzeczywistych stóp zwrotu z pojedynczej obligacji O_i i z portfela rynkowego I_m, dane wzorami (6.53) i (6.30).

Natomiast parametry B_i, B_m dane są wzorami (6.37) i (6.43), tj.

$$B_i = D_i^0 - 1, \qquad i=1,\dots,n, \qquad \text{oraz} \tag{6.63}$$

$$B_m = D_m^0 - 1. \tag{6.64}$$

Warto zauważyć, że wyprowadzony powyżej model (6.62) ma podobną postać do modelu przedstawionego w pracy *Eltona, Grubera* (1995), s.553, przy czym w pracy tej w miejsce zmodyfikowanych parametrów okresowości B_i i B_m wprowadzono parametry *bieżącej okresowości* D_i i D_m - co nie ma żadnego uzasadnienia. Zresztą w pracy tej popełniono również szereg innych błędów, które zostały w niniejszym opracowaniu poprawione. Zagadnienie to zostało obszerniej przedstawione w pracy autora *Jakubowski* (2003).

Na zakończenie rozważań dotyczących jednoindeksowego modelu obligacji, podamy sposób oszacowania wariancji $\sigma^2_{\varepsilon i}$ zmiennej resztowej ε_i - bez czego rozpatrywany model byłby niekompletny. Otóż wariancję tę można wyznaczyć na podstawie danych z przeszłości, wykorzystując model jednoindeksowy II dany równaniem (6.51). Mamy zatem

Identyfikacja wariancji $\sigma^2_{\varepsilon i}$

Nieobciążony estymator wariancji zmiennej losowej ε_i, szacowany na podstawie danych empirycznych, wyraża się wzorem

$$\sigma^2_{\varepsilon i} = \frac{1}{M-1}\sum_{\nu=1}^{M}\varepsilon^2_{i\nu}, \tag{6.65}$$

gdzie $\varepsilon_{i\nu}$ - realizacja zmiennej losowej ε_i w chwili $\nu = 1,\dots,M$; M - horyzont obserwacji. Wartości $(\varepsilon_{i\nu},\ \nu = 1,\dots,M)$ można wyznaczyć z modelu (6.51) w następujący sposób. Ze wzorów (6.51) i (6.52) mamy

$$R^*_i = r + \frac{B_i}{B_m}(R_m - r) + \varepsilon_i \qquad i=1,\dots,n; \tag{6.66}$$

czyli

$$\varepsilon_{i\nu} = R^*_{i\nu} - r - \left(\frac{B_i}{B_m}\right)_\nu (R_{m\nu} - r_\nu) \qquad \nu=1,\dots,M; \quad i=1,\dots,n, \tag{6.67}$$

gdzie $R^*_{i\nu}$, r_ν, $R_{m\nu}$, $B_{i\nu}$, $B_{m\nu}$ - obserwowane w przeszłości wartości zmiennych i parametrów modelu (6.66)

Ze wzorów (6.65) i (6.67) otrzymamy ostatecznie

$$\sigma^2_{\varepsilon i} = \frac{1}{M-1}\sum_{\nu=1}^{M}\left\{R^*_{i\nu} - r - \left(\frac{B_i}{B_m}\right)_\nu (R_{m\nu} - r_\nu)\right\}^2, \qquad i=1,\dots,n. \tag{6.68}$$

Oczywiście, wykorzystując w analogiczny sposób dane historyczne, należałoby jeszcze zweryfikować przyjętą na początku tego punktu hipotezę, że zachodzi

$$E\varepsilon_i = \overline{\varepsilon_i} = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{M}\varepsilon_{i\nu} = 0, \qquad \forall i=1,\dots,n.. \tag{6.69}$$

Można to uczynić podstawiając wartości $\varepsilon_{i\nu}$ dane wzorem (6.67) do zależności (6.69). Oczywiście w praktyce otrzymamy $\overline{\varepsilon_i} \neq 0$; należałoby więc w tym przypadku zastosować odpowiedni test statystyczny w celu wykazania nieistotności wyznaczonego estymatora wartości oczekiwanej $\overline{\varepsilon_i} \neq 0$.

Podobne uwagi odnoszą się również do empirycznego zweryfikowania przyjętej wcześniej hipotezy (6.33), że $\operatorname{cov}(\varepsilon_i, R_m) = E[\varepsilon_i(R_m - \overline{R_m})] = 0$, $\forall\, i = 1,\dots,n$.

6.4 Porównanie modeli jednoindeksowych dla rynku akcji i rynku obligacji

Rynek akcji. W przypadku rynku akcji, formułuje się następujący model jednoindeksowy (*Elton, Gruber*, 1995):

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i \qquad i=1,\dots,n, \tag{6.70}$$

gdzie R_i - stopa zwrotu z akcji, R_m - stopa zwrotu z indeksu rynkowego I_m,

ε_i - zmienna resztowa; $E\varepsilon_i = 0$, $\mathrm{var}(\varepsilon_i) = \sigma^2_{\varepsilon i}$, $i = 1,\dots,n$,

$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$; $i, j = 1,\dots,n$; $i \neq j$,

α_i, β_i - parametry modelu wyznaczane na podstawie danych historycznych za pomocą analizy regresyjnej.

Ponadto, z modelu (6.70) mamy

$$\overline{R}_i = \alpha_i + \beta_i \overline{R}_m \qquad i=1,\dots,n, \tag{6.71}$$

gdzie $\overline{R}_i$, $\overline{R}_m$ - wartości oczekiwane zmiennych losowych R_i, R_m.

Odejmując wzory (6.70) i (6.71) stronami, otrzymamy

$$R_i - \overline{R}_i = \beta_i (R_m - \overline{R}_m) + \varepsilon_i,$$

czyli

$$R_i = \overline{R}_i + \beta_i (R_m - \overline{R}_m) + \varepsilon_i. \tag{6.72}$$

Model (6.72) jest więc pewną zmodyfikowaną postacią modelu jednoindeksowego *Sharpe'a* (6.70), rozpatrywanego powszechnie dla rynku akcji.

Rynek obligacji. Model jednoindeksowy II obligacji, dany wzorem (6.51) można zapisać następująco

$$R_i^* = \left(R_i^a - \frac{B_i}{B_m} r \right) + \frac{B_i}{B_m} R_m + \varepsilon_i \qquad i=1,\dots,n. \tag{6.73}$$

Zauważmy teraz, że przyjmując dla rynku obligacji oznaczenia

$$\alpha_i^* = R_i^a - \frac{B_i}{B_m} r \qquad \beta_i^* = \frac{B_i}{B_m}, \tag{6.74}$$

otrzymamy

$$R_i^* = \alpha_i^* + \beta_i^* R_m + \varepsilon_i \qquad i = 1,\dots,n. \tag{6.75}$$

Model (6.75) dla obligacji ma więc podobną postać jak model (6.70) sformułowany dla rynku akcji.

Natomiast bezpośrednio z modelu III dla obligacji, danego wzorem (6.62), uwzględniając oznaczenie (6.74) na wartość β_i^*, otrzymujemy

$$R_i^* = \overline{R}_i + \beta_i^* (R_m - \overline{R}_m) + \varepsilon_i \qquad i = 1,\dots,n, \tag{6.76}$$

co jest odpowiednikiem modelu jednoindeksowego (6.74) określonego dla rynku akcji.

Jak już wspomnieliśmy we wprowadzeniu do tego punktu, podstawową różnicą pomiędzy analizowanymi dla rynku akcji i obligacji modelami jednoindeksowymi jest to, że w przypadku modelu akcji (6.70) - parametry α_i, β_i są wyznaczane na podstawie danych historycznych, przy zastosowaniu wzorów regresji liniowej. Natomiast w przypadku modelu obligacji (6.75), parametry α_i^*, β_i^* są zadane bezpośrednio wzorami (6.74) - tak więc można je wyznaczyć na podstawie danych bieżących. Nie zachodzi więc w tym miejscu klasyczny dla analizy regresyjnej przypadek błędu estymacji, co wynika bezpośrednio z faktu, że model jednoindeksowy obligacji (6.75) nie jest po prostu modelem regresyjnym.

Oczywiście w modelu (6.75) wyprowadzonym dla rynku obligacji uwzględniliśmy również pewien błąd , reprezentowany przez zmienną resztową ε_i. Jednak charakter tego błędu jest inny ; a mianowicie, konieczność wprowadzenia do modelu zmiennej resztowej ε_i, wynika z wcześniejszego przyjęcia szeregu założeń upraszczających - w trakcie formułowania tego modelu. Założenia te obszernie omówiliśmy w punkcie 6.3 niniejszej pracy.

7. Zagadnienie Markowitza zarządzania portfelem obligacji

Sformułujemy teraz zagadnienie portfelowe Markowitza dla rynku obligacji. Zagadnienie to przedstawimy w podobny sposób, jak się to czyni dla rynku akcji ; por. (*Elton, Gruber*, 1995).

Dla rynku obligacji, wykorzystując model jednoindeksowy II dany wzorem (6.51) oraz przyjmując dla uproszczenia zapisu $R_i = R_i^*$ - rzeczywista stopa zwrotu z obligacji O_i, mamy

$$R_i = R_i^a + \frac{B_i}{B_m}(R_m - r) + \varepsilon_i \qquad i = 1,\dots,n, \tag{7.1}$$

$$\overline{R}_i = R_i^a + \frac{B_i}{B_m}(\overline{R}_m - r)\,; \quad \text{gdzie } R_i^a = r, \tag{7.2}$$

$$\mathrm{var}(R_i) = \sigma_i^2 = \frac{B_i^2}{B_m^2}\sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2 \qquad i = 1,\dots,n, \tag{7.3}$$

$$\mathrm{cov}(R_i, R_j) = \sigma_{ij} = \frac{B_i B_j}{B_m^2}\sigma_m^2; \quad i, j = 1,\dots,n \quad i \neq j. \tag{7.4}$$

Przyjmując oznaczenie

$$\beta_i = \frac{B_i}{B_m} \qquad i = 1,\dots,n, \quad \text{(parametr „beta" obligacji);} \tag{7.5}$$

gdzie $B_i = D_i^o - 1, \qquad B_i = D_m^o - 1,$

wzory (7.1)-(7.4) mają następującą postać

$$R_i = R_i^a + \beta_i(R_m - r) + \varepsilon_i; \qquad i = 1,\dots,n; \tag{7.6}$$

$$\overline{R}_i = R_i^a + \beta_i(\overline{R}_m - r), \tag{7.7}$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2\sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2, \tag{7.8}$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i\beta_j\sigma_m^2. \tag{7.9}$$

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$P = \bigcup_{i=1}^{N} w_i O_i \qquad \text{- portfel obligacji,}$$

w_i - udział wartościowy obligacji O_i w portfelu P, $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$,

R_p - stopa zwrotu z portfela obligacji P,

$\overline{R}_p$, V_p - wartość oczekiwana i wariancja stopy zwrotu R_p.

W przedstawionym ujęciu portfel P jest kombinacją wypukłą obligacji O_i $(i = 1,\dots,N)$, traktowanych jako elementy pewnej przestrzeni liniowej obligacji. Ogólnie rzecz biorąc, dla portfela P można łatwo wykazać następujące relacje (*Elton*, *Gruber*, 1995)

$$R_p = \sum_{i=1}^{N} w_i R_i \,, \tag{7.10}$$

$$\overline{R}_p \triangleq E(R_p) = \sum_{i=1}^{N} w_i \overline{R}_i \,, \tag{7.11}$$

$$V_p \triangleq \mathrm{var}(R_p) = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} \,. \tag{7.12}$$

Podstawiając do wzorów (7.11), (7.12) wartości $\overline{R}_i$, σ_i^2, σ_{ij} określone dla rynku obligacji wzorami (7.7)-(7.9), otrzymamy

$$\overline{R}_p = \sum_{i=1}^{N} w_i \overline{R}_i = \sum_{i=1}^{N} w_i [R_i^a + \beta_i (\overline{R}_m - r)] \,, \tag{7.13}$$

$$V_p = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 (\beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2) + \sum_{i} \sum_{j \neq i} w_i w_j \beta_i \beta_j \sigma_m^2 \,, \tag{7.14}$$

gdzie $\beta_i = B_i / B_m$, $i = 1,\dots,n$.

7.1. Optymalizacja portfela obligacji

Należy tak dobrać udziały wartościowe w_i obligacji O_i $(i = 1,\dots,N)$ wchodzących w skład analizowanego portfela P, aby przy zadanej w góry wartości oczekiwanej $\overline{R}_p^*$ stopy zwrotu z portfela P - wariancja V_p tej stopy zwrotu była minimalna. Mamy zatem

$$\hat{V}_p = \min_{\{w_i\}} V_p(w_1,\dots,w_i,\dots,w_N) \,, \tag{7.15}$$

przy ograniczeniach

$$\overline{R}_p = \sum_{i=1}^{N} w_i \overline{R}_i = \overline{R}_p^* \tag{7.16}$$

oraz $$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \quad w_i \in [0,1] \quad \forall i = 1,\dots,N \,; \tag{7.17}$$

gdzie wartości $\overline{R}_p(\cdot)$, $V_p(\cdot)$ są dane wzorami (7.13), (7.14).

Sformułowane powyżej zagadnienie optymalizacji (7.15)-(7.17) jest klasycznym *zadaniem programowania kwadratowego* i może być rozwiązane za pomocą jednej ze znanych metod. Również wszystkie pozostałe pojęcia, charakterystyczne dla analizy portfelowej rynku akcji - przenoszą się bez zmian na przypadek analizowanego powyżej rynku obligacji. Dotyczy to w szczególności analizy tzw. brzegu efektywnego (*effective frontier*) rozwiązań dopuszczalnych i wielu innych zagadnień.

Jednym z ważniejszych problemów, jakie należy w rozpatrywanym przypadku wziąć pod uwagę - jest zagadnienie dywersyfikacji portfela. Zagadnienie to omówimy teraz nieco szerzej oraz podamy prosty przykład obliczeniowy.

7.2. Zagadnienie dywersyfikacji portfela obligacji

Podobnie jak w przypadku rynku akcji, chodzi w tym przypadku o dywersyfikację tzw. *ryzyka specyficznego* portfela P. Rozważania nasze rozpoczniemy od analizy ryzyka pojedynczej obligacji O_i.

Ryzyko systematyczne i ryzyko specyficzne obligacji O_i

Przyjmiemy, że miarą całkowitego ryzyka inwestycyjnego dotyczącego pojedynczej obligacji O_i jest zmienność rzeczywistej stopy zwrotu R_i z tej obligacji, odniesiona do wartości oczekiwanej $\overline{R}_i$. Zmienność ta wyrażona jest wariancją σ_i^2 stopy zwrotu R_i.

Ze wzoru (7.3) mamy

$$\operatorname{var}(R_i) \triangleq E(R_i - \overline{R}_i)^2 = \sigma_i^2 = \frac{B_i^2}{B_m^2}\sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2 \quad i = 1,\dots,n, \tag{7.18}$$

gdzie B_i, B_m - zmodyfikowane okresowości obligacji O_i i portfela rynkowego I_m, σ_m^2 - wariancja stopy zwrotu R_m portfela rynkowego, $\sigma_{\varepsilon i}^2$ - wariancja zmiennej resztowej modelu jednoindeksowego obligacji (7.1).

Widzimy więc, że wariancję σ_i^2 stopy zwrotu R_i pojedynczej obligacji, tj. jej *ryzyko całkowite*, można wyrazić w postaci dwóch niezależnych składników. Składniki te interpretujemy następująco:

$\frac{B_i^2}{B_m^2}\sigma_m^2$ - ryzyko systematyczne obligacji O_i,

$\sigma_{\varepsilon i}^2$ - ryzyko specyficzne obligacji O_i.

Ryzyko systematyczne danej obligacji O_i jest więc częścią *całkowitego ryzyka rynkowego*, reprezentowanego przez wariancję σ_m^2 indeksu I_m obligacji. Jak to za chwilę wykażemy, ryzyko to jest również częścią *ryzyka systematycznego portfela P*. Ryzyka systematycznego portfela nie daje się pomniejszyć, tj. zdywersyfikować. Natomiast ryzyko specyficzne poszczególnych obligacji reprezentowane przez wariancję $\sigma_{\varepsilon i}^2$ składa się na *ryzyko specyficzne portfela P* i ryzyko to podlega w portfelu dywersyfikacji. W tym właśnie tkwi podstawowy sens analizy portfelowej rynku obligacji. Wnioski z tej analizy są zresztą analogiczne jak w przypadku rynku akcji; por. *Francis* (1991), *Elton, Gruber* (1995).

Ryzyko systematyczne i ryzyko specyficzne portfela P

W przedstawionych dalej rozważaniach zakładamy, że analizowany portfel P jest tworzony ze zbioru obligacji O_i $(i=1,...,N)$ będącego pewnym podzbiorem zbioru, w skład którego wchodzą wszystkie obligacje O_i $(i=1,...,n)$, z rozpatrywanej klasy obligacji o stałym oprocentowaniu i o pokrywających się okresach odsetkowych. Mamy zatem

$$P = \bigcup_{i=1}^{N} w_i O_i \qquad \text{(kombinacja wypukła)},$$

przy czym $\{O_i,\ i=1,...,N\} \subseteq \{O_i,\ i=1,...,n\} \subset A$, (7.19)

gdzie N - liczba obligacji w portfelu P, n - liczba wszystkich obligacji o tych samych okresach odsetkowych; przy czym $N \le n$, A - zbiór wszystkich obligacji występujących na danym rynku kapitałowym.

Wartość oczekiwana stopy zwrotu z portfela P:

Przyjmiemy następujące oznaczenia

$$\beta_i = \frac{B_i}{B_m} \quad \text{- parametr „beta" obligacji } O_i;\ i=1,...,n, \tag{7.20}$$

$$R_p^a \overset{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{N} w_i R_i^a \quad \text{- spodziewana stopa zwrotu z portfela } P, \tag{7.21}$$

gdzie $R_i^a = r\ (i=1,...,N)$; a stąd, $R_p^a = r$, (7.22)

$$\beta_p \overset{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{N} w_i \beta_i = \sum_{i=1}^{N} w_i \left(\frac{B_i}{B_m}\right) \quad \text{- parametr „beta" portfela } P. \tag{7.23}$$

Ze wzoru (7.13) otrzymamy

$$\overline{R}_p = \sum_{i=1}^{N} w_i \overline{R}_i = \sum_{i=1}^{N} w_i R_i^a + \left(\sum_{i=1}^{N} w_i \beta_i\right)(\overline{R}_m - r), \tag{7.24}$$

a więc biorąc pod uwagę (7.21) - (7.23), mamy

$$\overline{R}_p = R_p^a + \beta_p(\overline{R}_m - r) = r + \beta_p(\overline{R}_m - r) \tag{7.25}$$

— wartość oczekiwana stopy zwrotu z portfela P.

Wariancja stopy zwrotu z portfela P:

Dokonamy teraz następującego przekształcenia wzoru (7.14) na wariancję V_p stopy zwrotu R_p z portfela P; por. *Elton, Gruber* (1995).

$$V_p = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i=1}^{N} w_i w_j \beta_i \beta_j \sigma_m^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j \beta_i \beta_j \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2 = \tag{7.26}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} w_i \beta_i \right) \left(\sum_{j=1}^{N} w_j \beta_j \right) \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2 .$$

A zatem z (7.23), (7.26) otrzymamy

$$V_p \stackrel{\Delta}{=} E(R_p - \overline{R}_p)^2 = \beta_p^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2 . \tag{7.27}$$

Powyższe równanie ma zasadnicze znaczenie z punktu widzenia teorii zarządzania portfelowego aktywami. Jak można łatwo zauważyć, wariancję V_p stopy zwrotu z portfela, będącą miarą *całkowitego ryzyka portfela* P, można zdekomponować na dwa niezależne składniki; są to

$$\beta_p^2 \sigma_m^2 \text{ - ryzyko systematyczne portfela } P , \tag{7.28}$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2 \text{ - ryzyko specyficzne portfela } P . \tag{7.29}$$

Mamy więc sytuację podobną do rynku pojedynczej obligacji O_i; a mianowicie ryzyko całkowite jest sumą dwóch rodzajów ryzyka, tj. *ryzyka systematycznego* będącego częścią ogólnego ryzyka rynkowego σ_m^2 oraz *ryzyka specyficznego*, wynikającego z oddziaływania zmiennych resztowych ε_i $(i = 1,\ldots,N)$.

Istnieje jednak w tym przypadku jedna podstawowa różnica. Otóż można wykazać, że ryzyko specyficzne portfela P wyrażone wzorem (7.29) można - w odróżnieniu od przypadku pojedynczej obligacji O_i - uczynić dowolnie małym. Oznacza to, że w wyniku odpowiednio dużej dywersyfikacji (a więc zróżnicowania) portfela P, wpływ oddziaływania zmiennych resztowych ε_i rozpatrywanych dla poszczególnych obligacji O_i $(i = 1,\ldots,N)$ można zredukować - teoretycznie - do zera. Zagadnienie to wyjaśnimy na następującym przykładzie.

PRZYKŁAD 7.1

Załóżmy dla uproszczenia rozważań, że wagi w_i są dla portfela P jednakowe, tj.

$$w_i = \frac{1}{N} \qquad \forall\, i = 1,\ldots,N.$$

Wówczas, ze wzoru (7.27) otrzymamy

$$V_p = \beta_p^2 \sigma_m^2 + \frac{1}{N}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sigma_{\varepsilon i}^2 \right). \tag{7.30}$$

Oznaczymy

$$\overline{\sigma}^2_{\varepsilon i} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma^2_{\varepsilon i} \tag{7.31}$$

- średnie ryzyko specyficzne obligacji O_i $(i = 1,\dots,N)$ wchodzących w skład portfela P .

Z (7.30), (7.31) mamy zatem

$$V_p = \beta_p^2\sigma_m^2 + \frac{1}{N}\overline{\sigma^2_{\varepsilon i}}. \tag{7.32}$$

Wynika stąd, że ze wzrostem liczby N analizowanych obligacji O_i, ryzyko specyficzne portfela P (tj. średnie ryzyko specyficzne obligacji $\overline{\sigma^2_{\varepsilon i}}$ razy $\frac{1}{N}$) - gwałtownie maleje.

Dla zilustrowania tego faktu założymy, że wariancje składników resztowych ε_i są jednakowe, tj.

$$\sigma^2_{\varepsilon i} = \sigma^2 \qquad \forall i = 1,\dots,N. \tag{7.33}$$

Z (7.31) i (7.33) otrzymamy wówczas

$$\overline{\sigma^2_{\varepsilon i}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\sigma^2) = \frac{1}{N}(N\sigma^2) = \sigma^2 . \tag{7.34}$$

A zatem z (7.32) i (7.34) mamy

$$V_p = \beta_p^2\sigma_m^2 + \frac{1}{N}\sigma^2 , \tag{7.35}$$

oraz

$$\lim_{N\to+\infty} V_p = \lim_{N\to+\infty}\left(\beta_p^2\sigma_m^2 + \frac{1}{N}\sigma^2\right) = \beta_p^2\sigma_m^2 . \tag{7.36}$$

Tak więc ryzyko specyficzne portfela P (wynoszące w analizowanym przykładzie $\frac{1}{N}\sigma^2$) - może być dla dostatecznie dużej liczby N rozpatrywanych obligacji - praktycznie zredukowane do zera. To co pozostaje, to rynkowe ryzyko systematyczne $\beta_p^2\sigma_m^2$, wynikające bezpośrednio (w przypadku rynku obligacji) z ryzyka stopy procentowej. Aby się o tym przekonać, wystarczy wziąć pod uwagę wyprowadzone wcześniej równanie (6.45) modelu *portfela rynkowego*.

Mamy bowiem $$R_m = r - B_m(\Delta r) , \tag{7.37}$$

gdzie B_m - zmodyfikowana okresowość portfela rynkowego, Δr - losowa zmiana stopy procentowej r.

A zatem, zmienność stopy zwrotu R_m z portfela rynkowego obligacji (mierzona wariancją σ_m^2) wynika bezpośrednio z nieoczekiwanych zmian Δr stopy procentowej. Jak już to wcześniej analizowaliśmy, z równania (7.37) wynika bowiem bezpośrednio, że

$$\sigma_m^2 = B_m^2\,\sigma_{\Delta r}^2 , \tag{7.38}$$

gdzie $\sigma^2_{\Delta r} = \mathrm{var}(\Delta r)$ - wariancja zmiennej losowej Δr.

W teorii zarządzania portfelowego dowodzi się (por. *Jakubowski* (2003a)), że już dla portfela P zawierającego $N = 20$ walorów o tym samym parametrze $\sigma_{\varepsilon i}^2 = \sigma^2$, ryzyko specyficzne portfela zostaje zredukowane do pięciu procent ryzyka specyficznego pojedynczego waloru O_i. Dlatego też w praktyce rynków finansowych uważa się, że zbyt duża dywersyfikacja portfela nie ma sensu. Powyżej $N = 20$ aktywów, dalsza dywersyfikacja portfela nic już bowiem nowego nie wnosi z punktu widzenia redukcji ryzyka specyficznego. Uwagę należy raczej skupić na tym, jakie walory z ograniczonego ilościowo zestawu należy dobierać z punktu widzenia założonego kryterium inwestycyjnego. Chodzi tu przede wszystkim o dobór aktywów o możliwie małych współczynnikach korelacji, co wynika bezpośrednio z zagadnienia (7.15)-(7.17) optymalizacji portfela.

Ze wzoru (7.12) na wariancję V_p stopy zwrotu z portfela P wynika również, że byłoby dobrze aby współczynniki korelacji jak największej liczby walorów dobieranych do portfela były przeciwnych znaków. W przypadku portfela obligacji nie jest to jednak w praktyce możliwe. Ze wzoru (7.4) na kowariancję pomiędzy stopami zwrotu R_i oraz R_j obligacji mamy bowiem

$$\operatorname{cov}(R_i, R_j) \triangleq \sigma_{ij} = \frac{B_i B_j}{B_m^2} \sigma_m^2, \qquad i, j = 1,\ldots,n, \quad i \neq j, \tag{7.39}$$

gdzie

$$B_i = D_i^0 - 1 \quad (i = 1,\ldots,n) \quad \text{oraz} \quad B_m = D_m^0 - 1 .$$

Biorąc zatem pod uwagę, że $D_i^0 > 1, \quad \forall i = 1,\ldots,n$ (z założenia), wartości zmodyfikowanych okresowości B_i i B_j są dodatnie, a tym samym

$$\operatorname{cov}(R_i, R_j) > 0 \quad \forall i, j = 1,\ldots,n \quad i \neq j . \tag{7.40}$$

Przedstawiona powyżej własność rynku obligacji O_i $(i = 1,\ldots,n)$ mówiąca o tym, że rzeczywiste stopy zwrotu z tych obligacji są prawie zawsze dodatnio skorelowane, wyraźnie odróżnia ten rynek od rynku akcji, na którym ujemne korelacje jednak są możliwe.

Można stąd wysnuć wniosek, że możliwości jakie oferuje rynkowi obligacji teoria portfela są znacznie mniejsze niż to ma miejsce w przypadku akcji. Dla obligacji, nie można bowiem dobierać do portfela P walorów o przeciwnych korelacjach - co wyraźnie zmniejszyłoby wariancję V_p stopy zwrotu z portfela - bowiem walory takie praktycznie nie występują. Oczywiście powyższy wniosek jest prawdziwy jedynie pod warunkiem spełnienia szeregu założeń, jakie poczyniliśmy formułując model jednoindeksowy obligacji.

7.3. Zagadnienie stabilności parametrów modelu

W przypadku zastosowania w praktyce sformułowanego w tym punkcie modelu zarządzania portfelem obligacji może się pojawić pewien problem. Otóż w klasycznym zagadnieniu portfelowym Markowitza, zakłada się stabilność w czasie użytych w analizowanym modelu parametrów. W szczególności dotyczy to współczynników kowariancji $\text{cov}(R_i, R_j)$ pomiędzy stopami zwrotu z aktywów wchodzących w skład portfela. W przypadku rynku akcji, obserwowana często niestabilność w czasie tych kowariancji, powoduje zasadnicze trudności w zastosowaniu modelu Markowitza w praktyce rynków kapitałowych.

Zauważmy teraz, że podobne problemy mogą pojawić się w trakcie stosowania rozpatrywanego modelu zarządzania portfelowego dla rynku obligacji. Jak to bowiem wynika ze wzoru (7.39) na kowariancję pomiędzy stopami zwrotu R_i i R_j obligacji, parametr ten zależy od iloczynu zmodyfikowanych okresowości B_i, B_j obligacji O_i i O_j, podzielonego przez zmodyfikowaną okresowość B_m portfela rynkowego. Parametry B_i, B_j i B_m - podobnie jak parametry okresowości D_i^0, D_j^0 i D_m^0 - maleją z upływem czasu bieżącego. Dlatego też, należałoby przeprowadzić zarówno teoretyczne jak i empiryczne badania - jaka jest zależność od czasu kowariancji $\text{cov}(R_i, R_j)$, $i, j = 1,...,n$; $i \neq j$, analizowanych obligacji. W przypadku, gdyby kowariancje te były wolno zmienne w czasie - w obszarze analizowanego horyzontu inwestycyjnego - zastosowanie zaproponowanego podejścia w praktyce mogłoby prowadzić do bardzo obiecujących wyników.

Zagadnienie analizy stabilności parametrów zaproponowanego modelu zarządzania portfelem obligacji można formalnie zapisać następująco.

Oznaczymy

$D_i^0 = D_i^0(\tau)$ - parametr okresowości obligacji O_i jako funkcja (malejąca) czasu bieżącego $\tau = 1,2,3,...$.

Biorąc pod uwagę wzory (7.5) oraz (6.43), (6.44) parametr „beta" obligacji O_i możemy wyrazić następująco

$$\beta_i \triangleq \frac{B_i}{B_m} = \frac{D_i^0(\tau) - 1}{\sum_{i=1}^{n} X_i D_i^0(\tau) - 1} = \frac{D_i^0(\tau) - 1}{D_m^0(\tau) - 1}, \tag{7.41}$$

gdzie $D_m^0(\tau)$ - okresowość portfela rynkowego.

Ponadto, z (7.39) i (7.41) otrzymamy

$$\text{cov}(R_i, R_j) = \sigma_{ij}(\tau) = \beta_i(\tau)\beta_j(\tau)\sigma_m^2; \quad i, j = 1,...,n; \quad i \neq j. \tag{7.42}$$

Tak więc analiza stabilności ze względu na czas bieżący τ kowariancji $\sigma_{ij}(\tau)$ pomiędzy stopami zwrotu R_i i R_j rozpatrywanych obligacji, sprowadza się do analizy przebiegu w czasie parametrów $\beta_i(\tau)$ tych obligacji. Zgodnie ze wzorem (7.41), parametr $\beta_i(\tau)$ jest ilorazem dwóch funkcji malejących z upływem czasu τ. Rodzi to więc nadzieję, że owe zmiany w czasie tych funkcji będą się wzajemnie kompensować; przynajmniej w stopniu uzasadniającym stosowalność w praktyce zaproponowanego modelu zarządzania portfelem obligacji. Bardziej szczegółowy charakter przebiegu funkcji $\beta_i(\tau)$ można by określić wprowadzając wzory na okresowość $D_i^0(\tau)$ obligacji, dla przypadku ciągłej kapitalizacji odsetek; por. *Jakubowski* (2003b).

Również wydaje się (lecz należałoby to sprawdzić), że założenie co do stabilności w czasie parametrów analizowanego modelu jest spełnione w przypadku, gdy rozpatrujemy zbiór długoterminowych obligacji O_i $(i = 1,\ldots,n)$. Wówczas, dynamika zmian z upływem czasu bieżącego τ parametrów „beta" obligacji, a tym samym i współczynników kowariancji σ_{ij} - powinna być mała. Natomiast w przypadku obligacji krótkoterminowych (tj. o bliskich terminach do wykupu T_i) mogą się pojawić pewne problemy, związane z zastosowaniem w praktyce zaproponowanego podejścia do zarządzania portfelem obligacji.

Na zakończenie tych rozważań należy podkreślić, że charakter zmienności w czasie rozpatrywanych powyżej parametrów $\beta_i(\tau)$ obligacji O_i $(i=1,\ldots,n)$ -determinuje nie tylko analizę stabilności współczynników kowariancji (7.42) pomiędzy stopami zwrotu z obligacji wchodzących w skład danego portfela. Zmienność bądź stałość w czasie parametrów $\beta_i(\tau)$ oddziaływuje bowiem również na charakter zachowania się w czasie wartości oczekiwanej stóp zwrotu $\overline{R_i}$ z analizowanych obligacji oraz wariacji σ_i^2 tych stóp zwrotu. Wynika to bezpośrednio ze wzorów (7.7) i (7.8) określających te wartości; tj.

$$\overline{R_i} = R_i^a + \beta_i\,(\overline{R}_m - r), \tag{7.43}$$

gdzie

$$R_i^a = r, \qquad \forall\, i = 1,\ldots,n; \tag{7.44}$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2\,\sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2. \tag{7.45}$$

Ponadto, zauważmy że ze wzorów (7.43) i (7.44) określających wartość oczekiwaną $\overline{R_i}$ stóp zwrotu, mamy

$$\overline{R_i} = r + \beta_i\left(\overline{R_m} - r\right) = (1-\beta_i)\,r + \beta_i\,\overline{R_m}. \tag{7.46}$$

Tak więc w trakcie analizy stabilności w czasie wartości oczekiwanych $\overline{R_i}$ pojawia się kolejny problem. Otóż jak to wynika z zależności (7.46), wartości te są liniowymi funkcjami (ze współczynnikiem nachylenia równym $1-\beta_i$) rynkowej stopy procentowej r. O stopie tej założyliśmy, że jest ona w chwili bieżącej zdana deterministycznie, jako realizacja (dla $\tau = 0$) pewnego procesu stochastycznego $r(\tau,\omega)$ opisującego ewolucje tej stopy w czasie; gdzie przez ω wyznaczono losowe zdarzenie elementarne. Oczywiście dynamika w czasie tej realizacji $r(\tau)$, procesu $r(\tau,\omega)$ wpływać będzie w określony sposób na dynamikę zmiany wartości oczekiwanej $\overline{R_i}(\tau)$, z upływem czasu bieżącego τ.

W celu ominięcia wskazanego powyżej problemu niestabilności oczekiwanej stopy zwrotu $\overline{R_i}$, poczynić możemy dwa założenia :

(i.) Można przyjąć, że w analizowanym modelu rozpatrujemy tylko obligacje O_i $(i=1,\ldots,n)$ o parametrach β_i bliskich jedności; powiedzmy przyjmujących wartości z przedziału $[0.8,\ 1.2]$. Wówczas, ze wzoru (7.46) bezpośrednio wynika, że wpływ wartości stopy procentowej r (a więc i zmienności w czasie tej wartości) na wartość oczekiwaną stopy zwrotu $\overline{R_i}$ będzie niewielki, w porównaniu ze stałym w czasie oddziaływaniem na tę wielkość - wartości oczekiwanej $\overline{R_m}$ stopy zwrotu z portfela rynkowego I_m.

(ii.) Możemy również założyć, że we wszystkich wyprowadzonych powyżej zależnościach determinujących analizowaną postać modelu zarządzania portfelowego na rynku obligacji – w miejsce bieżącej wartości rynkowej stopy procentowej r, wprowadzamy pewną długoterminową średnią wartości $\bar{r}$ tej stopy.

Oczywiście przyjęcie jednego z dwóch proponowanych powyżej założeń upraszczających będzie dosyć silnym odejściem od „poziomego rygoryzmu" reprezentowanego w prowadzonych dotąd rozważaniach. Niemniej wydaje się, że wobec przedstawionego powyżej problemu potencjalnej niestabilności w czasie oczekiwanej stopy zwrotu $\overline{R_i}$ z analizowanych obligacji – już nic bardziej rozsądnego w omawianym zakresie nie można uczynić.

8. Zarządzanie portfelowe na rynku obligacji - przypadek krzywej dochodowości o dowolnym kształcie

Dokonamy teraz pewnego istotnego uogólnienia zagadnień rozpatrywanych w punktach 4-7. A mianowicie, pominiemy założenie, że dla danego rynku finansowego obowiązuje płaska krzywa dochodowości, przyjmując, że krzywa ta może mieć dowolny kształt. W przedstawionych na początku niniejszego punktu rozważaniach przedstawimy szereg definicji oraz założeń rozpatrywanych w ramach różnych teorii struktury terminowej stóp procentowych. W szczególności, dotyczyć to będzie pojęć stóp procentowych *spot*, stóp procentowych *forward*, oczekiwanych stóp procentowych *spot*, a także różnych wzorów na wycenę wartości bieżącej obligacji oraz wzorów na oczekiwaną wartość przyszłą obligacji. Większość z tych prezentowanych skrótowo zagadnień podamy bez obszerniejszego komentarza; problematyka ta jest szerzej omówiona m.in. w jednej z prac autora (*Jakubowski*, 1996); por. również *Elton, Gruber* (1995), *Francis* (1991), *Haugen* (1993).

Natomiast w dalszej części tego punktu przedstawimy rozwinięcie prowadzonych poprzednio rozważań dotyczących pojęcia tzw. oczekiwanej okresowości obligacji, jednoindeksowego modelu obligacji oraz zagadnienia portfelowego – sformułowanego dla przypadku krzywej dochodowości o dowolnym kształcie.

Oznaczymy

$$\{r_{0t}, t = 1,...,T\} = \{r_{01},...,r_{0t},..,r_{0T}\}$$ - struktura terminowa stóp procentowych,

gdzie t - termin zapadalności zobowiązań, r_{0t} - stopa procentowa *spot* (w skali roku).

Wartość obligacji w chwili bieżącej $\tau = 0$:

Wartość tę można - w przypadku krzywej dochodowości o dowolnym kształcie - przedstawić na kilka sposobów. Podstawowy wzór jest następujący

$$P_0 = \sum_{t=1}^{T-1} \frac{C}{(1+r_{0t})^t} + \frac{C+N}{(1+r_{0t})^T}. \tag{8.1}$$

Oznaczając $C_t = C$ dla $t = 1,\dots,(T-1)$ oraz $C_t = C + N$ dla $t = T$, z (8.1) otrzymamy

$$P_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r_{0t})^t} \ . \qquad (8.2)$$

8.1 Stopy procentowe *forward* oraz oczekiwane stopy procentowe *spot*

Oznaczymy

${}_0 f_{t_1 t_2}$ - stopa procentowa *forward* dla okresu $[t_1, t_2]$ obowiązująca (czy też rozpatrywana) w chwili $\tau = 0$.

Ponadto, dla okresów jednorocznych

$$f_t \stackrel{\Delta}{=} {}_0 f_{(t-1)t} \qquad t = 2,3,\dots,T\,; \qquad (8.3)$$

oraz dla $t = 1$, $f_1 = r_{01}$ (z definicji),

gdzie f_t - roczna stopa procentowa *forward* dla roku t rozpatrywana w chwili $\tau = 0$,

r_{01} - stopa procentowa *spot* dla pierwszego roku.

Relacja pomiędzy stopami procentowymi *forward* f_t i stopami *spot* r_{0t} jest następująca:

$$(1+r_{0t})^t \stackrel{\Delta}{=} \left[1+r_{0(t-1)}\right]^{t-1}(1+f_t)\,; \qquad t = 2,\dots,T \qquad (8.4)$$

oraz, dla $t = 1$, $1 + r_{01} \stackrel{\Delta}{=} 1 + f_1$, czyli $f_1 = r_{01}$.

Stąd $$f_t = \frac{(1+r_{0t})^t}{[1+r_{0(t-1)}]^{t-1}} - 1\,; \qquad t = 2,\dots,T\,. \qquad (8.5)$$

Stosując rekurencyjnie wzór (8.4) otrzymamy również

$$(1+r_{0t})^t = (1+f_1)(1+f_2)\times\dots\times(1+f_t)\,. \qquad (8.6)$$

Wzory (8.4)-(8.6) są zawsze prawdziwe, niezależnie od teorii *struktury terminowej stóp procentowych*, jaka obowiązuje dla danego rynku finansowego. Stopy procentowe *forward* f_t można więc w powyższym sensie traktować jako pewien fakt matematyczny, określony przez ciąg równań (8.5).

Ujmując to jeszcze inaczej można stwierdzić, że znając stopy procentowe *spot* r_{0t} określające daną strukturę terminową stóp procentowych, możemy jednoznacznie wyznaczyć stopy procentowe *forward* f_t. Istnieje również zależność odwrotna: znając stopy procentowe *forward* f_t możemy określić jednoznacznie stopy procentowe *spot* r_{0t}, wykorzystując równanie (8.6). Stopy procentowe *forward* f_t mogą być na przykład określone przez wyniki notowań na rynkach terminowych obligacji czysto-dyskontowych; tj. przez ceny bieżące kontraktów terminowych *futures* na obligacje czysto-dyskontowe o różnych terminach zapadalności.

Z powyższego wynika, że można mówić o strukturze terminowej stóp procentowych *spot*, jak i o strukturze terminowej stóp procentowych *forward*, przy czym struktury te wzajemnie z siebie wynikają.

Wartość bieżąca obligacji wyrażona za pomocą stóp procentowych *forward*

Z (5.2) i (5.6) mamy

$$P_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r_{0t})^t} = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+f_1)(1+f_2)\times\ldots\times(1+f_t)}, \qquad (8.7)$$

przy czym $f_1 = r_{01}$.

Podobnie jak zależność (8.6), wzór (8.7) jest zawsze prawdziwy, niezależnie od teorii struktury terminowej stóp procentowych obowiązującej dla danego rynku.

Relacja pomiędzy rocznymi stopami *forward* a rocznymi oczekiwanymi stopami procentowymi *spot*

Jednym z podstawowych problemów rozpatrywanych w teorii stóp procentowych jest zagadnienie na ile stopy procentowe *forward* są dobrymi prognozami przyszłych rocznych stóp procentowych, jakie będą obowiązywać na danym rynku. Te przyszłe stopy procentowe nazywa się właśnie *oczekiwanymi rocznymi stopami spot.* Odpowiedź na to ważne pytanie nie jest niestety jednoznaczna i zależy od obowiązującej dla danego rynku teorii *struktury terminowej stóp procentowych.* Można to sprawdzić wyłącznie empirycznie weryfikując założenia odnośnych teorii. Jak już wspomniano zagadnienia te zostały obszernie opisane m.in. w pracy autora (*Jakubowski*, 1996).

Ogólnie, przyjmuje się następującą relację

$$f_t = r_t + \alpha_t;\quad t=2,\ldots,T \quad \text{oraz} \quad f_1 = r_1 = r_{01} \quad \text{dla} \quad t=1; \qquad (8.8)$$

gdzie r_t - oczekiwane roczne stopy procentowe *spot*,

α_t - tzw. parametr płynności (*liquidity premium*).

W przypadku teorii czystych oczekiwań (*pure expectations theory*) zakłada się $\alpha_t = 0$ $(t = 1,\ldots,T)$; dla teorii preferencji płynności (*liquidity preference theory*) - $\alpha_t > 0$ $(t = 2,\ldots,T)$; natomiast w myśl teorii preferowanego środowiska (*preferred habitat theory*) wartości α_t - mogą być zarówno dodatnie jak i ujemne; por. *Elton*, *Gruber* (1995).

8.2. Teoria czystych oczekiwań

Jak wspomniano, w myśl tej teorii zachodzi $\alpha_t = 0$ $(t = 1,\ldots,T)$, a zatem ze wzoru (8.8) otrzymamy

$$f_t = r_t, \qquad \forall t = 1,\ldots,T. \qquad (8.9)$$

Zależność (8.9) jest chyba najkrótszym z możliwych sformułowaniem teorii czystych oczekiwań; a mianowicie: *roczne stopy procentowe forward są równe oczekiwanym rocznym stopom procentowym spot.* Jest to jednocześnie „bardzo odważne" stwierdzenie. Wynika bowiem z niego bezpośrednio, że mając zidentyfikowaną (dla $\tau = 0$) strukturę terminową bieżących stóp procentowych *spot* r_{0t}, możemy jednoznacznie określić oczekiwane roczne stopy procentowe *spot* r_t, dla przyszłych okresów. Stopy te są jednocześnie prognozowanymi stopami procentowymi, określonymi przy założeniu, że *oczekiwania* rynku co do przyszłości się nie zmienią; *Fama* (1976).

Z (8.5) i (8.9) mamy zatem

$$r_t = \frac{(1+r_{0t})^t}{[1+r_{0(t-1)}]^{t-1}} - 1, \qquad t=2,\dots,T \quad \text{oraz} \quad r_1 = r_{01} \text{ dla } t=1. \tag{8.10}$$

Z (8.6) i (8.9) wynika również, że

$$(1+r_{0t})^t = (1+r_1)(1+r_2)\times\ldots\times(1+r_t). \tag{8.11}$$

Równanie to jest podstawowym równaniem teorii czystych oczekiwań. Jest ono często komentowane, interpretowane, a niekiedy – negowane; por. *McColloch* (1995), *Jakubowski* (1996).

Zależność (8.11) interpretujemy następująco. W teorii powszechnych oczekiwań zakłada się, że kształt krzywej dochodowości określonej przez stopy r_{0t} $(t = 1,\dots,T)$ jest zdeterminowany wyłącznie przez przewidywania inwestorów co do wartości oczekiwanych (tj. przyszłych) rocznych stóp procentowych *spot* r_t. Przyjmuje się również, że rynek jest zdominowany przez inwestorów, których głównym celem jest maksymalizacja zysku. Inwestorzy ci charakteryzują się neutralnym stosunkiem do ryzyka (*risk neutral*) bądź też mają oni doskonale *zimmunizowane* ze względu na ryzyko portfele inwestycyjne. Ten ostatni przypadek zachodzi na ogół w przypadku inwestorów instytucjonalnych takich jak banki, różnego typu fundusze inwestycyjne, fundusze emerytalne itp. Dla inwestorów o neutralnym stosunku do ryzyka, długość horyzontu inwestycyjnego jest obojętna - to znaczy nie preferują oni w żaden sposób inwestycji krótkoterminowych nad inwestycje długoterminowe (bądź odwrotnie), o ile tylko całkowita rentowność tych inwestycji jest taka sama.

Ujmując to jeszcze inaczej, w myśl założeń teorii czystych oczekiwań, rentowność kolejno dokonywanych inwestycji w roczne obligacje czysto-dyskontowe według oczekiwanych stóp procentowych r_t jest taka sama jak rentowność inwestycji w jedną t - letnią obligację czysto-dyskontową, której dochodowość wyraża się bieżącą stopą zwrotu *spot* r_{0t}.

Wyrażone jest to właśnie przez równanie (8.11). Zwolennicy tej teorii uważają, że możliwe są chwilowe zaburzenia owej równoważności inwestycji (np. na skutek procesów spekulacyjnych), jednak w dłuższym okresie - zaburzenia te są likwidowane w wyniku dostosowawczych oddziaływań rynkowych.

Wartość bieżąca obligacji wyrażona za pomocą oczekiwanych rocznych stóp procentowych ***spot***

W przypadku obowiązywania *teorii czystych oczekiwań*, ze wzorów (8.2) i (8.11) mamy

$$P_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r_{0t})^t} = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r_1)(1+r_2)\times\ldots\times(1+r_t)}. \tag{8.12}$$

8.3. Teoria preferencji płynności:

W przypadku spełnienia założeń tej teorii, zachodzi

$$f_t = r_t + \alpha_t; \qquad \forall t = 2,3,\ldots,T \tag{8.13}$$

oraz

$$f_1 = r_1 = r_{01}; \qquad \text{dla } t=1, \tag{8.14}$$

przy czym parametry premii płynności α_t spełniają warunek

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_t > 0, \qquad t = 2,3,\ldots,T. \tag{8.15}$$

Zakłada się również, że: $\alpha_2 \le \alpha_3 \le \ldots \le \alpha_t$. (8.16)

Ponadto przyjmuje się, że parametry płynności α_t $(t = 2,3,\ldots,T)$ są niezależne od upływu czasu bieżącego $\tau = 1,2,3,\ldots$; przynajmniej w długim horyzoncie czasowym. Zachodzi zatem

$$\alpha_t(\tau) = const(\tau) \qquad \tau=1,2,3,\ldots; \tag{8.17}$$

gdzie przez $const(\cdot)$ oznaczono symbolicznie stałość względem określonego argumentu.

Ze wzorów (8.13), (8.14) oraz (8.6) otrzymamy

$$(1+r_{0t})^t = (1+r_{01})(1+r_2+\alpha_2)\times\ldots\times(1+r_t+\alpha_t). \tag{8.18}$$

Wzór ten ma następującą interpretację:

W odróżnieniu od teorii czystych oczekiwań, w teorii preferencji płynności zakłada się, że *rynek jest zdominowany przez inwestorów krótkoterminowych*, którzy ogólnie rzecz biorąc traktują wszelkiego rodzaju inwestycje w instrumenty długoterminowe, jako inwestycje obarczone większym ryzykiem. Inwestorzy ci, charakteryzujący się określoną „awersją do ryzyka" (*risk aversion*), uważają, że przy zadanych oczekiwanych rocznych stopach procentowych *spot* r_t $(t = 1,\ldots,T)$, rentowność do wykupu r_{0t} czysto-dyskontowej obligacji wieloletniej powinna być wyższa niż by to wynikało z równania (8.11). Równanie to nie jest według nich spełnione i ogólnie rzecz biorąc zachodzi

$$(1+r_{0t})^t > (1+r_1)(1+r_2)\times.\times(1+r_t), \qquad t=2,\ldots,T. \tag{8.19}$$

Oznacza to, że inwestorzy mając do wyboru inwestycję w t-kolejnych latach w serię t obligacji jednorocznych (z reinwestycją wpływów) lub zakup jednej obligacji wieloletniej o terminie wykupu t - będą żądali dla obligacji t-letniej wyższej rentowności r_{0t} niż wynosi procent składany z inwestycji rocznych.

Reasumując, można więc stwierdzić, że w przypadku, gdy na rynku dominują inwestorzy krótkoterminowi o dużej awersji o ryzyka, popyt na wieloletnie obligacje czysto-dyskontowe będzie znacząco mniejszy niż zachodziłoby to w przypadku spełnienia założeń *teorii czystych oczekiwań*. Mniejszy popyt oznacza niższą cenę; z kolei niższa cena, która zawsze jest odwrotnie proporcjonalna do rentowności - oznacza wyższą rentowność r_{0t} obligacji wieloletniej. Obowiązuje więc nierówność (8.19). Aby nierówność tę sprowadzić do równości, należy więc w nawiasach występujących po prawej stronie zależności (8.19) wprowadzić odpowiednio parametry $\alpha_t > 0$ $(t = 2,\ldots,T)$. Otrzymamy wówczas równanie

(8.18). Mówimy w tym przypadku, że inwestorzy żądają określonej „premii" za ryzyko poniesione przy zakupie obligacji wieloletniej. Premia ta nosi właśnie nazwę **premii płynności** (*liquidity premium*) α_t.

Natomiast wprowadzona nieco wyżej nierówność (8.16) oznacza, że im dłuższy jest rozpatrywany horyzont inwestycyjny, tym wyższe (a przynajmniej - nie niższe) powinny być parametry premii płynności α_t; $(t = 2,...,T)$. Na przykład, w przypadku czysto-dyskontowej obligacji trzyletniej, całkowita *premia płynności* powinna być wyższa niż w przypadku obligacji dwuletniej, itd. Wynika to stąd, że im dłuższy jest okres do wykupu t analizowanej obligacji, w tym większym stopniu cena tej obligacji (a tym samym i jej rentowność) jest narażona na ryzyko stopy procentowej. Co więcej w przypadku obligacji wielokuponowej, oprócz wspomnianego *ryzyka zmiany ceny* - dochodzi tu jeszcze tzw. *ryzyko reinwestowania*, związane z reinwestycją odsetek; *Francis* (1991), *Fabozzi* (1995).

Równania (8.13) - (8.18) stanowią matematyczne sformułowanie *teorii preferencji płynności*. Z równań tych wynika, że addytywne oddziaływanie parametru α_t na oczekiwane roczne stopy r_t daje w rezultacie określony kształt rzeczywiście obserwowanej krzywej dochodowości, co widać bezpośrednio ze wzoru (8.18). W tym też sensie *teoria preferencji płynności* jest pewnym uogólnieniem *teorii powszechnych oczekiwań*.

Z przedstawionego powyżej opisu wynika również jasno dlaczego w ogólnym przypadku - roczne stopy procentowe *forward* f_t, które zawsze możemy wyliczyć, o ile znamy strukturę terminową stóp procentowych *spot* $\{r_{0t}; t=1,\dots,T\}$, tj. z (8.5)

$$f_t = \frac{(1+r_{0t})^t}{[1+r_{0(t-1)}]^{t-1}} - 1 \quad \text{dla} \quad t=2,\dots,T; \quad f_1 = r_{01}, \tag{8.20}$$

nie są tożsame z oczekiwanymi rocznymi stopami procentowymi *spot* r_t.

W myśl teorii preferencji płynności roczne stopy procentowe *forward* f_t nie odzwierciedlają bowiem dokładnie oczekiwań dotyczących przyszłego poziomu stóp procentowych r_t; por. również *Sławiński* (1996). Konieczność uwzględnienia parametrów premii płynności α_t $(t = 2,...,T)$ w celu określenia oczekiwanych (a więc przyszłych) rocznych stóp procentowych r_t na podstawie znajomości bieżącej postaci struktury terminowej TS, w znaczny sposób komplikuje to zagadnienie. Sprawa identyfikacji - dla danego rynku finansowego - parametrów premii płynności α_t nie jest bowiem prosta; *Fama* (1976, 1984), *Dobson* et al. (1976).

Wartość bieżąca obligacji wyrażona za pomocą oczekiwanych rocznych stóp procentowych *spot*:

Zakładając, że na danym rynku finansowym obowiązuje teoria preferencji płynności, ze wzorów (8.2) i (8.18), mamy

$$P_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r_{0t})} = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r_1)(1+r_2+\alpha_2)\times\ldots\times(1+r_t+\alpha_t)}. \tag{8.21}$$

8.4 Oczekiwana wartość przyszła obligacji

Wyznaczymy teraz przyszłą wartość wewnętrzną P_1 obligacji dla chwili $\tau = 1$, określoną przy założeniu, że oczekiwane roczne stopy procentowe *spot* r_t $(t = 2,...,T)$ nie zmienią się..

Wprowadzimy następujące oznaczenie

${}_1r_{1t}$ - oczekiwana (w chwili $\tau = 0$ dla chwili $\tau = 1$) stopa procentowa *spot* dla okresu $[1\, t]$, $t = 2,...,T$.

Przy powyższym oznaczeniu, stosując podstawowy wzór wyceny obligacji (8.2) dla chwili $\tau = 1$, a więc dla skróconego horyzontu czasowego wynoszącego $(T-1)$, otrzymamy:

$$P_1 = P(\tau=1) = \sum_{t=2}^{T} \frac{C_t}{(1+{}_1r_{1t})^{t-1}} . \tag{8.22}$$

Wzór (8.22) jest prawdziwy dla dowolnej teorii struktury terminowej stóp procentowych. Zastosowanie tego wzoru w praktyce wymaga jednak ściślejszej specyfikacji – co rozumiemy pod pojęciem "oczekiwana stopa procentowa *spot* ${}_1r_{1t}$ dla okresu $[1\, t]$." A to już zależy od założonej (czy też obowiązującej) dla danego rynku teorii struktury terminowej.

Teoria czystych oczekiwań

Zakładając, że dla analizowanego rynku finansowego spełnione są założenia *teorii czystych oczekiwań,* mamy (*Jakubowski*, 1998)

$$(1+{}_1r_{1t})^{t-1} = (1+r_2)(1+r_3)\times\ldots\times(1+r_t), \tag{8.23}$$

gdzie r_t - oczekiwana (w chwili $\tau=0$) roczna stopa procentowa *spot.*

Biorąc z kolei pod uwagę, że zgodnie z tą teorią zachodzi $r_t = f_t$; $t = 2,\ldots,T$ (por. wzór 8.9), z (8.23) otrzymamy

$$(1+{}_1r_{1t})^{t-1} = (1+f_2)(1+f_3)\times\ldots\times(1+f_t). \tag{8.24}$$

z zależności (8.22) – (8.24) mamy zatem

$$P_1 = P(\tau=1) = \sum_{t=2}^{T} \frac{C_t}{(1+r_2)(1+r_3)\times\ldots\times(1+r_t)} = \sum_{t=2}^{T} \frac{C_t}{(1+f_2)(1+f_3)\times\ldots\times(1+f_t)}, \tag{8.25}$$

gdzie f_t - roczna stopa procentowa *forward* dla okresu $[t-1, t]$; $t = 2,\ldots,T$.

Bezpośrednio z definicji bieżących (tj. wyznaczonych dla danego rynku w chwili $\tau=0$) stóp procentowych *forward*, mamy również

$$(1+f_{1t})^{t-1} = (1+f_2)(1+f_3)\times\ldots\times(1+f_t), \tag{8.26}$$

gdzie $f_{1t} \triangleq {}_0f_{1t}$ - stopa procentowa *forward* dla okresu $[1, t]$ $t = 2,\ldots,T$.

A zatem, z (8.25) i (8.26) otrzymamy

$$P_1 = P(\tau=1) = \sum_{t=2}^{T} \frac{C_t}{(1+f_{1t})^{t-1}}. \tag{8.27}$$

Tak więc obowiązujący ogólnie wzór (8.22) ma wycenę oczekiwanej wartości przyszłej P_1 obligacji, ma w przypadku prawdziwości teorii czystych oczekiwań – szczególne znaczenie. Bowiem w przypadku spełnienia założeń tej teorii, znając bieżącą strukturę terminową stóp procentowych *spot* r_{ot}, potrafimy efektywnie wyznaczyć oczekiwane stopy procentowe *spot* ${}_1r_{1t}$, a tym samym i spodziewaną dla chwili $\tau=1$ wartość P_1 obligacji.

W praktyce rynków finansowych często „milcząco zakłada się" prawdziwość teorii czystych oczekiwań, po czym wzór (8.27) – wyznaczający wartość przyszłą P_1 obligacji na podstawie znajomości bieżących stóp procentowych *forward* f_{1t} - stosuje się niejako automatycznie, bez wnikania w przedstawione powyżej szczegóły. Jak to za chwilę wykażemy, jest to postępowanie w ogólnym przypadku nieprawidłowe. Bowiem inwestorzy, zakładający domyślnie spełnienie założeń teorii czystych oczekiwań, często nie zdają sobie sprawy ze stopnia idealizacji, jaki przy tej okazji jest przyjmowany.

Teoria preferencji płynności

Zakładając prawdziwość dla danego rynku teorii preferencji płynności, mamy

$$(1+{}_1r_{ot})^{t-1}=(1+r_2)(1+r_3+\alpha_2)\times\ldots\times(1+r_t+\alpha_{t-1}). \tag{8.28}$$

Widoczne w powyższym wzorze „przesunięcie o jedność" pomiędzy indeksami wielkości r_t i α_{t-1} wynika z faktu, że dla skróconego o jeden okres horyzontu czasowego, oczekiwana roczna stopa *spot* r_t dla okresu t staje się oczekiwaną stopą *spot* dla okresu $(t-1)$. Dlatego też, we wzorze (8.28) do wartości r_t dodawana jest wartość parametru premii α_{t-1}, obowiązującego dla okresu $t-1$.

Dla teorii preferencji płynności zachodzi $f_t=r_t+\alpha_t$ $(t=2,\ldots,T)$; a zatem, mamy

$$r_t=f_t-\alpha_t, \qquad \forall t=2,\ldots,T. \tag{8.29}$$

Z (8.28) i (8.29) otrzymamy więc

$$(1+{}_1r_{ot})^{t-1}=(1+f_2-\alpha_2)[1+f_3-(\alpha_3-\alpha_2)]\times\ldots\times[1+f_t-(\alpha_t-\alpha_{t-1})] \quad . \tag{8.30}$$

Z zależności (8.22), (8.28) i (8.30) mamy zatem

$$\begin{aligned}P_1=P(\tau=1)&=\sum_{t=2}^{T}\frac{C_t}{(1+r_2)(1+r_3+\alpha_2)\times\ldots\times(1+r_t+\alpha_{t-1})}=\\&=\sum_{t=2}^{T}\frac{C_t}{(1+f_2-\alpha_2)[1+f_3-(\alpha_3-\alpha_2)]\times\ldots\times[1+f_t(\alpha_t-\alpha_{t-1})]}.\end{aligned} \tag{8.31}$$

Z wyprowadzonego powyżej wzoru (8.31) widać wyraźnie, że w przypadku teorii preferencji płynności, do wyznaczenia oczekiwanej dla chwili $\tau=1$ wartości przyszłej P_1 obligacji nie wystarcza znajomość samych wartości bieżących stóp procentowych *forward* $f_t, t=2,\ldots,T$. Musimy jeszcze w tym celu zidentyfikować dla danego rynku parametry premii płynności α_t $(t=2,\ldots,T)$; a ponadto, musimy dodatkowo założyć, że parametry te są niezmienne z upływem czasu bieżącego $\tau=0,1,2,3,\ldots$; por. założenie (8.17).

W tablicy 8.1 przedstawiono dla celów porównania, analizowany powyżej zestaw podstawowych wzorów, będących zapisem matematycznym teorii czystych oczekiwań i teorii preferencji płynności; jak również – podano wzory na wycenę wartości bieżącej i wartości przyszłej obligacji, obowiązujące w ramach rozpatrywanych teorii.

8.5. Spodziewana stopa zwrotu

Umiejętność wyznaczania oczekiwanej (czy też prognozowanej) wartości przyszłej P_1 obligacji ma zasadnicze znaczenie z punktu widzenia analizowanego w niniejszej pracy zagadnienia zarządzania portfelem obligacji. Znając bowiem oczekiwaną wartość przyszłą P_1 oraz wartość bieżącą P_0 obligacji, możemy określić spodziewaną stopę zwrotu R^a z tej obligacji, wyznaczoną przy założeniu, że rynkowe stopy procentowe *spot* nie zmienią się.

Jak wspomnieliśmy, identyfikacja analizowanych w poprzednim punkcie parametrów premii płynności α_t $(t=2,\ldots,T)$ napotyka w praktyce rynków finansowych na poważne trudności; oczywiście – o ile w ogóle dla danego rynku obowiązuje teoria preferencji płynności; por. *Fama* (1976, 1984). Dlatego zdając sobie sprawę z możliwych przybliżeń, dla celów dalszych rozważań założymy, że dla rozpatrywanego rynku finansowego obowiązuje *teoria czystych oczekiwań*; założenie to oznacza, że potrafimy efektywnie wyznaczyć - na podstawie wzoru (8.25) – oczekiwaną dla chwili $\tau=1$ wartość P_1 obligacji.

Sformułujemy teraz następujące twierdzenie.

Twierdzenie 8.1

W przypadku, gdy dla danego rynku obowiązuje teoria czystych oczekiwań oraz rynek ten jest zrównoważony (tj. $P_r^i = P_0^i$), spodziewana stopa zwrotu z wszystkich obligacji o stałym oprocentowaniu jest - dla tego samego okresu inwestycyjnego - jednakowa. Stopa ta, liczona w skali roku, jest dla wszystkich obligacji równa stopie procentowej *spot* r_{0t} dla danego okresu, tj.

$$R_i^a(t) = r_{0t}, \qquad \forall\, t = 1,\ldots,n, \tag{8.32}$$

gdzie $R_i^a(t)$ - spodziewana stopa zwrotu z obligacji O_i za t okresów odsetkowych (wyrażona w skali roku).

Dowód: Dla danej obligacji O_i, pomijając chwilowo indeks i, wprowadzimy następujące oznaczenia

$\Re^a(t)$ - spodziewana stopa zwrotu za t okresów odsetkowych,

$R^a(t)$ - spodziewana stopa zwrotu za t okresów odsetkowych, wyrażona w skali jednego okresu (tj. roku).

Z zasady procentu składanego, mamy zatem

$$\Re^a(t) = [1+R^a(t)]^t - 1. \tag{8.33}$$

W przypadku teorii czystych oczekiwań, wartość bieżąca obligacji (w chwili $\tau=0$) wyraża się wzorem (8.12), tj.

Tablica 8.1 Podstawowe wzory charakteryzujące teorię czystych oczekiwań oraz teorię preferencji płynności

<table>
<tr><th>TEORIA CZYSTYCH OCZEKIWAŃ</th><th>TEORIA PREFERENCJI PŁYNNOŚCI</th></tr>
<tr><td colspan="2">$$(1+r_{0t})^t=(1+f_1)(1+f_2)\times\ldots\times(1+f_t)$$
r_{0t} - stopa procentowa spot dla okresu $[0,t]$; f_t - stopa procentowa forward dla okresu $[t-1,t]$</td></tr>
<tr><td>$$f_t=r_t$$
f_t - stopa forward
r_t - oczekiwana stopa procentowa spot</td><td>$$f_t=r_t+\alpha_t$$
f_t - stopa forward, α_t - parametr premii płynności,
r_t - oczekiwana stopa procentowa spot</td></tr>
<tr><td>$(1+r_{0t})^t=(1+r_1)(1+r_2)\times\ldots\times(1+r_t)$</td><td>$(1+r_{0t})^t=(1+r_1)(1+r_2+\alpha_2)\times\ldots\times(1+r_t+\alpha_t)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Wartość bieżąca P_0 obligacji :
$$P_0=\sum_{t=1}^{T}\frac{C_t}{(1+r_{0t})^t}=\sum_{t=1}^{T}\frac{C_t}{(1+f_1)(1+f_2)\times\ldots\times(1+f_t)}$$</td></tr>
<tr><td>$$P_0=\sum_{t=1}^{T}\frac{C_t}{(1+r_{0t})^t}$$</td><td>$$P_0=\sum_{t=1}^{T}\frac{C_t}{(1+r_1)(1+r_1+\alpha_1)\times\ldots\times(1+r_t+\alpha_t)}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Wartość przyszła P_1 obligacji:
$$P_1=P(\tau=1)=\sum_{t=2}^{T}\frac{C_t}{(1+{}_1r_{1t})^{t-1}}$$
${}_1r_{1t}$ - oczekiwana (w chwili $\tau=0$ dla chwili $\tau=1$) stopa procentowa spot dla okresu $[1,\ t]$</td></tr>
<tr><td>$(1+{}_1r_{1t})^t=$
$=(1+r_2)(1+r_3)\times\ldots\times(1+r_t)$
$=(1+f_2)(1+f_3)\times\ldots\times(1+f_t)$</td><td>$(1+{}_1r_{1t})^t=$
$=(1+r_2)(1+r_3+\alpha_2)\times\ldots\times(1+r_t+\alpha_{t-1})$
$=(1+f_2-\alpha_2)[1+f_3-(\alpha_3-\alpha_2)]\times\ldots\times[1+f_t-(\alpha_t-\alpha_{t-1})]$</td></tr>
<tr><td>$P_1=$
$$\sum_{t=2}^{T}\frac{C_t}{(1+r_2)(1+r_3)\times\ldots\times(1+r_t)}=$$
$$\sum_{t=2}^{T}\frac{C_t}{(1+f_2)(1+f_3)\times\ldots\times(1+f_t)}$$</td><td>$P_1=$
$$\sum_{t=2}^{T}\frac{C_t}{(1+r_2)(1+r_3+\alpha_2)\times\ldots\times(1+r_t+\alpha_{t-1})}=$$
$$\sum_{t=2}^{T}\frac{C_t}{(1+f_2-\alpha_2)[1+f_3-(\alpha_3-\alpha_2)]\times\ldots\times[1+f_t-(\alpha_t-\alpha_{t-1})]}$$</td></tr>
</table>

$$P_0 = P(\tau=0) = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r_1)(1+r_2)\times\ldots\times(1+r_t)} = \\ = \frac{C_1}{(1+r_1)} + \frac{C_2}{(1+r_1)(1+r_2)} + \ldots + \frac{C_T}{(1+r_1)(1+r_2)\times\ldots\times(1+r_T)}, \tag{8.34}$$

gdzie r_t - oczekiwane roczne stopy procentowe *spot* ($t = 1,\ldots,T$) oraz z definicji $r_1 = r_{01}$. Natomiast spodziewana wartość przyszła P_1 obligacji w chwili $\tau=1$ (tj. po upływie jednego okresu odsetkowego) jest wyrażona wzorem (8.25), tj.

$$P_1 = P(\tau=1) = \sum_{t=2}^{T} \frac{C_t}{(1+r_2)(1+r_3)\times\ldots\times(1+r_t)} = \\ = \frac{C_2}{(1+r_2)} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \ldots + \frac{C_T}{(1+r_2)(1+r_3)\times\ldots\times(1+r_T)}, \tag{8.35}$$

Wartość V_1 inwestycji w obligację w chwili $\tau=1$ jest równa sumie wartości odsetek C_1 za pierwszy okres oraz wartości przyszłej P_1 obligacji, tj.

$$V_1 = C_1 + P_1. \tag{8.36}$$

Z (8.36) i (8.35) mamy zatem

$$V_1 = C_1 + P_1 = C_1 + \frac{C_2}{1+r_2} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \ldots + \frac{C_T}{(1+r_2)\times\ldots\times(1+r_T)} = \\ = (1+r_1)\left[\frac{C_1}{1+r_1} + \frac{C_2}{(1+r_1)(1+r_2)} + \ldots + \frac{C_T}{(1+r_1)(1+r_2)\times\ldots\times(1+r_T)}\right]. \tag{8.37}$$

A zatem, z (8.37) i (8.34)

$$V_1 \triangleq C_1 + P_1 = (1+r_1)P_0, \tag{8.38}$$

oraz biorąc pod uwagę, że $r_1 = r_{01}$,

$$V_1 \triangleq C_1 + P_1 = (1+r_{01})P_0. \tag{8.39}$$

Należy w tym miejscu podkreślić, że wyprowadzona powyżej zależność (8.39) jest prawdziwe tylko w przypadku, gdy dla danego rynku spełnione są założenia teorii czystych oczekiwań. Na przykład, można łatwo wykazać, że wzór ten nie zachodzi w przypadku teorii preferencji płynności.

Spodziewana stopa zwrotu za pierwszy okres odsetkowy jest z definicji równa:

$$R^a(1) \triangleq \frac{V_1 - P_0}{P_0} = \frac{(C_1+P_1)-P_0}{P_0}. \tag{8.40}$$

Podstawiając (8.39) do (8.40) otrzymamy zatem:

$$R^a(1) = \frac{(C_1+P_1)-P_0}{P_0} = \frac{(1+r_{01})P_0-P_0}{P_0} = r_{01}. \tag{8.41}$$

Zauważmy teraz, że prawa strona wzoru (8.41) nie zależy od indeksu i obligacji. Tak więc spodziewane stopy zwrotu za najbliższy okres odsetkowy wszystkich występujących na danym rynku obligacji są jednakowe i równe stopie procentowej *spot* r_{01} obowiązującej w tym okresie.

W przypadku obowiązywania dla danego rynku teorii czystych oczekiwań, wartość P_2 obligacji w chwili $\tau=2$ (tj. po upływie dwóch okresów odsetkowych) jest równa:

$$\begin{aligned} P_2 = P(\tau=2) = \sum_{t=3}^{T} \frac{C_t}{(1+r_3)(1+r_4)\times\ldots\times(1+r_t)} = \\ = \frac{C_3}{(1+r_3)} + \frac{C_4}{(1+r_3)(1+r_4)} + \frac{C_T}{(1+r_3)(1+r_4)\times\ldots\times(1+r_T)}. \end{aligned} \tag{8.42}$$

Wartość V_2 inwestycji w rozpatrywaną obligację w chwili $\tau=2$ jest równa sumie odsetek C_1 reinwestowanych na chwilę $\tau=2$ według stopy procentowej r_2, odsetek C_2 wypłacanych w chwili $\tau=2$ oraz spodziewanej wartości P_2 obligacji. Mamy więc:

$$V_2 = C_2(1+r_2) + C_2 + P_2. \tag{8.43}$$

Z (8.43) i (8.42) mamy

$$\begin{aligned} V_2 = C_1(1+r_2) + C_2 + P_2 = C_1(1+r_2) + C_2 + \frac{C_3}{1+r_3} + \frac{C_4}{(1+r_3)(1+r_4)} + \frac{C_T}{(1+r_3)(1+r_4)\times\ldots\times(1+r_T)} = \\ = (1+r_1)(1+r_2)\left[\frac{C_1}{(1+r_1)} + \frac{C_2}{(1+r_1)(1+r_2)} + \ldots + \frac{C_T}{(1+r_1)(1+r_2)\times\ldots\times(1+r_T)}\right]. \end{aligned} \tag{8.44}$$

Podstawiając (8.34) do (8.44) otrzymamy

$$V_2 = C_1(1+r_2) + C_2 + P_2 = (1+r_1)(1+r_2)P_0, \tag{8.45}$$

Uwzględniając teraz, że dla teorii czystych oczekiwań zachodzi (por. wzór 8.11)

$$(1+r_{02})^2 = (1+r_1)(1+r_2), \tag{8.46}$$

z (8.45) i (8.46) otrzymamy

$$V_2 = C_2(1+r_2) + C_2 + P_2 = (1+r_{02})^2 P_0, \tag{8.47}$$

gdzie r_{02} - stopa procentowa *spot* dla okresu $[0, 2]$.

Spodziewana stopa zwrotu $\Re^a(2)$ za dwa pierwsze okresy odsetkowe jest z definicji równa:

$$\Re^a(1) \triangleq \frac{V_2 - P_0}{P_0} = \frac{[C_1 + (1+r_1) + C_2 + P_2] - P_0}{P_0}. \tag{8.48}$$

Tak więc z (8.47) i (8.48) otrzymamy

$$\Re^a(2)=\frac{[C_1(1+r_1)+C_2+P_2]-P_0}{P_0}=\frac{(1+r_{02})^2P_0-P_0}{P_0}=(1+r_{02})^2-1. \tag{8.49}$$

A zatem, spodziewana stopa zwrotu $R^a(2)$ - tj. w skali jednego okresu - wynosi

$$R^a(2)=[1+\Re^a(2)]^{1/2}-1=r_{02}. \tag{8.50}$$

Zauważmy, że - podobnie jak dla przypadku jednego okresu odsetkowego – spodziewana stopa zwrotu wyrażona przez (8.50) , jest dla wszystkich obligacji jednakowa i równa dla okresu $[0, 2]$, stopie procentowej *spot* r_{02}.

Postępując analogicznie jak poprzednio, dla chwili $\tau=t$ (tj. po upływie t okresów odsetkowych) otrzymamy:

Spodziewana wartość przyszła P_t obligacji

$$P_t=P(\tau=t)=\frac{C_{t+1}}{(1+r_{t+1})}+\ldots+\frac{C_T}{(1+r_{t+1})\times\ldots\times(1+r_T)}. \tag{8.51}$$

Wartość V_t inwestycji w obligację

$$V_t=C_1(1+r_2)\times\ldots\times(1+r_t)+C_2(1+r_3)\times\ldots\times(1+r_t)+\ldots+C_{t-1}(1+r_t)+C_t+P_t. \tag{8.52}$$

Z (8.51) i (8.52) mamy

$$\begin{aligned}V_t&=C_1(1+r_2)\times\ldots\times(1+r_t)+C_2(1+r_3)\times\ldots\times(1+r_t)+\ldots+C_{t-1}(1+r_t)+C_t\\&+\frac{C_{t+1}}{1+r_{t+1}}+\ldots+\frac{C_T}{(1+r_{t+1})\times\ldots\times(1+r_T)}=\\&=(1+r_1)(1+r_2)\times\ldots\times(1+r_t)\times\left[\frac{C_1}{1+r_1}+\frac{C_2}{(1+r_1)(1+r_2)}+\ldots+\frac{C_T}{(1+r_1)(1+r_2)\times\ldots\times(1+r_T)}\right].\end{aligned} \tag{8.53}$$

Podstawiając (8.34) do (8.53) otrzymamy

$$V_t=(1+r_1)(1+r_2)\times\ldots\times(1+r_t)\ P_0. \tag{8.54}$$

Oraz biorąc pod uwagę, że dla teorii czystych oczekiwań zachodzi

$$(1+r_{0t})^t=(1+r_1)(1+r_2)\times\ldots\times(1+r_t)\ , \tag{8.55}$$

z (8.54) i (8.55) mamy

$$V=(1+r_{0t})^t\,P_0 \tag{8.56}$$

Tak więc spodziewana stopa zwrotu $\Re^a(t)$ z inwestycji w obligację, wyznaczona dla $\tau=t$ okresów odsetkowych wynosi

$$\Re^a(t)\triangleq\frac{V_t-P_0}{P_0}=\frac{(1+r_{0t})^tP_0-P_0}{P_0}=(1+r_{0t})^t-1. \tag{8.57}$$

A zatem, spodziewana stopa zwrotu $R^a(t)$ rozpatrywana w skali jednego okresu, jest równa

$$R^a(t) \triangleq \left[1+\Re^a(t)\right]^{1/t} - 1 = r_{0t}. \tag{8.58}$$

Zauważmy, że podobnie jak poprzednio, prawa strona wyrażenia (8.58) nie zależy od indeksu i analizowanej obligacji O_i. Wykazaliśmy więc, że o ile założenia twierdzenia 8.1 są spełnione , to spodziewana stopa zwrotu z inwestycji we wszystkie istniejące na danym rynku obligacje jest dla zadanego horyzontu czasowego $[0, t]$ taka sama i równa rynkowej stopie procentowej *spot* dla danego horyzontu. Zachodzi to niezależnie od wartości odsetek C_t^i i wartości nominalnych N^i analizowanego zbioru obligacji. W szczególności, zachodzi to również dla wszystkich obligacji czysto-dyskontowych. **c.n.d.**

Z przeprowadzonego powyżej dowodu Twierdzenia 8.1 wypływa natychmiast następujący wniosek.

Wniosek 8.1

O ile założenia Twierdzenia 8.1 są spełnione, to spodziewana stopa zwrotu z wszystkich obligacji liczona za jeden (najbliższy) okres odsetkowy jest taka sama i równa stopie procentowej *spot* r_{01} dla tego okresu, tj.

$$R_i^a = r_{01} \quad , \qquad \forall\, i=1,\ldots,n. \tag{8.59}$$

8.6. Parametry okresowości i wypukłości obligacji w przypadku krzywej dochodowości o dowolnym kształcie

W przypadku krzywej dochodowości o dowolnym kształcie, zdefiniowanie parametrów okresowości D i wypukłości V obligacji jest nieco bardziej złożone niż to przedstawialiśmy punkcie 4, w którym rozpatrywaliśmy płaską krzywą dochodowości. Wymaga to przyjęcia pewnych dodatkowych założeń co do dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych ; por. *Elton, Gruber* (1995), *Zaremba* (1995), *Jakubowski* (2003b).

Podstawowy wzór na wartość bieżącą obligacji w chwili $\tau=0$ jest wyrażony zależnością (8.2), tj.

$$P = P(r_{01},\ldots,r_{0T}) = \sum_{t=0}^{T} \frac{C_t}{(1+r_{0t})}. \tag{8.60}$$

Jak więc można łatwo zauważyć, w przypadku krzywej dochodowości o dowolnym kształcie, wartość bieżąca tej obligacji jest T-wymiarowa wypukłą funkcją zależną do wektora

$$\boldsymbol{r} = [r_{01},\ldots,r_{0t},\ldots,r_{0T}]' \tag{8.61}$$

stóp procentowych *spot* r_{0t}.

Oznaczymy przez $dr_{0t}\,(t=1,\ldots,T)$ - nieoczekiwane zmiany rynkowych stóp procentowych *spot* oraz przez $d\boldsymbol{r}$ wektor tych zmian; tj.

$$d\boldsymbol{r} = [dr_{01},\ldots,dr_{0t},\ldots,dr_{0T}]'.$$

Dla małych zmian dr_{0t} stóp procentowych *spot*, odpowiadającym tym zmianom dodatnią lub ujemną zmianę dP wartości bieżącej obligacji aproksymować możemy różniczką zupełną, tj.

$$dP = \sum_{t=1}^{T} \frac{\partial P(r)}{\partial r_{0t}} dr_{0t}, \tag{8.62}$$

gdzie dr_{0t}, dP - przyrosty skończone.

Z (8.60) mamy

$$\frac{\partial P(\underline{r})}{\partial r_{0t}} = -t \frac{C_t}{(1+r_{0t})^{t+1}}. \tag{8.63}$$

A zatem, z (8.62) i (8.63)

$$dP = -\sum_{t=1}^{T} t \frac{C_t}{(1+r_{0t})^{t+1}} dr_{0t} = -\sum_{t=1}^{T} \left[\frac{t\,C_t}{(1+r_{0t})^t} \times \frac{dr_{0t}}{1+r_{0t}} \right] \tag{8.64}$$

oraz

$$\frac{dP}{P} = -\sum_{t=1}^{T} \left[\left(\frac{t\,C_t}{(1+r_{0t})^t} \Big/ P_0 \right) \times \left(\frac{dr_{0t}}{1+r_{0t}} \right) \right]. \tag{8.65}$$

Przyjmiemy teraz pewne upraszczające założenie co do dynamiki nieoczekiwanych zmian struktury terminowej stóp procentowych *spot*. A mianowicie przyjmiemy, że

$$\frac{d(1+r_{0t})}{1+r_{0t}} = L^{t-1} \frac{d(1+r_{01})}{1+r_{01}}, \qquad \forall t=1,\ldots,T, \tag{8.66}$$

gdzie $L \in (0,1)$ - dany parametr; $d(1+r_{0t}) = d\,r_{0t}$.

Zauważmy, że przyjęcie schematu (8.66) dynamiki zmian rynkowych stóp procentowych *spot* r_{0t} oznacza zaakceptowanie następujących postulatów:

- Zmiany stóp r_{0t} odbywają się jednocześnie w tym samym kierunku tj. stopy r_{0t} albo jednocześnie rosną albo jednocześnie maleją . Z (8.66) wynika bowiem bezpośrednio, że współczynniki korelacji pomiędzy przyrostami dr_{0t} $(t=1,\ldots,T)$ są równe jedności.
- Zakres zmian stóp krótkoterminowych jest większy od zakresu zmian stóp długoterminowych (bo zachodzi $L<1$).
- Parametr L jest szacowany na podstawie danych z przeszłości.

Okresowość obligacji

Z zależności (8.65) i (8.66) – biorąc pod uwagę, że $d(1+r_{0t}) = d\,r_{0t}$ - otrzymamy

$$\frac{dP}{P} = -\left\{ \sum_{t=1}^{T} \left[\frac{t\,L^{t-1} C_t}{(1+r_{0t})^t} \Big/ P \right] \right\} \times \frac{d(1+r_{01})}{1+r_{01}}. \tag{8.67}$$

Występujące w powyższym wzorze wyrażenie w nawiasie klamrowym, nazwiemy parametrem okresowości (*duration*) D analizowanej obligacji; tj.

$$D \triangleq \sum_{t=1}^{T} \frac{t L^{t-1} C_t}{(1+r_{0t})^t} \Big/ P; \qquad L \in (0,1). \tag{8.68}$$

Z (8.67) i (8.68) mamy $\frac{dP}{P} = -D \frac{d(1+r_{01})}{1+r_{01}}$. (8.69)

A stąd $D = -\frac{dP}{P} \Big/ \frac{d(1+r_{01})}{1+r_{01}}$. (8.70)

Tak więc dany wzorem (8.70) parametr okresowości obligacji jest współczynnikiem elastyczności (wziętym ze znakiem minus) wartości bieżącej obligacji ze względu na zmianę czynnika jedność plus stopa procentowa *spot* r_{0t} rozpatrywana dla okresu $[0, 1]$.

Ponadto, dla nieskończenie małych przyrostów dr_{01}, z (8.70) otrzymamy

$$D = -\frac{dP}{dr_{01}} \frac{1+r_{01}}{P} \xrightarrow[dr_{01} \to 0]{} -\frac{\partial P}{\partial r_{0t}} \frac{1+r_{01}}{P}, \tag{8.71}$$

tak więc $D = -\frac{dP}{dr_{01}} \frac{1+r_{01}}{P}$. (8.72)

Wyrażenia (8.68), (8.70) oraz (8.72) określają trzy równoważne definicje parametru bieżącego okresowości D^0 obligacji.

Definicje te są odpowiednikami definicji (4.8), (4.11) i (4.13) sformułowanych w punkcie 4 dla przypadku płaskiej krzywej dochodowości

Podobnie jak to uczyniliśmy w punkcie 4, do dalszych rozważań wprowadzimy pojęcie współczynnika wagowego x_t, zdefiniowanego następująco:

$$x_t = \left[C_t/(1+r_{0t})^t\right] \Big/ P = \left[C_t/(1+r_{0t})^t\right] \Big/ \sum_{t=1}^{T} \left[C_t/(1+r_{0t})^t\right]. \tag{8.73}$$

Współczynnik x_t określa więc udział wartości bieżącej strumienia finansowego C_t (zdyskontowanego na chwile początkową za pomocą rynkowej stopy procentowej *spot* r_{0t}) w wartości bieżącej P obligacji.

Uwzględniając oznaczenie (8.73), z (8.68) otrzymamy następujący wzór na okresowość D obligacji

$$D = \sum_{t=1}^{T} t \; L^{t-1} \; x_t. \tag{8.74}$$

Wypukłość obligacji

Uwzględniając założony schemat (8.66) dynamiki zmian struktury terminowej, wprowadzenie pojęcia parametru wypukłości (convexity) V obligacji, umożliwia bardziej dokładne – niż to wynika ze wzoru (8.69) – oszacowanie wrażliwości wartości bieżącej P obligacji na zmiany rynkowych stóp procentowych *spot* rt $(t=1,\dots,T)$. A mianowicie, rozwijając zależność (8.60) wartości bieżącej P obligacji od stóp procentowych *spot* rt w szereg Taylora oraz ograniczając się do dwóch pierwszych członów tego rozwinięcia, otrzymamy

$$dP=P(\boldsymbol{r}+d\boldsymbol{r})-P(\boldsymbol{r})=\sum_{t=1}^{T}\frac{\partial P(\boldsymbol{r})}{\partial r_{0t}}dr_{0t}+\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{\partial P(\boldsymbol{r})}{\partial r_{0t}}(dr_{0t})^2, \tag{8.75}$$

gdzie
$$\frac{\partial P(\boldsymbol{r})}{\partial r_{0t}}=-t\frac{C_t}{(1+r_{0t})^{t+1}}, \tag{8.76}$$

$$\frac{\partial^2 P(\boldsymbol{r})}{\partial {r_{0t}}^2}=t(t+1)\frac{C_t}{(1+r_{0t})^{t+2}} \quad . \tag{8.77}$$

Tak więc z (8.75) – (8.77) mamy

$$dP=-\sum_{t=1}^{T}\frac{tC_t}{(1+r_{0t})^t}\left(\frac{dr_{0t}}{1+r_{0t}}\right)+\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{t(t+1)C_t}{(1+r_{0t})^t}\left(\frac{dr_{0t}}{1+r_{0t}}\right)^2. \tag{8.78}$$

Z definicji (8.73) współczynnika wagowego x_t mamy

$$x_t\, P=C_t/(1+r_{0t})^t, \qquad \forall t=1,\ldots,T. \tag{8.79}$$

Z (8.78) i (8.79) otrzymamy zatem

$$dP=P\left[-\sum_{t=1}^{T}t\, x_t\left(\frac{dr_{0t}}{1+r_{0t}}\right)+\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}t(t+1)x_t\left(\frac{dr_{0t}}{1+r_{0t}}\right)^2\right] \tag{8.80}$$

oraz
$$\frac{dP}{P}=-\sum_{t=1}^{T}t\, x_t\left(\frac{dr_{0t}}{1+r_{0t}}\right)+\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}t(t+1)\,x_t\left(\frac{dr_{0t}}{1+r_{0t}}\right)^2. \tag{8.81}$$

Uwzględniając teraz założony schemat dynamiki zmian (8.66) struktury terminowej stóp procentowych *spot* r_{01}, z (8.81) otrzymamy

$$\frac{dP}{P}=-\left[\sum_{t=1}^{T}tL^{t-1}x_t\right]\left(\frac{dr_{0t}}{1+r_{0t}}\right)+\left[\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}t(t+1)\left(L^{t-1}\right)^2x_t\right]\left(\frac{dr_{0t}}{1+r_{0t}}\right)^2.$$

(8.82)

We wzorze (8.82) , wyrażenie występujące w pierwszym nawiasie kwadratowym jest równe parametrowi ***okresowości*** D obligacji; por (8.74) . Natomiast wyrażenie w drugim nawiasie jest nazywane ***wypukłością*** V obligacji. Uwzględniając dodatkowo (8.73), mamy zatem

$$V=\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}t(t+1)\left(L^{t-1}\right)^2x_t=\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}t(t+1)\left(L^{t-1}\right)^2\frac{C_t}{(1+r_{0t})^t}\Big/P. \tag{8.83}$$

Ponadto, z (8.82) oraz (8.74) i (8.83), uwzględniając $dr_{01}=d(1+r_{01})$, otrzymamy

$$\frac{dP}{P}=-D\times\Delta_r+V\times(\Delta_r)^2, \tag{8.84}$$

gdzie
$$\Delta_r\triangleq\frac{d(1+r_{01})}{1+r_{01}}. \tag{8.85}$$

Podobnie, jak to miało miejsce w przypadku płaskiej krzywej dochodowości, z porównania wprowadzonych powyżej zależności (8.69) i (8.84) wynika, że oszacowanie względnej zmiany (dP/P) wartości bieżącej obligacji przy wykorzystaniu tylko parametru okresowości D jest zbyt „pesymistyczne". A mianowicie, o ile założenie (8.66) co do mechanizmu dynamiki zmian stóp procentowych *spot* r_{0t}, jest dla danego rynku spełnione, zarówno przy jednoczesnym spadku stóp r_{0t} $(d\underline{r}<0)$ - jak i przy równoczesnym wzroście tych stóp $(d\underline{r}>0)$ - wartość (dP/P) jest wyższa, niż by to wynikało z parametru okresowości D rozpatrywanego oddzielnie.

Dalsze wnioski wynikające z analizy parametrów okresowości D i wypukłości V pojedynczej obligacji oraz portfela obligacji są – dla założonego schematu (8.66) zmian stóp procentowych r_{01} - rozpatrywane w cytowanych już pracach *Zaremby* (1995) oraz *Zaremby* i *Smoleńskiego* (1998).

8.7. Parametry bieżącej okresowości oraz oczekiwanej okresowości obligacji

Analogicznie, jak uczyniliśmy to w przypadku założenia płaskiej krzywej dochodowości (por. punkt 4.3), wprowadzimy teraz rozróżnienie pomiędzy bieżącą okresowością D^0 obligacji (rozpatrywaną dla $\tau=0$) oraz parametrem tzw. oczekiwanej okresowości D^1 (rozpatrywanym dla chwili $\tau=1$).

Również, w celu bardziej wyraźnego podkreślenia, że zanalizowane zmiany dr_{0t} $(t=1,\ldots,T)$ stóp procentowych *spot* r_{0t} dotyczą (dodatnich bądź ujemnych) przyrostów skończonych – zmiany te będziemy dalej oznaczali symbolem „delta", tj.

$$\Delta r_{0t} = dr_{0t}, \quad t=1,\ldots,T. \tag{8.86}$$

Dla potrzeb dalszych rozważań przyjmiemy tez jedno z najprostszych (a jednocześnie najbardziej ograniczających) założeń co do schematu dynamiki zmian struktury terminowej stóp r_{0t}, tj. że

$$\frac{\Delta(1+r_{0t})}{1+r_{0t}} = \frac{\Delta(1+r_{01})}{1+r_{01}}, \quad \forall t=1,\ldots,T. \tag{8.87}$$

Powyższe oznacza, że zakładamy, że możliwe są tylko proporcjonalne zmiany wartości $(1+r_{0t})$, $t=1,\ldots,T$. Zauważmy, że schemat (8.87) jest szczególnym przypadkiem analizowanego poprzednio schematu (8.66) dynamiki zmian struktury terminowej, rozpatrywanego dla parametru $L=1$.

Ponadto, biorąc pod uwagę, że $\Delta(1+r_{0t})=\Delta r_{0t}$, zależność (8.87) ma następującą równoważną postać

$$\frac{\Delta r_{0t}}{1+r_{0t}} = \frac{\Delta r_{01}}{1+r_{01}}, \quad \forall t=1,\ldots,T. \tag{8.88}$$

Jakkolwiek schemat (8.87) (i równoważny mu schemat 8.88) dotyczy proporcjonalnych zmian wartości $(1+r_{0t})$, $t=1,\ldots,T$ - schemat ten będziemy dalej nazywali skrótowo schematem proporcjonalnych zmian stóp procentowych *spot* r_{0t}. Natomiast bardziej ogólny schemat (8.66) tych zmian będziemy nazywali schematem zmian proporcjonalnych ze

„współczynnikiem tłumienia" $L\in(0,1)$. Każdorazowo należy jednak w tym przypadku pamiętać, że chodzi nam o zmiany wartości jedności plus stopa procentowa, a nie o zmiany samych stóp procentowych *spot* r_{0t}.

Okresowość bieżąca D^0 obligacji w chwili $\tau=0$

Z (8.70), uwzględniając $\Delta(1+r_{0t})=\Delta r_{0t}$ mamy

$$D^0=D(\tau=0)\triangleq-\frac{\Delta P_0}{P_0}\Big/\frac{\Delta r_{01}}{1+r_{01}}, \tag{8.89}$$

gdzie
$$P_0=P(\tau=0)=\sum_{t=1}^{T}\frac{C_t}{(1+r_{0t})^t}. \tag{8.90}$$

- wartość bieżąca obligacji .

A zatem z (8.69), dla $L=1$, mamy

$$D^0=\sum_{t=1}^{T}\frac{tC_t}{(1+r_{0t})^t}\Big/P_0. \tag{8.91}$$

Oczekiwana okresowość D^1 obligacji w chwili $\tau=1$

Wprowadzimy teraz pojęcie oczekiwanej okresowości D^1 obligacji O_i. Podobnie jak w punkcie 8.4, przyjmiemy następujące oznaczenia:

$_1r_{1t}$ - oczekiwana stopa procentowa *spot* dla okresu $[1,t]$; oraz w szczególności,

$_1r_{12}=r_2$ - oczekiwana roczna stopa procentowa *spot* dla okresu $[1,2]$.

Biorąc pod uwagę zależność (8.22), określającą oczekiwaną wartość przyszłą P_1 obligacji (dla $\tau=1$), mamy

$$P_1=\sum\frac{C_t}{(1+{}_1r_{1t})^{t-1}}. \tag{8.92}$$

Definicja oczekiwanej okresowości D^1 jest następująca:

$$D^1=D(\tau=1)\triangleq-\frac{\Delta P_1}{P_1}\Big/\frac{\Delta_1 r_{12}}{1+{}_1r_{12}}, \text{przy czym uwzględniając analogię do wzoru (8.91)} \tag{8.93}$$

$$D^1=\sum_{t=2}^{T}\frac{(t-1)C_t}{(1+{}_1r_{1t})^{t-1}}/P_1. \tag{8.94}$$

Wprowadzenie definicji (8.93) oczekiwanej okresowości D^1 wymaga spełnienia następującego warunku

$$\frac{\Delta_1 r_{1t}}{1+{}_1r_{1t}}=\frac{\Delta_1 r_{12}}{1+{}_1r_{12}}, \quad \forall t=2,\dots,T. \tag{8.95}$$

Warunek (8.95) jest odpowiednikiem warunku (8.88), sformułowanym obecnie dla zmian oczekiwanych stóp procentowych *spot* $_1r_{1t}$. Dlatego też z punktu widzenia dalszych rozważań ważne jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 8.2

Przy założeniu *teorii czystych oczekiwań* oraz dla proporcjonalnych zmian bieżących stóp procentowych *spot* (dla $\tau = 0$) tj.

$$\frac{\Delta r_{0t}}{1+r_{0t}} = \frac{\Delta r_{01}}{1+r_{01}} \quad , \qquad \forall t = 1,\dots,T, \tag{8.96}$$

charakter tych zmian przenosi się również (dla małych Δr_{0t}) na oczekiwane stopy procentowe *spot*, rozpatrywane dla $\tau = 1$, tj.

$$\frac{\Delta_1 r_{1t}}{1+{}_1 r_{1t}} = \frac{\Delta_1 r_{12}}{1+{}_1 r_{12}} \quad , \qquad \forall t = 2,\dots,T. \tag{8.97}$$

Ponadto, zachodzi, $\dfrac{\Delta_1 r_{12}}{1+{}_1 r_{12}} = \dfrac{\Delta r_{01}}{1+r_{01}}$ (8.98)

Dowód: Jak to przedstawiliśmy w punkcie 8.2, w przypadku, gdy dla danego rynku obowiązuje teoria czystych oczekiwań, oczekiwane stopy procentowe *spot* ${}_1 r_{1t}$ .są równe bieżącym stopom procentowym *forward* ${}_0 f_{1t}$; mamy zatem

$${}_1 r_{1t} = {}_0 f_{1t} \overset{Ozn}{=} f_{1t}, \quad \forall t = 2,\dots,T. \tag{8.99}$$

Bezpośrednio z definicji stóp procentowych *forward* f_{1t} mamy :

$$(1+r_{0t})^t \overset{\Delta}{=} (1+r_{01})(1+f_{1t})^{t-1}, \text{ a stąd} \tag{8.100}$$

$$f_{1t} = \left[\frac{(1+r_{0t})^t}{1+r_{01}}\right]^{1/(t-1)} - 1. \tag{8.101}$$

Dla $t=2$, z zależności (8.101) otrzymamy zatem

$$f_{12} = \frac{(1+r_{02})^2}{1+r_{01}} - 1 = h(r_{01}, r_{02}), \tag{8.102}$$

gdzie $h(\cdot,\cdot)$ - funkcja dwóch zmiennych.

Dla małych przyrostów dr_{01} , dr_{02}, ze wzoru na różniczkę zupełną otrzymamy

$$df_{12} = \frac{\partial h}{\partial r_{01}} dr_{01} + \frac{\partial h}{\partial r_{02}} dr_{02}, \tag{8.103}$$

gdzie

$$\frac{\partial h}{\partial r_{01}} = -\frac{(1+r_{02})^2}{(1+r_{01})^2}, \frac{\partial h}{\partial r_{02}} = 2\frac{1+r_{02}}{1+r_{01}}. \tag{8.104}$$

Z (8.103) i (8.104) mamy zatem

$$df_{12} = -\frac{(1+r_{02})^2}{(1+r_{01})^2} dr_{01} + 2\frac{1+r_{02}}{1+r_{01}} dr_{02}. \tag{8.105}$$

Natomiast bezpośrednio z (8.102), po przekształceniu, mamy

$$\frac{1}{1+f_{12}}=\frac{1+r_{01}}{(1+r_{02})^{2}}. \tag{8.106}$$

Mnożąc stronami wzory (8.105) i (8.106) otrzymamy zatem

$$\frac{df_{12}}{1+f_{12}}=-\frac{1+r_{01}}{(1+r_{02})^{2}}\frac{(1+r_{02})^{2}}{(1+r_{01})^{2}}dr_{01}+2\frac{1+r_{01}}{(1+r_{02})^{2}}\frac{1+r_{02}}{1+r_{01}}dr_{02}=-\frac{dr_{01}}{1+r_{01}}+2\frac{dr_{02}}{1+r_{02}}. \tag{8.107}$$

Lecz założenia (8.96) i twierdzenia 8.2, dla t=2 mamy

$$\frac{dr_{02}}{1+r_{02}}=\frac{dr_{01}}{1+r_{01}}. \tag{8.108}$$

A zatem, z (8.107) i (8.108)

$$\frac{df_{12}}{1+f_{12}}=\frac{d_{1}r_{12}}{1+_{1}r_{12}}=\frac{d\ r_{01}}{1+r_{01}} \tag{8.109}$$

Otrzymaliśmy więc, że dla małych przyrostów dr_{01} , względna zmiana wartości $(1+r_{01})$ jest równa względnej zmianie analogicznej wartości, zdefiniowanej dla oczekiwanych stóp procentowych *spot* ${}_{1}r_{12}$ dla okresu $[1,2]$. Udowodniliśmy w ten sposób zależność (8.98) , występującą w tezie rozpatrywanego twierdzenia.

Przedstawiony powyżej schemat postępowania dla t=2 , powtórzymy dla okresu t=3 . Dla t=3 , z zależności (8.101) mamy zatem

$$f_{13}=\left[\frac{(1+r_{03})^{3}}{1+r_{01}}\right]^{\frac{1}{2}}-1=h\ (r_{01},r_{03}). \tag{8.110}$$

Tak więc
$$df_{13}=\frac{\partial h}{\partial r_{01}}dr_{01}+\frac{\partial h}{\partial r_{03}}dr_{03}, \tag{8.111}$$

gdzie
$$\frac{\partial h}{\partial r_{01}}=-\frac{1}{2}\frac{(1+r_{03})^{\frac{3}{2}}}{(1+r_{01})^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\partial h}{\partial r_{03}}=\frac{3}{2}\frac{(1+r_{03})^{\frac{1}{2}}}{(1+r_{01})^{\frac{1}{2}}}. \tag{8.112}$$

Z (8.111) i (8.112) mamy zatem

$$df_{13}=-\frac{1}{2}\frac{(1+r_{03})^{\frac{3}{2}}}{(1+r_{01})^{\frac{3}{2}}}dr_{01}+\frac{3}{2}\frac{(1+r_{03})^{\frac{1}{2}}}{(1+r_{01})^{\frac{1}{2}}}dr_{03}. \tag{8.113}$$

Natomiast z (8.110), po przekształceniu, mamy

$$\frac{1}{1+f_{13}}=\frac{(1+r_{01})^{\frac{1}{2}}}{(1+r_{03})^{\frac{3}{2}}}. \tag{8.114}$$

Mnożąc wzory (8.113) i (8.114) stronami, otrzymamy zatem

$$\frac{df_{13}}{1+f_{13}}=-\frac{1}{2}\frac{(1+r_{01})^{1/2}}{(1+r_{03})^{3/2}}\frac{(1+r_{03})^{3/2}}{(1+r_{01})^{3/2}}dr_{01}+\frac{3}{2}\frac{(1+r_{01})^{1/2}}{(1+r_{03})^{3/2}}\frac{(1+r_{03})^{1/2}}{(1+r_{01})^{1/2}}dr_{03}=$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{dr_{01}}{1+r_{01}}+\frac{3}{2}\frac{dr_{03}}{1+r_{03}}. \tag{8.115}$$

Lecz założenia (8.96) twierdzenia 8.2, dla t=3 mamy

$$\frac{dr_{03}}{1+r_{03}}=\frac{dr_{01}}{1+r_{01}}. \tag{8.116}$$

A zatem, z (8.115) i (8.116)

$$\frac{df_{13}}{1+f_{13}}=\frac{d_1r_{13}}{1+_1r_{13}}=\frac{d_1r_{01}}{1+r_{01}}. \tag{8.117}$$

Z zależności (8.117), biorąc dodatkowo pod uwagę (8.109), otrzymamy ostatecznie

$$\frac{d_1r_{13}}{1+_1r_{13}}=\frac{d_1r_{12}}{1+r_{12}}. \tag{8.118}$$

Wyprowadzona powyżej zależność (8.118) stanowi tezę dowodzonego twierdzenia 8.2 dla wartości t=3.

Natomiast w przypadku ogólnym, dla okresu $t\geq 2$, z zależności (8.101) mamy

$$f_{1t}=\left[\frac{(1+r_{0t})^t}{1+r_{01}}\right]^{1/t-1}-1=h\,(r_{01},r_{0t}). \tag{8.119}$$

A zatem
$$df_{1t}=\frac{\partial h}{\partial r_{01}}dr_{01}+\frac{\partial h}{\partial r_{0t}}dr_{0t}, \tag{8.120}$$

gdzie
$$\frac{\partial h}{\partial r_{01}}=-\frac{1}{t-1}\frac{(1+r_{0t})^{t/t-1}}{(1+r_{01})^{t/t-1}},\ \frac{\partial h}{\partial r_{0t}}=\frac{t}{t-1}\frac{(1+r_{0t})^{1/t-1}}{(1+r_{01})^{1/t-1}}. \tag{8.121}$$

Z (8.120) i (8.121) mamy zatem

$$df_{1t}=-\frac{1}{t-1}\frac{(1+r_{0t})^{t/t-1}}{(1+r_{01})^{t/t-1}}dr_{01}+\frac{t}{t-1}\frac{(1+r_{0t})^{1/t-1}}{(1+r_{01})^{1/t-1}}dr_{0t}. \tag{8.122}$$

Natomiast bezpośrednio z (8.101), po przekształceniu, mamy

$$\frac{1}{1+f_{1t}}=\frac{(1+r_{01})^{1/t-1}}{(1+r_{0t})^{t/t-1}}. \tag{8.123}$$

Mnożąc wzory (8.122) i (8.123) stronami, otrzymamy

$$\frac{df_{1t}}{1+f_{1t}}=-\frac{1}{t-1}\frac{dr_{01}}{1+r_{01}}+\frac{t}{t-1}\frac{dr_{0t}}{1+r_{0t}}. \tag{8.124}$$

Lecz założenia (8.96) twierdzenia 8.2 mamy

$$\frac{dr_{0t}}{1+r_{0t}}=\frac{dr_{01}}{1+r_{01}}, \qquad \forall\, t=2,\ldots,T. \tag{8.125}$$

A zatem, z (8.124) i (8.125)

$$\frac{df_{1t}}{1+f_{1t}}=\frac{d_1r_{1t}}{1+{}_1r_{1t}}=\frac{dr_{01}}{1+r_{01}}, \qquad \forall\, t=2,\ldots,T. \tag{8.126}$$

Z zależności (8.126), biorąc dodatkowo pod uwagę (8.109), otrzymamy ostatecznie

$$\frac{d_1r_{1t}}{1+{}_1r_{1t}}=\frac{d_1r_{12}}{1+{}_1r_{12}}, \qquad \forall\, t=2,\ldots,T. \tag{8.127}$$

Wyprowadzona powyżej zależność (8.127) stanowi tezę dowodzonego twierdzenia **c.n.d.**

Z Twierdzenia 8.2 wynika bezpośrednio, że warunek (8.95) jest automatycznie spełniony, o ile tylko założymy prawdziwość warunku (8.88) - co uczyniliśmy na początku prowadzonych w tym punkcie rozważań. Ponadto, wykazaliśmy, że dla małych Δr_{01} zachodzi

$$\frac{\Delta_1 r_{12}}{1+{}_1r_{12}}=\frac{\Delta r_{01}}{1+r_{01}}. \tag{8.128}$$

A zatem z (8.93) i (8.128) mamy

$$\frac{\Delta P_1}{P_1}=-D^1\frac{\Delta r_{01}}{1+r_{01}}. \tag{8.129}$$

Zależność (8.129) ma zasadnicze znaczenie dla dalszych rozważań. A mianowicie, postępując dalej analogicznie jak w przypadku płaskiej struktury terminowej stóp procentowych (por. punkt 4.3, Lemat 4.1), można wyprowadzić następujący wzór na zależność funkcyjną pomiędzy parametrem *oczekiwanej okresowości* D^1 a parametrem *bieżącej okresowości* D^0 (*Jakubowski* 2004):

$$D^1=(D^0-1)(1+r_{01})\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{-1}, \tag{8.130}$$

gdzie r_{01} - rynkowa stopa procentowa *spot* dla okresu [0,1], P_0 - wartość bieżąca obligacji w chwili $\tau=0$, P_1 - wartość przyszła obligacji w chwili $\tau=1$, wyznaczona przy założeniu, że w okresie $\tau\in[0,1]$ oczekiwane stopy procentowe *spot* ${}_1r_{1t}$ $(t=2,\ldots,T)$ nie ulegną zmianie.

8.8 Modele jednoindeksowe obligacji. Zagadnienie Markowitza

Dokonując analogicznych przekształceń , jak to uczyniliśmy w punkcie 6.2, wykorzystując zależność (8.130) można wprowadzić następujący wzór na rzeczywistą stopę zwrotu R^* (liczoną za jeden okres odsetkowy) z inwestycji w rozpatrywaną obligację; *Jakubowski* (2004):

$$R^*=r_{01}-(D_i^0-1)\,\Delta r_{01} \tag{8.131}$$

Uwzględniając następnie indeks i obligacji O_i $(i=1,\ldots,n)$ oraz wprowadzając zmienną resztową ε_i, otrzymamy:

$$R_i^* = r_{01} - (D_i^0 - 1)\,\Delta r_{01} + \varepsilon_i \qquad \forall i = 1,\dots,n, \tag{8.132}$$

gdzie z założenia $E\varepsilon_i = 0$, $\sigma_{\varepsilon i}$ - dane na podstawie danych z przeszłości oraz $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$, $i, j = 1,\dots,n;\ i \neq j$.

Postępując teraz analogicznie jak w punkcie 6.3, możemy sformułować następujący model jednoindeksowy obligacji:

Model jednoindeksowy I

$$R_i^* = R_i^a - B_i \Delta r_{01} + \varepsilon_i \quad , \qquad \forall i = 1,\dots,n, \tag{8.133}$$

gdzie $R_i^a = r_{01}$ - spodziewana stopa zwrotu, (8.134)

$B_i = D_i^0 - 1$ - zmodyfikowany parametr okresowości, (8.135)

Również sformułowanie modeli jednoindeksowych II i III obligacji O_i jest analogiczne jak w punkcie 6.3 z tym, że każdorazowo w miejsce rynkowej stopy procentowej r należy podstawić stopę procentową *spot* r_{01}, obowiązującą w pierwszym okresie odsetkowym.

Mamy zatem:

Model jednoindeksowy II

$$R_i^* = R_i^a + \frac{B_i}{B_m}(R_m - r_{01}) + \varepsilon_i \quad , \qquad \forall i = 1,\dots,n. \tag{8.136}$$

Model jednoindeksowy III

$$R_i^* = \overline{R}_i + \frac{B_i}{B_m}(R_m - \overline{R}_m) + \varepsilon_i \quad , \qquad \forall i = 1,\dots,n, \tag{8.137}$$

gdzie $\overline{R}_i = R_i^a + \frac{B_i}{B_m}(\overline{R}_m - r_{01})$ - oczekiwana stopa zwrotu.

W przedstawionych powyżej modelach jednoindeksowych II i III zakładamy dodatkowo, że stopa zwrotu R_m z portfela rynkowego oraz zmienna resztowa ε_i są nieskorelowanymi zmiennymi losowymi, tj.

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_i, R_m) \triangleq E[\varepsilon_i (R_m - \overline{R}_m)] = O, \qquad \forall i = 1,\dots,n. \tag{8.138}$$

Zagadnienie Markowitza

Wykorzystując podany powyżej model jednoindeksowy II o postaci (8.137), sformułowanie *zagadnienie Markowitza* zarządzania portfelem obligacji jest w analizowanym przypadku identyczne ze sformułowaniem zamieszczonym w punkcie 7.1, odnoszącym się do przypadku płaskiej struktury terminowej stóp procentowych; por. (7.15)-(7.17).

Również rozpatrywane w punkcie 7.2 rozważania dotyczące *zagadnienia dywersyfikacji* portfela obligacji – przenoszą się bez zmian na analizowany powyżej przypadek struktury terminowej stóp procentowych o dowolnym kształcie. Bez zmian pozostaje też przedstawiona w punkcie 7.3 analiza zagadnienia stabilności parametrów rozpatrywanego modelu zarządzania portfelowego.

8.9. Uwagi końcowe

Przedstawione powyżej modele jednoindeksowe I, II, III obligacji, sformułowane przy założeniu dowolnego kształtu struktury terminowej stóp procentowych *spot* oraz proporcjonalnych zmian tych stóp, stanowią istotne uogólnienie modeli, rozpatrywanych poprzednio dla płaskiej krzywej dochodowości. O ile autorowi jest wiadomo, modele takie nie były jak dotąd rozpatrywane w literaturze przedmiotu.

Dalsze uogólnienie zaproponowanego podejścia na przypadek innych - niż proporcjonalne - zmian stóp procentowych r_{0t}, stwarza już zasadnicze trudności. Na przykład dla często zakładanego modelu zmian (*Elton, Gruber,* 1995), reprezentowanego przez schemat (8.66), tj.

$$\frac{\Delta r_{0t}}{1+r_{0t}} = L^{t-1}\frac{\Delta r_{01}}{1+r_{01}} \quad , \quad t=1,\ldots,T \quad , \quad L\in(0,1), \tag{8.139}$$

nie jest prawdziwe Twierdzenie 8.2. Czy też ujmując to nieco inaczej, z przedstawionego szczegółowo w punkcie 8.7 dowodu tego twierdzenia wynika, że jest ono prawdziwe wyłącznie dla wartości $L=1$ i małych zmian Δr_{0t}.

Ponadto, z punktu widzenia Twierdzenia 8.2, istotne jest również spełnienie założeń *teorii czystych oczekiwań*. Można na przykład łatwo wykazać, że twierdzenie to nie jest prawdziwe w przypadku *teorii preferencji płynności*. Z kolei w przypadkach, w których Twierdzenie 8.2 nie jest prawdziwe, pojawiają się zasadnicze trudności w sformułowaniu tego co rozumiemy pod pojęciem oczekiwanej okresowości D^1, por. wzory (8.93) i (8.95). A to z kolei uniemożliwia w ogóle sformułowanie modelu jednoindeksowego obligacji - przynajmniej w postaci - jaka została powyżej zaproponowana przez autora.

Oczywiście zawsze można przyjąć, że wszelkie odstępstwa od sformułowanych w powyższym modelu założeń - są ujęte w losowości zmiennej resztowej ε_i. Jednak to ostatnie - byłoby tylko potwierdzeniem poglądu autora, że dalsza komplikacja - czy też uogólnienie sformułowanego modelu - nie wydają się być możliwe. Przynajmniej w klasie modeli jednoindeksowych. Pozostaje oczywiście otwartą sprawą - czy takie uogólnienie jest w ogóle potrzebne. Ale żeby odpowiedzieć na to pytanie, należałoby najpierw odwołać się do badań empirycznych, dotyczących testowania dokładności sformułowanego modelu w praktyce. Powyższe dotyczy również całości rozpatrywanych w niniejszej pracy zagadnień aktywnego zarządzania portfelem obligacji.

DODATEK. Uogólnienia wzorów dla przypadku rynku niezrównoważonego

Poniżej przedstawimy uogólnienie prezentowanych w niniejszej pracy wyprowadzeń i wzorów dotyczących spodziewanej stopy zwrotu R_i^a, rzeczywistej stopy zwrotu R_i^* oraz modeli jednoindeksowych obligacji I, II, III, - na przypadek rynku niezrównoważonego. Założymy zatem, że dla analizowanego rynku finansowego ceny rynkowe P_r^i obligacji O_i nie są (w chwili $\tau=0$) równe są wartościom bieżącym P_0^i tych obligacji, tj.

$$P_r^i \neq P_0^i, \qquad \forall\, i=1,\dots,n. \tag{D.1}$$

W podanych w niniejszym dodatku wzorach wprowadzimy zdefiniowany w punkcie 5 przez zależność (5.6) współczynnik ρ_i, będący miarą niezrównoważenia rynku obligacji, tj.

$$\rho_i = \frac{P_0^i - P_r^i}{P_r^i}, \qquad \forall\, i=1,\dots,n. \tag{D.2}$$

Współczynnik ten będziemy nazwaliśmy *nierównowagową stopą zwrotu.*

Szczegółowe wprowadzenia prezentowanych poniżej wzorów zawiera praca autora *Jakubowski* (2003a). Wzory te przedstawimy oddzielnie dla przypadku płaskiej krzywej dochodowości oraz przypadku krzywej dochodowości o dowolnym kształcie.

D.1. Przypadek płaskiej krzywej dochodowości

Spodziewana stopa zwrotu R_i^a z obligacji O_i (za jeden okres odsetkowy):

$$R_i^a = r + (r+1)\rho_i, \qquad \forall\, i=1,\dots,n. \tag{D.3}$$

Rzeczywista stopa zwrotu R_i^* z obligacji O_i (za jeden okres odsetkowy):

$$R_i^* = [r + (r+1)\rho_i] - (D_i^0 - 1)(1+\rho_i)\,\Delta r. \tag{D.4}$$

Rzeczywista stopa zwrotu R_i^* z uwzględnieniem zmiennej resztowej ε_i:

$$R_i^* = [r + (r+1)\rho_i] - (D_i^0 - 1)(1+\rho_i)\,\Delta r + \varepsilon_i. \tag{D.5}$$

Przedstawione powyżej wzory (D.3) – (D.5) są uogólnieniem wzorów (6.6), (6.19) i (6.34), rozpatrywanych w punktach 6.1-6.3 niniejszej pracy.

Model jednoindeksowy I:

$$R_i^* = R_i^a - B_i\,\Delta r + \varepsilon_i, \qquad \forall\, i=1,\dots,n, \tag{D.6}$$

gdzie $R_i^a = r + (r+1)\rho_i$ - spodziewana stopa zwrotu, (D.7)

$B_i = (D_i^0 - 1)(1+\rho_i)$ - zmodyfikowany parametr okresowości. (D.8)

Model jednoindeksowy II:

$$R_i^* = R_i^a + \frac{B_i}{B_m}(R_m - r) + \varepsilon_i, \qquad \forall\, i=1,\ldots,n, \tag{D.9}$$

gdzie $R_m = \sum_{i=1}^{n} X_i R_i^*$ - stopa zwrotu z portfela rynkowego, (D.10)

$$B_m = \sum_{i=1}^{n} X_i B_i = \sum_{i=1}^{n} X_i (D_i^0 - 1)(1+\rho_i) \tag{D.11}$$

- parametr zmodyfikowanej okresowości portfela rynkowego,

X_i - współczynniki wagowe; $\sum X_i = 1$; $X_i > 0$, $\forall\, i = 1,\ldots,n.$ (D.12)

- *Spodziewana stopa zwrotu*

$$R_i^a = r + (r+1)\rho_i \qquad i=1,\ldots,n, \tag{D.13}$$

- *Oczekiwana stopa zwrotu*

$$\overline{R_i} = E(R_i^*) = R_i^a + \frac{B_i}{B_m}\left(\overline{R_m} - r\right), \qquad i=1,\ldots,n, \tag{D.14}$$

- *Wariancja stopy zwrotu*

$$\operatorname{var}(R_i^*) = \sigma_i^2 = \frac{B_i}{B_m}\sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2, \qquad i=1,\ldots,n, \tag{D.15}$$

- *Konwariancja*

$$\operatorname{cov}(R_i, R_j) = \sigma_{ij} = \frac{B_i B_j}{B_m^2}\sigma_m^2, \qquad i, j=1,\ldots,n,\ i \neq j \tag{D.16}$$

Model jednoindeksowy III:

$$R_i^* = \overline{R_i} + \frac{B_i}{B_m}\left(R_m - \overline{R_m}\right) + \varepsilon_i, \qquad \forall\, i=1,\ldots,n, \tag{D.17}$$

gdzie $\overline{R_i}$ - oczekiwana stopa zwrotu z obligacji O_i,

$\overline{R_m}$ - oczekiwana stopa zwrotu z portfela rynkowego,

$$B_i = (D_i^0 - 1)(1+\rho_i)\ , \tag{D.18}$$

$$B_m = \sum_{i=1}^{n} X_i B_i = \sum_{i=1}^{n} X_i (D_i^0 - 1)(1+\rho_i). \tag{D.19}$$

Przedstawione powyżej wzory (D.6) – (D.19) są uogólnieniami wzorów (6.35),(6.36) (6.37), (6.43), (6.51) - (6.55), oraz (6.62)-(6.64) rozpatrywanych w punkcie 6.3 niniejszej pracy.

D.2. Przypadek krzywej dochodowości o dowolnym kształcie

<u>Spodziewana stopa zwrotu R_i^a z obligacji O_i</u> (za jeden okres odsetkowy):

$$R_i^a = r_{01} + (1+r_{01})\rho_i, \qquad \forall\, i=1,\ldots,n. \tag{D.20}$$

gdzie r_{01} - stopa procentowa spot dla okresu $[0, 1]$.

<u>Rzeczywista stopa zwrotu R_i^* z obligacji O_i</u> (za jeden okres odsetkowy):

$$R_i^* = [r_{01} + (1+r_{01})\rho_i] - (D_i^0 - 1)(1+\rho_i)\,\Delta r_{01}. \tag{D.21}$$

<u>Rzeczywista stopa zwrotu R_i^* z uwzględnieniem zmiennej resztowej ε_i</u>:

$$R_i^* = [r_{01} + (1+r_{01})\rho_i] - (D_i^0 - 1)(1+\rho_i)\,\Delta r_{01} + \varepsilon_i. \tag{D.22}$$

Przedstawione powyżej wzory (D.20) – (D.22) są uogólnieniami wzorów (8.59), (8.131) i (8.132), rozpatrywanych w punktach 8.5 i 8.8 niniejszej pracy.

<u>Model jednoindeksowy I:</u>

$$R_i^* = R_i^a - B_i \Delta r_{01} + \varepsilon_i, \qquad \forall\, i=1,\ldots,n. \tag{D.23}$$

gdzie $R_i^a = r_{01} + (1+r_{01})\rho_i$ - spodziewana stopa zwrotu (D.24)

$B_i = (D_i^0 - 1)(1+\rho_i)$ - zmodyfikowany parametr okresowości (D.25)

<u>Model jednoindeksowy II:</u>

$$R_i^* = R_i^a + \frac{B_i}{B_m}(R_m - r_{01}) + \varepsilon_i, \qquad \forall\, i=1,\ldots,n, \tag{D.26}$$

gdzie

$$B_m = \sum_{i=1}^{n} X_i B_i = \sum_{i=1}^{n} X_i (D_i^0 - 1)(1+\rho_i). \tag{D.27}$$

<u>Model jednoindeksowy III:</u>

$$R_i^* = \overline{R}_i + \frac{B_i}{B_m}(R_m - \overline{R_m}) + \varepsilon_i, \qquad \forall\, i=1,\ldots,n, \tag{D.28}$$

gdzie $\overline{R}_i = R_i^a + \frac{B_i}{B_m}(\overline{R_m} - r_{01})$ - oczekiwana stopa zwrotu. (D.29)

Przedstawione powyżej wzory (D.23) – (D.29) są uogólnieniami wzorów (8.133) - (8.137), rozpatrywanych w punkcie 8.8 niniejszej pracy.

Literatura

1. Adams A.T., Bloomfield D.S.F., Booth P.M., England P.D. (1993) *Investment Mathematics and Statistics*. Graham & Trotman, London.
2. Babcock G. (1984) Duration as a Link Between Yield and Value. *Journal of Portfolio Management*, Summer & Fall.
3. Bierwag G.O., Kaufman G.C., Toevs A. (Eds.) (1983) *Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunization*. JAI Press, Greenwich, Conn.
4. Bierwag G.O. (1987) *Duration Analysis - Managing Interest Rate Risk*. Ballinger Press, Cambridge, Mass.
5. Campbell J.Y. (1986) A Defense of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, March, Vol. XLI, No. 1, pp. 183-193.
6. Carleton W.T., Cooper I.A. (1976) Estimation and Uses of the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, Vol. 31, pp. 1067-1083.
7. Cox J., Ingersoll J., Ross S. (1981) A Re-examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, September, pp. 769-799.
8. Cox J., Ingersoll J., Ross S. (1985) A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, pp. 385-407.
9. Dahl H. (1993) A Flexible Approach to Interest Rate Risk Management. In: Zenios S.A. (Ed.), *Financial Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge.
10. Dattatreya R.E., Fabozzi F.J. (1995) *Active Total Return Management of Fixed-Income Portfolios*. Irwin, Burr Ridge, Revised ed.
11. Dobson S., Sutch R., Vanderford D. (1976) An Evaluation of Alternative Empirical Models for the Term Structureof Interest Rates. *Journal of Finance*, September.
12. Dobson S., (1978) Estimating Term Structure Equations with Individual Bond Data. *Journal of Finance,* March,.pp. 75 - 92.
13. Elton E.J., Gruber M.J. (1995) *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*. Wiley, New York, 5-th Ed.
14. Fabozzi F.J. (1993) *Fixed Income Mathematics*. Probus Pub. Comp., Chicago.
15. Fabozzi F.J., Fong G. (1994) *Advanced Fixed Income Portfolio Management – The State of Art*. Probus Pub. Comp., Chicago.
16. Fabozzi F.J. (1995) *Investment Management*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
17. Fabozzi F.J., Fabozzi T.D. (1995) *The Handbook of Fixed Income Securities*. Irwin, Burr Ridge, 4-th ed.
18. Fabozzi F.J. (1996) *Bond Portfolio Management*. New Hope, Penn
19. Fabozzi F.J. (2000) *Bond Markets - Analysis and Strategies*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J., 4-th ed.