

314/2004

Raport Badawczy

RB/40/2004

Research Report

**Analiza niezawodności
i żywotności sieci**

J. Karpiński

**Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk**

**Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences**



POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof., dr hab. inż. Olgierd Hryniewicz

Warszawa 2004

SPIS TREŚCI

1. Wstęp
 2. Żywotność systemów 2 i 3 elementowych
 3. Żywotność systemów – przypadek ogólny
- Literatura

1. Wstęp

W analizie niezawodności systemów uwzględnia się przeważnie czynniki o charakterze „wewnętrznym”, na przykład, losowe uszkodzenia elementów systemu spowodowane wadami materiałowymi, fizyko-chemicznymi procesami starzenia, błędami personelu obsługi itp. Uszkodzenia takie mają m. in. następujące cechy:

- pojedynczość strumienia uszkodzeń, tj. małe prawdopodobieństwo jednoczesnego uszkodzenia pewnej liczby elementów systemu;
- losowy charakter uszkodzeń, często o rozkładzie wykładniczym lub bliskim jemu;
- uszkodzenia poszczególnych elementów można zwykle uznać za niezależne;
- czas naprawy jest zwykle stosunkowo krótki (minuty, dziesiątki minut).

Niekiedy, obok tak rozumianego pojęcia niezawodności systemów, wprowadza się pojęcie żywotności systemów. Żywotność systemu jest cechą charakteryzującą odporność systemu na oddziaływanie czynników zewnętrznych w stosunku do systemu i powodujących większe lub mniejsze uszkodzenia pewnej części elementów systemu.. Inna definicja żywotności pod tym pojęciem rozumie zdolność systemu do zachowania podstawowych funkcji przy oddziaływaniu czynników otoczenia zewnętrznego o charakterze katastroficznym.

Czynniki zewnętrzne o charakterze katastroficznym oddziałujące na system można podzielić na dwie grupy:

- czynniki o charakterze żywiołowym (naturalnym), np. pożary, wyładowania atmosferyczne, obsunięcia ziemi, powódzie, wichury, duże opady atmosferyczne;
- czynniki umyślne, związane z działaniami nieprzyjaciela, np. atak terrorystyczny, atak artyleryjski, atak raketowy, bombowy, radio-elektroniczny, dywersja itp.

Istnieją pewne podobieństwa między niezawodnością a żywotnością systemów. W obu przypadkach rozważane są uszkodzenia elementów systemu. W podobny sposób definiuje się wskaźniki niezawodności i żywotności. Istnieją jednakże również istotne różnice. W analizie żywotności, w przeciwieństwie do analizy niezawodności, główną rolę odgrywają czynniki zewnętrzne w stosunku do systemu, zarówno o charakterze żywiołowym, jak też umyślnym. Analiza żywotności systemów charakteryzuje się następującymi cechami:

- występują równoczesne uszkodzenia lub zniszczenia wielu elementów systemu, tzw. uszkodzenia mnogie spowodowane wspólną przyczyną;
- charakter czynników umyślnych, a więc i uszkodzeń nimi spowodowanych, nie jest czysto losowy, chociaż w przypadku niewystarczającej informacji o przyszłych zamierzeniach nieprzyjaciela można założyć losowość uszkodzeń mnogich;
- uszkodzenia mają zazwyczaj charakter długotrwały, usuwanie uszkodzeń jest kosztowne i pracochłonne.

Wielu badaczy traktuje uszkodzenia mnogie i pojedyncze łącznie, uważając żywotność jako szczególny przypadek niezawodności. Dotyczy to zwłaszcza takich systemów technicznych jak sieci energetyczne i rurociągowo, elektrownie konwencjonalne i jądrowe, instalacje chemiczne. Uszkodzenia mnogie są wówczas traktowane jako uszkodzenia zależne spowodowane wspólną przyczyną. Przy takim podejściu wskaźniki żywotności definiuje się dokładnie w taki sam sposób jak wskaźniki niezawodności.

W niniejszym opracowaniu prezentowana jest pewna metoda analizy niezawodności systemów w połączeniu z pewnymi elementami analizy ich żywotności. Przyjęto ogólne założenie, że destrukcyjne oddziaływania zewnętrzne na system mają charakter losowy i wpływają na pogorszenie parametrów niezawodnościowych pewnych grup elementów lub nawet wszystkich elementów. Rozpatrywane zagadnienie można ująć następująco: **interesuje nas**

zachowanie się systemu (z punktu widzenia niezawodności) w sytuacji oddziaływania na system pewnych narażeń powodujących przyspieszone uszkodzenie wyróżnionej grupy elementów. Żywotność systemu jest oceniana rozkładem czasu życia systemu po wystąpieniu uszkodzenia elementów wyróżnionego zbioru elementów. W celu uzyskania liczbowych charakterystyk oceniających żywotność systemu można – korzystając z tego rozkładu prawdopodobieństwa - w prosty sposób wyznaczyć przydatne wskaźniki, na przykład wartość oczekiwaną.

2. Żywotność systemów 2 i 3 elementowych

Żywotność systemu opisywać będzie tzw. resztkowy czas życia systemu, tzn. czas życia liczony od chwili uszkodzenia się ostatniego elementu spośród elementów pewnego wyróżnionego zbioru. Ten wyróżniony zbiór elementów systemu będziemy nazywać zbiorem inicjalnym. W niniejszym punkcie będziemy rozpatrywać wszystkie możliwe systemy 2 i 3 elementowe. Jest to rozdział wstępny, poprzedzający ogólny przypadek dla systemów wieloelementowych. Jego rolą jest również to, by ideę resztkowego czasu życia systemu i jego rozkładu prawdopodobieństwa można było wprowadzić i wyjaśnić dla bardzo prostych przypadków.

OZNACZENIA

c_i – element i

T_i – czas poprawnej pracy elementu c_i

F_i, f_i – dystrybuanta i gęstość rozkładu elementu c_i

ℓ_j – inicjalny zbiór j , tzn. taki zbiór elementów systemu, ze z chwilą uszkodzenia ostatniego z nich zaczyna się resztkowy czas życia systemu

$L = \{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_M\}$ zbiór wszystkich rozpatrywanych zbiorów inicjalnych

λ_i – intensywność uszkodzeń elementu c_i

T_r – resztkowy czas życia systemu

F_r – dystrybuanta zmiennej losowej T_r

System o strukturze szeregowej

Dla dowolnego systemu o szeregowej strukturze niezawodnościowej i dla dowolnego zbioru inicjalnego ℓ_i zawsze zachodzi tożsamość

$$T_r \equiv 0 \quad (2-1)$$

Z tego powodu systemy szeregowe nie będą rozpatrywane, gdyż są trywialne z punktu widzenia analizy żywotności.

Dwuelementowy system o równoległej strukturze niezawodnościowej

W przypadku wyznaczania F_r dla sytuacji gdy T_r zaczyna się z chwila uszkodzenia elementu c_1 , mamy:

$$L = \{t_1\}, \quad \ell_1 = \{c_1\} \quad (2-2)$$

Przyjmijmy, że element c_2 stanowi rezerwę gorącą dla elementu c_1 . Oznacza to, że oba elementy pracują jednocześnie, a po uszkodzeniu któregośkolwiek z nich, element zdalny przejmuje na siebie pełne obciążenie. A zatem

$$T_r = T_2 - T_1, \quad \text{jeśli } T_2 \geq T_1$$

W przeciwnym przypadku $T_r = 0$.

W rozpatrywanym przypadku mamy

$$F_r(\tau) = P\{T_2 - T_1 \leq \tau \mid T_1 < T_2\} \quad (2-3)$$

Stosując do (2-3) wzór na prawdopodobieństwo warunkowe otrzymujemy

$$F_r(\tau) = P\{(T_2 - T_1 \leq \tau) \cap (T_1 < T_2)\} / P\{T_1 < T_2\} = P\{0 < T_2 - T_1 \leq \tau\} / P\{T_1 < T_2\} \quad (2-4)$$

Dla niezależnych zmiennych losowych T_1 i T_2 mamy:

$$P\{0 < T_2 - T_1 \leq \tau\} = \int_0^{\infty} f_1(t) [F_2(t + \tau) - F_2(t)] dt \quad (2-5)$$

gdzie

$$F_2(t + \tau) - F_2(t) = P\{c_2 \text{ uszkodzi się między } t \text{ i } t + \tau\}$$

oraz

$$P\{T_1 < T_2\} = \int_0^{\infty} f_1(t) [1 - F_2(t)] dt \quad (2-6)$$

Ostatecznie, ze wzoru (2-4) wynika

$$F_r(\tau) = \frac{\int_0^{\infty} f_1(t) [F_2(t + \tau) - F_2(t)] dt}{\int_0^{\infty} f_1(t) [1 - F_2(t)] dt} = 1 - \frac{\int_0^{\infty} f_1(t) [1 - F_2(t + \tau)] dt}{\int_0^{\infty} f_1(t) [1 - F_2(t)] dt} \quad (2-7)$$

W przypadku rozkładu wykładniczego czasów poprawnej pracy elementów, tzn. gdy

$$f_1(t) = \lambda_1 \exp(-\lambda_1 t), \quad F_1(t) = 1 - \exp(-\lambda_1 t), \quad (2-8)$$

ze wzoru (2-7) otrzymujemy

$$F_r(\tau) = 1 - \exp(-\lambda_2 \tau) \quad (2-9)$$

Powyższy wzór pokazuje tzw. brak pamięci rozkładu wykładniczego.

W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy, że $T_2 < T_1$ nie ma sensu. Jednakże, jeśli nie obserwujemy uszkodzenia elementu c_2 , to sensownym jest przyjąć, że $T_r = 0$, jeśli c_2 uszkodzi jako pierwszy. Wobec tego

$$F_r(\tau) = P\{T_2 < T_1\} + P\{0 < T_2 - T_1 \leq \tau\} \quad (2-10)$$

W szczególności, dla niezależnych zmiennych losowych T_1 oraz T_2 , na podstawie (2-5) oraz (2-6) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} F_r(\tau) &= \int_0^{\infty} f_2(t)[1 - F_1(t)]dt + \int_0^{\infty} f_1(t)[F_2(t + \tau) - F_2(t)]dt = \\ &= 1 - \int_0^{\infty} f_1(t)[1 - F_2(t + \tau)]dt \end{aligned} \quad (2-11)$$

W przypadku rozkładów wykładniczych, z (2-11) otrzymujemy

$$F_r(\tau) = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp(-\lambda_2 \tau)$$

W przypadku rezerwy zimnej, tzn. gdy element c_2 nie pracuje i oczekuje w pogotowiu na ewentualne uszkodzenie c_1 , a po jego uszkodzeniu natychmiast podejmuje jego zadanie, mamy trywialny wynik

$$F_r(\tau) = F_2(\tau) \quad (2-12)$$

Powyższy rezultat może być formalnie wyprowadzony z (2-11) przez zamianę T_2 przez $T_2 - T_1$:

$$F_r(\tau) = F_2(\tau) \int f_1(t)dt = F_2(\tau)$$

Obecnie rozpatrzmy F_r dla T_r zaczynającego się z chwilą uszkodzenia się pierwszego elementu. Mamy więc

$$L = \{\ell_1, \ell_2\}, \quad \ell_1 = \{c_1\}, \quad \ell_2 = \{c_2\}$$

W przypadku rezerwy gorącej, ze względu na to, że pierwsze uszkodzenie się elementów c_1 oraz c_2 wykluczają się wzajemnie, dla niezależnych zmiennych losowych T_1 oraz T_2 mamy:

$$F_r(\tau) = \int_0^{\infty} \{ f_1(t)[F_2(t+\tau) - F_2(t)] + \int_0^{\infty} f_2(t)[F_1(t+\tau) - F_1(t)] \} dt$$

W przypadku rozkładów wykładniczych otrzymujemy:

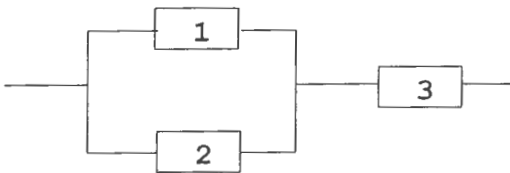
$$F_r(\tau) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} [\lambda_1 \exp(-\lambda_2 \tau) + \lambda_2 \exp(-\lambda_1 \tau)]$$

Dla jednakowych elementów z $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ mamy:

$$F_r(\tau) = 1 - \exp(-\lambda \tau)$$

Trzyelementowy system o strukturze szeregowo-równoległej

Rozpatrzmy system o strukturze szeregowo-równoległej jak na rysunku 2.1.



Rys. 2.1. Niezawodnościowy schemat blokowy 3-elementowego systemu szeregowo-równoległego

Założmy, że

$$L = \{l_1\}, \quad l_1 = \{c_1\}.$$

Jeśli c_1 uszkadza się jako pierwszy, to $T_r = \min(T_2, T_3)$. A zatem

$$\begin{aligned} F_r(\tau) &= P\{\min(T_2, T_3) - T_1 \leq \tau | T_1 < \min(T_2, T_3)\} = \\ &= \frac{P\{[\min(T_2, T_3) - T_1 \leq \tau] \cap [T_1 < \min(T_2, T_3)]\}}{P\{T_1 < \min(T_2, T_3)\}} = \\ &= \frac{P\{0 < \min(T_2, T_3) - T_1 \leq \tau\}}{P\{T_1 < \min(T_2, T_3)\}} \end{aligned}$$

Dla rezerwy zimnej (elementu c_2 wobec elementu c_1) i przy założeniu niezależności zmiennych losowych T_1 , T_2 i T_3 otrzymujemy zależność:

$$P\{0 < \min(T_2, T_3) - T_1 \leq \tau\} = \int_0^{\infty} f_1(t) \{ [1 - F_2(t)][1 - F_3(t)] - [1 - F_2(t + \tau)][1 - F_3(t + \tau)] \} dt$$

Ze względu na to, że

$$a < \min(b, c) = (a < b) \wedge (a < c)$$

mamy:

$$P\{T_1 < \min(T_2, T_3)\} = \int_0^{\infty} f_1(t) [1 - F_2(t)][1 - F_3(t)] dt$$

A więc:

$$\begin{aligned} F_r(\tau) &= \frac{\int_0^{\infty} f_1(t) \{ [1 - F_2(t)][1 - F_3(t)] - [1 - F_2(t + \tau)][1 - F_3(t + \tau)] \} dt}{\int_0^{\infty} f_1(t) [1 - F_2(t)][1 - F_3(t)] dt} \\ &= 1 - \frac{\int_0^{\infty} f_1(t) [1 - F_2(t + \tau)][1 - F_3(t + \tau)] dt}{\int_0^{\infty} f_1(t) [1 - F_2(t)][1 - F_3(t)] dt} \end{aligned}$$

W przypadku rozkładów wykładniczych czasów poprawnej pracy elementów systemu otrzymujemy:

$$F_r(\tau) = 1 - \exp[-(\lambda_2 + \lambda_3)\tau]$$

Jeśli odrzucimy założenie, że element c_1 uszkadza się jako pierwszy, to elementy c_2 oraz c_3 mogą się uszkodzić przed elementem c_1 . Oczywiście, w takim przypadku jest $T_r = 0$. Tak więc, podobnie jak dla (2-10) dla rezerwy gorącej możemy napisać:

$$F_r(\tau) = P\{T_2 < \min(T_1, T_3)\} + P\{T_3 < \min(T_1, T_2)\} + P\{0 < \min(T_2, T_3) - T_1 \leq \tau\}$$

Dla $\tau \geq 0$ mamy ostatecznie:

$$F_r(\tau) = \int_0^{\infty} f_2(t)[1 - F_1(t)][1 - F_3(t)]dt + \int_0^{\infty} f_3(t)[1 - F_1(t)][1 - F_2(t)]dt + \\ + \int_0^{\infty} f_1(t)\{[1 - F_2(t)][1 - F_3(t)]dt - [1 - F_2(t + \tau)][1 - F_3(t + \tau)]\}dt$$

Dla rozkładów wykładniczych otrzymujemy

$$F_r(\tau) = 1 - \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \exp[-(\lambda_2 + \lambda_3)\tau]$$

W przypadku rezerwy zimnej (elementu c_2 względem elementu c_1) i niezależności T_1 , T_2 i T_3 , T_2 musimy zastąpić przez $T_2 - T_1$. Wtedy, przy założeniu, że element c_1 uszkadza się pierwszy:

$$F_r(\tau) = 1 - \frac{\int_0^{\infty} f_1(t)[1 - F_2(\tau)][1 - F_3(t + \tau)]dt}{\int_0^{\infty} f_1(t)[1 - F_3(t)]dt}$$

W przypadku rozkładów wykładniczych mamy:

$$F_r(\tau) = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \exp[-(\lambda_2 + \lambda_3)\tau]$$

Podobnie, jeśli nie wykluczymy przypadku $T_3 < T_1$, to

$$F_r(\tau) = P\{T_3 < T_1\} + P\{0 < \min(T_2, T_3 - T_1) \leq \tau = \\ = \int_0^{\infty} f_3(t)[1 - F_1(t)]dt + \int_0^{\infty} f_1(t)\{[1 - F_3(t)]dt - [1 - F_2(\tau)][1 - F_3(t + \tau)]\}dt$$

W przypadku rozkładów wykładniczych powyższa równość przyjmuje postać:

$$F_r(\tau) = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_3} \exp[-(\lambda_2 + \lambda_3)\tau]$$

Przypadek $L = \{\ell_1\}$, $\ell_1 = \{c_2\}$ rozwiązuje się trywialnie przez zamianę indeksów 1 oraz 2 w wyżej przedstawionych równaniach.

Przypadek $L = \{\ell_1\}$, $\ell_1 = \{c_3\}$ jest trywialny, gdyż $F_r(\tau) = 1(\tau)$.

Jeśli rozpatrujemy przypadek, w którym T_r rozpoczyna się z chwilą uszkodzenia dowolnego pierwszego elementu, to mamy

$$L = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}, \quad \ell_1 = \{c_1\}, \quad \ell_2 = \{c_2\}, \quad \ell_3 = \{c_3\}.$$

Jeśli element c_3 uszkadza się pierwszy, to $T_r = 0$. Jednakże w ogólnym przypadku jako pierwsze mogą uszkodzić się elementy c_1 lub c_2 , więc pytanie o rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej T_r ma sens.

W przypadku rezerwy gorącej i niezależności T_1, T_2 oraz T_3 mamy:

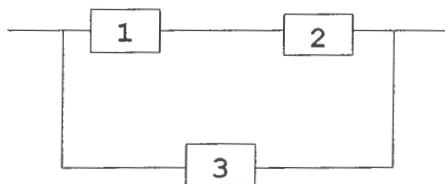
$$\begin{aligned} F_r(\tau) = & \int_0^{\infty} f_1(t) \{ [1 - F_2(t)] [1 - F_3(t)] - [1 - F_2(t + \tau)] [1 - F_3(t + \tau)] \} dt + \\ & + \int_0^{\infty} f_2(t) \{ [1 - F_1(t)] [1 - F_3(t)] - [1 - F_1(t + \tau)] [1 - F_3(t + \tau)] \} dt + \\ & + \int_0^{\infty} f_3(t) [1 - F_1(t)] [1 - F_2(t)] dt \end{aligned}$$

W przypadku rozkładów wykładniczych otrzymujemy:

$$F_r(\tau) = 1 - \frac{\lambda_1 \exp[-(\lambda_2 + \lambda_3)\tau] + \lambda_2 \exp[-(\lambda_1 + \lambda_3)\tau]}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

Trzelementowy system o strukturze równoległo-szeregowej

Rozpatrzmy obecnie 3-elementowy system o strukturze równoległo-szeregowej przedstawionej na rysunku 2.2.



Rys. 2.2. Niezawodnościowy schemat blokowy 3-elementowego systemu równoległo-szeregowego

Niech $L = \{\ell_1\}$, $\ell_1 = \{c_1\}$.
 Jeśli c_1 uszkadza się jako pierwszy, to dla rezerwy (elementu c_3 względem szeregowego połączenia c_2 oraz c_3) $T_r = T_3 - T_1$. Zatem

$$F_r(\tau) = P\{T_3 - T_1 \leq \tau | T_1 < \min(T_2, T_3)\} = \frac{P\{[T_3 - T_1 \leq \tau] \cap [T_1 < \min(T_2, T_3)]\}}{P\{T_1 < \min(T_2, T_3)\}} =$$

$$= \frac{P\{(\mathbf{0} < T_3 - T_1 \leq \tau) \cap (T_1 < T_2)\}}{P\{T_1 < \min(T_2, T_3)\}}$$

Jak w podobnych przypadkach powyżej, mamy:

$$P\{(\mathbf{0} < T_3 - T_1 \leq \tau) \cap (T_1 < T_2)\} = \int_0^{\infty} f_1(t)[1 - F_2(t)][1 - F_3(t)] - [1 - F_3(t + \tau)] dt$$

oraz

$$P\{T_1 < \min(T_2, T_3)\} = \int_0^{\infty} f_1(t)[1 - F_2(t)][1 - F_3(t)] dt$$

A zatem

$$F_r(\tau) = 1 - \frac{\int_0^{\infty} f_1(t)[1 - F_2(t)][1 - F_3(t + \tau)] dt}{\int_0^{\infty} f_1(t)[1 - F_2(t)][1 - F_3(t)] dt}$$

W przypadku rozkładów wykładniczych, jak można było się spodziewać, jest

$$F_r(\tau) = F_3(\tau)$$

Jeśli – w przypadku rezerwy gorącej – $T_3 < T_1$, to (przy uszkodzeniu c_1) $T_r = 0$, niezależnie od T_2 . A zatem

$$F_r(\tau) = P\{T_3 < T_1\} + P\{\mathbf{0} < T_3 - T_1 \leq \tau\}$$

I dalej

$$F_r(\tau) = 1 - \int_0^{\infty} f_1(t) F_3(t + \tau) dt$$

W przypadku rozkładów wykładniczych

$$F_r(\tau) = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_3} \exp(-\lambda_3 \tau)$$

W przypadku rezerwy zimnej (c_3) i $T_2 < T_1$, T_3 zaczyna się, gdy c_2 się uszkadza. Wtedy

$$F_r(\tau) = \int_0^{\infty} f_1(t) [1 - F_2(t)] F_3(\tau) dt + \int_0^{\infty} f_2(t) \int_0^{\infty} f_1(t + s) F_3(s) ds dt + \\ + \int_0^{\infty} f_2(t) \int_0^{\infty} f_1(t + s) [F_3(s + \tau) - F_3(s)] ds dt$$

Po prostych przekształceniach powyższego równania otrzymujemy:

$$F_r(\tau) = F_3(\tau) \int_0^{\infty} f_1(t) [1 - F_2(t)] dt + \int_0^{\infty} f_2(t) \int_0^{\infty} f_1(t + s) F_3(s + \tau) ds dt$$

W przypadku rozkładów wykładniczych

$$F_r(\tau) = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_3} \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3} \exp(-\lambda_3 \tau)$$

Po powyższych rozważaniach rozpatrywanie przypadku $L = \{\ell_1\}$, $\ell_1 = \{c_2\}$ jest trywialne, gdyż wystarczy we wszystkich wzorach zamienić indeksy 1 oraz 2.

Przyjmijmy teraz, że $L = \{\ell_1\}$, $\ell_1 = \{c_3\}$. Przypadek ten jest praktycznie przypadkiem zawartym w (2-2) dla 2-elementowego systemu równoległego. Wystarczy c_1 zamienić z c_3 oraz „uszkodzenie c_2 ” zamienić na „uszkodzenie c_1 lub c_2 ”. A zatem, przy założeniu, że c_3 uszkadza się pierwszy otrzymamy:

$$F_r(\tau) = \frac{\int_0^{\infty} f_3(t) \{ [1 - F_1(t)][1 - F_2(t)] - [1 - F_1(t + \tau)][1 - F_2(t + \tau)] \} dt}{\int_0^{\infty} f_3(t) [1 - F_1(t)][1 - F_2(t)] dt} =$$

$$= 1 - \frac{\int_0^{\infty} f_3(t) [1 - F_1(t + \tau)][1 - F_2(t + \tau)] dt}{\int_0^{\infty} f_3(t) [1 - F_1(t)][1 - F_2(t)] dt}$$

W przypadku rozkładów wykładniczych

$$F_r(\tau) = 1 - \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)\tau].$$

Jeśli c_3 nie uszkadza się jako pierwszy, to $T_r = 0$. Zatem, wykorzystując poprzednie rozważania, bezwarunkowy przypadek możemy zapisać jako

$$F_r(\tau) = 1 - \int_0^{\infty} f_3(t) [1 - F_1(t)][1 - F_2(t)] dt +$$

$$\int_0^{\infty} f_3(t) \{ [1 - F_1(t)][1 - F_2(t)] - [1 - F_1(t + \tau)][1 - F_2(t + \tau)] \} dt =$$

$$= 1 - \int_0^{\infty} f_3(t) [1 - F_1(t + \tau)][1 - F_2(t + \tau)] dt$$

W przypadku rozkładów wykładniczych mamy

$$F_r(\tau) = 1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \{ (1 - \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)\tau]) \}$$

Dla przypadku

$$L = \{ \ell_1, \ell_2, \ell_3 \}, \quad \ell_1 = \{ c_1 \}, \quad \ell_2 = \{ c_2 \}, \quad \ell_3 = \{ c_3 \}$$

ze względu na to, że „ c_i ($i=1,2,3$) uszkodza się jako pierwszy” wykluczają się wzajemnie, dla rezerwy gorącej mamy

$$\begin{aligned}
 F_r(\tau) &= \int_0^{\infty} f_1(t)[1-F_2(t)]\{[1-F_3(t)]-[1-F_3(t+\tau)]\}dt + \\
 &+ \int_0^{\infty} f_2(t)[1-F_1(t)]\{[1-F_3(t)]-[1-F_3(t+\tau)]\}dt + \\
 &+ \int_0^{\infty} f_3(t)\{[1-F_1(t)]\{[1-F_2(t)]-[1-F_1(t+\tau)][1-F_2(t+\tau)]\}\}dt
 \end{aligned}$$

W szczególności, dla wykładniczych rozkładów czasów poprawnej pracy elementów systemu otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 F_r(\tau) &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} [1 - \exp(-\lambda_3 \tau)] + \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \{1 - \exp[-(\lambda_3 + \lambda_2) \tau]\} = \\
 &= 1 - (\lambda_1 + \lambda_2) \exp(-\lambda_2 \tau) - \lambda_3 \exp[-(\lambda_1 + \lambda_1) \tau].
 \end{aligned}$$

3. Żywotność systemów – przypadek ogólny

W ogólnym przypadku rozpatrywania żywotności systemów możemy postawić następujące pytanie: jaki jest rozkład czasu poprawnej pracy systemu po uszkodzeniu wyróżnionej grupy elementów, poddanych zwiększonym narażeniom zewnętrznym? Rozkład ten określa zachowanie się systemu po ewentualnym uszkodzeniu pewnej grupy elementów poddanej nienormalnym narażeniom (burza, wichura, powódź itp.), a tym samym określa jego żywotność. Umiejętność wyznaczania takiego rozkładu jest zatem ważna dla praktyki.

Wprowadźmy następujące oznaczenia, używane w niniejszym punkcie:

OZNACZENIA

S	system
c_i	element i systemu
n	liczba elementów systemu
T_i	czas poprawnej pracy elementu c_i , zmienna losowa
F_i, f_i	dystrybuanta i gęstość rozkładu prawdopodobieństwa czasu popr. pracy elementu c_i

- C_i i-ty minimalny przekrój niezdatności systemu
 N liczba minimalnych przekrojów niezdatności systemu
 T czas poprawnej pracy systemu, zmienna losowa
 $G(t_1, t_2, \dots, t_n, t)$ dystrybuanta rozkładu łącznego wektora losowego T_1, T_2, \dots, T_n, T

NAZEWNICTWO I DEFINICJE

- T_r resztkowy czas życia systemu, zmienna losowa
 ℓ_j inicjalny zbiór j , tzn. taki zbiór elementów systemu, że z chwilą uszkodzenia ostatniego z nich zaczyna się resztkowy czas życia systemu
 $L = \{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_M\}$ zbiór wszystkich rozpatrywanych zbiorów inicjalnych
 L_i zbiór; połączenie pewnych inicjalnych zbiorów ℓ_j
 K_i liczba zbiorów inicjalnych tworzących L_i
 I liczba zbiorów L_i
 F_r dystrybuanta zmiennej losowej T_r
 R_r Funkcja niezawodności resztkowego czasu poprawnej pracy systemu: $R_r = 1 - F_r$
 $F_{r,i}$ pomocnicza funkcja używana przy wyznaczaniu F_r
 $Q_i(t_1, t_2, \dots, t_n, t)$ funkcja otrzymana z $G(t_1, t_2, \dots, t_n, t)$ dla L_i
 $A(x, y, \tau, S, L)$
 $A_i(x, y, \tau, S, L_i)$ złożone zdarzenia losowe
 $A'(x, S, L)$
 $A''(y, \tau, S)$
 A skrót dla $A(x, y, \tau, S, L)$
 $i: c_i \in H$ zbiór indeksów dla wszystkich c_i zawartych w H
 $C_k \setminus \ell_i$ C_k bez tych c_j , które należą do ℓ_i

Objaśnienia

Zbiór L wszystkich zbiorów inicjalnych określa warunki do rozpoczęcia resztkowego czasu poprawnej pracy systemu: T_r zaczyna się, gdy uszkodzi się ostatni element przynajmniej jednego zbioru inicjalnego. Na przykład, jeśli dla systemu o strukturze niezawodnościowej „2-z-3:F/G” ustalimy trzy jednoelementowe zbiory inicjalne, to T_r zaczyna się, gdy uszkodzi się którykolwiek z elementów tego systemu. W przypadku gdy ustalimy tylko jeden jednoelementowy zbiór inicjalny, to T_r zaczyna się z chwilą uszkodzenia się tego elementu.

Zauważmy jednak, że wcześniej, tzn. przed uszkodzeniem elementu będącego zbiorem inicjalnym, jeden – lub oba - z pozostałych elementów może się uszkodzić, a tym samym z niezerowym prawdopodobieństwem $T_r = 0$.

Założenia

1. System oraz jego elementy są dwustanowe w sensie niezawodności, tzn. mogą jedynie być w stanie zdadności albo też w stanie niezdadności (uszkodzenia).
2. W systemie występuje jedynie elementy bazowe, tzn. nie jest rozpatrywana rezerwa zimna.
3. System jest koherentny, tzn. jest monotoniczny, a wszystkie elementy są istotne, i znana jest jego struktura niezawodnościowa.
4. Znany jest rozkład łączny czasów poprawnej pracy elementów systemu (jeśli uszkodzenia elementów systemu są stochastycznie niezależne, to znane są rozkłady czasu poprawnej pracy wszystkich jego elementów).

Rozwiązanie ogólne

Do wyznaczenia rozkładu prawdopodobieństwa resztkowego czasu poprawnej pracy systemu przydatne jest rozpatrzenie zdarzenia

$$A(x, y, \tau, S, L) \equiv \{A'(x, S, L) \cap A''(y, \tau, S)\} \quad (3.1)$$

gdzie

$$A'(x, S, L) \equiv \left\{ \bigcup_{j=1}^M \bigcap_{i: c_i \in \ell_j} (T_i < x) \right\}$$

jest zdarzeniem losowym polegającym na tym, że do chwili x wszystkie elementy przynajmniej jednego zbioru inicjalnego ℓ_i uszkodzą się, zaś

$$A''(y, \tau, S) \equiv (T > y + \tau)$$

jest zdarzeniem polegającym na tym, że do chwili $(y+\tau)$ system nie uszkodzi się.

Prawdopodobieństwo $P\{A(x, y, \tau, S, L)\}$ jest kompozycją rozkładu łącznego czasów poprawnej pracy elementów pewnego podsystemu i funkcji niezawodności systemu. Z zależności (3.1) oraz z definicji T_r wynika, że funkcja niezawodności R_r resztkowego czasu poprawnej pracy systemu ma postać:

$$R_r(\tau) = P\{T_r > \tau\} = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} P\{A(x, y, \tau, S, L)\} \Big|_{x=y=t} dt \quad (3.2)$$

Musimy obecnie wyznaczyć $P\{A\}$. Na podstawie wzoru Poincare otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 P\{A(x, y, \tau, S, L)\} &= \sum_{i=1}^M P\left\{ \bigcap_{j: c_j \in \ell_i} (T_j < x) \cap (T > y + \tau) \right\} + \\
 &- \sum_{\substack{i, j=1 \\ i < j}}^M P\left\{ \bigcap_{m: c_m \in (\ell_i \cup \ell_j)} (T_m < x) \cap (T > y + \tau) \right\} + \\
 &+ \dots + (-1)^{M+1} P\left\{ \bigcap_{m: c_m \in \bigcup_{i=1}^M \ell_i} (T_m < x) \cap (T > y + \tau) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

W celu otrzymania prawdopodobieństw innych zdarzeń podobnych do przedstawionego wzorem (3.3) przyjmijmy, że

$$L_i \equiv \left\{ \ell_{i_1} \cup \ell_{i_2} \cup \dots \cup \ell_{i_{K_i}} \right\} \quad i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_{K_i}, \quad K_i \leq M. \tag{3.4}$$

(Liczba zbiorów typu L_i jest równa $2^m - 1$).

Z kolei, przyjmijmy, że

$$A_i(x, y, \tau, S, L_i) \equiv \left\{ \bigcap_{j: c_j \in L_i} (T_j < x) \cap (T \geq y + \tau) \right\} \tag{3.5}$$

Ze wzoru (2.3), dla odpowiednio zdefiniowanych zbiorów L_i mamy:

$$P\{A(x, y, \tau, S, L)\} = \sum_{i=1}^I (-1)^{K_i+1} P\{A_i(x, y, \tau, S, L_i)\}. \tag{3.6}$$

Używając podstawienia

$$F_{r,i}(\tau) = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} P\{A_i(x, y, \tau, S, L_i)\} \Big|_{x=y=t} dt, \tag{3.7}$$

ze wzorów (3.2) oraz (3.6) otrzymujemy:

$$R_r(\tau) = \sum_{i=1}^I (-1)^{K_i+1} F_{r,i}(\tau) \quad (3.8)$$

Obecnie należy zamodelować to, że T_r zaczyna się kiedy wszystkie elementy dowolnego zbioru inicjalnego ξ_j uszkodzą się i kończy się gdy wszystkie elementy dowolnego minimalnego przekroju niezdatności C_k uszkodzą się. Pokażemy, że $F_{r,i}(\tau)$ może być wyznaczony za pomocą dystrybuanty rozkładu łącznego wektora losowego (T_1, T_2, \dots, T_n) . Można wykazać, że dystrybuanta rozkładu łącznego wektora losowego (T_1, T_2, \dots, T_n) jest równa

$$G(t_1, t_2, \dots, t_n, t) = P \left\{ \bigcup_{k=1}^N \left[\bigcap_{j:c_j \in C_k} (T_j < \min(t_1, t)) \cap \bigcap_{j:c_j \notin C_k} (T_j < t) \right] \right\} \quad (3.9)$$

Funkcja $G(t_1, t_2, \dots, t_n, t)$ jest nieciągła w punkcie $t_i = t$. Dlatego różniczkowanie w $t_i = t$ jest utrudnione. Jednakże, dla potrzeb wyznaczania prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia A_i wystarczy rozpatrywać chwile $t_j < t$ dla wszystkich $j: c_j \in L_i$, gdyż interesują nas uszkodzenia elementów należących do zbioru L_i przed chwilą y , będącą początkiem T_i . Ponadto, dla $j: c_j \notin L_i$ wystarczy rozpatrywać chwile $t_j > t$, ponieważ interesują nas uszkodzenia elementów nie należących do L_j tylko po chwili $y + \tau$. A zatem, do wyznaczania $F_{r,i}(\tau)$ możemy używać, zamiast funkcji $G(t_1, t_2, \dots, t_n, t)$, prostszej funkcji $Q_i(t_1, t_2, \dots, t_n, t)$ otrzymywanej z $G(t_1, t_2, \dots, t_n, t)$, przy czym zamiast wyrażen rodzaju $\min(t_j, t)$ wstawiamy tylko t_j dla $j: c_j \in L_i$ i t dla $j: c_j \notin L_i$. Oznacza to, że

$$\begin{aligned} Q_i(t_1, t_2, \dots, t_n, t) &= P \left\{ \bigcup_{k=1}^N \left[\bigcap_{j:c_j \in C_k \cap L_i} (T_j < t_j) \cap \bigcap_{l:c_j \in C_k \setminus L_i} (T_l < t) \cap \bigcap_{m:c_m \notin C_k} (T_m < t_m) \right] \right\} = \\ &= P \left\{ \bigcup_{k=1}^N \left[\bigcap_{j:c_j \in L_i} (T_j < t_j) \cap \bigcap_{l:c_l \notin L_i} (T_l < t) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Z definicji Q_i wynika, że dla $t_j > t$ ($j: c_j \in L_i$) oraz dla $t_j < t$ ($j: c_j \notin L_i$) mamy $Q_i \equiv 0$. Dla $t_j < t$ ($j: c_j \in L_i$) funkcja Q_i jest ciągła a w punkcie $t_j = t$ jest lewostronnie ciągła. Ponadto, dla $t_j > t$ ($j: c_j \notin L_i$) Q_i jest ciągła i jest ona prawostronnie ciągła w punkcie $t_j = t$. Oznacza to, że dla $t_j \leq t$ ($j: c_j \in L_i$) i dla $t_j \geq t$ ($j: c_j \notin L_i$) Q_i ma pochodne cząstkowe względem t_j oraz t . Wobec tego możemy napisać:

$$P\{A_i(x, y, \tau, S, L_i)\} \Big|_{x=y=t} = \int_0^t \int_{t+\tau}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial y} Q_i(\infty, \dots, z_i, \dots, \infty, z_i, \dots, \infty, y) \right\} dy dz, \quad (3.11)$$

We wzorze (3.11) z_i występuje zamiast t_j ($j: c_j \in L_i$); ∞ występuje zamiast t_m ($m: c_m \notin L_i$). Całkując (3.11) względem y otrzymujemy

$$P\{A_i(x, y, \tau, S, L_i)\}_{x=y=t} = \int_0^t \frac{\partial}{\partial z_i} \{Q_i(\infty, \dots, z_i, \dots, \infty, z_i, \dots, \infty, \infty) - Q_i(\infty, \dots, z_i, \dots, \infty, z_i, \dots, \infty, y)\} dz_i \quad (3.12)$$

Z zależności (3.7) oraz (3.12) mamy:

$$F_{r,i}(\tau) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial z_i} \{Q_i(\infty, \dots, z_i, \dots, \infty, z_i, \dots, \infty, \infty) - Q_i(\infty, \dots, z_i, \dots, \infty, z_i, \dots, \infty, y)\} \Big|_{z_i=t} dt \quad (3.13)$$

Wstawiając (3.13) do (3.8) na koniec otrzymujemy podstawowy wynik:

$$F_r(\tau) = 1 - \sum_{i=1}^l (-1)^{k_i+1} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial z_i} \{Q_i(\infty, \dots, z_i, \dots, \infty, z_i, \dots, \infty, \infty) - Q_i(\infty, \dots, z_i, \dots, \infty, z_i, \dots, \infty, y)\} \Big|_{z_i=t} dt \quad (3.14)$$

UWAGA 1

Jeśli L_i jest przekrojem niezdatności (tzn. uszkodzenie wszystkich elementów ze zbioru L_i powoduje uszkodzenie systemu), to (patrz (3.5)) $P\{A_i(x, y, \tau, S, L_i)\} = 0$ dla wszystkich $\tau > 0$, a wówczas (patrz (3.7)) $F_{r,i} \equiv 0$. Oznacza to, że rozpatrując kolejne zbiory L_i we wzorze (3.8) możemy pominąć te zbiory L_i , które są przekrojami niezdatności systemu.

UWAGA 2

Po pominięciu wszystkich zbiorów L_i będących przekrojami niezdatności systemu, często zdarza się, że liczba pozostałych zbiorów L_i jest mała. Na przykład, jeśli system toleruje $k-1$ uszkodzeń elementów (tzn. gdy jest to system o strukturze „ k -z- n :F n ”) i L jest zbiorem wszystkich $(k-1)$ elementowych zbiorów elementów, to

$$M = \binom{n}{k-1} \quad \text{oraz} \quad I = 2^M - 1$$

Ale w tym przypadku liczba nietrywialnych zbiorów L_i jest równa n .

UWAGA 3

Ze wzoru (3.9) wynika, że dystrybuanta łączna $G(t_1, t_2, \dots, t_m, t)$ jest sumą $2^N - 1$ składników. Ale funkcja Q_i (patrz (3.10)) będąca podstawą do wyznaczania $P\{A(x, y, \tau, S, L)\}$ jest – po redukcji identycznych elementów – sumą nie więcej niż $2^{(N-k)}$ składników, gdzie k jest liczbą elementów rozpatrywanego zbioru L_i .

UWAGA 4

Uwzględniając UWAGI 1 – 3 łatwo można zalgorytmizować przedstawioną wyżej metodę i przy pomocy komputera wyznaczać dystrybuantę reszkowego czasu poprawnej pracy dowolnego systemu o koherentnej strukturze niezawodnościowej.

Przykłady

We wszystkich przykładach założono, że elementy systemu uszkadzają się niezależnie od siebie.

Przykład 3.1. Dwieelementowy system o równoległej strukturze niezawodnościowej

Założmy, że $L = \{\ell_1, \ell_2\}$, $\ell_1 = \{c_1\}$, $\ell_2 = \{c_2\}$. Oznacza to, że T_r zaczyna się wraz z uszkodzeniem pierwszego elementu. Z (3.3) wynika, że

$$\begin{aligned} P\{A(x, y, \tau, S, L)\} &= P\left\{[(T_1 < x) \cup (T_2 < x)] \cap (T \geq y + \tau)\right\} = \\ &= P\{(T_1 < x) \cap (T \geq y + \tau)\} + P\{(T_2 < x) \cap (T \geq y + \tau)\} - \\ &- P\{(T_1 < x) \cap (T_2 < x) \cap (T \geq y + \tau)\}. \end{aligned}$$

Z powyższego wyrażenia wynika, że: $L_1 = \{c_1\}$, $L_2 = \{c_2\}$, $L_3 = \{c_1, c_2\}$. Zbiór L_3 jest przekrojem systemu, a zatem (patrz UWAGA 1) nie jest rozpatrywany. Wobec tego łączna dystrybuanta wektora losowego (T_1, T_2, T) ma postać:

$$\begin{aligned} G(t_1, t_2, t) &= P\{(T_1 < t_1) \cap (T_2 < t_2) \cap [(T_1 < t) \cap (T_2 < t)]\} = \\ &P\{[(T_1 < \min(t_1, t)) \cap [(T_2 < \min(t_2, t)]]\} \end{aligned}$$

Ze wzoru (3.10), dla $\ell_1 = \{c_1\}$ mamy:

$$Q_1(t_1, t_2, t) = P\{(T_1 < t_1) \cap (T_2 < t)\} = F_1(t_1)F_2(t),$$

a więc

$$\frac{\partial}{\partial z_1} Q_1(z_1, t_2, t) = f_1(z_1)F_2(t),$$

$$\frac{\partial}{\partial z_1} Q_1(z_1, \infty, \infty) = f_1(z_1),$$

$$\frac{\partial}{\partial z_1} Q_1(z_1, \infty, t + \tau) = f_1(z_1)F_2(t + \tau).$$

Stosując zależność (3.13) otrzymujemy:

$$F_{r,1}(\tau) = \int_0^{\infty} f_1(t)[1 - F_2(t + \tau)]dt.$$

Podobnie,

$$F_{r,2}(\tau) = \int_0^{\infty} f_2(t)[1 - F_1(t + \tau)]dt.$$

Ostatecznie, na mocy (3.8) otrzymujemy (dla $\tau > 0$)

$$\begin{aligned} F_r(\tau) &= 1 - \int_0^{\infty} f_1(t)[1 - F_2(t + \tau)]dt - \int_0^{\infty} f_2(t)[1 - F_1(t + \tau)]dt = \\ &= \int_0^{\infty} \{f_1(t)[F_2(t + \tau) - F_2(t)] + f_2(t)[F_1(t + \tau) - F_1(t)]\}dt. \end{aligned}$$

Przykład 3.2. Dwoelementowy system o szeregowej strukturze niezawodnościowej.

W systemie o szeregowej strukturze niezawodnościowej dowolny zbiór jego elementów jest przekrojem niezdatności. A zatem, na podstawie UWAGI 1:

$$F_r(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{dla } \tau \leq 0 \\ 1, & \text{dla } \tau > 0. \end{cases}$$

Przykład 3.3. System o strukturze „2-z-3:G/F”

Niech $L = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$, $\ell_1 = \{c_1\}$, $\ell_2 = \{c_2\}$, $\ell_3 = \{c_3\}$. W niniejszym przykładzie mamy: $M = 3$, $I = 2^3 - 1 = 7$, a zatem mamy 7 różnych zbiorów typu L_i : $L_1 = \{c_1\}$, $L_2 = \{c_2\}$, $L_3 = \{c_3\}$, $L_4 = \{c_1, c_2\}$, $L_5 = \{c_1, c_3\}$, $L_6 = \{c_2, c_3\}$, $L_7 = \{c_1, c_2, c_3\}$. Zauważmy, że zbiory L_4, L_5, L_6 oraz L_7 są przekrojami niezdatności systemu, a zatem $F_{i,i}(\tau) \equiv 0$ dla $i = 4, \dots, 7$. Ze względu na to, że $K_i = 1$ dla $i = 1, 2, 3$ (patrz (3.4)) to na podstawie wzorów (3.5) i (3.6):

$$\begin{aligned} P\{A(x, y, \tau, S, L)\} &= P\{(T_1 < x) \cap (T \geq y + \tau)\} + P\{(T_2 < x) \cap (T \geq y + \tau)\} + \\ &+ P\{(T_3 < x) \cap (T \geq y + \tau)\} \end{aligned}$$

Dystrybuanta łączna wektora losowego (T_1, T_2, T_3, T) może być zapisana w postaci:

$$\begin{aligned} G(t_1, t_2, t_3, t) &= P\{T_1 < t_1, T_2 < t_2, T_3 < t_3, T < t\} = \\ &= P\{(T_1 < t_1) \cap (T_2 < t_2) \cap (T_3 < t_3) \cap \\ &\cap [(T_1 < t) \cap (T_2 < t) \cup (T_1 < t) \cap (T_3 < t) \cup (T_2 < t) \cap (T_3 < t)]\} = \\ &= P\{(T_1 < \min(t_1, t)) \cap (T_2 < \min(t_2, t)) \cap (T_3 < t_3) \cup \\ &\cup (T_1 < \min(t_1, t)) \cap (T_2 < t_2) \cap (T_3 < \min(t_3, t)) \cup \\ &\cup (T_1 < t_1) \cap (T_2 < \min(t_2, t)) \cap (T_3 < \min(t_3, t))\}. \end{aligned}$$

Ze wzoru (3.10), dla $L_1 = \{c_1\}$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 Q(t_1, t_2, t_3, t) &= P\{(T_1 < t_1) \cap (T_2 < t) \cap (T_3 < t_3)\} \cup \\
 &\cup (T_1 < t) \cap (T_2 < t) \cap (T_3 < t) \cup (T_1 < t_1) \cap (T_2 < t) \cap (T_3 < t)\} \\
 &= F_1(t_1)F_2(t)F_3(t_3) + F_1(t_1)F_2(t_2)F_3(t) + F_1(t_1)F_2(t)F_3(t) - F_1(t_1)F_2(t)F_3(t) - \\
 &- F_1(t_1)F_2(t)F_3(t) - F_1(t_1)F_2(t)F_3(t) + F_1(t_1)F_2(t)F_3(t) = \\
 &= F_1(t_1)[F_2(t)F_3(t_3) + F_2(t_2)F_3(t) - F_2(t)F_3(t)] \\
 \frac{\partial}{\partial z_1} Q(z_1, t_2, t_3, t) &= f_1(z_1)[F_2(t)F_3(t) + F_2(t_2)F_3(t) - F_2(t)F_3(t)] \\
 \frac{\partial}{\partial z_1} Q(z_1, \infty, \infty, \infty) &= f_1(z_1), \\
 \frac{\partial}{\partial z_1} Q(z_1, \infty, \infty, t + \tau) &= f_1(z_1)[F_2(t + \tau) + F_3(t + \tau) - F_2(t + \tau)F_3(t + \tau)] = \\
 &= f_1(z_1)\{1 - [1 - F_2(t + \tau)][1 - F_3(t + \tau)]\}.
 \end{aligned}$$

Stąd, na podstawie wzoru (3.13) otrzymujemy

$$F_{r,1}(\tau) = \int_0^{\infty} f_1(t)[1 - F_2(t + \tau)[1 - F_3(t + \tau)]]dt.$$

W analogiczny sposób można pokazać, że

$$F_{r,2}(\tau) = \int_0^{\infty} f_2(t)[1 - F_1(t + \tau)[1 - F_3(t + \tau)]]dt.$$

$$F_{r,3}(\tau) = \int_0^{\infty} f_3(t)[1 - F_1(t + \tau)[1 - F_2(t + \tau)]]dt.$$

W ten sposób, na podstawie wzoru (3.8)

$$F_r(\tau) = 1 - \sum_{\substack{j,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^3 \int_0^{\infty} f_i(t) [1 - F_j(t + \tau)] [1 - F_k(t + \tau)] dt.$$

Ze względu na to, że

$$1 - [1 - F_1(t)] [1 - F_2(t)] [1 - F_3(t)]$$

jest dystrybuantą 3-elementowego systemu o strukturze szeregowej, to mamy

$$\int_0^{\infty} d\{1 - [1 - F_1(t)] [1 - F_2(t)] [1 - F_3(t)]\} \equiv 1$$

Wobec powyższego wzór na $F_r(\tau)$ można zapisać w postaci:

$$F_r(\tau) = \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^3 \int_0^{\infty} f_i(t) \{ [1 - F_j(t)] [1 - F_k(t)] - [1 - F_j(t + \tau)] [1 - F_k(t + \tau)] \} dt$$

Przykład 3.4. Trójelementowy system o strukturze równoległej

- a) Załóżmy, że $L = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$, $\ell_1 = \{c_1, c_2\}$, $\ell_2 = \{c_1, c_3\}$, $\ell_3 = \{c_2, c_3\}$. W tym przypadku otrzymujemy: $L_1 = \{c_1, c_2\}$, $L_2 = \{c_1, c_3\}$, $L_3 = \{c_2, c_3\}$, $L_4 \equiv L_5 \equiv L_6 \equiv L_7 \equiv \{c_1, c_2, c_3\}$. Zbiory L_i ($i = 4, \dots, 7$) są przekrojami niezdatności systemu. Podobnie jak poprzednio można pokazać, że

$$F_r(\tau) = 1 - \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^3 \int_0^{\infty} [f_i(t) F_j(t) = F_i(t) f_j(t)] [1 - F_k(t + \tau)] dt$$

lub, alternatywnie,

$$R_r(\tau) = \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^3 \int_0^{\infty} f_i(t) \{ [1 - F_j(t)] - [1 - F_j(t + \tau)] \} \{ [1 - F_k(t)] - [1 - F_k(t + \tau)] \} dt$$

b) Załóżmy teraz, że $L = \{\ell_1, \ell_2\}$, $\ell_1 = \{c_1\}$, $\ell_2 = \{c_2, c_3\}$. W tym przypadku $L_1 = \{c_1\}$, $L_2 = \{c_2, c_3\}$, $L_3 = \{c_1, c_2, c_3\}$. Zbiór L_3 jest przekrojem niezdatności systemu. Można łatwo pokazać, że

$$F_r(\tau) = 1 - \int_0^{\infty} \{f_1(t)[1 - F_2(t+\tau)F_3(t+\tau)] + [f_2(t)F_3(t) + F_2(t)f_3(t)][1 - F_1(t+\tau)]\} dt$$

Przykład 3.5. Trójelementowy system o strukturze równoległo-szeregowej

Rozpatrzmy ponownie system o strukturze jak na Rysunku 2.2. Dla tego systemu: $N = 2$, $C_1 = \{c_1, c_2\}$, $C_2 = \{c_2, c_3\}$.

Założmy, że $L = \{\ell_1, \ell_2\}$, $\ell_1 = \{c_1\}$, $\ell_2 = \{c_2\}$. Oznacza to, że T_r zaczyna się, gdy uszkodzi się element c_1 lub element c_2 . W rozpatrywanym przypadku element c_3 jest nieobserwowany. Mamy trzy zbiory typu L_i : $L_1 = \{c_1\}$, $L_2 = \{c_2\}$, $L_3 = \{c_1, c_3\}$ oraz (patrz (3.4)) $K_1 = K_2 = 1$, $K_3 = 2$. Dystrybuanta łączna wektora (T_1, T_2, T_3, T) może być zapisana jako

$$G(t_1, t_2, t_3, t) = F_1(\min(t_1, t))F_2(t_2)F_3(\min(t_3, t)) +$$

$$F_1(t_1)F_2(\min(t_2, t))F_3(\min(t_3, t)) - F_1(\min(t_1, t))F_2(\min(t_2, t))F_3(\min(t_3, t)).$$

Dla $L_1 = \{c_1\}$, korzystając z (3.10), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} Q_1(t_1, t_2, t_3, t) &= F_1(t_1)F_2(t_2)F_3(t) + F_1(t_1)F_2(t)F_3(t) - F_1(t)F_2(t)F_3(t) = \\ &= F_1(t_1)F_2(t_2)F_3(t). \end{aligned}$$

A zatem

$$\frac{\partial}{\partial z_1} Q_1(t_1, t_2, t_3, t) = f_1(z_1)F_2(t_2)F_3(t).$$

Stosując (3.13) otrzymujemy

$$F_{r,1}(\tau) = \int_0^{\infty} f_1(t)[1 - F_3(t+\tau)] dt,$$

oraz podobnie

$$F_{r,2}(\tau) = \int_0^{\infty} f_2(t)[1 - F_3(t+\tau)] dt$$

Dla $L_3 = \{c_1, c_2\}$ mamy

$$Q_3(t_1, t_2, t_3, t) = F_1(z_3)F_2(z_3)F_3(t),$$

stąd zaś

$$\frac{\partial}{\partial z_3} Q_3(z_3, z_3, t_3, t) = [f_1(z_3)F_2(z_3) + F_1(z_3)f_2(z_3)]F_3(t).$$

Ze wzoru (3.13) otrzymujemy

$$F_{r,3}(\tau) = \int_0^{\infty} [f_1(t)F_2(t) + F_1(t)f_2(t)] [1 - F_3(t + \tau)] dt,$$

a z (3.8) ostatecznie otrzymujemy

$$F_r(\tau) = 1 - \int_0^{\infty} f_1(t) [1 - F_3(t + \tau)] dt - \int_0^{\infty} f_2(t) [1 - F_3(t + \tau)] dt + \\ \int_0^{\infty} [f_1(t)F_2(t) + F_1(t)F_2(t)] [1 - F_3(t + \tau)] dt$$

Zauważmy, że $F_r(0+) \neq 0$. Jest to poprawny rezultat, gdyż element c_3 nie jest obserwowany i z pewnym dodatnim prawdopodobieństwem może się on uszkodzić pierwszy. Oznacza to, że uszkodzenie dowolnego obserwowanego elementu (c_2 lub c_3) powoduje uszkodzenie systemu i tym samym czasem resztkowy czas poprawnej pracy systemu jest równy 0.

W bardziej złożonych przypadkach niż te wyżej rozpatrzone, wyznaczenie dystrybuanty resztkowego czasu poprawnej pracy systemu wymagałoby przeprowadzenia wielu bardzo pracochłonnych obliczeń. Z wyżej przeprowadzonych rozważań wynika wręcz, że dla rzeczywistych systemów, składających się z dziesiątków elementów i dla bardziej licznych zbiorów inicjalnych, rozwiązanie tego zagadnienia byłoby niewykonalne. Z rozważań tych wynika jednakże również to, że opisywana metoda dość łatwo daje się algorytmizować. Odpowiednio skonstruowany program komputerowy pozwala interesującą nas rozkład zmiennej losowej T_r wyznaczać metodami numerycznymi. W ten sposób otrzymujemy tylko wartości liczbowe dystrybuanty zmiennej losowej T_r lub jej wykres, nie zaś jej postać funkcyjną, lecz dla praktycznego zastosowania tej metody do oceny żywotności systemów jest to na ogół wystarczające.

L I T E R A T U R A

Karpiński J. (1983) „General probability of system failure”. *IEEE Transactions on Reliability*, vol.32, No. 5, s. 444 – 449.

Karpiński J. (1988) „Distribution of residual system-life after partial failures”, *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 37, No. 5, s. 539 – 544.

Karpiński J., Korczak E. (1990) „Metody oceny niezawodności dwustanowych systemów technicznych”. Omnitech, Warszawa.

Nahman J. M. (1992) „Minimal paths & cuts of networks exposed to common-cause failures. *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 41, No. 1,, s. 76 - 80.

Page L. B., Perry J. C. (1989) „Reliability of directed networks using the factoring theorem”. *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 38, No. 5, s. 556 – 562.

Schneeweiss W., Karpiński J. (1986) „The thory of delayed repair for all systems with 2 or 3 components”, *Informatik – Berichte, Fernuniversität, Hagen*.

Yuan J., Lai M. T., Ko K. L. (1989) „Evaluation of system reliability wiyh common-cause failures, by a pseudo-environments model.”. *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 38, No. 3, s. 328 – 332.

the study. The first author (JMF) was the principal investigator of the study and was responsible for the design, data collection, data analysis and the writing of the manuscript. The second author (JMM) was the principal investigator of the study and was responsible for the design, data collection, data analysis and the writing of the manuscript. The third author (JMM) was the principal investigator of the study and was responsible for the design, data collection, data analysis and the writing of the manuscript. The fourth author (JMM) was the principal investigator of the study and was responsible for the design, data collection, data analysis and the writing of the manuscript. The fifth author (JMM) was the principal investigator of the study and was responsible for the design, data collection, data analysis and the writing of the manuscript. The sixth author (JMM) was the principal investigator of the study and was responsible for the design, data collection, data analysis and the writing of the manuscript. The seventh author (JMM) was the principal investigator of the study and was responsible for the design, data collection, data analysis and the writing of the manuscript. The eighth author (JMM) was the principal investigator of the study and was responsible for the design, data collection, data analysis and the writing of the manuscript. The ninth author (JMM) was the principal investigator of the study and was responsible for the design, data collection, data analysis and the writing of the manuscript. The tenth author (JMM) was the principal investigator of the study and was responsible for the design, data collection, data analysis and the writing of the manuscript.

... (text continues) ...

... (text continues) ...

... (text continues) ...

... (text continues) ...

... (text continues) ...

... (text continues) ...

