13/2004

Raport Badawczy
Research Report

RB/63/2004

Markowskie modele procesów edukacyjnych

M.Bereziński, M. Inkielman, D.Wagner:

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr inż. Roman Kulikowski

Warszawa 2004

Markowskie modele procesów edukacyjnych

M. Bereziński, M. Inkielman, D. Wagner

Warszawa 2004

Spis treści

Streszczenie

W warunkach coraz bardziej konkurencyjnego rynku edukacyjnego i pogłębiającego się niżu demograficznego potrzeba posiadania modelu wspomagającego zarządzanie procesem edukacyjnym jest zgłaszana przez coraz większą liczbę uczelni. W pracy – na przykładzie szkoły wyższej - są przedstawione wyniki badań prowadzonych przez autorów nad zastosowaniem łańcuchów Markowa do modelowania dynamiki procesu edukacyjnego. Omówiono podstawowy kontekst zadania modelowania tego procesu kładąc szczególny akcent na uwarunkowania wynikające z realizowanej w kraju reformy edukacji. Rozpatrzono uczelnię wielowydziałową o takim sanym cyklu studiów na każdym wydziale i wprowadzono pojęcie wektora stanu procesu edukacyjnego. Składowymi wektora są rzeczywiste opcje określające uczelniany status studenta. Zidentyfikowano i przeanalizowano możliwe przejścia między stanami. Stwierdzono, że macierz przejścia jest macierzą pochłaniającą, rzadką. Wyprowadzono analityczne formuły na obliczanie wartości prawdopodobieństw przejść. Wskazano na metodologiczną niepoprawność przyjmowania a priori, że ciąg stanów procesu edukacyjnego jest jednorodnym łańcuchem Markowa pierwszego rzędu. Przedstawiono test do weryfikowania hipotezy o niezależności, test do sprawdzania jednorodności łańcucha i test do weryfikacji hipotezy o rzędzie łańcucha. Dużo uwagi poświęcono nieokreśloności procesu edukacyjnego: przedstawiono możliwość jej oceny za pomocą entropii informacyjnej oraz możliwość wykorzystania znajomości entropii stanu procesu edukacyjnego do oceny rzędu łańcucha. Skonstruowano model procesu edukacyjnego realizowanego na poziomie szkoły wyższej. Ma on postać szesnastostanowego pochłaniającego niejednorodnego łańcucha Markowa. W oparciu o dane rzeczywiste obrazujące zmiany stanu procesu edukacyjnego wybranego wydziału jednej z uczelni krajowych dokonano estymacji macierzy przejść dla kilku kolejnych lat akademickich, znaleziono funkcje opisujące zmienność elementów tych macierzy w czasie i zbudowano macierz dynamiczną, którą użyto do skonstruowania prognozy stanów procesu edukacyjnego dla pięcioletniego horyzontu czasowego. Wyniki są pozytywne i wskazują na celowość dalszych badań teoretycznych i aplikacyjnych nad modelowaniem i prognozowaniem dynamiki procesów edukacyjnych za pomocą modeli łańcuchowych. Sformułowano kilka propozycji w tym zakresie, w tym propozycję wzbogacenia tradycyjnych metod szacowania macierzy przejścia o metody ekspertów wspierane logicznymi analizami przyczynowo-skutkowymi i rachunkiem prawdopodobieństwa subiektywnego. Zwrócono również uwagę na potrzebę rozwinięcia modelu przez wprowadzenie elementów sterowania procesem edukacyjnym.

1. Geneza problemu, cel i zakres pracy

Bedąca w toku realizacji reforma naszego systemu edukacyjnego stawia każdej szkole poziomu podstawowego, gimnazjalnego, licealnego i wyższego wymóg systematycznego doskonalenia jakości nauczania i wychowania. Szkoły znalazły się jednak w zasadniczo innych warunkach funkcjonowania niż jeszcze kilkanaście lat temu, a warunki te ustawicznie zmieniają się, czyniąc ze szkół podmioty rynkowe. Metody kształtowania jakości, które zdawały egzamin w okresie scentralizowanego zarządzania oświatą, kiedy zarządzanie szkołą w zasadzie sprowadzało się do rygorystycznego wykonywania poleceń otrzymywanych z jednostki nadrzędnej i prowadzenia związanej z tym sprawozdawczości, w warunkach rynkowych utraciły rację bytu. W kształtowaniu jakości dzisiejszej szkoły trzeba oprzeć się na wykorzystaniu naukowej wiedzy z zakresu zarządzania, a sam proces kształtowania jakości musi być wspomagany wykorzystaniem modeli matematycznych, techniki komputerowej i technologii informacyjnej.

Syntetycznym wyrazem jakości szkoły jest przede wszystkim skuteczność realizowanego w niej procesu edukacyjnego. Narzędziami wspomagającymi kształtowanie tej skuteczności powinny być skomputeryzowane pakiety modeli matematycznych odwzorowujących podstawowe aspekty procesu edukacyjnego i jego wielokontekstowej oceny. Korzystać z takich modeli będzie mogła jednak tylko odpowiednio przygotowana kadra dyrekcyjna i nauczycielska. Z tego powodu istnieje pilna potrzeba przedłożenia czynnikom założycielskim szkół i jednostkom sprawującym nam szkołami nadzór pedagogiczny stosownego wachlarza ofert dotyczących zapoznania zarządów szkół i kadry nauczycielskiej z co najmniej podstawowymi ideami teorii zarządzania oraz ze strukturą i zasadami korzystania z takich pakietów. Trzeba przede wszystkim uświadomić im, że chociaż w grę wchodzą różne rodzaje matematycznych modeli procesu edukacji i jego oceny, to jednak zawsze postać modelu zależy od zadania, do którego rozwiązania model ma służyć oraz od ilościowo-jakościowej struktury i składu zbioru danych, w oparciu o które będzie się estymować nieznane wartości parametrów modelu (zob., np.: Bubnicki, 1974; Gutenbaum, 1987; Kacprzyński, 1974; Mańczak, 1974).

Zarządzanie szkołą jest zadaniem systemowym, hierarchicznie ustrukturalizowanym, wykonywanym w warunkach różnorakiego ryzyka i nieokreśloności. Jest to system wielocelowy, którego podstawowa działalność ma być ukierunkowana na jak najlepsze prowadzenie procesu edukacyjnego, przy pełnym uwzględnieniu obowiązujących standardów edukacyjnych i innych norm regulujących tryb działania szkoły. Świadome kształtowanie procesu edukacyjnego wymaga z jednej strony ciągłego monitorowania i oceniania stanu edukacji każdego indywidualnego ucznia, a z drugiej monitorowania stanu edukacji całej populacji uczniowskiej jako całości, bądź jej wyodrębnionych grup. Chociaż tradycyjne metody wykonywania tego zadania są stopniowo, ale systematycznie wspierane wykorzystaniem techniki komputerowej i technologii informacyjnej, to jednak postęp w tej dziedzinie jest zbyt wolny. W kształtowaniu jakości procesu edukacyjnego jeszcze prawie w ogóle nie korzysta się z możliwości, jakie w tym zakresie oferuje teoria modelowania systemowego. W szczególności nie korzysta się z modeli systemowych odwzorowujących na różnych poziomach szczegółowości proces przechodzenia uczniów lub studentów przez kolejne fazy edukacji szkolnej. Istnieje pilna potrzeba skonstruowania takich modeli, przy czym powinny one być nie tylko poprawne metodologicznie, ale i użyteczne praktycznie. Tę użyteczność można osiągnąć przez zapewnienie zgodności modelu z rzeczywistym procesem edukacyjnym i zachowanie kanonów teorii modelowania. Postulat zgodności nie oznacza jednak, że model ma odwzorowywać wszystkie możliwe aspekty procesu edukacyjnego. Skonstruowanie takiego modelu jest niemożliwe, bo każdy model jest uproszczeniem rzeczywistości. Chodzi o to, aby jak najwierniej i w jak najprostszy sposób odwzorowywał te aspekty, które są ważne z punktu widzenia rozwiązywanego zadania.

Zadaniem, którym zajmujemy się w tej pracy nie jest skonstruowanie całościowego, systemowego modelu zarządzania szkołą. Taki model będzie budowany w przyszłości, ale warunkiem powodzenia tego przedsięwzięcia jest wcześniejsze zbudowanie modelu dynamiki przechodzenia uczniów lub studentów przez szkolny proces edukacyjny. Zbudowanie i wstępna weryfikacja takiego modelu na danych rzeczywistych jest podstawowym celem niniejszej pracy. Przyjmujemy, że model musi odwzorowywać faktyczną organizację procesu edukacyjnego (podziału na klasy lub wydziały, liczby lat nauki lub studiów, struktury powiązań między tymi elementami, zasad promowania itp.) i rzeczywisty tryb przepływu uczniów lub studentów przez wszystkie kolejne jego fazy. Podstawową funkcją modelu ma być prognozowanie ogólnej liczby uczniów lub studentów szkoły w określonym horyzoncie czasowym oraz dynamiki ich rozkładu między poszczególne klasy i lata nauki lub wydziały i lata studiów w kolejnych latach szkolnych lub akademickich. Posiadanie takiego modelu jest ważne dla zarządzania szkołą, ponieważ informacja o spodziewanej w przyszłości ogólnej liczbie uczniów lub studentów szkoły i spodziewanej dynamice struktury tej zbiorowości w jej przechodzeniu przez kolejne fazy realizowanego w szkole procesu edukacyjnego jest jednym z podstawowych czynników potrzebnych do tworzenia wiązki scenariuszy rozwoju i kształtowania jakości szkoły oraz wyboru w każdej konkretnej sytuacji tego spośród nich, który będzie maksymalizował indywidualną i społeczną użyteczność edukacji, a równocześnie minimalizował rozmaite formy ryzyka indywidualnego i zbiorowego, na które są narażeni uczniowie i studenci oraz szkoła jako instytucja. Model będzie miał postać łańcucha Markowa. O jej wyborze zdecydowały wyniki wcześniejszych badań w zakresie modelowania procesu edukacyjnego oraz dwa aspekty: struktura zbiorów danych dokumentujących przebieg edukacji każdego ucznia lub studenta oraz postać zbiorczych statystyk przygotowywanych w każdej szkole na początek i koniec każdego semestru i roku szkolnego lub akademickiego oraz przeznaczenie modelu. Omówimy teraz pokrótce wpływ każdego z tych aspektów na wybór postaci modelu.

Z teorii modelowania matematycznego wiadomo, że silny wpływ na wybór postaci modelu mają dane, na podstawie których – po wybraniu postaci modelu - szacuje się liczbowe wartości jego parametrów. W szkolnictwie dane te mają na ogół postać wielowymiarowych szeregów czasowych ilustrujących rzeczywisty tryb przepływu uczniów lub studentów przez podsystem edukacyjny szkoły w jakimś okresie czasu. Z reguły przedstawiają one liczbową strukturę zbiorowości uczniów lub studentów na dzień rozpoczęcia bądź zakończenia semestru czy też roku szkolnego lub akademickiego. Istnieje dobrze opracowana i wciąż dynamicznie rozwijająca się teoria wielowymiarowych szeregów czasowych (zob., np.: Hannan, 1970; Brillinger, 1975; Halbfleisch, 1985a, 1985b; Barndorff-Nielsen i Cox, 1994; Lindsey, 1996; Kantz i Schreiber, 1997). W teorii tej dominuje nurt badań z góry zakładający, że wektory liczb będące elementami szeregu czasowego są realizacjami wzajemnie niezależnych wielowymiarowych zmiennych losowych charakteryzujących stan badanego procesu, przy czym najczęściej przyjmuje się, że są to zmienne gaussowskie. Jest to założenie wygodne i chętnie przyjmowane, daje bowiem możliwość posługiwania się efektownym aparatem matematycznym. Trzeba jednak wprost stwierdzić, że w większości zastosowań jest to założenie utopijne, nadmiernie upraszczające istotę modelowanego procesu i wypaczające sens modelowania. W szczególności odnosi się to do modelowania procesów edukacyjnych. Nie jest naszym zamiarem generalne krytykowanie analiz opartych na założeniu niezależności w szeregach czasowych, bowiem w wielu konkretnych zastosowaniach założenia te są akceptowalnymi aproksymacjami rzeczywistości, a oparte na nich modele przyniosły i przynoszą w różnych dziedzinach wiele praktycznie użytecznych rezultatów. Chcemy jednak zwrócić uwagę na to, że istnieją również i takie procesy rzeczywiste, w odniesieniu do których przyjmowanie założenia o wzajemnej stochastycznej niezależności kolejnych stanów byłoby merytoryczną niewłaściwością. Jak wiadomo, jeżeli założenie o niezależności jest dopuszczalne, to całościowe własności procesu bada się korzystając z twierdzeń granicznych dotyczących sum zmiennych losowych niezależnych o jednakowych lub różnych rozkładach prawdopodobieństwa (zob., np.: Cox i Miller, 1965; Fisz, 1968; Kalbfleisch 1985a, 1985b; Pluciński i Plucińska, 1979; Lindsley, 1996). Faktycznie nigdy to założenie nie jest w rzeczywistości spełnione, gdyż przeczyłoby to fizycznej i systemowej zasadzie powszechnego uwarunkowania zjawisk, lecz zawsze ma charakter przybliżony (zob., np.: Bertalanfy, 1968; Zadeh i Polak, 1969; Klir, 1972; Haken, 1978, 1983; Prigogine, 1980, 1997; Hubert, 1997; Tempczyk, 1995). Można je przyjmować, jeżeli więzi systemowe pomiędzy poszczególnymi elementami obiektu badań są na tyle słabe, że z praktycznego punktu widzenia nie ma potrzeby ich uwzględniania. Jeżeli jednak więzi te nie mogą być pominięte, to korzystanie z twierdzeń granicznych rachunku prawdopodobieństwa byłoby sprzeczne z logiką analizy systemowej, fizyki i synergetyki, w których jednym z głównych metodologicznych kanonów jest stwierdzenie, że ponieważ całość jest czymś więcej niż sumą elementów, więc całościowych własności systemu nie można otrzymać przez arytmetyczne zsumowanie odpowiednich własności wszystkich elementów (zob., np.: van Gigch, 1978; Heisenberg, 1977; Haken, 1978, 1983). Z punktu widzenia modelowania dynamiki procesu przepływu uczniów lub studentów przez system edukacyjny szkoły jest to uwaga ważna, bowiem logika procesu edukacyjnego jest taka, że kolejne jego stadia i stany nie są niezależne, lecz silnie zależą od wszystkich stadiów i stanów poprzednich. Zwróćmy też uwagę na to, że o ilościowo-jakościowym rozkładzie zbiorowości uczniów lub studentów danej szkoły decyduje przede wszystkim ładunek wiedzy i stopień umiejętności jej wykorzystania przez poszczególnych uczniów lub studentów. Punktem wyjścia do rozpoczęcia edukacji ucznia lub studenta w danej klasie lub na danym roku studiów jest aktualny stan jego wiedzy, który - rzecz jasna - wyraża cały dotychczas zdobyty przez niego ładunek wiedzy i to nie tylko szkolnej. Ponieważ szeregi czasowe charakteryzujące dynamikę zmian ilościowo-jakościowej struktury zbiorowości uczniów lub studentów odwzorowują w sposób jawny lub uwikłany zmiany ilościowo-jakościowej struktury ich wiedzy i umiejętności, więc jest uzasadnione przyjęcie założenia, że w szeregach tych zachodzi własność Markowa. Jej istotą jest jawna stochastyczna zależność bieżącego stanu procesu od jednego lub większej liczby stanów bezpośrednio go poprzedzającego.

Chociaż próby skonstruowania takiego modelu dynamiki przepływu uczniów lub studentów przez podsystem edukacyjny szkoły, który odwzorowywałby tę zależność, są podejmowane od dawna, to opublikowanych prac na ten temat jest w światowej literaturze przedmiotu niewiele. Większość prac z tego zakresu ma bowiem charakter niepublikowanych raportów wewnętrznych, w dodatku często objętych klauzulą poufności. Jest to zrozumiałe, bowiem w warunkach rynkowej konkurencji posiadanie dobrego modelu napływu i przepływu uczniów lub studentów przez kolejne fazy szkolnego procesu edukacyjnego daje szkole możliwość kształtowania struktury tego procesu, stałego podnoszenia jego jakości poprzez dobór nowoczesnych treści, środków i metod nauczania, oferowanie możliwości uczestnictwa w atrakcyjnych kołach zainteresowań i zajęciach fakultatywnych, organizowanie nowych kierunków studiów i specjalności, atrakcyjnych praktyk , dobór właściwej kadry dydaktycznej, kształtowanie infrastruktury szkoły itp. O ile autorom niniejszej pracy wiadomo, w literaturze światowej nie ma wyczerpującej pozycji w całości poświęconej zastosowaniom teorii procesów stochastycznych do całościowego modelowania sfery edukacji. Z uwagi na społeczny aspekt edukacji i oczywiste jej związki z problematyką rozwoju demograficznego, modelowanie dynamiki podsystemu edukacyjnego szkoły jest na ogół traktowane jako szczególny przypadek modelowania dynamiki mobilności społecznej, w szczególności dynamiki procesów migracyjnych (zob., np.: Kemeny i Snell, 1960; Bartholomew, 1967; Boudon, 1973; Tintner i Sengupta, 1973). To prawda, że na pewnym poziomie ogólności mechanizm i dynamika procesów edukacyjnych wykazują duże podobieństwo do mechanizmów i dynamiki procesów migracyjnych. Tym niemniej, zachodzą między nimi na tyle istotne różnice, że traktowanie wewnątrzszkolnej mobilności uczniów lub studentów jako szczególnego przypadku mobilności wewnątrzpokoleniowej lub międzypokoleniowej jest metodologicznie błędne już choćby tylko z tego powodu, że pierwszy z tych procesów jest w pełni świadomie ustrukturalizowany, zorganizowany i realizowany, podczas gdy w drugim dominuje naturalna spontaniczność i czynnik samoorganizacji.

Z formalnego podobieństwa a często wręcz z zewnętrznej formalnej tożsamości modeli obu tych procesów nie należy wyprowadzać wniosków w rodzaju stwierdzenia, że można je opisywać za pomocą jednego i tego samego modelu, jest to bowiem wniosek alogiczny. W dziedzinie zastosowań o oryginalności modelu matematycznego świadczy przede wszystkim nowość i sposób użycia znanych teorii matematycznych, dostrzegania analogii między zjawiskami i analogii między analogiami. Na przykład to, że za pomocą procesów Markowa można opisać dynamikę wymiany urządzeń grzewczych w zbiorowości gospodarstw domowych, dynamikę dobowego rozkładu podróży podejmowanych przez użytkowników środków komunikacji miejskiej, czy też dynamikę zmian poziomu erytrocytów we krwi pacjentów cierpiących na anemię wcale nie neguje oryginalności nowych zastosowań, w których formalna postać modelu będzie podobna lub nawet taka sama jak w innych. Błędne jest utożsamianie oryginalności teorii matematycznej z oryginalnością jej zastosowań. Czym innym jest jedyna i niepowtarzalna oryginalność centralnego twierdzenia granicznego, a czym innym bez mała nieograniczona oryginalność i sposoby jego zastosowań. Czym innym jest oryginalność matematycznego aparatu teorii łańcuchów Markowa, a czym innym oryginalność ich zastosowań, nawet w tej samej dziedzinie i do modelowania tego samego procesu. O tym trzeba pamiętać, gdy po wielu latach impasu w modelowaniu procesów edukacyjnych, spowodowanego przede wszystkim zbyt pochopnym utożsamieniem związków przyczynowo-skutkowych rządzących mechanizmami mobilności społeczej ze związkami przyczynowo-skutkowymi rządzącymi mechanizmami przejścia uczniów lub studentów przez system edukacyjny szkoły, znów podejmuje się próby zastosowania różnych teorii matematycznych do modelowania procesów edukacyjnych, jako czynnika kształtowania przyszłościowego społeczeństwa wiedzy. W szczególności odnosi się to do modelowania dynamiki procesu edukacyjnego w szkole.

Idea matematycznego modelowania tego procesu ma już dość długie tradycje, przy czym od dawna szczególne zainteresowanie wzbudza możliwość wykorzystania w tym zakresie teorii procesów Markowa (zob., np., Tinbergen i Boss, 1965; Berezowski, 1978; Mazur, 1978; Spinney i McLaughlin, 1979; Bessent i Bessent, 1980; Bloomfield i Updegrove, 1981; Bertchold 1998; Tweedie, 2001; Bereziński, 2003). Bierze się to stąd, że sieciowa struktura i przepływowa dynamika procesu edukacyjnego już intuicyjnie wydają się być zgodne z matematycznymi założeniami teorii tych procesów. W różnych krajach istnieją jednak różne systemy edukacyjne. Co więcej, nawet w jednym i tym samym kraju ma miejsce duże zróżnicowanie tych systemów, zwłaszcza na poziomie szkolnictwa wyższego. Specyfikując własny system edukacyjny każda szkoła wyższa stara się bowiem wyrobić sobie i utrzymywać taką markę na rynku edukacyjnym, która będzie gwarantem istnienia i rozwoju szkoły. Ale ta specyfikacja sprawia, że matematyczny model procesu edukacyjnego powinien być zawsze odniesiony do uwarunkowań danej szkoły. Ponieważ coraz więcej szkół wyższych zgłasza zapotrzebowanie na posiadanie modelu własnego systemu edukacyjnego, istnieje potrzeba opracowania takiej metodologii modelowania tych systemów, która będzie zgodna z ogólnymi zasadami organizacji i funkcjonowania procesów edukacyjnych i będzie odwzorowywała specyficzne aspekty procesu realizowanego w konkretnej szkole. O tym i o innych uwarunkowaniach, jakim powinien czynić zadość matematyczny model procesu edukacji powiemy szerzej w dalszej części pracy. Dla ustalenia uwagi wszystkie rozważania modelowe będziemy odnosić do szkoły wyższej, chociaż można je bez trudu zastosować do opisu procesu edukacyjnego w innych rodzajach szkół.

2. Rozszerzony kontekst i uwarunkowania problemu

Powszechnie mówi się o potrzebie prowadzenia polityki zrównoważonego rozwoju oraz kształtowania społeczeństwa wiedzy. Chociaż oba te pojęcia są rozmaicie rozumiane, to jednak nie ma wątpliwości co do tego, że nie może być mowy o polityce zrównoważonego rozwoju, o ile jednym z jej priorytetów nie stanie się społeczna edukacja. Wyrazem zrozumienia tej prawdy jest przeprowadzana w kraju kompleksowa reforma edukacji, obejmująca wszystkie fazy procesu edukacyjnego: od edukacji przedszkolnej (obejmującej zwłaszcza dzieci, które w następnym roku szkolnym rozpoczną naukę w szkole podstawowej), przez edukację wczesnoszkolną (klasy I-III szkoły podstawowej), podstawową (klasy IV-VI szkoły podstawowej), gimnazjalną, ponadgimnazjalną (licea oraz szkoły zawodowe) i studia wyższe, aż po studia związane z osiąganiem stopni i tytułów naukowych oraz różne formy ustawicznego kształcenia zawodowego i ogólnego. Ważnym wyróżnikiem tej reformy jest przeorientowanie utrwalonego i obowiązującego w ostatnich dziesięcioleciach trybu edukacji, w którym główny akcent kładziono na wyposażenie młodego człowieka w odpowiedni zasób wiadomości i wyrobienie umiejętności oraz nawyków korzystania z nich w praktyce dnia codziennego, zaś wtórnym celem było kształtowanie jego osobowości, systemu wartości i światopoglądu. Reforma stawia na pierwszym miejscu rozwój osobowy ucznia, traktując nabywanie przez niego wiadomości i umiejętności ich stosowania nie jako cel sam w sobie, lecz jako środek wspomagający kształtowanie osobowości ucznia. Przestrzeganie tej zasady obowiązuje na wszystkich szczeblach procesu edukacyjnego, którego tryb i formy realizacji muszą ulec i stopniowo ulegają istotnym zmianom. Jednym z przejawów tego jest sformułowanie i nadanie ustawowej mocy tzw. podstawie programowej nauczania, w której dla każdego etapu edukacyjnego - od nauczania przedszkolnego do wyższych studiów włącznie - są określone jego cele edukacyjne, zadania placówki edukacyjnej, treści nauczania oraz osiągnięcia, jakie powinni posiadać absolwenci poszczególnych etapów w zależności od swoich predyspozycji psychofizycznych oraz intelektualnych i aspiracji. Samo realizowanie wytycznych programowych i przestrzeganie przepisów prawnych regulujących zakres i tok procesu edukacyjnego nie gwarantuje sukcesu reformy. Po kilkudziesięcioletnim okresie scentralizowanego zarządzania szkolnictwo polskie znalazło się bowiem na powrót w sytuacji rynkowej. W związku z tym duży wysiłek jest wkładany w wykorzenienie utrwalonych w przeszłości nawyków w sferze kształcenia i wychowywania młodych pokoleń oraz zarządzania placówkami oświatowymi, a także w zastąpienie ich procedurami i mechanizmami zgodnymi z obecną rzeczywistością polityczną, społeczną, gospodarczą i kulturową kraju. W realizacji tych przemian bierze się pod uwagę nie tylko nasze uwarunkowania wewnętrzne i zewnętrzne, a zwłaszcza wynikające z przynależności do Unii Europejskiej, ale stopniowo coraz bardziej nawiązuje się do wielkich, a w dużej mierze zapomnianych i wciąż zbyt mało docenianych tradycji szkolnictwa polskiego, które na przestrzeni wieków dawało krajowi nierzadko całe pokolenia światłych i mądrych obywateli.

Wkład polskiej myśli politycznej, społecznej, edukacyjnej, naukowej, technicznej itd. w rozwój kultury i cywilizacji nie tylko europejskiej mówi sam za siebie.

Samo nawiązywanie nawet do najchlubniejszych tradycji szkolnictwa polskiego nie przyniesie jednak pożądanych skutków edukacyjnych, podobnie jak nie uzdrowi polskiego szkolnictwa bezpośrednie przenoszenie na nasz grunt schematów i wzorców edukacyjnych stworzonych i sprawdzonych w innych krajach. Trzeba korzystać z doświadczeń edukacyjnych innych krajów, kultur i kręgów cywilizacyjnych, ale trzeba też pamiętać o tym, że systemowa jedność edukacji w skali globalnej, krajowej, regionalnej czy szkolnej nie oznacza jej unifikacji. Chodzi bowiem o różnorodność trybu oraz form edukacji i o ich indywidualizację, przy zachowaniu wszystkich formalnych i merytorycznych, ogólnosystemowych i specyficznych norm tego procesu, których przestrzeganie jest jednym z warunków zachowania jego niezbędnej całościowości. W ramach ogólnej polityki zrównoważonego rozwoju rozwój systemu edukacji musi biec w sposób zrównoważony i wychodzić ku potrzebom przyszłym pokoleń, obecnie niemożliwym do pełnego przewidzenia. Co więcej, mnożące się próby niemal dokładnego określenia tych potrzeb i ukierunkowania rozwoju edukacji na realizację obecnie formułowanych perspektywicznych celów są z góry skazane na niepowodzenie. Wynikają bowiem z logiki rozumowania opartej na klasycznej koncepcji determinizmu, uznającej możliwość skonstruowania łańcucha jednoznacznych zależności przyczynowo-skutkowych między teraźniejszością i przyszłością, a także wyrażenia ich w języku matematyki. Wedle tej koncepcji biegiem zdarzeń kieruje czynnik konieczności, a wszelkie odstępstwa od tej zasady są jedynie jej zwichrowaniem. Matematyczne modele są deterministyczne, a metody rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej służą jedynie do scharakteryzowania stopnia zgodności modelu z deterministyczną rzeczywistością. Przyczyn niezgodności upatruje się w niepełności i niedokładności wiedzy na temat modelowanego zjawiska. Tymczasem we współczesnej nauce obowiązuje paradygmat determinizmu stochastycznego, którego istotą jest przede wszystkim uznanie obiektywnego charakteru przypadkowości i różnorodności form jej przejawiania się. Niedeterministyczne teorie matematyczne, takie jak klasyczny rachunek prawdodpodobieństwa i statystyka matematyczna, teoria procesów stochastycznych, rachunek prawdopodobieństwa subiektywnego, rachunek prawdopodobieństwa logicznego, klasyczna i współczesna teoria informacji itp. dostarczają sposobów analizy i opisu obiektywnie istniejącej przypadkowości. Przypadkowość nie jest już traktowana tylko i wyłącznie jako zwichrowanie rzeczywistości, ale przede wszystkim jako współwystępujący i równoprawny z koniecznością obiektywny mechanizm zachodzenia zdarzeń i przebiegu zjawisk (zob.: Barndorff-Nielsen i Cox, 1994; Heisenberg, 1977; Haken, 1978, 1983; Hubert, 1987; Kalbfleisch, 1985a, 1985b; Kossecki, 1975; Lindsey, 1996; Prigogine, 1955, 1980, 1997; Prigogine i Stengers, 1984; Tarasow, 1984; Tempczyk, 1986, 1995). Z zasady stochastycznego determinizmu wynika więc nieodzowność patrzenia na kształtowanie rozwoju systemów jako na proces dziejący się w warunkach nieokreśloności przyszłości i ryzyka, przy czym w grę wchodzą różne formy nieokreśloności i różne formy ryzyka, nie zawsze dające się opisać w kategoriach klasycznego rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Logika współczesnego myślenia naukowego jest logiką probabilistyczną. W jej świetle na każdy proces rozwoju trzeba patrzeć jako na spiralnie układającą się sekwencję naprzemiennie występujących dwóch faz: stosunkowo długich faz monotonicznego rozwoju, w których system utrzymuje stabilność strukturalną i dominują w nim drobne, ale systematycznie zachodzące przemiany ilościowo-jakościowe (tzw. rozwój przez fluktuacje) oraz znacznie od nich krótszych faz przejściowych, w których w systemie zachodzą istotne przemiany strukturalne. Nie tylko o tym trzeba pamiętać snując wizje rozwoju polskiego systemu edukacyjnego. Nie wolno również zapominać, że jest to system o celowym działaniu, a jako taki jest systemem unikatowym.

Mimo wszelkich podobieństw do innych systemów edukacyjnych jest więc niepowtarzalny i jedyny w swoim rodzaju. Tymczasem u podstaw klasycznego podejścia probabilistyczno-statystycznego leży założenie o masowej powtarzalności obiektu badań. Z tego wynika, że analizy probabilistyczno-statystyczne procesów edukacyjnych trzeba prowadzić z niezwykłą ostrożnością.

Kolejnym czynnikiem, który trzeba mieć na uwadze jest to, że demokratyzacja życia oraz urynkowienie gospodarki pociągnęły za sobą powstanie w kraju rynku edukacyjnego o wielowarstwowej, wielowymiarowej i wielocelowej strukturze. Na każdym poziomie tej struktury każda placówka edukacyjna stara się pozyskać taką liczbę uczniów, jaka jest niezbędna dla jej utrzymania i funkcjonowania. Stara się też, by byli to uczniowie zdolni, jak najlepsi zarówno pod względem już posiadanej wiedzy i umiejętności, jak też pod względem wychowawczym. Rodzi to rywalizację i konkurencję między szkołami, które starają się pozyskać uczniów lub studentów oferując im nowoczesne programy edukacyjne, atrakcyjne formy prowadzenia zajęć, możliwości rozwijania własnych zainteresowań poprzez uczestnictwo w kołach naukowych, wysoce zobiektywizowane sposoby sprawdzania nabytej wiedzy i umiejętności, udział w ciekawych kooperacjach z podobnymi placówkami krajowymi i zagranicznymi, interesujące programy spędzania wolnego czasu, dobrze przygotowaną kadrę dydaktyczną itp. O pozycji danej szkoły na rynku edukacyjnym mówią, między innymi, wyniki rankingów, w których jakość rozpatrywanych szkół jest oceniana równocześnie z wielu punktów widzenia. Aby uzyskać i co najmniej utrzymywać dobrą pozycję rynkową szkoła musi stale doskonalić swoją jakość. Kształtowanie jakości szkoły jest jednym z czołowych lejtmotywów realizowanej obecnie reformy polskiego szkolnictwa.

Z systemowego punktu widzenia na kształtowanie jakości szkoły mają wpływ dwa rodzaje czynników: zewnętrzne (konieczność przestrzegania obowiązujących przepisów prawnych normujących działalność szkolnictwa, polityka finansowa w dziedzinie edukacji, stosunek społeczeństwa do sfery edukacji, zasobność społeczeństwa, poziom jego kultury oraz przygotowania dzieci i młodzieży podejmujących naukę w danej szkole itp.) i wewnętrzne (jakość kadry nauczycielskiej i administracji szkolnej, jakość oferty programowej i trybu jej realizacji, jakość wewnątrzszkolnego systemu sprawdzania i oceny wiedzy oraz umiejętności uczniów, struktura i zakres systemu stypendiów naukowych i socjalnych itp.). Ponieważ i jedne, i drugie nie są ani w pełni znane, ani w pełni przewidywalne, więc kształtowanie jakości szkoły jest procesem realizowanym w warunkach nieokreśloności przyszłości oraz wielorakich form ryzyka. Czynniki te sprawiają, że szkoła, która chce utrzymywać się na rynku edukacyjnym i zajmować na nim odpowiednią pozycję musi dysponować narzędziami pozwalającymi jak najracjonalniej wspomagać kształtowanie jej funkcjonowania i rozwój w różnych horyzontach czasowych. Narzędziami tymi powinny być wyspecjalizowane pakiety programów komputerowych przeznaczonych zarówno do analizowania i przewidywania ogólnej sytuacji szkoły w tych horyzontach, jak i do wspomagania zarządzania jej działalnością edukacyjną. Ponieważ podstawowym celem szkoły jest skuteczne i efektywne prowadzenie procesu edukacyjnego, więc jądrem każdego takiego pakietu powinien być model struktury i funkcjonowania procesu edukacyjnego w danej szkole lub w grupie szkół danego typu. Każdy rodzaj szkoły ma określony podstawowy czas trwania procesu edukacyjnego (cykl edukacyjny) liczony w latach szkolnych lub akademickich. Z kolei każdy rok szkolny lub akademicki jest podzielony na dwa semestry. Na przykład, podstawowy cykl nauki w szkole podstawowej wynosi sześć lat szkolnych, czyli dwanaście semestrów, w gimnazjum i liceum po trzy lata, czyli po sześć semestrów, w szkole wyższej średnio pięć lat, czyli dziesięć semestrów. Zasadniczym trybem odbywania edukacji w każdym typie szkoły jest przechodzenie ucznia lub studenta od semestru pierwszego - poprzez wszystkie semestry pośrednie - do semestru końcowego, przy czym promocja do następnej klasy lub przejście na następny rok studiów oraz fakt ukończenia szkoły są dokumetowane w szczególny sposób. Oczywiście, ten zasadniczy tryb odbywania edukacji jest często zaburzany (konieczność przerwania nauki na pewien okres, konieczność powtarzania klasy, możliwość usunięcia ze szkoły, możliwość zmiany klasy lub wydziału itp.), wskutek czego faktyczny czas nauki w danej szkole może w indywidualnych przypadkach wydłużyć się. Nie zmienia to jednak istoty dynamiki procesu edukacyjnego, która ma charakter celowo ukierunkowanego sekwencyjnego przepływu. Model matematyczny procesu edukacyjnego musi odwzorowywać tę dynamikę.

3. Pojęcie stanu procesu edukacyjnego

Dla skonstruowania matematycznego modelu struktury i dynamiki procesu edukacyjnego realizowanego w szkole wyższej jest konieczne wprowadzenie pojęcia stanu tego procesu. Sposób określenia tego pojęcia zawsze zależy od specyfiki rozpatrywanego zadania i od tego, czy badanie ma charakter makroskopowy (tzn. czy przedmiotem analizy jest zbiorowość studentów uczelni jako całość), czy mikroskopowy (tzn. czy przemiotem analizy są indywidualni studenci). W pierwszym przypadku modelem stanu powinna być obserwowalna wielkość skalarna lub wektorowa, całościowo charakteryzująca badany aspekt dynamiki systemu edukacyjnego (np. liczba absolwentów szkoły w danym roku akademickim bądź liczba osób, które w danym roku akademickim przerwały studia i odeszły z uczelni lub poszły na urlopy dziekańskie itp.). W drugim przypadku modelem stanu powinna być również obserwowalna wielkość skalarna lub wektorowa, ale charakteryzująca uczelniany status indywidualnego studenta (np. informująca, którego wydziału studentem była w danym roku akademickim dana osoba, czy uzyskała promocję na następny rok studiów czy też nie, czy w danym roku akademickim powtarzała rok studiów czy też nie, czy w danym roku akademickim przerwała studia i odeszła z uczelni czy też skorzystała z prawa do urlopu dziekańskiego itp.). Jest zrozumiałe, że chociaż uczelnia dysponuje pełnymi danymi dokumentującymi przebieg studiów każdego studenta, to jednak posiadanie - możliwego do skonstruowania - matematycznego modelu dynamiki uczelni, w którym byłby bezpośrednio odwzorowany przebieg edukacji każdego studenta, nie jest ani potrzebne, ani celowe. Co więcej, zbiorowość studentów jest silnie zróżnicowana, a więc statystycznie niejednorodna (różnice w sposobie podejścia do studiowania, w wywiązywaniu się z formalnych obowiązków studenta, w poziomie kultury osobistej i inteligencji, w łatwości przyswajania materiału, naturalne różnice osobowościowe itd.). Ta niejednorodność sprawia, że zarówno z powodów matematycznych, jak i pobudek praktycznych bardziej pożądane jest modelowanie dynamiki procesu edukacyjnego nie w odniesieniu do poszczególnych studentów, ale w odniesieniu do kategorii studentów, jednorodnych w sensie jakiegoś z góry ustalonego kryterium, wynikającego z przeznaczenia modelu. Powstaje więc potrzeba zdekomponowania zbiorowości studentów na grupy jednorodne. Można to zrobić na wiele sposobów, ale zawsze odpowiada to wprowadzeniu w zbiorowości studentów odpowiednio zdefiniowanej relacji równoważności, która rozbija tę zbiorowość na klasy równoważności tej relacji. Jakkolwiek by nie była ta relacja zdefiniowana, zawsze musi być zgodna z organizacyjną strukturą procesu edukacyjnego i z faktem, że głównymi aktorami tego procesu są studenci. Przykładem może być relacja określona w następujący sposób: dla dowolnych dwóch studentów a i b relacja $a \approx b$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy w danym roku akademickim obaj studiują na tym samym wydziale i są na tym samym roku studiów. Inny przykład: dla dowolnej pary studentów a i b relacja $a \approx b$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy w danym roku akademickim ich średnia ocena ze wszystkich przedmiotów mieści się w określonym przedziale liczbowym. Jak wiadomo, zgodnie z zasadą identyfikacji elementów równoważnych (zob. np. Rasiowa,

1979) każda relacja równoważności wyznacza podział zbiorowości studentów na rozłączne i niepuste kategorie, zwane jej klasami równoważności, w taki sposób, że dwaj studenci są zaliczani do tej samej kategorii wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi między nimi ta relacja. Z rozbiciem zbiorowości studentów na grupy jednorodne łączy się więc dokonanie w niej określonego rodzaju agregacji. Zbiór otrzymanych agregatów (klas równoważności, kategorii, grup studentów) jest odpowiednio ustrukturalizowany, tzn. między jego elementami zachodzą określone relacje systemowe. Przykładami takich agregatów są: zbiorowości studentów poszczególnych wydziałów w danym roku akademickim, zbiorowości studentów danego wydziału odpowiadające poszczególnym latom studiów w danym roku akademickim, zbiorowości studentów otrzymane w wyniku rozbicia ich populacji na grupy zainteresowań itp.

Dla modelowania dynamiki procesu edukacyjnego, której podstawowym wyrazem jest przepływ strumienia studentów przez kolejne lata studiów, wygodnie jest opisywać stan tego procesu za pomocą wektora mającego tyle wymiarów, na ile kategorii rozbito rozpatrywaną zbiorowość studentów, przy czym jego składowymi będą bezwzględna lub względna liczba studentów poszczególnych kategorii. W przypadku traktowania całej rozpatrywanej populacji jako jednej kategorii wektor ten degeneruje się do liczby wyrażającej wielkość rozpatrywanej zbiorowości. A zatem w ogólnym przypadku mamy do czynienia ze skończonym ciągiem stanów $S_1, S_2, ..., S_T$, gdzie wielkości S_t $(t = 1,2,...,T)$ są skalarami lub skończenie wymiarowymi wektorami obserwacji, zaś t jest parametrem numerującym kolejne rozpatrywane lata akademickie, odniesionym do końca poprzedniego lub początku następnego roku akademickiego. Zmiany stanu systemu edukacyjnego w czasie są zewnętrznym wyrazem jego dynamiki, która wewnętrznie przejawia się przejściami studentów między wyróżnionymi ich kategoriami. Rozbicia zbiorowości studentów na rozłączne i wyczerpujące całą zbiorowość kategorie trzeba zawsze dokonać tak, aby odpowiadało ono logice i potrzebom rozpatrywanego zadania. Na przykład, jeżeli chcemy analizować dynamikę przechodzenia studentów przez system edukacyjny z punktu widzenia wydziałowej organizacji uczelni, to pojęcie kategorii trzeba utożsamiać z pojęciem wydziału. Jeżeli chcemy analizować tę dynamikę z punktu widzenia zmian liczby studentów na danym kierunku lub specjalności, to pojęcie kategorii należy utożsamić z kierunkiem lub specjalnością itd. Zauważmy, że dla skonstruowania modelu przejścia między kategoriami nie jest istotne, w jaki sposób są one określone, ale ważna jest przede wszystkim ich liczba oraz struktura przejść między nimi.

Dla skonkretyzowania rozważań przedmiotem dalszych rozważań będzie analiza dynamiki przejścia studentów z punktu widzenia wydziałowej organizacji uczelni, struktury procesu edukacyjnego i edukacyjnego statusu każdego ze studentów. Przyjmiemy, że na każdym z wydziałów pełne studia trwają L lat akademickich i że w całym analizowanym okresie $(t = 1,2,\ldots,T)$ rodzaj i liczba wydziałów nie zmieniały się. Niech W będzie liczbą wydziałów, $N(t)$ liczbą wszystkich studentów kształcących się w uczelni w roku akademickim t $(t = 1,2,\ldots,T)$, $N_w(t)$ liczbą wszystkich studentów wydziału w $(w = 1,2,...,W)$ w roku akademickim t, $N^{(l)}(t)$ łączną liczbą studentów l-tego roku studiów wszystkich wydziałów, zaś $N_w^{(l)}(t)$ liczbą wszystkich studentów l-tego roku studiów wydziału w $(w = 1,2,...,W)$. Niech ponadto $n_w^{(o_l)}(t)$ będzie liczbą studentów l-tego roku wydziału w, którzy w roku akademickim t sami przerwali studia i odeszli z uczelni, lub zostali dyscyplinarnie skreśleni z listy studentów. Niech $n_w^{(a)}(t)$ będzie liczbą absolwentów wydziału w w roku akademickim

t, zaś $n_w^{(u_l)}(t)$ liczbą tych studentów l-tego roku wydziału w, którzy w roku akademickim t korzystali z urlopu dziekańskiego.

Założenia te prowadzą do rozbicia całej zbiorowości studentów w roku akademickim t na $W(3L+1)$ kategorii. Wygodnie jest przedstawić to rozbicie w postaci następującej macierzy prostokątnej zawierającej W wierszy i $3L+1$ kolumn

$$\begin{bmatrix} n_1(t) & n_1^{(o)}(t) & n_1^{(a)}(t) & n_1^{(u)}(t) \\ n_2(t) & n_2^{(o)}(t) & n_2^{(a)}(t) & n_2^{(u)}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_w(t) & n_w^{(o)}(t) & n_w^{(a)}(t) & n_w^{(u)}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_W(t) & n_W^{(o)}(t) & n_W^{(a)}(t) & n_W^{(u)}(t) \end{bmatrix}, \tag{1}$$

gdzie $n_w^{(o)}(t)$, $n_w^{(o)}(t)$ i $n_w^{(u)}(t)$ są wektorami określonymi następująco

$$n_w(t) = [n_w^{(1)}(t), n_w^{(2)}(t), \ldots, n_w^{(l)}(t), \ldots, n_w^{(L)}(t)],$$
$$n_w^{(o)}(t) = [n_w^{(o_1)}(t), n_w^{(o_2)}(t), \ldots, n_w^{(o_l)}(t), \ldots, n_w^{(o_L)}(t)],$$
$$n_w^{(u)}(t) = [n_w^{(u_1)}(t), n_w^{(u_2)}(t), \ldots, n_w^{(u_l)}(t), \ldots, n_w^{(u_L)}(t)],$$

zaś $n_w^{(a)}(t)$ są skalarami. Macierz (1) charakteryzuje stan systemu edukacji w roku akademickim t ($t = 1,2,\ldots,T$). Zachodzą równości

$$N_w(t) = \sum_{l=1}^{L} N_w^{(l)}(t) + N_w^{(o)}(t) + N_w^{(a)}(t) + N_w^{(u)}(t), \quad (w=1,2,\ldots,W;\ t=1,2,\ldots,T), \tag{2}$$

$$N^{(l)}(t) = \sum_{w=1}^{W} N_w^{(l)}(t), \quad (l=1,2,\ldots,L;\ t=1,2,\ldots,T), \tag{3}$$

$$N(t) = \sum_{w=1}^{W} N_w(t) = \sum_{l=1}^{L} N^{(l)}(t), \quad (t=1,2,\ldots,T), \tag{4}$$

przy czym $N_w^{(a)} \equiv n_w^{(a)}(t)$.

W dalszych rozważaniach - w zależności od potrzeb - stan systemu edukacji będziemy też charakteryzować za pomocą wektora stanu. Dla określenia go oznaczmy liczbę wszystkich rozpatrywanych kategorii studentów przez K (tzn. $K = W(3L+1)$), zaś liczbę studentów kategorii k ($k=1,2,\ldots,K$) w roku akademickim t ($t = 1,2,\ldots,T$) przez $n_k(t)$. Pozwala to zapisać stan systemu edukacyjnego w chwili t w formie K-wymiarowego wektora

$$\underline{\mathrm{n}}(\mathrm{t}) = [n_1(t), n_2(t), \ldots, n_K(t)]. \tag{5}$$

Na przykład, jeżeli na uczelni jest 12 wydziałów $(W=12)$, a studia na każdym z nich trwają 5 lat $(L=5)$, to $K=192$ i stan systemu edukacyjnego w roku akademickim t jest reprezentowany za pomocą wektora $\underline{\underline{n}}(t)=[n_1(t), n_2(t), \ldots, n_{192}(t)]$. Dla uczelni dwuwydziałowej o pięcioletnim cyklu studiów $K=32$. Macierz (1) przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} n_1(t) & n_1^{(o)}(t) & n_1^{(a)}(t) & n_1^{(u)}(t) \\ n_2(t) & n_2^{(o)}(t) & n_2^{(a)}(t) & n_2^{(u)}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_w(t) & n_w^{(o)}(t) & n_w^{(a)}(t) & n_w^{(u)}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_W(t) & n_W^{(o)}(t) & n_W^{(a)}(t) & n_W^{(u)}(t) \end{bmatrix},$$

gdzie

$$n_1(t)=[n_1^{(1)}(t), n_1^{(2)}(t), n_1^{(3)}(t), n_1^{(4)}(t), n_1^{(5)}(t)],$$
$$n_2(t)=[n_2^{(1)}(t), n_2^{(2)}(t), n_2^{(3)}(t), n_2^{(4)}(t), n_2^{(5)}(t)],$$
$$n_1^{(o)}(t)=[n_1^{(o_1)}(t), n_1^{(o_2)}(t), n_1^{(o_3)}(t), n_1^{(o_4)}, n_1^{(o_5)}(t)],$$
$$n_2^{(o)}(t)=[n_2^{(o_1)}(t), n_2^{(o_2)}(t), n_2^{(o_3)}(t), n_2^{(o_4)}, n_2^{(o_5)}(t)]$$
$$n_1^{(u)}(t)=[n_1^{(u_1)}(t), n_1^{(u_2)}(t), n_1^{(u_3)}(t), n_1^{(u_4)}(t), n_1^{(u_5)}(t)],$$
$$n_{22}^{(o)}(t)=[n_2^{(o_1)}(t), n_2^{(o_2)}(t), n_2^{(o_3)}(t), n_2^{(o_4)}, n_2^{(o_5)}(t)],$$

natomiast wektorem stanu jest $\underline{n}(t)=[n_1(t), n_2(t), \ldots, n_{32}(t)]$.

4. Nieokreśloność stanu procesu edukacyjnego i jego entropia

Chociaż proces edukacyjny jest celowo ukierunkowany, to jednak jego przyszły stan nie jest w pełni przewidywalny. Jeżeli istnieją przesłanki pozwalające uznać, że systemowe otoczenie uczelni w rozważanym horyzoncie czasowym nie ulegnie istotnym zmianom i że obserwacje zmian stanu systemu mogą być prowadzone niezależnie jedna od drugiej, to można w przybliżeniu przyjąć, że stan $\underline{n}(t)$ procesu edukacyjnego jest K-wymiarową zmienną losową. Każda z możliwych realizacji tej zmiennej zawiera określoną informację o procesie, niezbędną dla sprawnego nim zarządzania. Jest oczywiste, że gdyby przyszły stan procesu edukacyjnego był władzom uczelni z góry dokładnie znany, to nie miałoby sensu obserwowanie go i informowanie władz uczelni o wyniku obserwacji. Przekazanie informacji o stanie procesu edukacyjnego ma sens jedynie wtedy, gdy nie jest on wcześniej władzom uczelni znany, tzn. gdy z ich punktu widzenia jest traktowany jako mniej lub bardziej nieokreślony. Informacja o rzeczywistym stanie procesu będzie dla nich tym bardziej wartościowa, im większa z ich punktu widzenia jest nieokreśloność tego stanu do chwili otrzymania informacji. Aby więc władze uczelni mogły poprawnie ocenić wartość informacji o spodziewanym stanie procesu edukacyjnego muszą dysponować odpowiednią miarą stopnia nieokreśloności stanu. Rolę takiej miary może pełnić entropia zmiennej losowej $\underline{n}(t)$ (zob., np., Abramson, 1969; Nowakowski i Sobczak, 1970; Seidler, 1972).

Z logiki organizacji, funkcjonowania i rozwoju szkoły wyższej wynika, że zmienna stanu procesu edukacyjnego nie może przyjmować zupełnie dowolnych wartości, ponieważ proces ten ma charakter celowy i zachodzi w kontekście różnorakich ograniczeń (finansowych, infrastrukturalnych, kadrowych itp.). Co więcej, liczba realnych realizacji tej zmiennej jest skończona i z dużą dokładnością może być z góry określona przez ekspertów. Metodą ekspertów można też oszacować prawdopodobieństwa pojawienia się poszczególnych realizacji zmiennej stanu, czyli jej rozkład prawdopodobieństwa. Biorąc to pod uwagę, jak również fakt, że podstawowy cykl procesu edukacyjnego jest mierzony w dyskretnych jednostkach czasu (semestry, lata akademickie), zasadne staje się przyjęcie założenia, że n(t) jest dyskretną skończoną wielowymiarową zmienną losową, której składowa $n_k(t)$ może w każdym z rozpatrywanych momentów czasu przyjmować dokładnie jedną spośród wartości $n_1^{(k)}, n_2^{(k)}, \ldots, n_{J_k}^{(k)}$ odpowiednio z prawdopodobieństwami $m_1^{(k)}, m_2^{(k)}, \ldots, m_{J_k}^{(k)}$, przy czym $0 \le m_{J_k}^{(k)} \le 1$, $m_1^{(k)} + m_2^{(k)} + \ldots + m_{J_k}^{(k)} = 1$.

Rozpatrzmy najpierw jedną dowolną spośród kategorii studentów, reprezentowanych przez składowe wektora n(t). Niech to będzie składowa $n_k(t)$ (k=1,2,...,K). Dla oszacowania stopnia nieokreśloności stanu tej składowej nie jest potrzebna znajomość zbioru wszystkich możliwych realizacji zmiennej $n_k(t)$, lecz wystarcza znajomość liczności tego zbioru oraz prawdopodobieństw poszczególnych realizacji zmiennej $n_k(t)$. Jeżeli posiadamy tę wiedzę, to - zgodnie z definicją entropii - entropią zmiennej losowej $n_k(t)$ będziemy nazywać sumę iloczynów prawdopodobieństw możliwych jej stanów przez logarytmy tych prawdopodobieństw, wziętą ze znakiem minus, tj.

$$H(n_k(t)) = -\sum_{j=1}^{J} p_j^{(k)} \log_a p_j^{(k)} . \tag{6}$$

Ponieważ liczby $p_j^{(k)}$ są nieujemne i mniejsze od jedności, więc ich logarytmy są ujemne i znak minus jest wprowadzony po to, aby wartość entropii była nieujemna. Entropia zmiennej losowej ma szereg ważnych własności, a w szczególności:

1. Przyjmuje wartość zero wtedy i tylko wtedy, gdy jeden ze stanów jest pewny (tzn. wszystkie pozostałe stany są niemożliwe).
2. Przy danej liczbie stanów osiąga maksimum wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie stany są jednakowo prawdopodobne. Ponieważ w tym przypadku $p_j = \frac{1}{J}$, więc $H_{\max}(n_k(t)) = \log J$.
3. Entropia jest tym większa, im większa jest liczba możliwych stanów systemu.
4. Entropia ma własność addytywności, tzn. jeżeli kilka niezależnych systemów rozpatrywać jako jedną zbiorowość wzajemnie niezależnych jednostek, to entropia otrzymanego układu będzie równa sumie ich entropii.
5. Wartość entropii zmiennej losowej nie zmienia się, gdy zmienną tę podda się wzajemnie jednoznacznemu przekształceniu.

Mimo formalnej prostoty pojęcie entropii jako miary stopnia nieokreśloności stanu stanu nie jest chętnie stosowane i to nie tylko w odniesieniu do procesu edukacji. Powodem tego jest przede wszystkim brak intuicyjnego wyczucia sensu tego pojęcia, nawet wśród specjalistów z dziedziny teorii systemów. Wskutek tego nagminnie popełnia się błąd polegający na utożsamianiu entropii informacyjnej z entropią termodynamiczną, bądź utożsamianiu entropii jako miary stopnia nieokreśloności procesu z entropią jako miarą odległości w przestrzeni rozkładów prawdopodobieństwa lub przestrzeni modeli probabilistycznych. Pojęcie entropii informacyjnej staje się bardziej oczywiste, jeżeli rozpatrzy się zmienną losową $X = \log_a p(n_k(t))$. Gdy proces edukacyjny przyjmuje stany $x_1, x_2, ..., x_J$, wtedy zmienna losowa X przyjmuje wartości $\log_a p_1, \log_a p_2, ..., \log_a p_J$. Entropia informacyjna zmiennej losowej $n_k(t)$ jest więc po prostu wartością oczekiwaną zmiennej losowej $-\log_a p(n_k(t))$, czyli

$$H(n_k(t)) = \sum_{j=1}^{J} p_j(-\log_a p_j). \quad (7)$$

Ta formuła jest rachunkowo wygodniejsza niż formuła (6), a ponadto pozwala bezpośrednio korzystać z twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematyczej dotyczących wartości oczekiwanej.

Podstawą logarytmu w formule (6) może być dowolna liczba $a > 1$, przy czym wybór podstawy logarytmu jest równoznaczny z wyborem jednostki miary entropii. W praktyce najczęściej rozpatruje się logarytmy przy podstawie 2. W tym przypadku jednostką entropii jest bit.

Pojecvie i własności entropii stanu procesu edukacyjnego mogą być bezpośrednio wykorzystywane przy podejmowaniu decyzji związanych z kształtowaniem jakości tego procesu i całego systemu edukacyjnego szkoły. Wiadomo, że przede wszystkim trzeba dbać o to, aby wyraźnie była zarysowana i konsekwentnie realizowana strategia rozwoju szkoły, ale trzeba też pamiętać o tym, że strategia ta będzie ustawicznie deformowana przez czynniki o charakterze przypadkowym. Źródłem tych czynników może być zarówno systemowe otoczenie szkoły, jak i sama szkoła. Czynniki te mogą mieć zarówno charakter konstruktywny, jak i destruktywny. Jeżeli chcemy, aby w jakimś roku akademickim proces lub system edukacyjny szkoły osiągnął określony stan, to trzeba z odpowiednim wyprzedzeniem czasowym przygotowywać warunki, które w jak największej mierze będą sprzyjać jego zaistnieniu. Innymi słowy, w rozwoju szkoły nie wolno liczyć na przypadek, chociaż trzeba umieć wykorzystywać przypadki sprzyjające oraz potrafić szybko i skutecznie eliminować skutki przypadków destruktywnych. Przypadkowość w rozwoju szkoły nie może więc mieć charakteru decydującego, ale musi jawić się jako zwichrowanie koniecznego trendu jej rozwoju, jako odstępstwo od z góry ustalonej linii postępowania. W konsekwencji liczba możliwych do zaistnienia w przyszłości stanów szkoły nie jest duża, a co więcej wszystkie one oscylują wokół przyjętej trajektorii rozwoju szkoły. Nie wszystkie możliwe stany systemu edukacyjnego szkoły są więc jednakowo prawdopodobne, wskutek czego entropia zbioru stanów tego systemu jest mała, a będzie tym mniejsza, w im większym stopniu proces rowoju szkoły będzie zgodny z przyjętą strategią rozwojową.

Formuły (6) i (7) można wykorzystać do oszacowania stopnia nieokreśloności stanu dowolnego, ale całościowo rozpatrywanego elementu systemu edukacyjnego (np., zbiorowości studentów szkoły jako całości, zbiorowości studentów wydziału, zbiorowości studentów danego roku studiów danego wydziału itp.). Jak już powiedzieliśmy, z punktu widzenia dynamiki procesu edukacyjnego zbiorowość studentów może być - w zależności od potrzeb - dekomponowana w różny sposób. Zawsze jednak całościowy stan procesu będzie reprezentowany za pomocą wielowymiarowej zmiennej losowej (5). Zasadne jest więc pytanie o stopień nieokreśloności tego stanu. Możliwe są dwie sytuacje: poszczególne składowe wektora stanu są statystycznie niezależnymi zmiennymi losowymi (tzn. prawdopodobieństwo wielowymiarowej zmiennej losowej (5) jest równe iloczynowi prawdopodobieństw jej składowych), albo też zachodzą między nimi określone powiązania i związki probabilistyczno-statystyczne. W pierwszym przypadku modelem procesu edukacyjnego byłby układ niezależnie realizowanych procesów edukacyjnych niższego rzędu. Na przykład, gdyby przyjąć, że w uczelni istnieje K wydziałów, że rozpatruje się tylko dynamikę procesu przepływu studentów, że nie ma możliwości zmiany wydziału w toku studiów i pomija się wszelkie inne wzajemne oddziaływania między wydziałami, to temu dość uproszczonemu obrazowi odpowiadałoby założenie o statystycznej niezależności zmiennych stanu poszczególnych wydziałów.

Załóżmy, dla ustalenia uwagi, że $K = 2$ (uczelnia dwuwydziałowa) i że są spełnione wszystkie warunki uprawniające do przyjęcia założenia o niezależności. Załóżmy, że stan procesu edukacyjnego na jednym z wydziałów w roku akademickim t charakteryzujemy za pomocą zmiennej losowej $n_1(t)$, a na drugim za pomocą zmiennej losowej $n_2(t)$, których realizacjami są możliwe liczby studentów $n_1^{(1)}(t), n_2^{(1)}(t), \dots, n_{J_1}^{(1)}(t)$ oraz $n_1^{(1)}(t), n_2^{(1)}(t), \dots, n_{J_1}^{(1)}(t)$ odpowiednio pierwszego i drugiego wydziału. Z uwagi na założenie o niezależności łączna liczba możliwych stanów całościowego procesu edukacyjnego realizowane w systemie złożonym z obu wydziałów wynosi $J_1 J_2$. Niech $p_{j_1 j_2}$ będzie prawdopodobieństwem tego, że w chwili t system ten znajduje się w stanie $(n_1^{(j_1)}(t), n_2^{(j_2)}(t))$. Entropia tego systemu jest określona wzorem

$$H(n_1, n_2) = -\sum_{j_1=1}^{J_1} \sum_{j_2=1}^{J_2} p_{j_1 j_2} \log_a p_{j_1 j_2}. \tag{8}$$

i może być rozpatrywana jako wartość oczekiwana zmiennej losowej $-\log_a p_{j_1 j_2}$. Ponieważ wydziały są traktowane jako jednostki niezależne, więc $p_{j_1 j_2} = p_{j_1} p_{j_2}$ i dlatego $\log_a p_{j_1 j_2} = \log_a p_{j_1} + \log_a p_{j_2}$. Wobec tego

$$H(n_1, n_2) = H(n_1) + H(n_2). \tag{9}$$

W przypadku K niezależnie od siebie działających wydziałów otrzymalibyśmy taką zależność

$$H(n_1, n_2, \dots, n_K) = \sum_{k=1}^{K} H(n_k). \tag{10}$$

Przyjęcie założenia o niezależności funkcjonowania wydziałów jest dużym uproszczeniem, ale w wielu sytuacjach dopuszczalnym. W ogólnym przypadku w procesie i całym systemie edukacyjnym szkoły występują liczne i różnorodne wzajemne powiązania między wydziałami, co ma istotny wpływ na ocenę stopnia nieokreśloności stanu procesu edukacyjnego. Trzeba więc przyjąć, że składowe wektora stanu (5) są zależnymi zmiennymi losowymi. Rozpatrzmy najpierw przypadek uczelni dwuwydziałowej. Niech $p(n_2^{(j_2)} \mid n_1^{(j_1)})$ będzie prawdopodobieństwem tego, że w chwili t drugi z wydziałów znajduje się stanie

$n_2^{(j_2)}(t)$ pod warunkiem, że pierwszy jest w stanie $n_1^{(j_1)}(t)$. Warunkowa entropia stanu drugiego wydziału pod warunkiem, że pierwszy z nich jest w stanie $n_1^{(j_1)}(t)$ wynosi:

$$H(n_2 \mid n_1^{(j_1)}) = -\sum_{j_2=1}^{J_2} p(n_2^{(j_2)} \mid n_1^{(j_1)}) \log_a p(n_2^{(j_2)} \mid n_1^{(j_1)}) \tag{11}$$

i jest wartością oczekiwaną zmiennej losowej $-\log_a p(n_2^{(j_1)} \mid n_1^{(j_1)})$. Ponieważ $j_1 = 1,2,...,J_1$, więc można obliczyć J_1 takich entropii. Liczbowa wartość kazdej z nich zależy od tego, w którym ze stanów $n_1^{(1)}, n_2^{(1)}, ..., n_{J_1}^{(1)}$ znajduje się pierwszy wydział. Dla jednych z nich będzie ona mniejsza, dla innych większa. Jest więc sens zastanowić się nad średnią wartością tej entropii. Aby ją obliczyć trzeba każdą z entropii warunkowych (11) pomnożyć przez bezwarunkowe prawdopodobieństwo $p_{j_1}^{(1)}$ odpowiedniego stanu i zsumować wszystkie tak otrzymane iloczyny. Dostanie się

$$H(n_2 \mid n_1) = -\sum_{j_1=1}^{J_1} p_{j_1}^{(1)} H(n_2 \mid n_1^{(j_1)}), \tag{12}$$

lub, po odpowiednich przekształceniach,

$$H(n_2 \mid n_1) = -\sum_{j_1=1}^{J_1} \sum_{j_2=1}^{J_2} p_{j_1}^{(1)} p(n_2^{(j_2)} \mid n_1^{(j_1)}) \log_a p(n_2^{(j_2)} \mid n_1^{(j_1)}). \tag{13}$$

Ponieważ jednak $p_{j_1}^{(1)} p(n_2^{(j_2)} \mid n_1^{(j_1)}) = p_{j_1 j_2}$, więc

$$H(n_2 \mid n_1) = -\sum_{j_1=1}^{J_1} \sum_{j_2=1}^{J_2} p_{j_1 j_2} \log_a p(n_2^{(j_2)} \mid n_1^{(j_1)}). \tag{14}$$

Jak widać, średnia entropia warunkowa jest wartością oczekiwaną zmiennej losowej $-\log_a p(n_2^{(j_2)} \mid n_1^{(j_1)})$. Entropia ta charakteryzuje stopień nieokreśloności stanu drugiego wydziału pozostałej po pełnym zidentyfikowaniu stanu pierwszego z nich.

Wróćmy teraz do formuły (8) określającej entropię stanu systemu edukacyjnego, w przypadku uczelni dwuwydziałowej. Ponieważ na mocy twierdzenia o iloczynie zdarzeń $p(n_1, n_2) = p(n_1) p(n_2 \mid n_1)$, więc $\log_a p(n_1, n_2) = \log_a p(n_1) + \log_a p(n_2 \mid n_1)$ i po wykonaniu stosownych przekształceń otrzymamy:

$$H(n_1, n_2) = H(n_1) + H(n_2 \mid n_1). \tag{15}$$

Gdyby oba wydziały były wzajemnie od siebie niezależne, to jako szczególny przypadek otrzymalibyśmy równość (9). Ponieważ jednak $H(n_2 \mid n_1) \leq H(n_2)$, więc w przypadku ogólnym zachodzi nierówność

$$H(n_1, n_2) \leq H(n_1) + H(n_2). \tag{16}$$

Wynika z niej, że stopień nieokreśloności stanu uczelnianego procesu edukacyjnego byłby największy wtedy, gdyby poszczególne wydziały uczelni funkcjonowały w całkowitej izolacji od siebie. Drugą skrajnością byłaby sytuacja, kiedy stan jednego z wydziałów w pełni determinowałby stan drugiego. W tym przypadku $H(n_2 \mid n_1) = 0$ i wyrażenie (15) przyjęłoby postać

$$H(n_1, n_2) = H(n_1). \tag{17}$$

Powyższe formuły można łatwo uogólnić na przypadek uczelni o dowolnej liczbie W wzajemnie ze sobą powiązanych wydziałów. W szczególności odpowiednikiem formuły (15) jest

$$H(n_1, n_2, ..., n_W) = H(n_1) + H(n_2 \mid n_1) + H(n_3 \mid n_1, n_2) + ... + H(n_K \mid n_1, n_2, ..., n_{W-1}). \tag{18}$$

Ogólnie należy stwierdzić, że stopień nieokreśloności procesu edukacyjnego jest funkcją informacji o tym systemie. Im jest ona lepsza, tym bardziej określony jest stan systemu. Skoro jednak ilość informacji wpływa na poziom nieokreśloności stanu, to jest zrozumiałe, że miarą ilości informacji może być stopień zmniejszenia entropii systemu. Zagadnienia tego nie będziemy jednak rozwijać, ponieważ nie leży ono w nurcie głównego celu tej pracy.

5. Identyfikacja stanów procesu edukacyjnego i analiza przejść między stanami

Stwierdziliśmy już, że wewnętrznym przejawem dynamiki procesu edukacyjnego realizowanego w wyższej uczelni jest ukierunkowany przepływ studentów przez kolejne stadia procesu. W każdym roku akademickim t ($t = 1,2,...,T$) każdy ze studentów może znajdować się w dokładnie jednym z następujących możliwych i wzajemnie wykluczających się stanów:

1. Na każdym roku studiów student każdego wydziału może dobrowolnie zrezygnować z ich kontynuacji i odejść z uczelni lub może być dyscyplinarnie skreślony z listy studentów. Jeżeli do tego doszło, to uznamy, że student znalazł się w jednym z WL stanów należących do zbioru $S^{(o)} = \{S_1^{(o)}, S_2^{(o)}, ..., S_{WL}^{(o)}\}$. Założymy, że osoba, która w taki sposób odeszła z wydziału, nie wróci na ten wydział w całym analizowanym okresie czasu, to jest w ciągu T najbliższych lat akademickich. A zatem, prawdopodobieństwo zdarzenia, że student, który znalazł się w jednym z tych stanów pozostanie w nim na stałe w ciągu T najbliższych lat akademickich jest równe jeden. Takie stany nazywa się pochłaniającymi.
2. Student ostatniego roku studiów każdego z wydziałów może ukończyć uczelnię i odejść z niej jako absolwent. Stanów odpowiadających tej sytuacji jest W, tj. tyle, ile jest wydziałów. Oznaczymy zbiór tych stanów przez $S^{(a)} = \{S_{WL+1}^{(a)}, S_{WL+2}^{(a)}, ..., S_{W(L+1)}^{(a)}\}$. Przyjmiemy, że są to również stany pochłaniające.
3. Student może być na l-tym (l=1,2,...,L) roku studiów wydziału w (w=1,2,...,W), czemu odpowiada WL możliwych stanów. Oznaczmy ich zbiór przez $S^{(c)} = \{S_{W(L+1)+1}, S_{W(L+1)+2}, ..., S_{W(2L+1)}\}$. Są to stany chwilowe, tzn. jeżeli w roku

akademickimi t student znajdował się w jednym z nich, to w następnym roku może w nim pozostać lub go opuścić.

4. Student każdego roku studiów każdego z wydziałów może przebywać na urlopie dziekańskim, czemu odpowiada WL stanów tworzących zbiór $S^{(u)} = \{S^{(u)}_{W(2L+1)+1}, S^{(u)}_{W(2L+1)+2}, \ldots, S^{(u)}_{W(3L+1)}\}$. Z punktu widzenia organizacji i logiki procesu edukacyjnego są to również stany chwilowe.

Przepływ studentów jest realizowany w trybie przechodzenia z jednych stanów do innych w kolejnych latach akademickich lub pozostawania w tych samych stanach na następny rok. Z logiki procesu edukacyjnego wynika, że nie wszystkie z tych przejść są dozwolone. Za dozwolone należy uznać następujące sytuacje:

1. Dobrowolne przerwanie studiów i odejście studenta z uczelni lub skreślenie z listy studentów wskutek niewywiązywania się z obowiązków studenta. Są to więc przejścia ze stanów należących do zbioru $S^{(c)}$ w odpowiedni stan należący do zbioru $S^{(c)}$. Zakładamy, że w rozpatrywanym horyzoncie czasowym odwrotne przejścia nie są możliwe.
2. Ukończenie pełnego cyklu studiów i odejście z uczelni jako absolwent, czyli przejście z jednego z tych stanów należących do zbioru $S^{(c)}$, które odpowiadają ostatniemu rokowi studiów na poszczególnych wydziałach do odpowiedniego stanu ze bioru $S^{(a)}$.
3. Właściwe przejścia z jednego roku studiów na następny lub przejścia zdegenerowane, odpowiadające możliwości powtarzania danego roku studiów. Są to więc te przejścia między stanami zbioru $S^{(c)}$, które odpowiadają uzyskaniu przez studenta promocji z poprzedniego roku studiów na następny na danym wydziale w danym roku akademickim lub repetowaniu danego roku studiów w następnym roku akademickim.
4. Przejścia do grupy osób korzystających z urlopów dziekańskich, czyli przejścia ze stanów należących do zbioru $S^{(c)}$ w odpowiedni stan należący do zbioru $S^{(u)}$. Odwrotne przejścia są dozwolone.
5. Zmiana wydziału (ponieważ zmiana taka, o ile ma miejsce, zachodzi z reguły bardzo rzadko i zwłaszcza w początkowym okresie studiów, nie będziemy jej odwzorowywać w rozważaniach modelowych).

Strukturę przejść między stanami można opisać w różny sposób. Najdogodniejsze z naszego punktu widzenia jest przedstawienie jej w postaci macierzy prawdopodobieństw przejść między zbiorami stanów $S^{(o)}$, $S^{(a)}$, $S^{(c)}$ i $S^{(u)}$. Niech $P_{S^{(i)} \to S^{(j)}}$ oznacza prawdopodobieństwo przejścia z jakiegokolwiek stanu należącego do zbioru $S^{(i)}$ w jakikolwiek stan należący do zbioru $S^{(j)}$, gdzie $i, j = o, a, c, u$. Gdyby wszystkie przejścia były dozwolone to macierz ta miałaby taką strukturę

$$P = \begin{bmatrix} P_{S^{(o)} \to S^{(o)}} & P_{S^{(o)} \to S^{(a)}} & P_{S^{(o)} \to S^{(c)}} & P_{S^{(o)} \to S^{(u)}} \\ P_{S^{(a)} \to S^{(o)}} & P_{S^{(a)} \to S^{(a)}} & P_{S^{(a)} \to S^{(c)}} & P_{S^{(a)} \to S^{(u)}} \\ P_{S^{(c)} \to S^{(o)}} & P_{S^{(c)} \to S^{(a)}} & P_{S^{(c)} \to S^{(c)}} & P_{S^{(c)} \to S^{(o)}} \\ P_{S^{(u)} \to S^{(o)}} & P_{S^{(u)} \to S^{(a)}} & P_{S^{(u)} \to S^{(c)}} & P_{S^{(u)} \to S^{(o)}} \end{bmatrix}. \qquad (19)$$

Ponieważ niedopuszczalne są przejścia ze stanów należących do zbioru $S^{(o)}$ w stany należące do zbiorów $S^{(a)}$, $S^{(c)}$ i $S^{(u)}$, przejścia ze stanów należących do zbioru $S^{(a)}$ w stany należące do zbiorów $S^{(a)}$, $S^{(c)}$ i $S^{(u)}$ oraz przejścia ze stanów należących do zbioru $S^{(u)}$ w stany należące do zbioru $S^{(a)}$, więc odpowiadające tym przejściom elementy macierzy P należy wyzerować. Z kolei, ponieważ osoba, która znalazła się w jednym ze stanów pochłaniających należących do zbiorów $S^{(o)}$ lub $S^{(a)}$ musi pozostawać w tym stanie do końca rozpatrywanego horyzontu czasowego, więc jest to zdarzenie pewne i jego prawdopodobieństwo jest równe jeden. Macierz przejścia między zbiorami stanów przybiera więc postać

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ P_{S^{(c)}\to S^{(o)}} & P_{S^{(c)}\to S^{(a)}} & P_{S^{(c)}\to S^{(c)}} & P_{S^{(c)}\to S^{(u)}} \\ P_{S^{(u)}\to S^{(o)}} & 0 & P_{S^{(u)}\to S^{(c)}} & P_{S^{(u)}\to S^{(u)}} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Prawdopodobieństwa $P_{S^{(i)}\to S^{(j)}}$ charakteryzują dynamikę procesu edukacyjnego na poziomie przejść między jednorodnymi zbiorami jego możliwych stanów. Chociaż jest to charakterystyka wysoce zagregowana to jednak może dostarczyć podstawowych wiadomości o ogólnym kierunku całościowych zmian zachodzących w dynamice tego procesu. Może, na przykład, sygnalizować wzmocnienie lub osłabienie strukturalnej stabilności procesu, wskazywać na sensowność utrzymywania dotychczasowej polityki edukacyjnej lub na potrzebę jej zmiany itp. Jest to jednak charakterystyka zbyt ogólna i dlatego dla podejmowania konkretnych decyzji konieczne jest przeprowadzenie bardziej szczegółowej analizy probabilistyczno-statystycznej. Aby to zrobić trzeba wniknąć w strukturę każdego ze zbiorów stanów i rozpatrywać dynamikę procesu na poziomie dopuszczalnych przejść między stanami należącymi do jednego i tego samego zbioru oraz dopuszczalnych przejść między stanami należącymi do różnych zbiorów. Jeżeli przez $m_{k,l}$ oznaczymy prawdopodobieństwo przejścia procesu edukacyjnego ze stanu S_k w stan S_l $(k,l=1,2,\dots,W(3L+1))$ i jeżeli uwzględnimy dopuszczalność jednych przejść oraz niedopuszczalność innych, to macierz przejścia przyjmie taką postać blokową

$$M=\begin{bmatrix} I_{WL\times WL} & O_{WL\times W} & O_{WL\times WL} & O_{WL\times WL} \\ O_{W\times WL} & I_{W\times W} & O_{W\times WL} & O_{W\times WL} \\ M^{(1)}_{WL\times WL} & M^{(2)}_{WL\times W} & M^{(3)}_{WL\times WL} & M^{(4)}_{WL\times WL} \\ M^{(5)}_{WL\times WL} & O_{WL\times W} & M^{(6)}_{WL\times WL} & M^{(7)}_{WL\times WL} \end{bmatrix}, \tag{21}$$

gdzie $I_{WL\times WL}$ i $I_{W\times W}$ są macierzami jednostkowymi odpowiednio rzędu WL i W, natomiast $O_{WL\times W}$, $O_{WL\times WL}$, $O_{W\times WL}$ są macierzami zerowymi o odpowiednich wymiarach. Pozostałe podmacierze wyglądają następująco

$$M^{(1)}_{WL\times WL}=\begin{bmatrix} m_{W(L+1)+1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_{W(L+1)+2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_{W(2L+1),WL} \end{bmatrix}, \tag{22}$$

$$M_{WL\times W}^{(2)}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{W(L+1)+L,WL+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & m_{W(L+1)+2L,WL+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{W(2L+1),W(L+2)} \end{bmatrix}, \tag{23}$$

$$M_{WL\times WL}^{(3)}=\begin{bmatrix} m_{W(L+1)+1,W(L+1)+1} & m_{W(L+1)+1,W(L+1)+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m_{W(L+1)+2,W(L+1)+2} & m_{W(L+1)+2,W(L+1)+3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{W(2L+1)-1,W(2L+1)-1} & m_{W(2L+1)-1,W(2L+1)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_{W(2L+1),W(2L+1)} \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$M_{WL\times WL}^{(4)}=\begin{bmatrix} m_{W(L+1)+1,W(2L+1)+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{W(L+1)+2,W(2L+1)+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{W(2L+1),W(3L+1)} \end{bmatrix}, \tag{25}$$

$$M_{WL\times WL}^{(5)}=\begin{bmatrix} m_{W(2L+1)+1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{W(2L+1)+2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{W(3L+1),WL} \end{bmatrix}, \tag{26}$$

$$M_{WL\times WL}^{(6)}=\begin{bmatrix} m_{W(2L+1)+1,W(L+1)+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{W(2L+1)+2,W(L+1)+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{W(3L+1),W(2L+1)} \end{bmatrix}, \tag{27}$$

$$M^{(7)}_{WL\times WL}=\begin{bmatrix} m_{W(2L+1)+1,W(3L+1)+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{W(2L+1)+2,W(3L+1)+2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_{W(3L+1),W(3L+1)} \end{bmatrix}. \tag{28}$$

W macierzy (21) występuje ogółem $W(7L+1)-1$ nieznanych prawdopodobieństw przejść, których wartości należy oszacować na podstawie danych rzeczywistych. Prawdopodobieństwa te występują w $2WL$ wierszach macierzy. Ponieważ jest to macierz stochastyczna, więc suma elementów każdego jej wiersza jest równa jeden. Z tego wynika, że w każdym z $2WL$ wierszy wartość jednego z prawdopodobieństw przejść można wyznaczyć odejmując od jedności sumę wszystkich pozostałych elementów tego wiersza. Ostatecznie więc liczba elementów macierzy przejścia, który wartości trzeba oszacować bezpośrednio na podstawie danych empirycznych wynosi $W(7L+1)-1$. Na przykład, dla jednego wydziału o pięcioletnim cyklu studiów elementów tych jest 25, natomiast dla uczelni o dwóch wydziałach i również pięcioletnim cyklu studiów na każdym z nich liczba ta wynosi 53.

Macierz przejścia (21) jest macierzą kwadratową stopnia $K=W(3L+1)$. W przypadku jednego wydziału o pięcioletnim cyklu studiów $K=16$, w przypadku uczelni o dwóch wydziałach i również pięcioletnim cyklu studiów $K=32$, natomiast w przypadku uczelni o pięciu wydziałach $K=80$. Jak widać, rząd macierzy przejścia gwałtownie rośnie ze wzrostem liczby wydziałów. Wykonywanie operacji matematycznych na tak dużych macierzach przysparza wielu trudności. Dlatego celowe jest sprowadzenie działań na macierzy przejścia do działań na macierzach niższych stopni. Można to zrobić dzieląc ją na bloki w taki sposób, żeby na głównej przekątnej stały macierze kwadratowe. Podział ten można przeprowadzać w różny sposób, zależnie od potrzeb. Jeden z możliwych podziałów jest przedstawiony w formule (21). Zapiszmy jednak macierz przejścia w takiej postaci blokowej

$$M=\begin{bmatrix} I_{W(L+1)\times W(L+1)} & O_{W(L+1)\times 2WL} \\ R_{2WL\times W(L+1)} & Q_{2WL\times 2WL} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & O \\ R & Q \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Łatwo sprawdzić, że przy podnoszeniu tej macierzy do kolejnych potęg całkowitych jej postać nie zmienia się, przy czym

$$M^2=\begin{bmatrix} I & O \\ R(I+Q) & Q^2 \end{bmatrix},$$

$$M^2=\begin{bmatrix} I & O \\ R(I+Q+Q^2) & Q^3 \end{bmatrix},$$

$$M^3=\begin{bmatrix} I & O \\ R(I+Q+Q^2+Q^3) & Q^4 \end{bmatrix}$$

itd. W ogólnym przypadku otrzymuje się dla dowolnej nieujemnej wartości wykładnika t formułę

$$M^t = \begin{bmatrix} I & O \\ R\sum_{s=0}^{t} Q^s & Q^t \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Znajomość tej formuły przydaje się jeżeli chcemy odwzorować ciąg rzeczywistych stanów procesu edukacyjnego w postaci jednorodnego modelu łańcuchowego, niekoniecznie mającego formę jednorodnego łańcucha Markowa.

6. Szacowanie wartości prawdopodobieństw przejść

Prognozowanie zmian charakteryzujących dynamikę przepływu studentów przez proces edukacyjny realizowany na wydziale może być prowadzone w kategoriach bezwzględnej lub względnej liczby studentów. Pierwszy sposób daje wprawdzie wyniki wyrażone w jednostkach naturalnych i w związku z tym nie wymagające dodatkowej interpretacji, ale związany z nim proces obliczeniowy jest bardzo wrażliwy na wszelkie zmiany zachodzące w liczebności zbiorowości studentów w kolejnych latach akademickich. Drugi sposób prowadzi do analizowania dynamiki przepływu studentów w wielkościach względnych, które są wprawdzie mniej wrażliwe na rzeczywiste zmiany w liczebności studentów i pozwalają prowadzić rozważania w kategoriach dynamiki przepływu masy prawdopodobieństwa, ale za to wymagają umiejętności poprawnego odczytywania i interpretowania otrzymywanych wyników statystycznych. Przeanalizujemy oba sposoby. Najpierw wyprowadzimy formuły obliczeniowe dla pierwszego z nich, a potem wykorzystamy je do otrzymania formuł charakteryzujących dynamikę przepływu studentów w wielkościach względnych, mających interpretację prawdopodobieństw przejścia.

Przyjmujemy, jak dotychczas, że na uczelni jest W wydziałów i zakładamy, że student który rozpoczął studia na wydziale w $(w = 1,2,...,W)$ w toku całych swoich studiów nie zmienia wydziału w ramach rozpatrywanej uczelni. Praktyka uczy, że jest to założenie uzasadnione, bowiem tego rodzaju zmiany zdarzają się sporadycznie a ich liczba jest bardzo mała. Przyjęcie tego założenia ma również tę zaletę, że pozwala analizować i modelować dynamikę przechodzenia studentów przez procesy edukacyjne realizowane na poszczególnych wydziałach w sposób niezależny. Jest to oczywiście niezależność względna, bowiem między wydziałami istnieje w rzeczywistości wiele innych oddziaływań, które jednak z punktu widzenia zadania modelowania dynamiki przepływu strumienia studentów przez proces edukacyjny mogą być pominięte. Dalsze rozważania będziemy więc prowadzić w odniesieniu do jednego wydziału, opuszczając dla uproszczenia zapisów symbol w. Przyjmiemy, że kolejne lata akademickie numeruje parametr czasowy t $(t = 1,2,...,T)$. Początek roku akademickiego t będziemy oznaczać symbolem t', a koniec symbolem t''.

Utrzymujemy założenie, że pełne studia na wydziale trwają L lat akademickich. Niech $n^{(l)}(t')$ będzie liczbą studentów na l-tym roku studiów na tym wydziale w chwili t', tj. w chwili rozpoczęcia roku akademickiego t, zaś $n^{(l)}(t'')$ ich liczbą w dniu zakończenia roku akademickiego t, przy czym $l = 1,2,...,L$. Zauważmy, że liczba $n^{(l)}(t'')$ może być interpretowana jako liczba $n^{(l,l+1)}(t'')$ tych studentów, którzy na koniec roku akademickiego t zaliczyli l-ty rok studiów, a więc równocześnie jako liczba $n^{(l,l+1)}((t+1)')$ tych spośród studentów l-tego roku studiów w roku akademickim t, którzy są zarejestrowani na liście osób rozpoczynających $(l+1)$-szy rok studiów w roku akademickim $t+1$. A zatem

$$\mathrm{n}^{(l)}(t'') = n^{(l,l+1)}(t'') = n^{(l,l+1)}((t+1)'), \tag{31}$$

przy czym $l = 1,2,...,L$, $t = 1,2,...,T-1$. Podobnie liczba $n^{(u_l)}(t')$ studentów, którzy w roku akademickim $t-1$ korzystali z urlopów dziekańskich, a postanowili wznowić studia w roku t i w związku z tym w chwili t' znaleźli się na liście studentów rozpoczynających l - ty rok studiów jest równa liczbie $n^{(u_l)}((t-1)'')$ tych, którzy byli na liście urlopowanych w dniu zakończenia roku akademickiego $t-1$, tzn.

$$n^{(u_l)}(t') = n^{(u_l)}((t-1)''), \tag{32}$$

przy czym $l = 1,2,...,L$, $t = 1,2,...,T-1$.

Mając na uwadze zależności (31) i (32) trzeba równocześnie pamiętać, że na zbiorowość studentów rozpoczynających w danym roku akademickim dany rok studiów składają się nie tylko osoby, które zaliczyły poprzedni rok studiów i osoby, które wznawiają studia po skończeniu urlopów dziekańskich, ale także te, które do chwili rozpoczęcia roku akademickiego przeniosły się z innych uczelni (oznaczmy ich liczbę przez $p^{(l)}(t')$) oraz osoby, które w ubiegłym roku akademickim nie zaliczyły danego roku studiów i będą go powtarzały w roku bieżącym (oznaczmy ich liczbę przez $r_w^{(l)}(t')$). Ogólna liczba studentów rozpoczynających w roku akademickim t (tj. w chwili t') l - ty rok studiów wyraża się więc formułą

$$n^{(l)}(t') = p^{(l)}(t') + n^{(u_l)}(t') + r^{(l)}(t'') + n^{(l-1,l)}(t'), \quad (l = 1,2,...,L). \tag{33}$$

Ponieważ dla pierwszego roku studiów $n^{(l-1,l)}(t') = 0$, więc w szczególności dla $l = 1$ otrzymujemy

$$n^{(1)}(t') = p^{(1)}(t') + n^{(u_1)}(t') + r^{(1)}(t'). \tag{34}$$

Nie wszyscy studenci, którzy w chwili t' rozpoczynali l - ty rok studiów znajdą się w chwili t'' na liście tych, którzy w następnym roku akademickim rozpoczną $(l+1)$ - szy rok studiów. Będą bowiem wśród nich tacy, którzy w ciągu roku akademickiego przerwą studia i odejdą z uczelni, tacy, którzy przejdą na urlopy dziekańskie oraz tacy, którzy nie zaliczą l - tego roku i będą go musieli powtarzać w następnym roku akademickim. Niech liczby studentów tych kategorii odniesione do chwili t'' wynoszą odpowiednio $n^{(o_l)}(t'')$, $n^{(u_l)}(t'')$ i $n^{(l,l)}(t'')$. Wobec tego ogólna liczba $n^{(l)}(t'')$ studentów, którzy w roku akademickim t byli na l - tym roku studiów i pomyślnie dotarli do końca tego roku wynosi

$$n^{(l)}(t'') = n^{(l)}(t') - n^{(u_l)}(t'') - n^{(o_l)}(t'') - n^{(l,l)}(t''), \quad (l = 1,2,...,L). \tag{35}$$

W szczególności dla $l = 1$ formuła ta określa liczbę studentów, którzy w roku akademickim t pomyślnie dotarli do końca pierwszego roku studiów

$$n^{(1)}(t'') = n^{(1)}(t') - n^{(u_1)}(t'') - n^{(o_1)}(t'') - n^{(1,1)}(t''), \tag{36}$$

a dla $l = L$ liczbę absolwentów wydziału w roku akademickim t

$$n^{(L)}(t'') = n^{(L)}(t') - n^{(u_L)}(t'') - n^{(o_L)}(t'') - n^{(L,L)}(t''). \tag{37}$$

Jeżeli w formule (36) zastąpimy $n^{(1)}(t')$ przez prawą stroną wyrażenia (34) to otrzymamy

$$n^{(1)}(t'') = p^{(1)}(t') + n^{(u_1)}(t') + r^{(1)}(t') - n^{(u_l)}(t'') - n^{(o_l)}(t'') - n^{(l,l)}(t''). \tag{38}$$

Podobnie, jeżeli w formule (35) zastąpimy $n^{(l)}(t')$ przez prawą stronę wyrażenia (33) to otrzymamy

$$n^{(l)}(t'') = p^{(l)}(t') + n^{(u_l)}(t') + r^{(l)}(t') + n^{(l-1,l)}(t') - n^{(u_l)}(t'') - n^{(o_l)}(t'') - n^{(l,l)}(t''), \tag{39}$$

gdzie $l = 1,2,...,L$. Jeżeli wreszcie w formule (37) zastąpić $n^{(L)}(t')$ przez lewą stronę wyrażenia (33) wziętą dla $l = L$, to otrzymamy

$$n^{(L)}(t'') = p^{(L)}(t') + n^{(u_L)}(t') + r^{(L)}(t'') + n^{(L-1,L)}(t') - n^{(u_L)}(t'') - n^{(o_L)}(t'') - n^{(L,L)}(t''). \tag{40}$$

Korzystając z formuł (38), (39) i (40) można obliczyć bezwzględną liczbę studentów l - tego roku studiów odniesioną do końca roku akademickiego t $(t = 1,2,...,T)$. Niezbędnymi danymi są:

- $p^{(l)}(t')$ - liczba osób, które na początku roku akademickiego t znalazły się na liście studentów l - tego roku studiów jako osoby przybyłe z zewnątrz,
- $n^{(u_l)}(t')$ - liczba osób, które na początku roku akademickiego t znalazły się na liście studentów l - tego roku studiów jako osoby, które wznawiają studia po powrocie z urlopów dziekańskich,
- $r^{(l)}(t')$ - liczba osób, które na początku roku akademickiego t znalazły się na liście studentów jako osoby, które w roku akademickim $t-1$ nie zaliczyły l - tego roku studiów i będą go powtarzały w roku t,
- $n^{(l-1,l)}(t')$ - liczba osób, które na początku roku akademickiego t znalazły się na liście studentów jako osoby, które w roku akademickim $t-1$ studiowały na $(l-1)$ - szym roku studiów i uzyskały promocja na rok l - ty,
- $n^{(u_l)}(t'')$ - liczba osób, które w ciągu roku akademickiego t zawiesiły studia na l - tym roku i poszły na urlopy dziekańskie,
- $n^{(o_l)}(t'')$ - liczba osób, które w ciągu roku akademickiego t przerwały studia na l - tym roku i odeszły z uczelni,
- $n^{(l,l)}(t'')$ - liczba osób, które w roku akademickim t nie zaliczyły l - tego roku studiów.

Wielkości występujące we wszystkich formułach (31)-(40) wyrażały liczebności rozważanych kategorii studentów w liczbach naturalnych. Przedstawiony model może więc być użyty do śledzenia i prognozowania dynamiki podziału zbiorowości studentów na poszczególne kategorie identyfikujące status uczelniany studenta oraz dynamiki przepływu studentów przez cykl procesu edukacyjnego w szkole wyższej. Jak już powiedzieliśmy, znacznie bardziej elastyczny byłby model, w którym zamiast operowania na wielkościach naturalnych operowano by na wielkościach względnych. Aby skonstruować taki model powróćmy do wektorowej reprezentacji stanu procesu edukacyjnego, którego realizacje w chwilach t są wyrażone formułą (5). Dla ustalenia uwagi podajemy ją jeszcze raz

$$\underline{\mathrm{n}}(\mathrm{t}) = [n_1(t), n_2(t), \ldots, n_K(t)]. \tag{41}$$

Ponieważ ograniczyliśmy się do rozważania jednego wydziału, więc $K = 3L + 1$. Przyjmijmy ponadto, że na wydziale obowiązuje pięcioletni cykl studiów. Wobec tego $K = 16$ i wektor stanu $\underline{\mathrm{n}}(\mathrm{t})$ przyjmuje postać

$$[S_1(t), \ldots, S_5(t), S_6(t), S_7(t) \ldots, S_{11}(t), S_{12}(t), \ldots, S_{16}(t)], \tag{42}$$

przy czym składowe $S_1(t), \ldots, S_5(t)$ odpowiadają możliwości przerwania nauki na każdym roku studiów w roku akademickim t i odejściu studenta z uczelni, składowa $S_6(t)$ odpowiada ukończeniu uczelni w roku akademickim t i odejściu z niej jako absolwent, składowe $S_7(t), \ldots, S_{11}(t)$ odpowiadają pobytowi studenta w roku akademickim t na kolejnych latach studiów, zaś składowe $S_{12}(t), \ldots, S_{16}(t)$ możliwości przejścia studentów poszczególnych lat studiów na urlopy dziekańskie. Macierz M przejść między stanami ma postać

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
m_{7,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{7,7} & m_{7,8} & 0 & 0 & 0 & m_{7,12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & m_{8,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{8,8} & m_{8,9} & 0 & 0 & 0 & m_{8,13} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & m_{9,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{9,9} & m_{9,10} & 0 & 0 & 0 & m_{9,14} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & m_{10,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{10,10} & m_{10,11} & 0 & 0 & 0 & m_{10,15} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & m_{11,5} & m_{11,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{11,11} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{11,16} \\
m_{12,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{12,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{12,12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & m_{13,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{13,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{13,13} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & m_{14,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{14,9} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{14,14} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & m_{15,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{15,10} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{15,15} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & m_{16,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{16,11} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{116,16}
\end{bmatrix} \tag{43}$$

Zapiszmy tę macierz w następującej postaci blokowej

$$M = \begin{bmatrix} I & O \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix},$$

gdzie I jest macierzą jednostkową szóstego stopnia, O jest prostokątną macierzą zerową o wymiarach 6×10, natomiast

$$M_{21} = \begin{bmatrix} m_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{91} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{10,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{11,1} & m_{11,6} \\ m_{12,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{13,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{14,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{15,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{16,5} & 0 \end{bmatrix}, \tag{44}$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} m_{77} & m_{78} & 0 & 0 & 0 & m_{7,12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{88} & m_{89} & 0 & 0 & 0 & m_{8,13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{99} & m_{9,10} & 0 & 0 & 0 & m_{9,14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{10,10} & m_{10,11} & 0 & 0 & 0 & m_{10,15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{11,11} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{11,16} \\ m_{12,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{12,12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{13,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{13,13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{14,9} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{14,14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{15,10} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{15,15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{16,11} & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{16,16} \end{bmatrix}. \tag{45}$$

W macierzy przejścia występuje 35 prawdopodobieństw przejścia, spośród których 25 trzeba bezpośrednio oszacować na podstawie uczelnianej bazy danych. Podstawową formą danych są realizacje wektora stanu mające postać

$$[n^{(o_1)}(t),\dots,n^{(o_5)}(t),n^{(a)}(t),n^{(1)}(t),\dots,n^{(5)}(t),n^{(u_1)}(t),\dots,n^{(u_5)}(t)]. \tag{46}$$

Ich składowymi są liczby studentów znajdujących się w każdym z rozpatrywanych stanów w roku akademickim t. Załóżmy, że dysponujemy zbiorem wektorów obserwacji stanu procesu edukacyjnego w latach $t = 1,2,\dots,T'$. Na podstawie tego zbioru można oszacować zaobserwowane liczby przejść między poszczególnymi stanami i obliczyć wartości przwdopodobieństw przejść. W szczególności, względna liczba studentów, którzy w roku akademickim t byli na l - tym roku studiów, przerwali je i odeszli z uczelni wyraża się wzorem

$$m^{(o_l)}(t) = \frac{n^{(o_l)}(t'')}{n^{(l)}(t')}, \qquad (l = 1,2,3,4,5), \tag{47}$$

zaś względna liczba studentów, którzy zostali absolwentami uczelni wzorem

$$m^{(a)}(t)=\frac{n^{(L)}(t'')}{n^{(L)}(t')}, \qquad (l=1,2,3,4,5). \tag{48}$$

Względna liczba studentów, którzy w roku akdemickim t byli na l - tym roku studiów i nie uzyskali promocji na rok następny wynosi

$$m^{(l,l)}(t)=\frac{n^{(l,l)}(t'')}{n^{(l)}(t')}, \qquad (l=1,2,3,4,5), \tag{49}$$

natomiast względna liczba tych, którzy uzyskali tę promocję wyraża się tak

$$m^{(l,l+1)}(t)=\frac{n^{(l,l+1)}(t'')}{n^{(l)}(t')}, \qquad (l=1,2,3,4,5). \tag{50}$$

Ponieważ zgodnie z wyrażeniem (31) zachodzi równość $n^{(l,l+1)}(t'')=\mathrm{n}^{(l)}(t'')$, więc formuła (50) jest równoważna następującej

$$m^{(l,l+1)}(t)=\frac{n^{(l)}(t'')}{n^{(l)}(t')}, \qquad (l=1,2,3,4,5). \tag{51}$$

A zatem statystyczne prawdopodobieństwo zdarzenia, że student który w roku akademickim t rozpoczął l - ty rok studiów ukończy ten rok i uzyska promocję na rok l - szy wyraża się stosunkiem liczby studentów l - tego roku w chwili zakończenia roku, do ich liczby w chwili jego rozpoczęcia.

Mianowniki formuł (47), (48), (49) i (51) wyrażają się wzorem (33). Ponieważ z równości (31) wynika też, że $n^{(l-1,l)}(t')=\mathrm{n}^{(l-1)}((t-1)'')$, więc zastępując w formułach (39) i (40) wielkość $n^{(l-1,l)}(t)'$ przez $\mathrm{n}^{(l-1)}((t-1)'')$ otrzymamy odpowiednio

$$n^{(l)}(t'')=p^{(l)}(t')+n^{(u_l)}(t')+r^{(l)}(t')+n^{(l-1)}((t-1)'')-n^{(u_l)}(t'')-n^{(o_l)}(t'')-n^{(l,l)}(t'') \tag{52}$$

oraz

$$n^{(L)}(t'')=p^{(L)}(t')+n^{(u_L)}(t')+r^{(L)}(t'')+n^{(L-1)}((t-1)'')-n^{(u_L)}(t'')-n^{(o_L)}(t'')-n^{(L,L)}(t''). \tag{53}$$

Zatępując więc w formułach (47), (48), (49) i (51) mianowniki przez prawą stronę wyrażenia (33), a ponadto licznik formuły (48) przez prawą stronę wyrażenia (53) zaś licznik formuły (51) przez prawą stronę wyrażenia (52) otrzymamy kolejno

$$m^{(o_l)}(t)=\frac{n^{(o_l)}(t'')}{p^{(l)}(t')+n^{(u_l)}(t')+r^{(l)}(t'')+n^{(l-1,l)}(t')}, \tag{54}$$

$$m^{(a)}(t) = 1 - \frac{n^{(u_L)}(t'') + n^{(o_L)}(t'') + n^{(L,L)}(t'')}{p^{(L)}(t') + n^{(u_L)}(t') + r^{(L)}(t'') + n^{(L-1,L)}(t')}, \tag{55}$$

$$m^{(l,l)}(t) = \frac{n^{(l,l)}(t'')}{p^{(l)}(t') + n^{(u_l)}(t') + r^{(l)}(t'') + n^{(l-1,l)}(t')}, \tag{56}$$

$$m^{(l,l+1)}(t) = 1 - \frac{n^{(u_l)}(t'') + n^{(o_l)}(t'') + n^{(l,l)}(t'')}{p^{(l)}(t') + n^{(u_l)}(t') + r^{(l)}(t'') + n^{(l-1,l)}(t')}, \tag{57}$$

Formuły (54)-(57) charakteryzują dynamikę przepływu studentów przez proces edukacyjny w kategoriach prawdopodobieństw przejść między możliwymi stanami procesu. Dotyczą one wprawdzie tylko jednego wydziału, ale jeżeli rozważa się uczelnię wielowydziałową i jeżeli można przyjąć założenie o braku przepływu studentów między wydziałami, to można zastosować te formuły kolejno do poszczególnych wydziałów. Jeżeli przepływy takie mają miejsce i nie można ich w modelu pominąć, to znacznie wygodniejsze od wyprowadzania formuł obliczeniowych będzie posłużenie się numerycznymi metodami szacowania macierzy przejścia (Lee, Judge i Zellner, 1970).

Zauważmy jednak, że szacowanie macierzy przejścia technikami czysto rachunkowymi i wyłącznie na podstawie danych z przeszłości nie jest w pełni obiektywne. Abstrahując od nieuniknionej nieścisłości danych i niepełności ich zbiorów trzeba wyraźnie stwierdzić, że wszelkie szacunki statystyczne oparte na danych historycznych, a następnie użyte do prognozowania przyszłego zachowania się procesów, których dotyczą, milcząco zakładają dalsze trwanie tych samych warunków otoczenia procesu, jakie miały miejsce w przeszłości. Nie tylko w odniesieniu do procesów edukacyjnych jest to założenie nieprawdziwe. Musi zostać zbudowany inny system oceny macierz przejść, uwzględniający jedyność w swoim rodzaju i niepowtarzalność każdego systemu edukacyjnego oraz realizowanego w nim procesu edukacyjnego. Zaawansowane są badania prowadzone przez autorów niniejszej pracy nad zastosowaniem metod ekspertów do oceny macierzy przejścia. Okazuje się bowiem, że logiczna analiza uwarunkowań, które trzeba uwzględniać w tych szacunkach, a które są obciążone dużą dozą nieokreśloności i ryzyka, prowadzi do ocen wcale nie gorszych od tych, które otrzymuje się metodami czysto obliczeniowymi. Ma jednak nad nimi tę przewagę, że nie wymaga przyjmowania rygorystycznych założeń statystycznych, które w odniesieniu do unikatowych procesów edukacyjnych są po prostu nierealne.

Złożoność obliczeń związanych z estymacją macierzy przejścia zależy od liczby możliwych stanów procesu edukacyjnego. Liczbę tę można by wyraźnie zmniejszyć, rozpatrując tylko jeden wspólny dla wszystkich wydziałów i wszystkich lat studiów stan pochłaniający odpowiadający przerwaniu studiów i odejściu studenta z uczelni, jeden podobnie utworzony stan odpowiadający przejściu studenta na urlop i jeden stan odpowiadający ukończeniu uczelni. Uprościłoby to wprawdzie rozważania matematyczne, ale kosztem znacznego odejścia od realiów procesu edukacyjnego. Poprawniejszym podejściem byłoby przeprowadzenie agregacji stanów i odpowiadającej jej agregacji elementów macierzy przejścia. Aby jednak operacja ta była możliwa, prawdopodobieństwa przejścia musiałyby spełniać określone warunki matematyczne (zob. Kemeny i Snell, 1960). W tej sytuacji jedynym rozsądnym rozwiązaniem wydaje się poszukiwanie matematyczno-heurystycznych metod szacowania macierzy przejścia.

7. Jednorodny i niejednorodny łańcuch Markowa. Zakresy ich stosowalności do prognozowania procesów edukacyjnych

Możliwe są dwie sytuacje. Albo macierz przejścia (21) jest stała i wówczas mamy do czynienia ze skończonym jednorodnym łańcuchem Markowa, albo też zmienia się ona w czasie i łańcuch jest niejednorodny.

Rozpatrzmy najpierw pierwszy z tych przypadków. Wiadomo (zob, np.: Cox i Miller, 1965; Fisz, 1968: Koźniewska i Włodarczyk, 1978), że jednorodny skończony łańcuch Markowa o r stanach jest w pełni określony, jeżeli jest dany wektor $m_0 = [m_{01}, m_{02}, ..., m_{0r}]$, którego składowymi są bezwarunkowe prawdopodobieństwa tego, że w chwili zerowej modelowany proces znajduje się w stanie r oraz macierz M prawdopodobieństw warunkowych przejścia w jednym kroku. W odniesieniu do procesu edukacyjnego składowe wektora m_0 są prawdopodobieństwami zaliczenia studenta w roku akademickim t do każdego z rozpatrywanych stanów. Niech $m_t = [m_{t1}, m_{t2}, ..., m_{tr}]$ będzie wektorem analogicznych prawdopodobieństw w chwili t $(t = 1,2,...,T)$. Prognozy tego wektora oblicza się z formuły

$$m_{t+1} = m_t M \, , \tag{58}$$

która po uwzględnieniu jej rekurencyjności wyraża się również tak:

$$m_{t+1} = m_0 M^t \, . \tag{59}$$

Ponieważ w modelu procesu edukacyjnego M jest macierzą pochłaniającą, więc podnoszenie do kolejnych nieujemnych potęg nie zmienia jej struktury (zob. wzór (30)). Podstawową własnością macierzy M jest to, że macierz $I - M_{22}$ jest nieosobliwa a więc odwracalna, przy czym (zob., np., Kemeny i Snell, 1960)

$$(I - M_{22})^{-1} = I + M_{22} + M_{22}^2 + ... = \sum_{t=0}^{\infty} M_{22}^t \, . \tag{60}$$

Macierz $(I - M_{22})^{-1}$ nazywa się macierzą fundamentalną łańcucha Markowa i za jej pomocą daje się wyrazić wiele własności łańcucha. W szczególności jest udowodnione, że średni czas potrzebny na przejście łańcucha w dany stan ergodyczny jest skończony, przy czym długość tego czasu dla poszczególnych stanów jest równa wartości elementów macierzy fundamentalnej. Zagadnienia tego nie rozwijamy. Zwracamy jednak uwagę na to, że z formuły (60) powinno się korzystać tylko w przypadku odpowiednio długiego horyzontu czasowego i tylko wtedy, gdy strukturalne własności badanego procesu są w tym horyzoncie stałe. Tymczasem strukturalne własności procesów edukacyjnych w okresie realizowanej obecnie w kraju reformy edukacyjnej ulegają ukierunkowanym zmianom. Prognozowanie tych procesów w długich horyzontach czasowych tylko za pomocą jednorodnych łańcuchów Markowa byłoby niewłaściwe. W długich horyzontach modele te powinny być wykorzystywane przede wszystkim jako narzędzia wspomagające konstruowanie prognoz rozwoju systemu edukacji metodą scenariuszy. Jeżeli więc chce się wykorzystać pochłaniający jednorodny łańcuch Markowa do prognozowania dynamiki procesu edukacyjnego wyrażonej, na przykład, za pomocą zmian rozkładu zbiorowości studentów między poszczególne wydziały, lata studiów itd., to prognoza będzie tym mniej dokładna, im dłuższy będzie jej horyzont prognozy wyrażony w latach akademickich. Ze względów czysto praktycznych łańcuch jednorodny może być wykorzystywany przede wszystkim do prognozowania krótkoterminowego oraz średnioterminowego i to tylko w okresach monotonicznego rozwoju uczelni. W okresach tych ma miejsce rozwój przez fluktuacje, których amplitudy nie przekraczają takiej wartości krytycznej, której zaistnienie groziłoby zerwaniem strukturalnej stabilności rozwoju. A zatem, aby móc użyć skończonego jednorodnego łańcucha Markowa jako modelu dynamiki przepływu studentów przez proces edukacyjny realizowany w szkole, trzeba najpierw zidentyfikować trajektorię rozwoju szkoły jako systemu o celowym działaniu, a następnie zdekomponować ją na fazy monotonicznego rozwoju i fazy przejściowe, podczas których w procesie edukacyjnym przeprowadza się zmiany systemowe. O ile monotoniczne fragmenty trajektorii procesu edukacyjnego można a nawet trzeba opisywać za pomocą modeli probabilistyczno-statystycznych, na przykład za pomocą procesów a w szczególności łańcuchów Markowa, to opisywanie faz przejściowych w języku rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej byłoby niewłaściwe. W fazach tych trudno byłoby mówić o trajektorii rozwoju procesu edukacyjnego. Istotą podejmowanych w nich przedsięwzięć jest bowiem dokonanie w procesie stosownych zmian strukturalnych, a więc jakościowa zmiana procesu. Metody stochastyczne można stosować tylko w odniesieniu do systemów stabilnych strukturalnie. W fazach przejściowych nie działa prawo wielkich liczb, które funkcjonowanie jest warunkiem zxastosowań podejścia stochastycznego. W fazach tych formułuje się i analizuje różne możliwe warianty dalszego rozwoju systemu edukacyjnego, a także dokonuje się wyboru wariantu najbardziej racjonalnego. Przygotowuje się warunki początkowe dla nowej fazy rozwoju monotonicznego, ale już systemowo innego procesu niż ten, który miał miejsce w poprzedniej fazie monotopnicznej. Adekwatnego aparatu matematycznego do opisu tych faz dostarcza teoria stabilności strukturalnej, a w szczególności teoria katastrof (Thom, 1972, 1980; Prigogine i Stengers, 1984; Gilmore, 1993; Poston i Stewart, 1996).

W monotonicznych fazach rozwoju systemu edukacyjnego dominują systematyczne, ale wolno zachodzące zmiany ilościowe. Z upływem czasu nagromadzenie tych zmian jest coraz większe i system staje się coraz bardziej wrażliwy nawet na drobne fluktuacje. Musi to znaleźć odbicie w modelu prognostycznym. Jeżeli modelem tym jest łańcuch Markowa, to jedynym sposobem odwzorowania narastającej wrażliwości procesu na zmiany zachodzące w łonie uczelni i w jej systemowym otoczeniu jest uzmiennienie macierzy przejścia. Odpowiada ta przyjęciu niejednorodnego skończonego łańcucha Markowa jako modelu dynamiki przepływu studentów przez system edukacyjny szkoły. Niech M_t będzie macierzą przejścia procesu dla roku akademickiego t $(t=1,2,...,T)$. W tym przypadku pomiędzy wektorami $m_t=[m_{t1},m_{t2},...,m_{tr}]$ i $m_{t+1}=[m_{t+1,1},m_{t+1,2},...,m_{t+1,r}]$ zachodzi związek

$$m_{t+1}=m_tM_{t+1}\,. \tag{61}$$

Wykorzystując jego rekurencyjność można mu nadać postać

$$m_{t+1}=m_o\prod_{s=1}^{t+1}M_s\,. \tag{62}$$

Wzór (62) pozwala więc wyznaczyć wektor m_{t+1} stanu procesu edukacyjnego w chwili $t+1$, jeżeli jest znany wektor początkowy m_0 oraz ciąg macierzy przejścia $M_1,M_2,...,M_{t+1}$. Chociaż jest to model bardziej realny niż model jednorodny, to jednak zakres jego stosowalności jest też ograniczony do okresów monotonicznego rozwoju procesu edukacyjnego.

8. Hipoteza o niezależności stanów

Uzasadnieniem decyzji o użyciu łańcucha Markowa jako modelu dynamiki procesu edukacyjnego powinno być odrzucenie statystycznej hipotezy o niezależności przejść między stanami procesu. Dla zweryfikowania tej hipotezy trzeba całą zbiorowość studentów w każdym roku akademickim t $(t = 1,2,...,T)$ rozbić na klasy równoważności odpowiadające możliwym stanom studenta i przedstawić zbiór liczności poszczególnych klas w postaci macierzy (1). Dla T' lat otrzyma się T' takich macierzy. Ze statystycznego punktu widzenia każda z nich jest typową tablicą dwudzielczą typu $W \times (L+3)$. Posługując się zawartymi w niej danymi trzeba przede wszystkim zweryfikować hipotezę o statystycznej niezależności rozpatrywanych $L+3$ kategorii studentów od rodzaju wydziału. Jeżeli więc przez m_{wl} oznaczymy prawdopodobieństwo, że student wybrany na chybił trafił z całej zbiorowości studentów danego roku akademickiego będzie należał do grupy w $(w = 1,2,...,W)$ według jednej cechy i do grupy l $(l = 1,2,...,L+3)$ według drugiej, a przez m_w i $m^{(l)}$ oznaczymy odpowiednie prawdopodobieństwa brzegowe, to warunkiem koniecznym i dostatecznym prawdziwości hipotezy o niezależności jest spełnienie równości

$$m_{wl} = m_w m^{(l)}, \tag{63}$$

przy czym $\sum_{w=1}^{W} m_w = \sum_{l=1}^{L+3} m^{(l)} = 1$. Ponieważ $m_W = 1 - \sum_{w=1}^{W-1} m_w$, zaś $m_{L+3} = 1 - \sum_{l=1}^{L+2} m^{(l)}$, więc z tablicy danych trzeba wyznaczyć $s = W + L - 1$ nieznanych parametrów. W oparciu o twierdzenie Fishera (zob., np., Cramér, 1958; Fisz, 1968), które głosi, że jeżeli nieznane wartości m parametrów wyznacza się z próby metodą największej wiarygodności, to rozkład statystyki χ^2 określonej wzorem

$$\chi^2 = n \sum_{l=1}^{L+3} \sum_{w=1}^{W} \frac{(n_{lw} - n_w n^{(l)} / n)}{n_w n^{(l)}} \tag{64}$$

jest zbieżny do rozkładu χ^2 o $W(L+3) - (W + L + 3 - 2) - 1 = (W-1)(L+2)$ stopniach swobody. Dla zweryfikowania hipotezy o niezależności trzeba więc obliczyć wartość statystyki χ^2 posługując się wyrażeniem (64), następnie wybrać konkretną wartość poziomu istotności α i odczytać z tablic rozkładu χ^2 wartości χ_1^2 i χ_2^2 odpowiadające temu poziomowi przy $(W-1)(L+2)$ stopniach swobody. Jeżeli $\chi^2 < \chi_1^2$ lub $\chi^2 > \chi_2^2$, to hipotezę o niezależności cech odrzuca się i postuluje się istnienie współzależności między nimi. Za miarę siły tej współzależności można przyjąć wartość współczynnika

$$\theta = \frac{\chi^2}{n(q-1)}, \tag{65}$$

gdzie $q = \min(W, L+3)$. Oczywiście, $0 \le \theta \le 1$. Wartość $\theta = 0$ sugeruje pełną niezależność cech, natomiast $\theta = 1$ wskazuje na możliwość istnienia ścisłej funkcyjnej zależności między nimi. Opis dynamiki przejść między rozważanymi grupami studentów za pomocą jednorodnego lub niejednorodnego łańcucha Markowa odnosi się do wartości θ spełniających warunek $0 < \theta < 1$.

Cechy klasyfikujące rozważaną zbiorowość studentów byłyby statystycznie niezależne wtedy i tylko wtedy, gdyby wartości prawdopodobieństw łącznych m_{wl} były równe iloczynom prawdopodobieństw brzegowych m_w i $m^{(l)}$, dla wszystkich rozpatrywanych wartości w i l. Procedura weryfikacji hipotezy o niezależności ma charakter konstruktywny w tym sensie, że podaje sposób oszacowania wartości tych prawdopodobieństw brzegowych. Wyrażają się one formułami

$$\hat{m}_w = \frac{N_w}{N}, \quad m^{(l)} = \frac{N^{(l)}}{N}, \tag{66}$$

gdzie wielkości N_w, $N^{(l)}$ i N są określone odpowiednio wzorami (2), (3) i (4).

8. Hipotezy o niejednorodności łańcucha

Jeżeli weryfikacja hipotezy o niezależności wykazała, że nie ma podstaw do jej przyjęcia to można przypuszczać, że dynamiką procesu edukacyjnego rządzą prawa i mechanizmy statystyczne, które można odwzorować za pomocą łańcucha Markowa. Powstaje pytanie, czy ma to być łańcuch jednorodny, czy niejednorodny. W literaturze przedmiotu jest wiele prac, w których wybitne autorytety z dziedziny zastosowań łancuchów Markowa w naukach społecznych - bazując na formalnych analogiach między dynamiką procesów mobilności społecznej i procesów edukacyjnych - wskazują na możliwość wykorzystania tego matematycznego aparatu do modelowania różnych aspektów dynamiki procesów edukacyjnych (zob., np.: Kemeny i Snell, 1960; Benard, 1966; Barthomolew, 1967; Bounden, 1973; Bessent i Bessent, 1980). Modele podawane w pracach tego rodzaju mają z reguły charakter dydaktyczny, są bardzo uproszczone i nie odwołują się do żadnych konkretnych danych rzeczywistych. Ich naukowa wartość polega przede wszystkim na zwróceniu uwagi na rolę przypadkowości w przebiegu rzeczywistych procesów edukacyjnych, których wzorzec jest w każdej uczelni w pełni określony. Powszechnie popełnianym błędem metodologicznym jest bezpośrednie przenoszenie tych modeli na grunt rzeczywistości akademickiej bez wcześniejszego zbadania nie tylko samej zasadności opisu dynamiki procesu edukacyjnego za pomocą łańcucha Markowa, ale także rozstrzygnięcia, czy ma to być łańcuch jednorodny czy niejednorodny.

Wiadomo, że o jednorodności łańcucha świadczy niezmienniczość wartości prawdopodobieństw przejścia $m_{k_1k_2}$ $(k_1, k_2 = 1,2,...,K)$ w czasie. Jeżeli więc w kolejnych jednostkach czasu prawdopodobieństwa przejścia procesu edukacyjnego ze stanu k_1 w stan k_2 są względnie stałe, tzn. jeżeli $m_{k_1k_2} \approx \text{const.}$ $(k_1, k_2 = 1,2,...,K)$, to należy wnioskować o jednorodności łańcucha. Dla wytestowania hipotezy o jednorodności łańcucha można posłużyć się testem Ajwazjana (Ajwazjan, 1975). Stawiamy hipotezę zerową $HIP_0 : m_{k_1k_2}(t) = m_{k_1k_2}$ dla $k_1, k_2 = 1,2,...,K$, tj. hipotezę mówiącą, że dla każdej pary stanów k_1, k_2 prawdopodobieństwa przejścia $m_{k_1k_2}$ na wszystkich krokach $(t-1,t)$, gdzie $(t = 1,2,...,T)$, są takie same i równe prawdopodobieństwom przejścia, które otrzymano by przy założeniu jednorodności łańcucha. W teście Ajwazjana oblicza się wartość statystyki

$$U=\sum_{k_1}^{K}\sum_{t=2}^{T}\sum_{k_2}^{K}\frac{n_{k_1}(t-1)[\hat{m}_{k_1k_2}(t)-\hat{m}_{k_1k_2}]^2}{\hat{m}_{ij}}, \tag{67}$$

gdzie

$$\hat{m}_{k_1k_2}(t)=\frac{n_{k_1k_2}(t)}{n_{k_1}(t-1)}, \tag{68}$$

$$\hat{m}_{k_1k_2}=\frac{\sum_{t=2}^{T}n_{k_1k_2}(t)}{\sum_{t=2}^{T}\sum_{k_2=1}^{K}n_{k_1k_2}(t)}. \tag{69}$$

Ajwazjan udowodnił, że jeżeli hipoteza zerowa jest prawdziwa, to rozkład statystyki U jest asymptotycznie zbieżny do rozkładu χ^2 o $K(K-1)(T-1)$ stopniach swobody.

Jeżeli w wyniku przeprowadzonych rachunków okaże się, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o jednorodności łańcucha, to dla obliczenia prawdopodobieństw przejścia należy posłużyć się formułą

$$m_{k_1k_2}=\frac{\sum_{t=2}^{T}n_{k_1k_2}(t)}{\sum_{t=2}^{T}n_{k_1}(t-1)}, \qquad (k_1,k_2=1,2,\dots,K), \tag{70}$$

gdzie

$$n_{k_1}(t-1)=\sum_{k_2=1}^{K}n_{k_1k_2}(t), \qquad (k_1=1,2,\dots,K;t=2,\dots,T). \tag{71}$$

Po obliczeniu wartości wszystkich prawdopodobieństw przejścia $m_{k_1k_2}$ trzeba utworzyć macierz przejścia M i posługując się formułą (58) lub (59) skonstruować prognozę dynamiki procesu edukacyjnego dla danego horyzontu czasowego.

Jeżeli wynik testowania hipotezy $HIP_0: m_{k_1k_2}(t)=m_{k_1k_2}$ dla $k_1,k_2=1,2,\dots,K$ jest negatywny, to istnieją uzasadnione obiektywne przesłanki do przyjęcia, że mamy do czynienia z łańcuchem niejednorodnym. Ponieważ o niejednorodności łańcucha świadczy zmienność prawdopodobieństw przejścia w czasie, więc w tym przypadku trzeba dla każdego roku akademickiego t $(t=1,2,\dots,T)$ wyznaczyć stosowną macierz przejścia M_t. W ogólnym przypadku robi się dwustopniowo (Lee, Judge i Zellner, 1970; Koźniewska i Włodarczyk, 1978). Jeżeli dysponuje się danymi empirycznymi dotyczącymi T' kolejnych lat akademickich, to na ich podstawie znajduje się oszacowania T' macierzy przejścia, których elementy oblicza się według wzoru (68). W ten sposób dla każdego elementu $m_{k_1k_2}(t)$, gdzie $k_1,k_2=1,2,\dots,K$, otrzymuje się T' liczbowych wartości odpowiadających kolejnym chwilom $t=1,2,...,T'$. Dla każdego elementu $m_{k_1k_2}(t)$ można więc znaleźć funkcję regresji opisującą zmienność $m_{k_1k_2}(t)$ w czasie. Jeżeli oznaczymy ją przez $f_{k_1k_2}$, to formalnie otrzymujemy zależność $m_{k_1k_2}(t)=f_{k_1k_2}(t)$. Zazwyczaj dla znalezienia estymatorów wartości parametrów funkcji $f_{k_1k_2}$ korzysta się z metody najmniejszych kwadratów, która w przypadku regresji liniowej zawsze daje estymatory statystycznie najlepsze, a więc zgodne, nieobciążone i najefektywniejsze. W zastosowaniach praktycznych proponujemy jednak korzystanie z metody dwóch punktów Hellwiga (Hellwig, 1960), która wprawdzie daje estymatory tylko zgodne i nieobciążone, ale jest za to niezwykle prosta w użyciu. Ostatecznie macierz przejścia łańcucha niejednorodnego przyjmie postać

$$M_t=\begin{bmatrix} m_{11}(t) & m_{12}(t) & \dots & m_{1K}(t) \\ m_{21}(t) & m_{22}(t) & \dots & m_{2K}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{K1}(t) & m_{K2}(t) & \dots & m_{KK_2}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \dots & f_{1K}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \dots & f_{2K}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{K1}(t) & f_{K2}(t) & \dots & f_{KK}(t) \end{bmatrix}. \qquad (72).$$

Należy pamiętać, że musi to być macierz stochastyczna, a więc wszystkie jej elementy muszą spełniać warunek $0\leq m_{k_1k_2}(t)=f_{k_1k_2}(t)\leq 1$, zaś suma elementów każdego wiersza musi być równa jeden. Wynika z tego, że wystarczy oszacować wartości elementów $K-1$ pierwszych kolumn, natomiast wartości elementów ostatniej kolumny wyznaczyć z zależności

$$m_{k_1K}(t)=f_{k_1K}(t)=1-\sum_{k_1=1}^{K-1} m_{k_1k_2}(t), \qquad (k_1=1,2,...,K). \qquad (73)$$

Warunek (73) ma więc charakter zasady koordynującej wiązkę prognoz zmian prawdopodobieństw przejścia w przypadku łańcucha niejednorodnego w taki sposób, by w każdej chwili $t=1,2,...,T$ była zachowana stochastyczność macierzy przejścia.

W przypadku procesu edukacyjnego niejednorodność łańcucha opisującego jego dynamikę tylko na pozór wydaje się oczywista. Strategia zrównoważonego rozwoju uczelni powinna uwzględniać, że struktura procesu edukacyjnego musi z upływem czasu dostosowywać się do zmian w ilościowej i jakościowej strukturze demograficznej społeczeństwa, do zmian w zapotrzebowaniu na kadry wykształconych specjalistów, do zainteresowań i aspiracji młodych pokoleń itp. Są to jednak procesy obciążone dużą nieokreślonością, niemożliwą do pełnego uwzględnienia nawet w stochastycznym modelu dynamiki procesu edukacji. Posiadanie modelu tej dynamiki w postaci niejednorodnego łańcucha Markowa nie uprawnia do wykorzystywania go jako narzędzia prognostycznego w dowolnie długich horyzontach czasowych. Zanim użyje się tego modelu trzeba wpierw bardzo realnie ocenić, czy uczelnia znajduje się w fazie rozwoju monotonicznego i czy w rozpatrywanym horyzoncie czasowym nie przewiduje się przeprowadzenia w niej takich zmian strukturalnych, które wywołają zmianę jej tożsamości systemowej.

4. Identyfikacja rzędu łańcucha. Łańcuch z pamięcią i jego entropia

Jeżeli zostało wyjaśnione, czy model dynamiki procesu edukacyjnego ma mieć postać łańcucha jednorodnego czy niejednorodnego, to trzeba jeszcze podjąć decyzję co do rzędu łańcucha, tzn. obiektywnie rozstrzygnąć, czy ma to być łańcuch bez pamięci czy z pamięcią i – w przypadku łańcucha z pamięcią - jak głęboka ma być ta pamięć (głębokość pamięci nazywa się rzędem łańcucha). Niestety, krok ten jest nagminnie pomijany i to nie tylko w badaniach dotyczących modelowania dynamiki procesów edukacyjnych. Powszechnie postępuje się tak, że konstruktor modelu po prostu z góry przyjmuje takie uproszczenia odnośnie modelowanego procesu edukacyjnego, które automatycznie wskazują na sensowność opisywania go za pomocą łańcucha Markowa pierwszego rzędu. Potem wszelkie nieścisłości takiego modelu tłumaczy się niedokładnością i niepełnością danych, nieprzewidywalnością zmian w systemowym otoczeniu procesu, świadomym uproszczeniem struktury rzeczywistego procesu edukacyjnego, itp. (zob., np.: Armitage, Smith i Alper, 1969; Tinbergen i Boss, 1973; Spinney i McLaughlin, 1979; Bessent i Bessent, 1980). Z reguły wskazuje się na potrzebę uściślenia modelu, ale prób takiego uściślenia na ogół już nie podejmuje się. Zapomina się, że alternatywą dla sytuacji niezależności mechanizmów dynamiki procesu edukacyjnego wcale nie musi być łańcuch Markowa pierwszego rzędu. W grę wchodzą łańcuchy różnego rzędu i chociaż zgodnie z kanonami teorii modelowania matematycznego trzeba dążyć do wyboru modelu jak najprostszego, ale gwarantującego wymaganą dokładność wyników, to wcale z tego nie wynika, że ma to być łańcuch pierwszego rzędu. Może tak być, ale nie musi. Wybór rzędu łańcucha nie może więc być decyzją czysto arbitralną, lecz musi być poparty wnikliwą analizą posiadanych danych oraz analizą logiki i mechanizmów dynamiki rzeczywistego procesu edukacyjnego.

Istnieją różne metody szacowania rzędu łańcucha Markowa (zob., np. Katz, 1981). Najprościej można to zrobić testując hipotezę zerową HIP_0, że zaobserwowany ciąg rzeczywistych stanów procesu edukacyjnego jest realizacją łańcucha Markowa pierwszego rzędu, przy hipotezie alternatywnej HIP_1, że jest on realizacją łancucha wyższego rzędu. Można skorzystać z metod opartych na analizie różnorakich kryteriów informacyjnych. Można też posłużyć się analizą warunkowych entropii związanych z tym ciągiem wykorzystując własności entropii a zwłaszcza fakt, że wielkość entropii warunkowej maleje ze wzrostem rzędu łańcucha. Ponieważ analiza procesów rozwoju w terminach entropii pozwala nie tylko oszacować rząd łańcucha, ale dostarcza również informacji o zmianach poziomu nieokreśloności procesu edukacyjnego, którego dynamikę łańcuch ten opisuje, więc zajmiemy się teraz kwestią nieokreśloności łańcuchów Markowa jako modeli dynamiki procesów edukacyjnych. Zwrócimy przy tym uwagę na możliwość numerycznego oszacowania stopnia tej nieokreśloności w kategoriach entropii informacyjnej.

Oznaczmy przez S_t zmienną stanu (skalarną lub wektorową) procesu edukacyjnego i załóżmy, że jest dany ciąg jej wartości zaobserwowanych w latach akademickich $1,2,...,T$:

$$s_1, s_2, ..., s_T. \tag{74}$$

Ciąg ten może też być również rozpatrywany jako jedna z realizacji T-wymiarowej zmiennej losowej

$$(S_1, S_2, ..., S_T). \tag{75}$$

Wiadomo, że z punktu widzenia teorii procesów stochastycznych istnieją dwie możliwości: albo składowe tej zmiennej są wzajemnie niezależnymi zmiennymi losowymi (o takich samych lub różnych rozkładach prawdopodobieństwa), albo też zachodzą między nimi jakieś zależności stochastyczne. Zależności te mogą być badaczowi znane lub nieznane. Jeżeli nie są znane, to trzeba je zidentyfikować za pomocą metod klasycznej statystyki matematycznej

((Billingsley, 1961a, 1961b; Hellwig, 1980), bądź metod statystyki procesów stochastycznych (Lipcer i Szirjajew, 1981). W przypadku stochastycznej niezależności mówi się, że ciąg (75) jest łańcuchem Markowa rzędu 0. W ogólnym przypadku aktualny stan procesu edukacyjnego zależy od pewnej liczby stanów bezpośrednio go poprzedzających. Oznaczmy tę liczbę przez m ($m < T$). Mówi się wówczas, że ciąg (75) jest łańcuchem Markowa rzędu m. Dla takiego łańcucha prawdopodobieństwo $p(S_t)$ wystąpienia stanu S_t jest funkcją stanów $S_{t-m},...,S_{t-1}$, tzn. $p(S_t) = f(S_{t-m},...,S_{t-1})$. Logikę mechaniki takich łańcuchów opisuje się za pomocą prawdopodobieństw warunkowych rzędu m, zwanych prawdopodobieństwami przejścia $p(S_t \mid S_{t-m},...,S_{t-1})$. W najprostszym przypadku bieżący stan systemu zależy jedynie od stanu bezpośrednio go poprzedzającego i ma się do czynienia z łańcuchem pierwszego rzędu. Wtedy $p(S_t) = f(S_{t-1})$.

Rozpatrzmy przypadek ogólny i przyjmijmy, że ciąg stanów procesu edukacyjnego jest łańcuchem Markowa rzędu m i że łańcuch ten został użyty do predykcji pewnej liczby przyszłych stanów procesu. Z każdą predykcją jest związana jakaś doza nieokreśloności. Miarą stopnia nieokreśloności jest entropia (zob., np.: Abramson, 1969; Nowakowski i Sobczak, 1970, Seidler, 1972). Ważnym sposobem scharakteryzowania probabilistyczno-statystycznych własności ciągu stanów procesu edukacyjnego jest więc opisanie ich w kategoriach entropii, a zwłaszcza entropii warunkowej. Można przyjąć, że każda ze zmiennych S_t może w chwili t ($t = 1,2,...,T$) przyjąć jedną spośród K z góry ustalonych wartości $s_1,...,s_K$. Entropię pojedynczej zmiennej losowej S_t określa się tak

$$H(S_t) = -\sum_{k_t=1}^{K} p(S_t = s_{k_t}) \log p(S_t = s_{k_t}) \tag{76}$$

zaś entropię ciągu $S_1, S_2, ..., S_T$ definiuje się następująco

$$H(S_1,S_2,...,S_T) = -\sum_{k_1=1}^{K} \cdots \sum_{k_T=1}^{K} p(S_1 = s_{k_1},...,S_T = s_{k_T}) \log_2 p(S_1 = s_{k_1},...,S_T = s_{k_T}). \tag{77}$$

Jak widać, entropia procesu edukacyjnego zależy tylko od prawdopodobieństw jego stanów, a nie zależy od konkretnych realizacji tych stanów.

Często zdarza się sytuacja, że wartości $t-1$ pierwszych wyrazów ciągu $S_1, S_2, ..., S_{t-1}, S_t, ... S_T$ są dane. W tym przypadku miarą nieokreśloności ciągu stanów $S_t, S_{t+1}, ..., S_T$ jest entropia warunkowa

$$\begin{aligned} H(S_t,...,S_T \mid s_{k_1},...,s_{k_{t-1}}) = -\sum_{k_t=1}^{K} \cdots \sum_{k_T=1}^{K} p(S_m = s_{k_t},...,S_T = s_{k_T} \mid S_1 = s_{k_1},...,S_{t-1} = s_{k_{t-1}}) \cdot \\ \cdot \log_2 p(S_m = s_{k_t},...,S_T = s_{k_T} \mid S_1 = s_{k_1},...,S_{t-1} = s_{k_{t-1}}), \end{aligned} \tag{78}$$

natomiast miarą nieokreśloności ciągu stanów $S_t, S_{t+1}, ..., S_T$, gdy bierze się pod uwagę wszystkie możliwe realizacje $t-1$ pierwszych wyrazów ciągu $S_1, S_2, ..., S_T$, tj. zmiennej losowej $(S_1, S_2, ..., S_{t-1})$, jest średnia entropia warunkowa ciągu stanów $S_t, S_{t+1}, ..., S_T$ pod warunkiem, że jest ustalonych $m-1$ pierwszych stanów ciągu $S_1, S_2, ..., S_T$

$$\overline{H}(S_t,...,S_T \mid S_1,...,S_{t-1}) = \sum_{k_1=1}^{K} ... \sum_{k_{t-1}=1}^{K} p(S_1 = s_{k_1},...,S_{t-1} = s_{k_{t-1}}) H(S_t,...,S_T \mid s_{k_1},...,s_{k_{t-1}}). \quad (79)$$

Ważne znaczenie mają dwa szczególne przypadki formuły (78). Jeżeli przyjąć, że $t = 2$, to otrzymuje się z niej

$$\begin{aligned} H(S_2,...,S_T \mid s_{k_1}) = -\sum_{k_2=1}^{K} ... \sum_{k_T=1}^{K} p(S_2 = s_{k_2},...,S_T = s_{k_T} \mid S_1 = s_{k_1}) \cdot \\ \cdot \log_2 p(S_2 = s_{k_2},...,S_T = s_{k_T} \mid S_1 = s_{k_1}). \end{aligned} \quad (80)$$

Entropia ta jest miarą nieokreśloności ciągu T następnych stanów procesu edukacyjnego, jeżeli jest znana konkretna realizacja jego stanu początkowego. Jeżeli uśredni się tę entropię po wszystkich możliwych realizacjach stanu początkowego, to otrzyma się

$$\overline{H}(S_2,...,S_T \mid S_1) = \sum_{k_1=1}^{K} p(S_1 = s_{k_1}) H(S_2,...,S_T \mid S_1 = s_{k_1}). \quad (81)$$

Jeżeli przyjąć, że $t = T$, to mamy entropię stanu S_T przy ustalonych wartościach stanów $S_1, S_2, ..., S_{T-1}$, która jest miernikiem stopnia nieokreśloności ciągu T stanów procesu edukacyjnego, gdy jest nieznany tylko jego ostatni stan. Wyraża się ona wzorem

$$\begin{aligned} H(S_T \mid s_{k_1},...,s_{k_{T-1}}) = -\sum_{k_T=1}^{K} p(S_T = s_{k_T} \mid S_1 = s_{k_1},...,S_{T-1} = s_{k_{T-1}}) \cdot \\ \cdot p(S_T = s_{k_T} \mid S_1 = s_{k_1},...,S_{T-1} = s_{k_{T-1}}). \end{aligned} \quad (82)$$

W tym przypadku średnia entropia warunkowa ostatniego stanu otrzymana w wyniku uśrednienia entropii warunkowej (80) po wszystkich możliwych realizacjach $T-1$ poprzedzających go stanów wyraża się formułą

$$\overline{H}(S_T \mid S_1,...,S_{T-1}) = \sum_{k_1=1}^{K} ... \sum_{k_{T-1}=1}^{K} p(S_1 = s_{k_1},...,S_{T-1} = s_{k_{T-1}}) H(S_T \mid s_{k_1},...,s_{k_{T-1}}). \quad (83)$$

Podstawową własnością entropii jest jej nieujemność. Jest to konsekwencją faktu, że prawdopodobieństwo jest liczbą nieujemną i nie większą od jedności. Najmniejszą wartością entropii jest zero. Entropia przyjmuje ją wtedy, gdy istnieje taki układ $s_{k_1}, s_{k_2}, ..., s_{k_T}$ realizacji stanów $S_1, S_2, ..., S_T$, który zmienna losowa $(S_1, S_2, ..., S_T)$ przyjmuje z prawdopodobieństwem równym jedności. Jeżeli zmienna ta ma rozkład równomierny, tzn. jeżeli wszystkie jej realizacje są jednakowo prawdopodobne, wtedy entropia przyjmuje wartość największą.

W teorii informacji dowodzi się (zob., np.: Abramson, 1969; Nowakowski i Sobczak, 1970; Seidler, 1972), że łączną entropię ciągu zmiennych losowych $S_1, S_2, ..., S_T$ można wyrazić jako sumę entropii jednej ze zmiennych - np. zmiennej S_1 - i średniej entropii warunkowej pozostałych zmiennych pod warunkiem S_1, tzn.

$$H(S_1,...,S_T) = H(S_1) + H(S_2,...,S_T \mid S_1). \tag{84}$$

Zauważmy, że gdy ciąg $S_1, S_2, ..., S_T$ jest łańcuchem Markowa pierwszego rzędu, to zachodzą związki

$$\begin{aligned} &\overline{H}(S_3 \mid S_1, S_2) = \overline{H}(S_3 \mid S_2) = \overline{H}(S_2 \mid S_1), \\ &\overline{H}(S_4 \mid S_1, S_2, S_3) = \overline{H}(S_4 \mid S_3) = \overline{H}(S_2 \mid S_1), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\overline{H}(S_T \mid S_1, S_2, ..., S_{T-1}) = \overline{H}(S_T \mid S_{T-1}) = \overline{H}(S_2 \mid S_1). \end{aligned} \tag{85}$$

Wynika z tego, że łączna entropia ciągu stanów $S_1, S_2, ..., S_T$ procesu powiązanych w łańcuch Markowa pierwszego rzędu wyraża się tak

$$H(S_1,...,S_T) = H(S_1) + (T-1)\overline{H}(S_2 \mid S_1). \tag{86}$$

Jak widać, nieokreśloność ciągu stanów procesu powiązanych w łańcuch Markowa pierwszego rzędu jest tym większa, im jest on dłuższy, przy czym rośnie ona proporcjonalnie do jego długości.

Gdyby stany $S_1, S_2, ..., S_T$ były statystycznie niezależne, to zależności (86) przyjęłyby postać

$$\begin{aligned} &\overline{H}(S_2 \mid S_1) = H(S_2), \\ &\overline{H}(S_3 \mid S_1, S_2) = H(S_3), \\ &\overline{H}(S_4 \mid S_1, S_2, S_3) = H(S_4), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\overline{H}(S_T \mid S_1, S_2, ..., S_{T-1}) = H(S_T). \end{aligned} \tag{87}$$

W tym przypadku łączna entropia ciągu $S_1, S_2, ..., S_T$ byłaby sumą entropii poszczególnych stanów, tzn.

$$H(S_1,...,S_T) = \sum_{t=1}^{T} H(S_t). \tag{88}$$

Gdyby ponadto wszystkie zmienne $S_1, S_2, ..., S_T$ miały taki sam rozkład prawdopodobieństwa, to miałyby miejsce równość

$$H(S_1) = H(S_2) = ... = H(S_T) \tag{89}$$

i formuła (52) przyjęłaby postać

$$H(S_1,...,S_T)=TH(S_1). \tag{90}$$

Jeżeli znamy łączną entropię ciągu stanów $S_1,S_2,...,S_T$, to można obliczyć jaka jej część przypada na jeden element tego ciągu. Jeżeli tę wielkość oznaczymy przez H_T, to wyrazi się ona za pomocą następującej oczywistej formuły

$$H_T=\frac{H(S_1,S_2,...,S_T)}{T}. \tag{91}$$

Jest to formuła ogólna. W przypadku łańcucha Markowa pierwszego rzędu, po uwzględnieniu zależności (86), otrzymamy

$$H_T\equiv H_T^{(z)}=\frac{1}{T}H(S_1)+\left(1-\frac{1}{T}\right)\overline{H}(S_2\,|\,S_1). \tag{92}$$

Natomiast w przypadku niezależności stanów mamy na podstawie (89) i (91)

$$H_T\equiv H_T^{(n)}=H(S_1)=H(S_2)=...=H(S_T). \tag{93}$$

Ponieważ $\overline{H}(S_2\,|\,S_1)\le H(S_2)$, więc

$$H_T^{(z)}\le\frac{1}{T}H(S_1)+\left(1-\frac{1}{T}\right)H(S_2)=\frac{1}{T}H_T^{(n)}+\left(1-\frac{1}{T}\right)H_T^{(n)}=H_T^{(n)}. \tag{94}$$

Jak widać, entropia $H_T^{(z)}$ ciągu stanów powiązanych w łańcuch Markowa pierwszego rzędu maleje w miarę wzrostu statystycznej zależności między stanami.

W praktyce sprowadza się to do rozpatrzenia dwywymiarowej zmiennej losowej (S_{k_1},S_{k_2}), gdzie $k_1,k_2=1,2,...,K$, K - liczba wyróżnionych stanów procesu edukacyjnego i zbudowania na podstawie analizy ciągu stanów $S_1,S_2,...,S_T$ tablicy dwudzielczej (Tablica

Tablica 1
Liczby przejść między stanami

k	1	2	...	K	Ogółem $n_{k.}$
1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1K}	$n_{1.}$
2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2K}	$n_{2.}$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
K	n_{K1}	n_{K2}	...	n_{KK}	$n_{K.}$
Ogółem $n_{.k}$	$n_{.1}$	$n_{.2}$	...	$n_{.K}$	n

1), w której element n_{k_1,k_2} $(k_1, k_2 = 1,2,...,K)$ oznacza liczbę zaobserwowanych przejść procesu edukacyjnego ze stanu S_{k_1} w stan S_{k_2} w danym roku akademickim (tj. w okresie $(t, t+1)$). Analogicznie do formuł (2), (3) i (4) wielkości $n_{k.}$, $n_{.k}$ oraz n są określone w następujący sposób

$$n_{i.} = \sum_{j=1}^{L} n_{ij}, \quad n_{.j} = \sum_{i=1}^{L} n_{ij}, \quad n = \sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{L} n_{ij}. \tag{95}$$

Estymatory $\hat{m}_{ij}$ prawdopodobieństw przejść oraz estymatory $\hat{m}_i$ i $\hat{m}_j$ prawdopodobieństw bezwarunkowych oblicza się korzystając z następujących formuł

$$\hat{m}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}, \quad \hat{m}_i = \frac{n_{i.}}{n}, \quad ,\hat{m}_j = \frac{n_{.j}}{n}. \tag{94}$$

Z powyższych rozważań wynikają ważne przesłanki dla modelowania procesów edukacyjnych. Przede wszystkim trzeba stwierdzić, że jeżeli są znane prawdopodobieństwa występujące w łańcuchu Markowa, to istnieje możliwość bezpośredniego oszacowania stopnia informacyjnej nieokreśloności ciągu stanów procesu edukacyjnego, opisywanego za pomocą tego łańcucha. Jeżeli prawdopodobieństwa te nie są znane, to najpierw trzeba znaleźć ich estymatory i dopiero wtedy skorzystać z powyższych formuł. Nie zawsze jednak należy przeprowadzać estymację metodami statystyki matematycznej. Tradycyjne metody statystyczne nie mogą być stosowane w odniesieniu do zjawisk niemasowych. Proces edukacyjny realizowany w każdej szkole wyższej ma swoją niepowtarzalną specyfikę, która nadaje mu znamię unikatowości. Proponujemy, aby prawdopodobieństwa potrzebne do oszacowania wielkości nieokreśloności tego procesu były szacowane metodami ekspertów i z wykorzystaniem nie tylko klasycznych metod probabilistyczno-statystycznych, ale także metod ekspertów oraz teorii prawdopodobieństwa subiektywnego, logicznego i rozmytego.

10. Przykład zastosowania

Dane, na podstawie których opracowano niniejszy przykład dotyczą wybranego wydziału jednej z polskich uczelni. Studia na wydziale trwają pięć lat akademickich. Dane ilustrujące dynamikę przepływu studentów przez proces edukacyjny pochodzą z jedenastu kolejnych lat akademickich, a zatem $t = -4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5$ (ta notacja została przyjęta ze względów rachunkowych). Przykładowo, ich opis dla roku $t = 1$ wygląda następująco.

Na początku roku akademickiego $t = 1$ na pierwszy rok studiów na wydziale przyjęto 278 osób. Równocześnie wznowiło studia 12 osób spośród tych studentów, którzy w roku akademickim $t-1$ korzystali z urlopów dziekańskich. W gronie studentów pierwszego roku znalazły się także 4 osoby, które w roku akademickim $t = 1$ będą powtarzały pierwszy rok studiów. W ciągu roku akademickiego studia na wydziale przerwały i odeszły z uczelni 32 osoby. Promocji na drugi rok studiów nie uzyskało 19 osób. Na urlopy dziekańskie poszło 7 studentów. Reszta studentów w liczbie 236 uzyskała promocję na drugi rok studiów.

Na początku roku akademickiego $t = 1$ na drugim roku studiów znalazło się 236 osób spośród tych, które w poprzednim roku akademickim były na pierwszym roku studiów, 9 osób, które wróciły z urlopów dziekańskich oraz 12 osób, które muszą powtórzyć drugi rok studiów. W ciągu roku akademickiego zrezygnowały z kontynuowania studiów i odeszły z uczelni 22 osoby. Urlopy dziekańskie otrzymało odpowiednio 11 osób. Spośród pozostałych promocji na trzeci rok studiów nie uzyskało 12 studentów. Reszta studentów w liczbie 224 uzyskała promocję na trzeci rok studiów.

Na początku roku akademickiego $t=1$ na trzecim roku studiów znalazło się 212 osób, które przeszły z drugiego roku studiów, 4 osoby, które przeniosły się z innych uczelni, 11 osób, które wróciły z urlopów dziekańskich oraz 10 osób, które będą powtarzały trzeci rok studiów. Spośród tych, którzy pozostali, promocji na czwarty rok studiów nie uzyskało 14 osób. Reszta studentów w liczbie 213 uzyskała promocję na czwarty rok studiów.

Na początku roku akademickiego $t=1$ na czwartym roku studiów wydziale znalazło się 197 osób, które przeszły z trzeciego roku studiów, 7 osób, które wróciły z urlopów dziekańskich i 12 osób, które będą powtarzały czwarty rok studiów. gu roku akademickiego żaden ze studentów nie przerwał studiów, natomiast na urlopy dziekańskie poszło 16 osób. Spośród tych, którzy pozostali, promocji na piąty rok studiów nie uzyskało 12 osób. Pozostali studenci w liczbie 204 uzyskali promocję na piąty rok studiów.

Na początku roku akademickiego $t=1$ na piątym roku studiów znalazło się 188 osób, które przeszły z czwartego roku, 5 osób, które wróciły z urlopów dziekańskich i 2 osoby, które będą powtarzały piąty rok studiów. W ciągu roku akademickiego nikt wprawdzie nie przerwał studiów, ale 26 studentów poszło na urlopy dziekańskie. Spośród tych, którzy pozostali, 7 studentów nie uzyskało niezbędnych zaliczeń i nie zostało dopuszczonych do egzaminu końcowego. Pozostali studenci w liczbie 168 zdali egzamin końcowy i odeszli z uczelni jako jej absolwenci.

W taki sam sposób została scharakteryzowana struktura podziału zbiorowości studentów dla wszystkich pozostałych lat akademickich. Przyjęto, że statystyki przedstawiające uczelniany status studentów są odniesione do końca poprzedniego lub do początku następnego roku akademickiego.

Tego rodzaju dane zostały zebrane dla dziesięciu kolejnych lat akademickich. Dane z pięciu pierwszych lat ($t=-4,-3,-2,-1,0$) zostały użyte do zweryfikowania statystycznej hipotezy o niezależności w tablicy dwudzielczej, której elementami były zaobserwowane liczby przejść między rozważanymi stanami procesu edukacyjnego, do zweryfikowania hipotezy o jednorodności łańcucha, hipotezy dotyczącej rzędu łańcucha i do oszacowania macierzy przejścia. Weryfikacja hipoptezy o niezależności doprowadziła do stwierdzenia, że nie ma podstaw do uznania, iż posiadane dane empiryczne są realizacjami niezależnych zmiennych losowych. Skłoniło to do podjęcia próby skonstruowania modelu w postaci skończonego łańcucha Markowa odwzorowującego mechanizmy rządzące rzeczywistym procesem edukacyjnym. Aby rozstrzygnąć, czy łańcych ma być jednorodny, czy niejednorodny, zweryfikowano hipotezę o niejednorodności. Stwierdzono, że istnieją silne statystyczne przesłanki przemawiające za wyborem modelu niejednorodnego. Z kolei zweryfikowano hipotezę dotyczącą rzędu łańcucha. Okazało się, że chociaż nie ma formalnych podstaw do odrzucenia łańcucha pierwszego rzędu, to jednak istnieją przesłanki wskazujące również na możliwość przyjęcia łańcucha drugiego rzędu. Ponieważ podjęcie ostatecznej decyzji w tej sprawie wymaga zweryfikowania posiadanych danych, a na razie nie było to możliwe, więc postanowiono skonstruować model pierwszego rzędu i sprawdzić jego skuteczność prognostyczną porównując otrzymane za jego pomocą prognozy z danymi empirycznymi dotyczącymi lat $t=1,2,3,4,5$.

Rozkład zbiorowości studentów wydziału między poszczególne kategorie i lata studiów dla wszystkich rozpatrywanych lat akademickich został przedstawiony w postaci odpowiednich tablic. Jedną z nich, dla przykładu, jest tablica 2, dla roku $t=1$. Znaczenie symboli znajdujących się w jej pierwszym wierszu było omówione we wcześniejszej części pracy.

Tablica 2

Podstawowe dane empiryczne dotyczące wydziału

l	$p^{(l)}(t')$	$n^{(u_l)}(t')$	$r^{(l)}(t')$	$n^{(u_l)}(t'')$	$n^{(o_l)}(t'')$	$n^{(l,l+1)}(t'')$	$n^{(l,l)}(t'')$
1	278	12	4	7	32	236	19
2	12	9	12	11	22	224	12
3	4	11	10	18	4	213	14
4	0	7	12	16	0	204	12
5	0	5	2	36	0	145	7

Z tablicy tej wynika, że wektor realizacji stanu procesu edukacyjnego w roku akademickim $t=1$ ma postać

$$\underline{n}(1)=[32,22,4,0,0,145;294,269,224,232,211;\ 7,11,18,16,36].$$

Ponieważ stany odpowiadające przerwaniu studiów i odejściu z uczelni oraz ukończeniu uczelni są stanami pochłaniającymi, więc dla wygody rachunków zostały - podobnie jak w modelu teoretycznym - umieszczone jako sześć pierwszych składowych.

W rozpatrywanym przykładzie ogólna struktura macierzy przejścia M_t jest określona wzorami (44) i (45). Z analizy danych wynika, że zaledwie w jednym przypadku miało miejsce bezpośrednie odejście urlopowanego studenta z uczelni. Wszyscy pozostali powracali z urlopów i na powrót podejmowali studia, zaś rezygnacja ze studiów i odejście z uczelni – o ile miały miejsce – następowały w trakcie kontynuacji studiów. Być może, że w rozpatrywanej uczelni został przyjęty taki regulamin postępowania, a być może jest to wynik naturalnego zachowania się studentów. Z punktu widzenia wyboru postaci macierzy przejścia jest to kwestia ważna i wymagająca wyjaśnienia. Gdyby bowiem taki był regulaminowy tryb postępowania, to wszystkie prawdopodobieństwa odpowiadające możliwości bezpośredniego odejścia urlopowanego studenta z uczelni, bez podjęcia próby kontynuowania studiów, byłyby z założenia równe zero. W przeciwnym razie trzeba bardzo dokładnie przeanalizować zachowania studentów przebywających na urlopach dziekańskich i dla każdego roku akademickiego szczegółowo określić jaki procent ogółu osób urlopowanych na danym roku studiów stanowią ci, którzy rezygnują z dalszej nauki i odchodzą z uczelni, a jaki procent i po jakim czasie znów podejmuje naukę. Informacja ta pozwoliłaby jeszcze bardziej urealnić i uściślić model.

Posługując się formułami obliczeniowymi (47)-(54) i pamiętając o konieczności spełnienia warunku stochastyczności macierzy przejścia M_t oszacowano liczbowe wartości jej elementów, którymi są prawdopodobieństwa przejścia procesu edukacyjnego ze stanu w jakim był on w roku akademickim t w stan, w jakim znalazł się w roku akademickim $t+1$, przy czym $t=-4,-3,-2,-1,0$. Przykładowo, bloki M_{21} i M_{22} macierzy przejścia ze stanu, w jakim był proces w roku $t=-1$, w stan w jakim znajdował się w roku $t=0$, wyglądają następująco

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 0.1088 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0818 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0161 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7713 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} 0.0646 & 0.8027 & 0 & 0 & 0 & 0.0238 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0446 & 0.8327 & 0 & 0 & 0 & 0.0409 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0562 & 0.8554 & 0 & 0 & 0 & 0.0723 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0517 & 0.8793 & 0 & 0 & 0 & 0.0690 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0372 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1915 \\ 0.9954 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0045 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8779 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1222 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8839 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1160 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6773 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3226 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7998 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2003 \end{bmatrix}$$

Dla przejścia między drugim i trzecim rokiem akademickim otrzymano

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 0.1414 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1031 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0216 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7867 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} 0.0840 & 0.7005 & 0 & 0 & 0 & 0.0740 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0521 & 0.8327 & 0 & 0 & 0 & 0.0122 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0584 & 0.8612 & 0 & 0 & 0 & 0.0588 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0598 & 0.8701 & 0 & 0 & 0 & 0.0701 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0487 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1647 \\ 0.9879 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0120 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8837 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1164 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8783 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1217 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7894 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2105 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8298 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1702 \end{bmatrix}$$

W analogiczny sposób znaleziono oszacowania macierzy przejścia między wszystkimi pozostałymi sąsiednimi latami akademickimi. Analiza wielkości prawdopodobieństw występujących w tych samych klatkach czterech pierwszych macierzy potwierdziła słuszność hipotezy o niejednorodności łańcucha i skłoniła do poszukiwania funkcji odwzorowujących zmienność poszczególnych prawdopodobieństw przejścia w czasie. Spośród kilku rodzajów funkcji, które przebadano (liniowa, wykładnicza, potęgowa, wielomianowa różnych stopni) najlepsze wyniki dawała aproksymacja zmienności tych prawdopodobieństw w czasie za pomocą wielomianu trzeciego stopnia

$$m = at^3 + bt^2 + ct + d, \tag{95}$$

gdzie m – odpowiednie prawdopodobieństwo przejścia. Z uwagi na duże wahania empirycznych wartości tych prawdopodobieństw wybór tej postaci funkcji jest w pełni uzasadniony. Przyjęto więc, że elementami macierzy przejścia są wielomiany trzeciego stopnia. Macierz ta została wykorzystana do obliczenia modelowych wartości prawdopodobieństw przejść dla lat $t = 1,2,3,4,5$. Wartości wyznaczone za pomocą modelu zostały porównane z wartościami prawdopodobieństw empirycznych, które dla tych lat są przedstawione w tablicy 3. Na rys. 1-28 czarnymi punktami są przedstawione dane empiryczne, natomiast prognoza jest przedstawiona w postaci krzywej. Dla wszystkich prawdopodobieństw przejścia obok wykresów są podane oszacowane wartości współczynników funkcji wielomianowej

Tablica 3

Wyniki prognozowania prawdopodobieństw przejść

	1	2	3	4	5
$m_{7,1}$	0.1088	0.1414	0.1334	0.1416	0.1399
$m_{7,7}$	0.0646	0.0840	0.0903	0.0101	0.0998
$m_{7,8}$	0.8027	0.7005	0.7248	0.8321	0.7392
$m_{7,12}$	0.0238	0.0740	0.0514	0.0163	0.0211
$m_{8,2}$	0.0818	0.1031	0.0983	0.1001	0.0997
$m_{8,8}$	0.0446	0.0521	0.0501	0.0514	0.0498
$m_{8,9}$	0.8327	0.8327	0.8405	0.8327	0.8397

$m_{8,13}$	0.0409	0.0122	0.0112	0.0159	0.0109
$m_{9,3}$	0.0161	0.0216	0.0192	0.0209	0.0211
$m_{9,9}$	0.0562	0.0584	0.0573	0.0591	0.0589
$m_{9,10}$	0.8554	0.8612	0.8697	0.8594	0.8702
$m_{9,14}$	0.0723	0.0588	0.0537	0.0707	0.0497
$m_{10,4}$	0	0	0	0	0
$m_{10,10}$	0.0517	0.0598	0.0642	0.0653	0.0649
$m_{10,11}$	0.8793	0.8701	0.8811	0.8794	0.8856
$m_{10,15}$	0.0690	0.0701	0.0548	0.554	0.0496
$m_{11,5}$	0	0	0	0	0
$m_{11,6}$	0.7713	0.7867	0.7836	0.7849	0.7879
$m_{11,11}$	0.0372	0.0487	0.0512	0.0499	0.0487
$m_{11,16}$	0.1915	0.1647	0.1653	0.1653	0.1635
$m_{12,1}$	0	0	0	0	0
$m_{12,7}$	0.9954	0.9879	0.9903	0.9888	0.9897
$m_{12,12}$	0.0045	0.0120	0.0096	0.0111	0.0102
$m_{13,2}$	0	0	0	0	0
$m_{13,8}$	0.8779	0.8837	0.8811	0.8821	0.8831
$m_{13,13}$	0.1222	0.1164	0.1188	0.1178	0.1168
$m_{14,3}$	0	0	0	0	0
$m_{14,9}$	0.8839	0.8783	0.8827	0.8798	0.8813
$m_{14,14}$	0.1160	0.1217	0.1174	0.1203	0.1188
$m_{15,4}$	0	0	0	0	0
$m_{15,10}$	0.6773	0.7894	0.7453	0.7612	0.7786
$m_{15,15}$	0.3226	0.2105	0.2548	0.2387	0.2215
$m_{16,5}$	0	0	0	0	0
$m_{16,11}$	0.7998	0.8298	0.8195	0.8204	0.8274
$m_{16,16}$	0.2003	0.1702	0.1804	0.1797	0.1725

zmienność w czasie oraz wartość współczynnika skorelowania wartości empirycznych z modelowymi.

11. Wnioski końcowe

Zasadniczym celem pracy było zbadanie - w oparciu o dane rzeczywiste – możliwości opisania za pomocą skończonego łańcucha Markowa dynamiki procesu przepływu studentów przez system edukacyjny wyższej uczelni w kolejnych latach akademickich i skonstruowanie takiego modelu. Potrzeba posiadania modelu jest zgłaszana przez władze wielu uczelni a wynika przede wszystkim z konieczności prowadzenia przez nie takiej długofalowej polityki, która zapewni stałe utrzymywanie się szkoły na bardzo obecnie konkurencyjnym rynku edukacyjnym przy spełnieniu wszelkich kryteriów i ograniczeń wynikających ze społecznej funkcji szkoły oraz jej przynależności do narodowego systemu edukacji. Model jest pomyślany jako narzędzie wspomagające prognozowanie zmian w dynamice procesu edukacyjnego, uwzględniające wewnętrzną organizację tego procesu (wielowydziałowość uczelni, liczba lat studiów na każdym wydziale, przyjęty w uczelni tryb czasowego lub stałego przerwania studiów, tryb promowania absolwentów itp.) i jego podstawowe uwarunkowania zewnętrzne oraz jako główny element znacznie szerszego modelu uczelni, nad którego skonstruowaniem pracują autorzy niniejszego raportu. Szczególna uwaga w tej rozszerzonej wersji modelu będzie poświęcona możliwości wykorzystania go do podejmowania decyzji, które będą mogły być użyte przez władze szkoły do świadomego kształtowania przebiegu procesu edukacyjnego w określonych horyzontach czasowych, tj. do sterowania nim. Podstawowymi formami sterowania będzie takie oddziaływanie na proces naboru studentów na pierwszy rok studiów i na jakość procesu edukacyjnego (tj. na wielkość prawdopodobieństw przejść między jego stanami), aby przy spełnieniu określonych ograniczeń infrastrukturalnych, finansowych, kadrowych itp.) osiągać jak największy efekt końcowy.

W pracy zwrócono uwagę na metodologiczną niepoprawność apriorycznego zakładania stochastycznej niezależności sekwencji stanów procesu edukacyjnego bądź też apriorycznego traktowania tej sekwencji jako ciągu stanów jednorodnego łańcucha Markowa pierwszego rzędu. Jeżeli model ma być użyteczny, to zawsze najpierw trzeba założyć, że zmienna stanu tego procesu ma charakter losowy i zweryfikować hipotezę o statystycznej niezależności ciągu jej rzeczywistych realizacji. Tylko wtedy, gdy wynik tej weryfikacji jest negatywny, można wnioskować o statystycznej zależności kolejnych stanów procesu edukacyjnego i podjąć próbę opisania mechanizmu generowania sekwencji stanów za pomocą łańcucha Markowa. W pracy zwrócono uwagę na konieczność weryfikowania hipotezy o jednorodności łańcucha oraz hipotezy o rzędzie łańcucha. Zakładanie z góry, że modelem ciągu stanów procesu edukacyjnego jest jednorodny łańcuch Markowa pierwszego rzędu może prowadzić do wyboru niewłaściwej postaci modelu. W pracy przedstawiono testy służące do testowania tych hipotez, zwracając uwagę na możliwość wykorzystania metod matematycznej teorii informacji do szacowania stopnia nieokreśloności procesu edukacyjnego, zwłaszcza w przypadku opisywania go za pomocą łańcucha Markowa, oraz do szacowania rzędu łancucha.

W pracy przyjęto założenie o względnej autonomiczności poszczególnych wydziałów uczelni i o braku istotnego przepływu studentów między wydziałami. Do przyjęcia tego założenia skłaniała analiza posiadanych danych. Założenie nie ma więc charakteru uniwersalnego, bowiem w wielu uczelniach ma miejsce dość intensywny proces zmiany wydziału przez studentów, zwłaszcza na lub zaraz po pierwszym roku studiów. W przypadku uczelni rozpatrywanej w przykładzie podanym w tej pracy było to dozwolone i dlatego można było odrębnie analizować procesy przepływu studentów przez procesy edukacyjne na poszczególnych wydziałach. W pracy skonstruowano model ogólny oraz podano jego uproszczoną wersję odpowiadającą konkretnej rozpatrywanej uczelni. Uproszczenie polega na przyjęciu założenia o niezależności wydziałów i założeń co do mechanizmów regulujących tryb odchodzenia studentów z uczelni bez ukończenia studiów, tryb korzystania z urlopów dziekańskich i podstawowy tryb realizacji procesu edukacyjnego od chwili wstąpienia na uczelnię do momentu odejścia z niej z dyplomem absolwenta.

Model skonstruowany w pracy ma postać pochłaniającego niejednorodnego łańcucha Markowa o szesnastu stanach, z których sześć jest stanami pochłaniającymi. Są to: pięć stanów odpowiadających możliwości przerwania przez studenta nauki na każdym roku studiów i odejścia z uczelni oraz jeden stan odpowiadający ukończeniu uczelni i odejściu z niej jako absolwent. W pracy nie przeprowadzano bezpośrednio weryfikacji hipotezy o niezależności i jednorodności ciągu realizacji stanów procesu edukacyjnego. Oparto się na wynikach wcześniejszych niepublikowanych badań przeprowadzonych w związku z przygotowywaniem wstępnych założeń modelu (Bereziński, 2003). Potwierdzały one zasadność budowy modelu w postaci skończonego, niejednorodnego łańcucha Markowa pierwszego rzędu. W niniejszej pracy zidentyfikowano liczbę stanów łańcucha, skonstruowano odpowiadające im macierze przejścia dla pięciu kolejnych lat akademickich i oszacowano wartości ich elementów. Dane zawarte w tych macierzach zostały użyte do znalezienia funkcji charakteryzujących zmienność poszczególnych prawdopodobieństw przejścia w czasie. Funkcje mają postać wielomianów trzeciego stopnia i w przypadku uczelni, której dotyczy przykład, dobrze odwzorowują rzeczywistą dynamikę prawdopodobieństw przejścia.

Aby móc skutecznie rozwijać ten kierunek modelowania procesu edukacyjnego trzeba zagwarantować posiadanie odpowiednich w sensie ilościowym i jakościowym statystyk dotyczących funkcjonowania uczelni, a w szczególności przepływu studentów przez kolejne lata studiów. Uczelnia, które chce posiadać taki model musi więc założyć i stale uaktualniać bazę danych, zawierającą informacje co najmniej o tych wielkościach, które występują w nmodelu, który przedstawiliśmy.

Bibliografia

Abramson N. (1969). Teoria informacji i kodowanie. PWN, Warszawa.

Ajwazjan S.N. (1975). Statisticzeskij analiz markowskich cepiej. AN ZSRR, Moskwa.

Armitage P.H.C., Smith C.S., Alper P. (1969). Decision models for educational planning. Allen Lane, London.

Bartholomew D.J. (1967). Stochastic models for social processes. John Wiley, New York.

Baster-Grząśkiewicz M., red. (2001). Standardy nauczania dla kierunków studiów. Założenia, materiały, dokumenty. Rada Główna Szkolnictwa Wyższego, Warszawa.

Benard J. (1966). Modèle d'optimisation générale – économie – éducation. OECD, Paris.

Barndorff-Nielsen O., Cox D.R. (1994). Inference and asymptotics. Chapman and Hall, London.

Bereziński M. (2003). Markowski model procesu edukacyjnego na wyższej uczelni. *Raport Badawczy RB/73/2003*, Instytut Badań Systemowych PAN, Warszawa.

Berezowski E., red. (1978). Problemy modelowania procesów dydaktycznych. PWN, Warszawa.

Bertalanfy L., von (1968). General systems theory. George Braziller, New York.

Bertchold A. (1998). Chaînes de Markov et modèles de transition: applications aux sciences sociales. Editions HERMES, Paris.

Bessent E.W., Bessent A.M. (1980). Student flow in a university department: results of a Markov analysis. *INTERFACES*, **10**, 52-59.

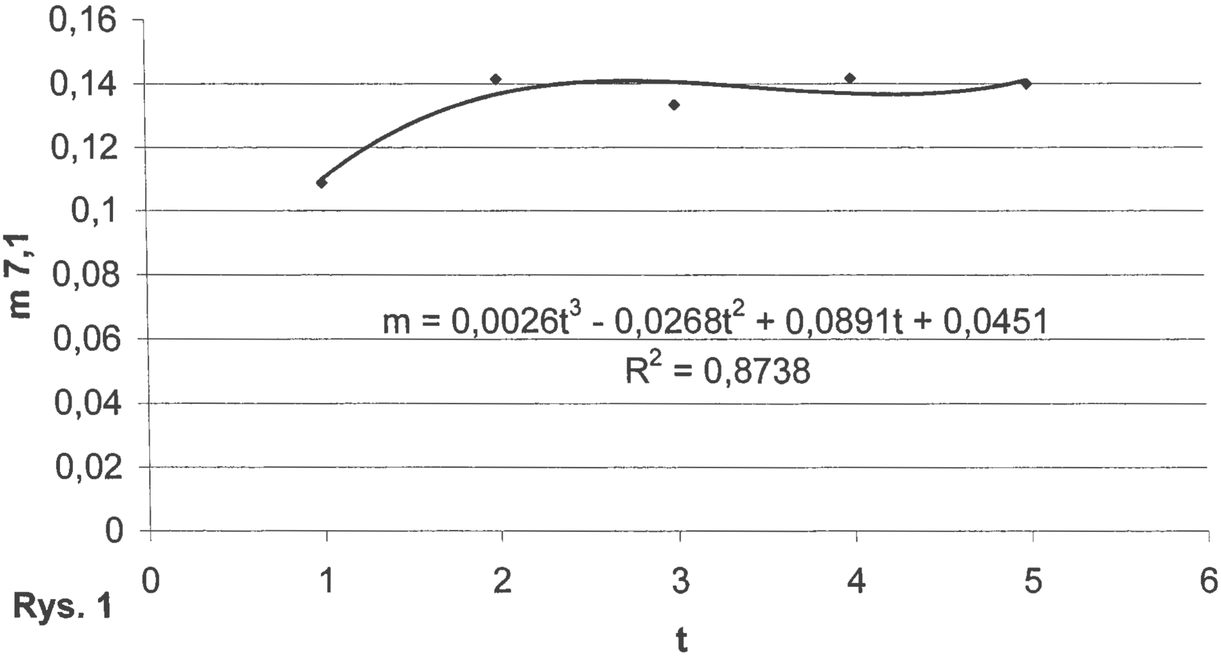
Billinger D.R. (1975). Time series . Data analysis and theory. Holt, Reinhart and Winston, New York.

Billingsley P. (1961a). Statistical inference for Markov processes. The University of Chicago Press, Chicago.

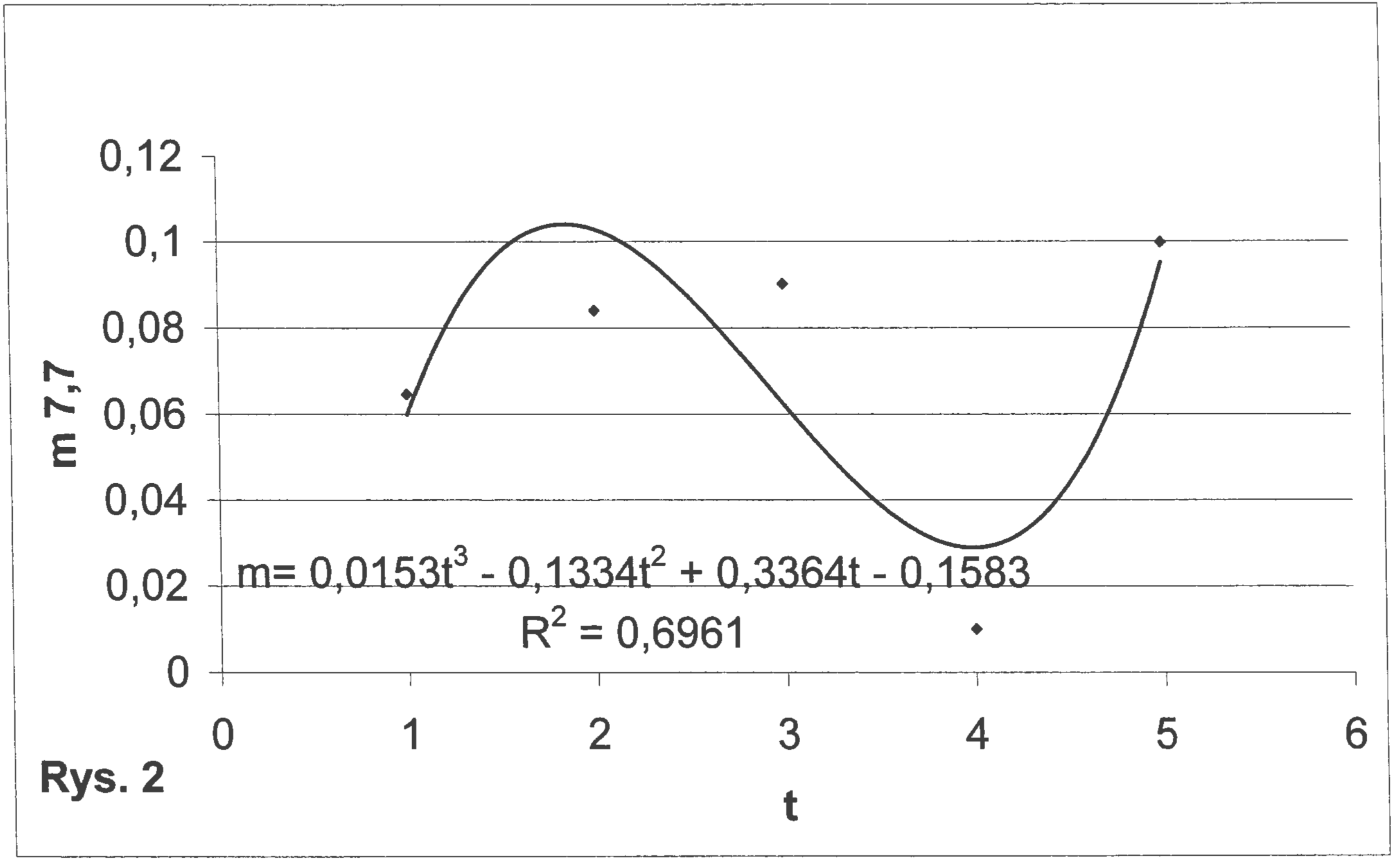
Billingsley (P. (1961b). Statistical methods in Markov chains. *Annals of Mathematical Statistics*, **32**, 12-40.

Bloomfield S.D., Updegrove D.A. (1981). A modelling system for higher education. *Decision Sciences*, **12**, 310-321.
Boudon R. (1973). Mathematical structures of social mobility. Elsevier, Amsterdam.
Bubnicki Z. (1974). Identyfikacja obiektów sterowania. PWN, Warszawa.
Chung K.L. (1960). Markov chains with stationary transition probabilities. Springer-Verlag, Berlin.
Cox D.R., Miller H.D. (1965). The theory of stochastic processes. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
Cramér H. (1958). Metody matematyczne w statystyce. PWN, Warszawa.
Faddiejewa W.N. (1955). Metody numeryczne algebry liniowej. PWN, Warszawa.
Fisz M. (1968). Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa.
Flakiewicz W., Oleński J. (1989). Cybernetyka ekonomiczna. PWE, Warszawa.
Gigch J.P., van (1978). Applied general systems theory. California State University, Sacramento.
Gilmore R. (1993). Catastrophe theory for scientists and engineers. Dover Publications, New York.
Gutenbaum J. (1987). Modelowanie matematyczne systemów. PWN, Warszawa-Łódź.
Haken H. (1978). Synergetics. An introduction. Nonequilibrium phase transitions and self-organization in physics, chemistry and biology. Springer-Verlag, Berlin.
Haken H, (1983). Advanced synergetics. Instability hierarchies of self-organizing systems and devices. Springer-Verlag, Berlin.
Hannan E.J. (1970). Multiple time series. John Wiley, New York.
Heisenberg W. (1977). Der Teil und das ganze. Gespräche im Umkreis der Atomphysik. R. Piper & Co. Verlag, München.
Hellwig Z. (1960). Regresja liniowa i jej zastosowanie w ekonomii. PWE, Warszawa.
Hellwig Z. (1980). Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. PWN, Warszawa.
Hubert J.Z. (1997). Synergetyka i społeczeństwo. Model relacji i struktur społecznych oparty na uniwersalnych prawach opisujących systemy złożone. Wydawnictwo Oddziału Polskiej Akademii Nauk, Kraków.
Kacprzyński B. (1974). Planowanie eksperymentów. Podstawy matematyczne. WNT, Warszawa.
Kalbfleisch J.G. (1985a). Probability and statistical inference. Vol I: Probability. Springer Verlag, New York.
Kalbfleisch J.G. (1985b). Probability and statistical inference. Vol II: Statistical inference. Springer Verlag, New York.
Kantz H., Schreiber T. (1997). Nonlinear time series analysis. Cambridge University Press, Cambridge.
Katz R.W. (1981). On some criteria for estimating the order of a Markov chain. *Technometrics*, **23**, 243-249.
Kemeny J.D., Snell J.L. (1960). Finite Markov chains. Van Nostrand, New York.
Klir G.J. (1972). Trends in general systems theory. School of Advanced Technology, Binghamton.
Kossecki J. (1975). Cybernetyka społeczna. PWN, Warszawa.
Koźniewska I., Włodarczyk M. (1978). Modele odnowy, niezawodności i masowej obsługi. PWN, Warszawa.
Lee T.C., Judge G.G., Zellner A. (1970). Estimating the parameters of Markov probability model from aggregate time series data. North-Holland, Amsterdam.
Lindsey J.K. (1996). Parametric statistical inference. Oxford Science Publications, Oxford.

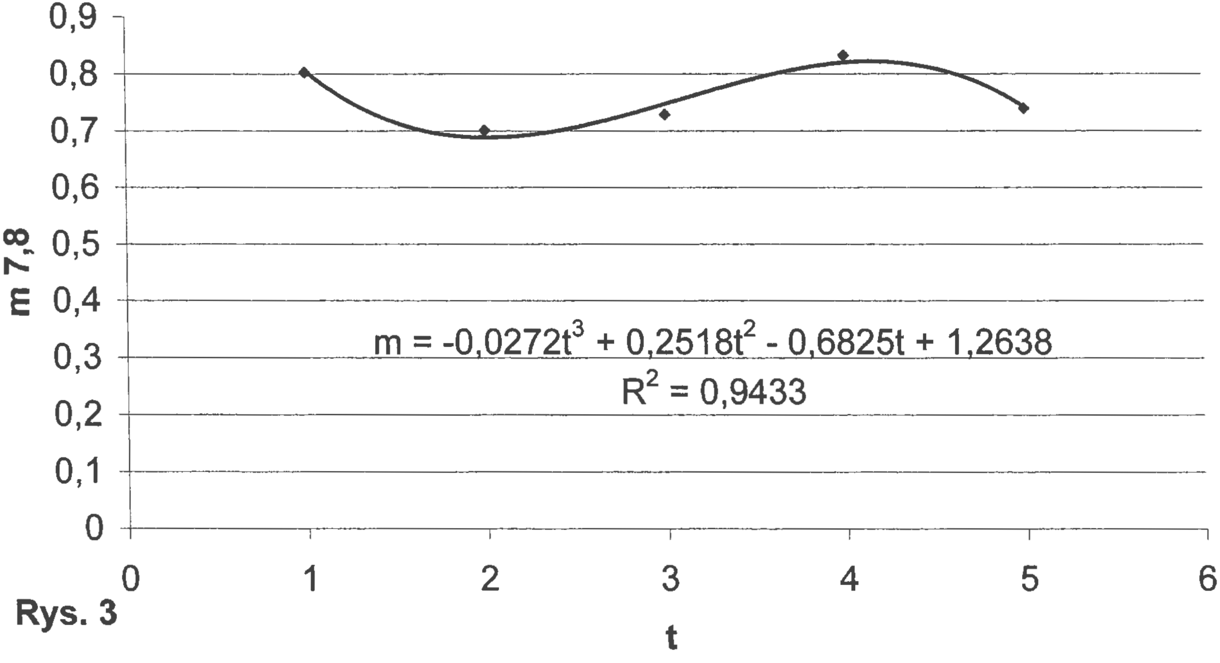
Lipcer R.Sz., Sziriajew A.N. (1981). Statystyka procesów stochastycznych. Filtracja nieliniowa i zagadnienia pokrewne. PWN, Warszawa.
Mańczak K. (1974). Metody identyfikacji wielowymiarowych obiektów sterowania. WNT, Warszawa.
MacRae E.C. (1977). Estimation of time-varying Markov processes with aggregate data. *Econometrica*, **45**, 183-198.
Mazur B. (1978). Modelowanie procesu dydaktycznego. Rezultaty badań. W: E. Berezowski, red., *Problemy modelowania procesów dydaktycznych*. PWN, Warszawa, 73-88.
McNamara J.F. (1974). Markov chain theory and technological forecasting. W: S.P. Hencley i J.R. Yates, red., *Futurism in education*. McCutchan, Berkeley. rozdz. 14.
Nowakowski J., Sobczak W. (1970). Teoria informacji. WNT, Warszawa.
Plucińska A., Pluciński E. (1979). Elementy probabilistyki. PWN, Warszawa.
Poston T., Stewart I. (1996). Catastrophe theory and its applications. Dover Publications, New York.
Prigogine I. (1955). Introduction to thermodynamics of irreversible processes. Charles C Thomas, Springfield.
Prigogine I. (1980). From being to becomig: time and complexity in the physical sciences. W.H. Freeman, New York.
Prigogine I. (1997). The end of certainty. Time, chaos and the new laws of nature. The Free Press, New York.
Prigogine I., Stengers I. (1984). Order out of chaos. Man's new dialogue with nature. W.H. Freeman, New York.
Rasiowa H. (1979). Wstęp do matematyki współczesnej. PWN, Warszawa.
Seidler J. (1972). Systemy przesyłania informacji cyfrowej. WNT, Warszawa.
Shannon C.E., Weaver W. (1949). The mathematical theory of communication. The University of Illinois Press, Urbana.
Spinney D., McLaughlin G.W, (1979). The use of a Markov model in assesment of alternate faculty personel policies. *Research in Higher Education*, **11**, 249-262.
Tarasow L.W. (1984). Mir postrojennyj na wierojatnosti. Proswieszczenije, Moskwa.
Tempczyk M. (1986). Fizyka a świat realny. PWN, Warszawa.
Tempczyk M. (1995). Świat harmonii i chaosu. PIW, Warszawa.
Tinbergen S., Boss X. (1965). Econometric model of education. Dunod, Paris.
Tintner G., Sengupta J.K. (1973). Stochastic economics. Stochastic processes, control, and programming. Academic Press, New York.
Thom R. (1972). Stabilité structurelle et morphogenese. Benjamin, New York.
Thom R. (1980). Paraboles et catastrophes. Entretiens sur les mathématiques, la science et la philosophie. JL Saggiatore, Milan.
Tweedie R.I. (2001). Markov chains: structure and applications. W: D.N. Shanbhag I C.R. Rao, red., *Handbook of Statistics*, Elsevier Science, Amsterdam.
Zadeh L.A., Polak E., eds. (1969). System theory. McGraw-Hill, New York.


0,16
0,14
0,12
0,1
0,08
0,06
0,04
0,02
0
m 7,1
m = 0,0026t³ - 0,0268t² + 0,0891t + 0,0451
R² = 0,8738
0
1
2
3
4
5
6
t

Rys. 1

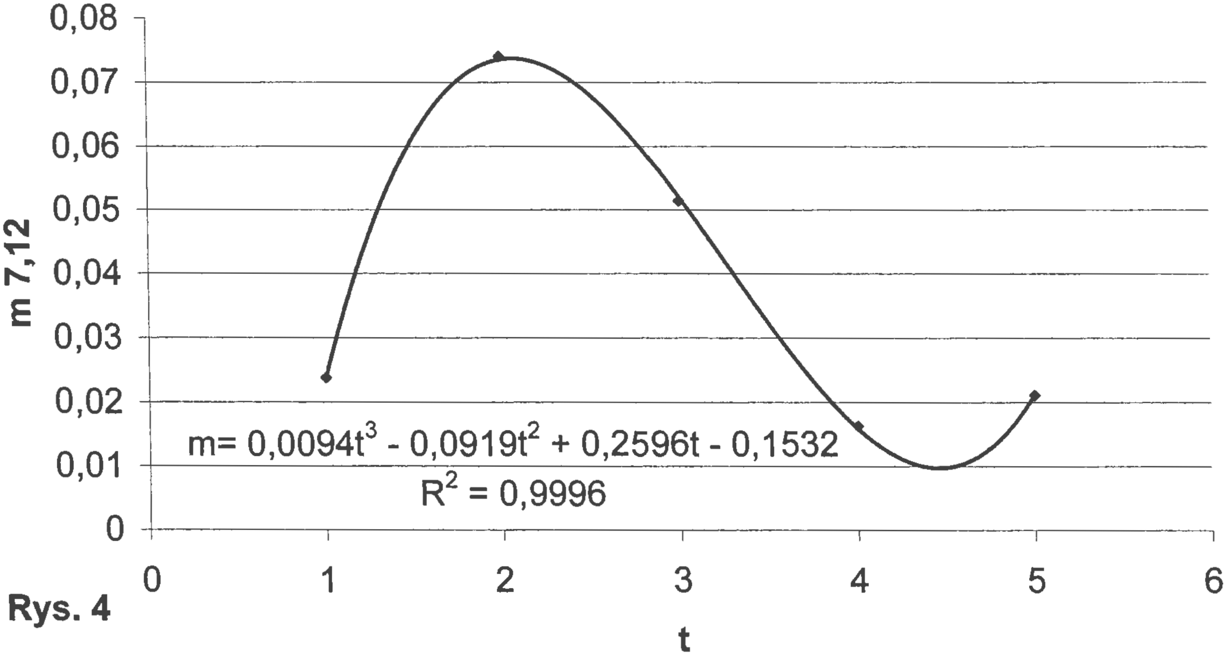

0,12
0,1
0,08
0,06
0,04
0,02
0
m 7,7
m= 0,0153t^3 - 0,1334t^2 + 0,3364t - 0,1583
R^2 = 0,6961
0
1
2
3
4
5
6
t

Rys. 2



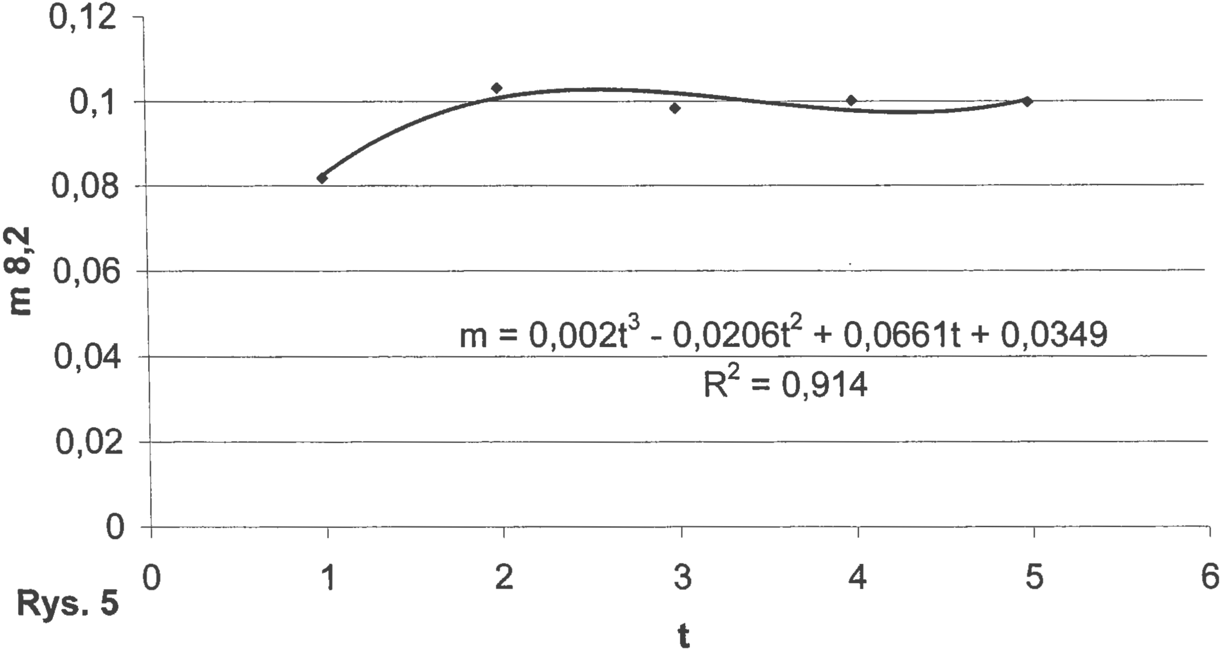
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
m 7,8
$m = -0,0272t^3 + 0,2518t^2 - 0,6825t + 1,2638$
$R^2 = 0,9433$
0
1
2
3
4
5
6
t

Rys. 3

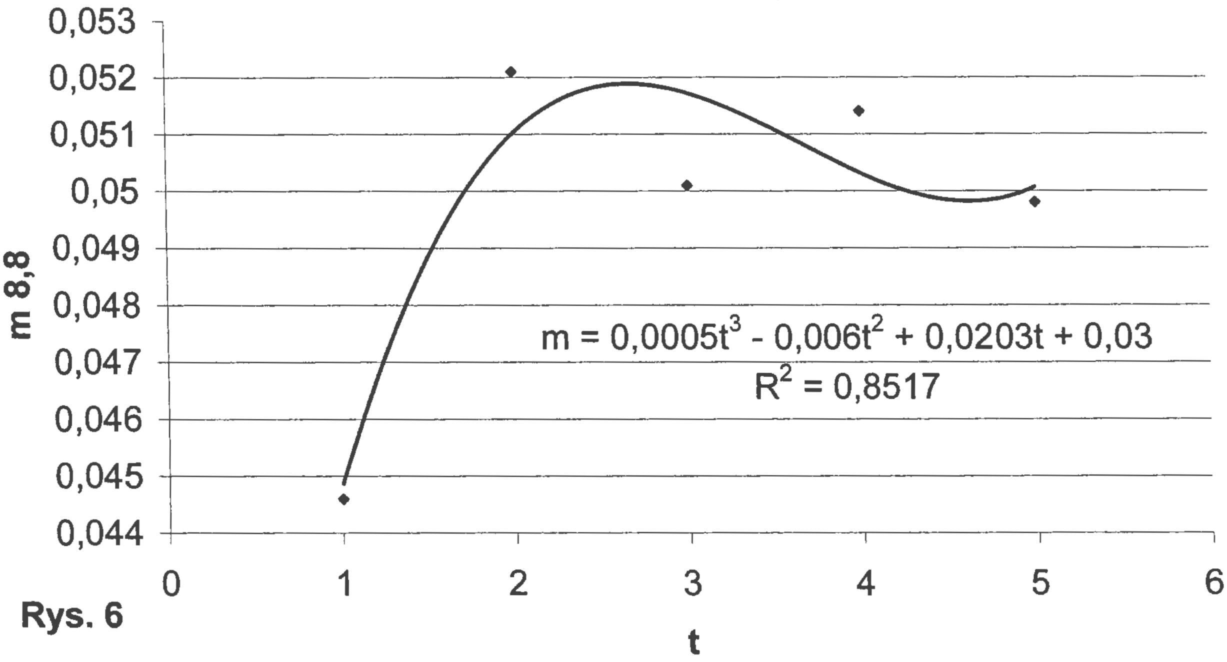


m 7,12
0,08
0,07
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0
0
1
2
3
4
5
6
t
$m = 0{,}0094t^3 - 0{,}0919t^2 + 0{,}2596t - 0{,}1532$
$R^2 = 0{,}9996$

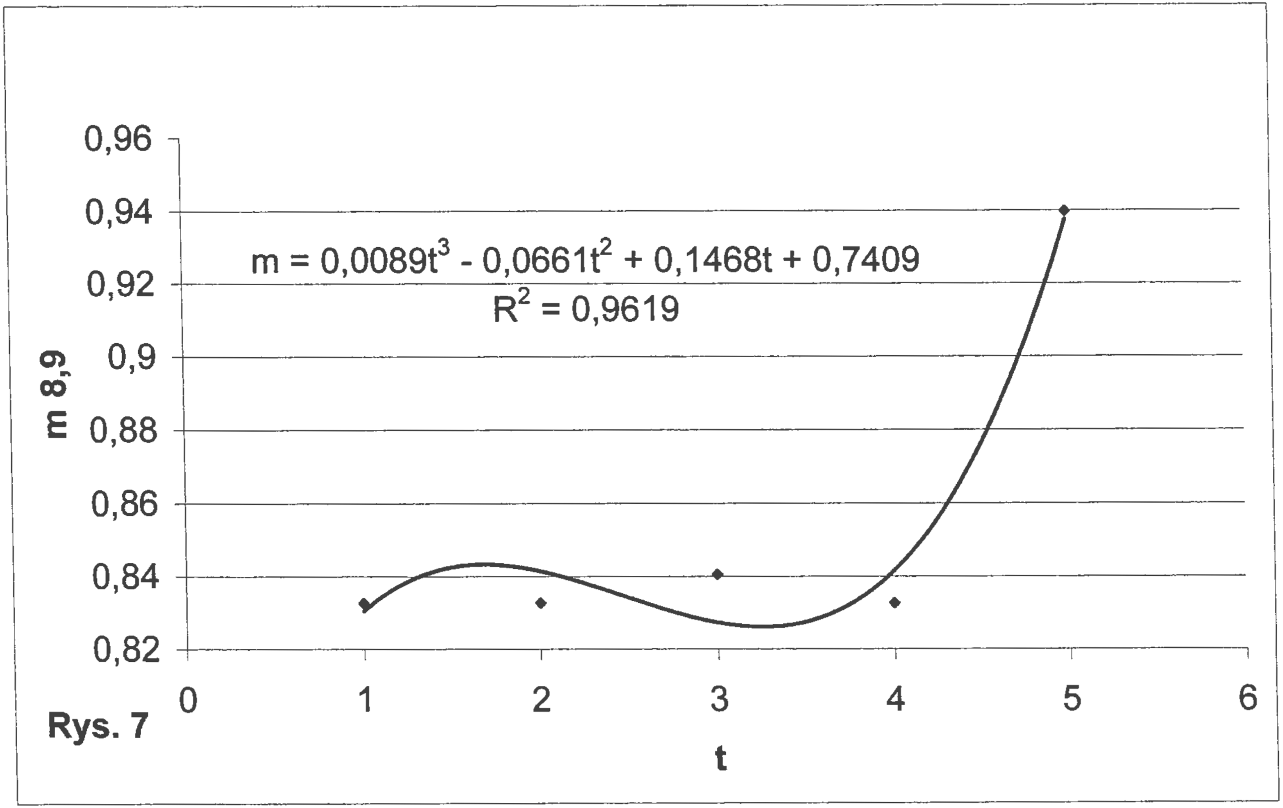
Rys. 4


0,12
0,1
0,08
0,06
0,04
0,02
0
m 8,2
m = 0,002t^3 - 0,0206t^2 + 0,0661t + 0,0349
R^2 = 0,914
0
1
2
3
4
5
6
t

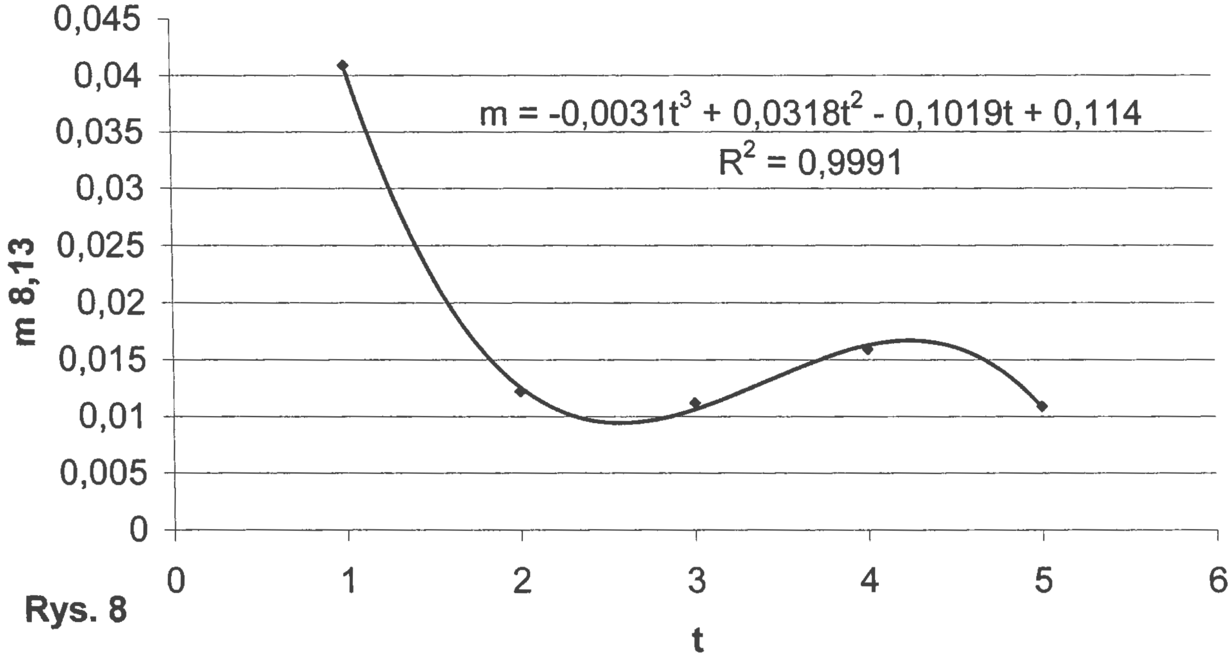
Rys. 5


0,053
0,052
0,051
0,05
0,049
0,048
0,047
0,046
0,045
0,044
m 8,8
0
1
2
3
4
5
6
t
m = 0,0005t3 - 0,006t2 + 0,0203t + 0,03
R2 = 0,8517

Rys. 6

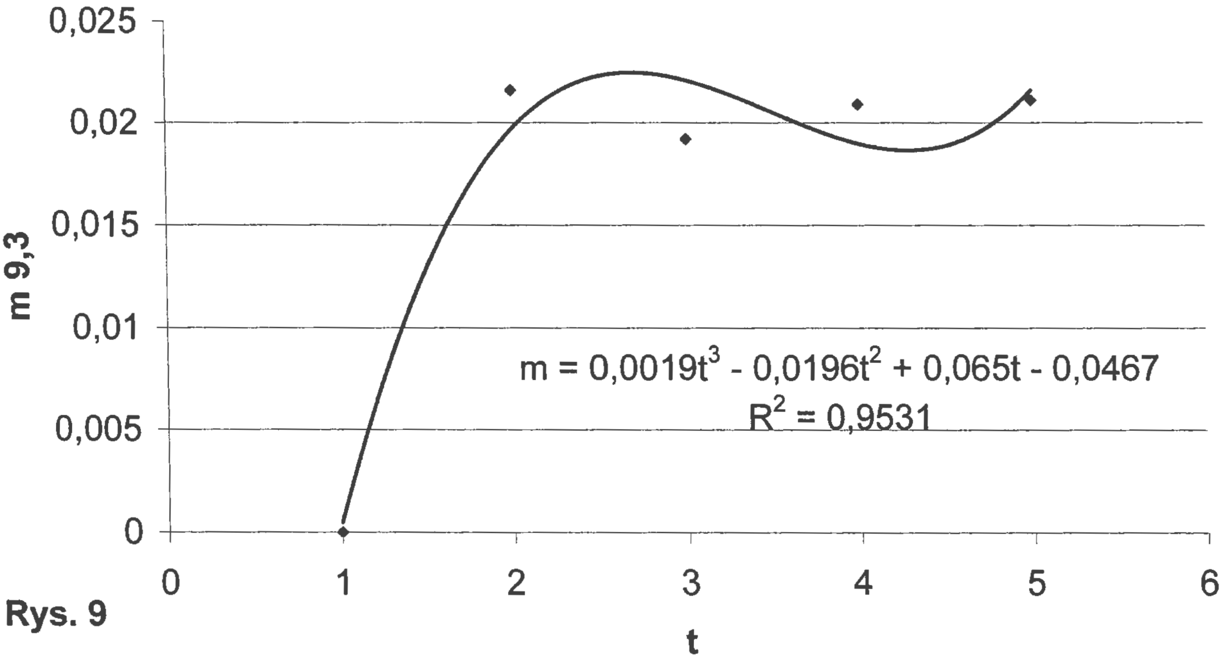

m = 0,0089t3 - 0,0661t2 + 0,1468t + 0,7409
R2 = 0,9619
m 8,9
0,96
0,94
0,92
0,9
0,88
0,86
0,84
0,82
0
1
2
3
4
5
6
t

Rys. 7

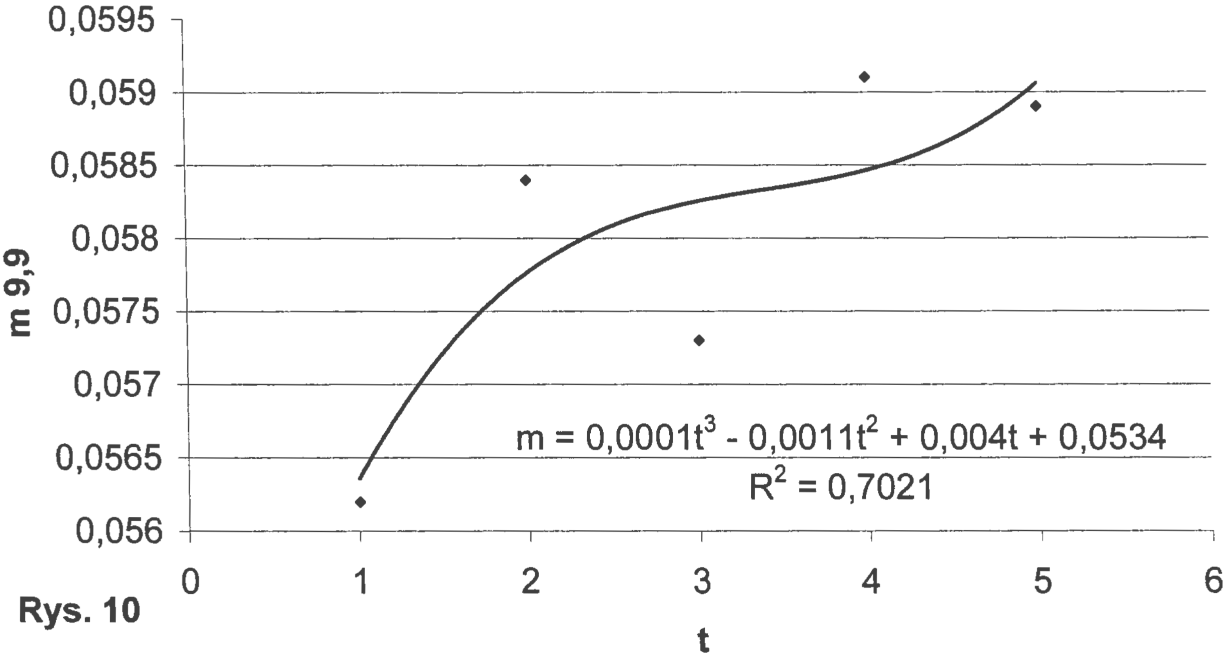


m = -0,0031t3 + 0,0318t2 - 0,1019t + 0,114
R2 = 0,9991
m 8,13
0,045
0,04
0,035
0,03
0,025
0,02
0,015
0,01
0,005
0
0
1
2
3
4
5
6
t

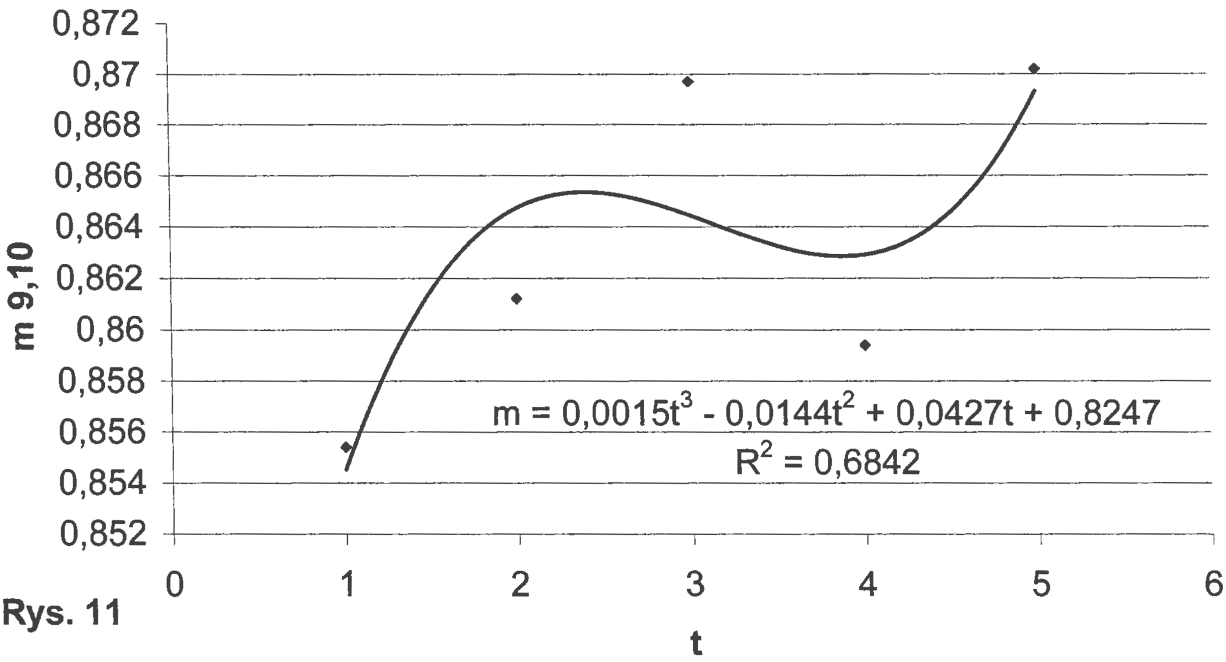
Rys. 8


0,025
0,02
0,015
0,01
0,005
0
m 9,3
0
1
2
3
4
5
6
t
m = 0,0019t^3 - 0,0196t^2 + 0,065t - 0,0467
R^2 = 0,9531

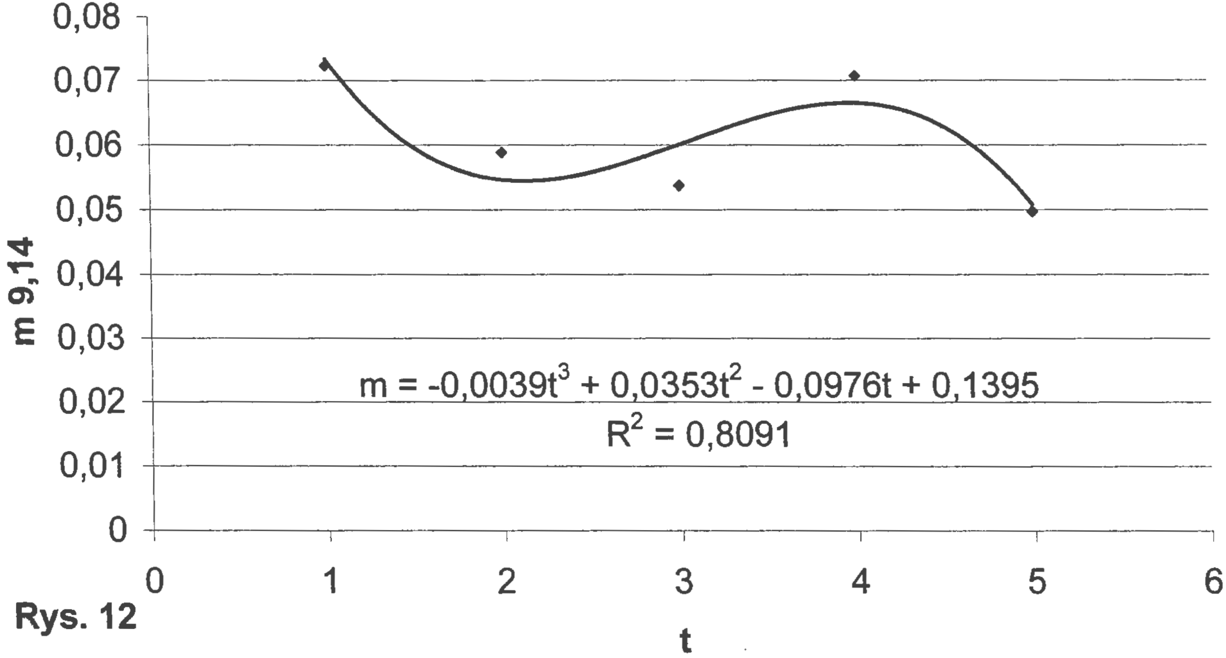
Rys. 9


0,0595
0,059
0,0585
0,058
0,0575
0,057
0,0565
0,056
m 9,9
m = 0,0001t3 - 0,0011t2 + 0,004t + 0,0534
R2 = 0,7021
0
1
2
3
4
5
6
t

Rys. 10

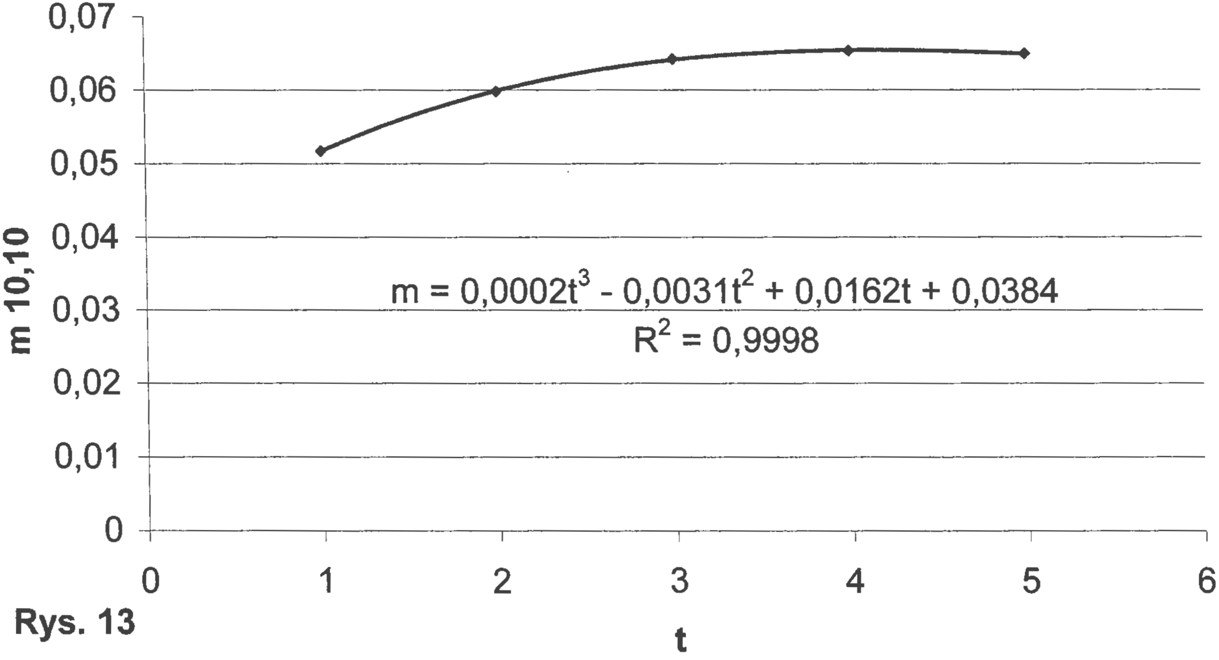

0,872
0,87
0,868
0,866
0,864
0,862
0,86
0,858
0,856
0,854
0,852
m 9,10
0
1
2
3
4
5
6
t
m = 0,0015t3 - 0,0144t2 + 0,0427t + 0,8247
R2 = 0,6842

Rys. 11

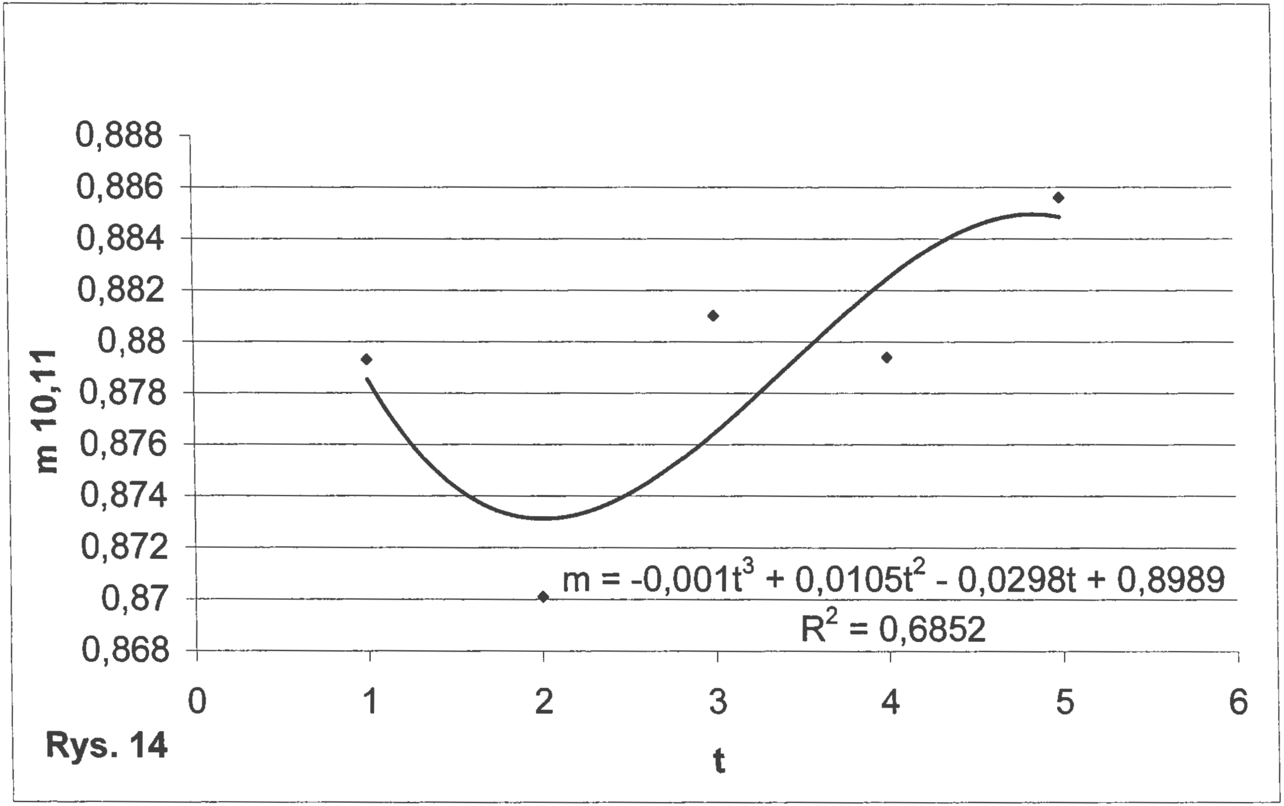


0,08
0,07
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0
m 9,14
m = -0,0039t3 + 0,0353t2 - 0,0976t + 0,1395
R2 = 0,8091
0
1
2
3
4
5
6
t

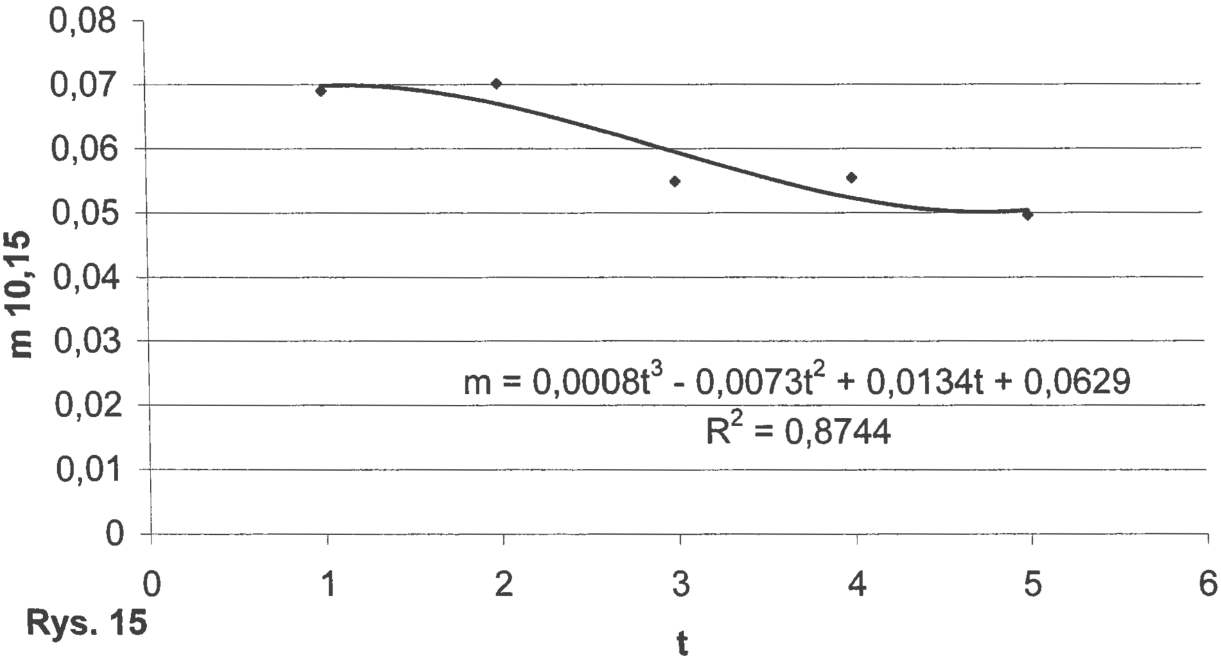
Rys. 12


0,07
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0
m 10,10
m = 0,0002t^3 - 0,0031t^2 + 0,0162t + 0,0384
R^2 = 0,9998
0
1
2
3
4
5
6
t

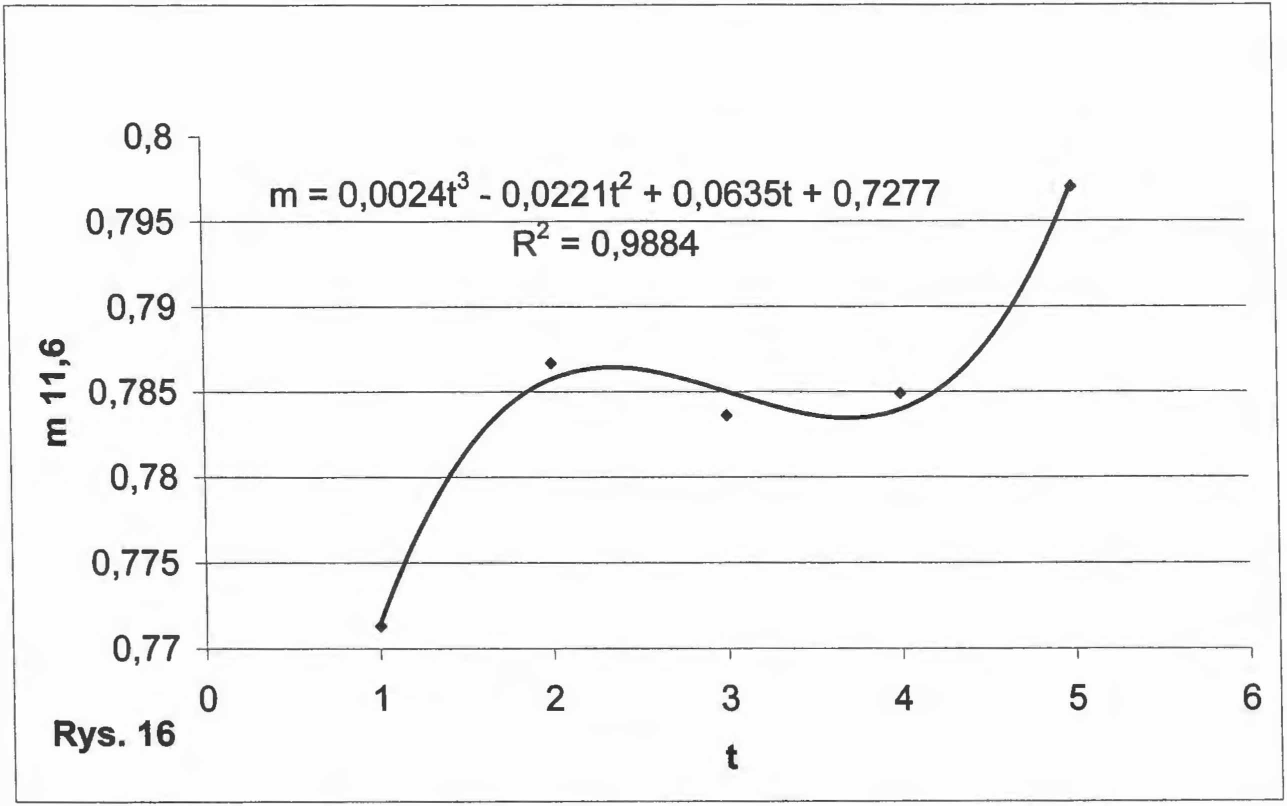
Rys. 13



0,888
0,886
0,884
0,882
0,88
0,878
0,876
0,874
0,872
0,87
0,868
m 10,11
$m = -0,001t^3 + 0,0105t^2 - 0,0298t + 0,8989$
$R^2 = 0,6852$
0
1
2
3
4
5
6
Rys. 14
t

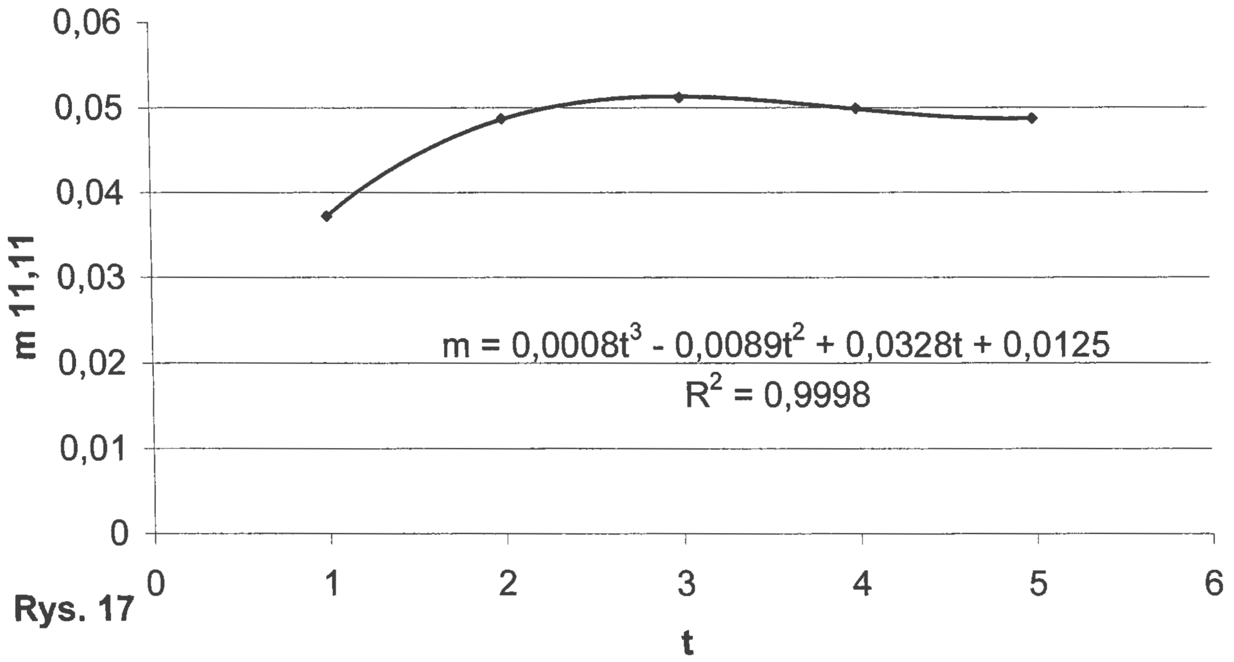

0,08
0,07
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0
m 10,15
$m = 0{,}0008t^3 - 0{,}0073t^2 + 0{,}0134t + 0{,}0629$
$R^2 = 0{,}8744$
0
1
2
3
4
5
6
t

Rys. 15

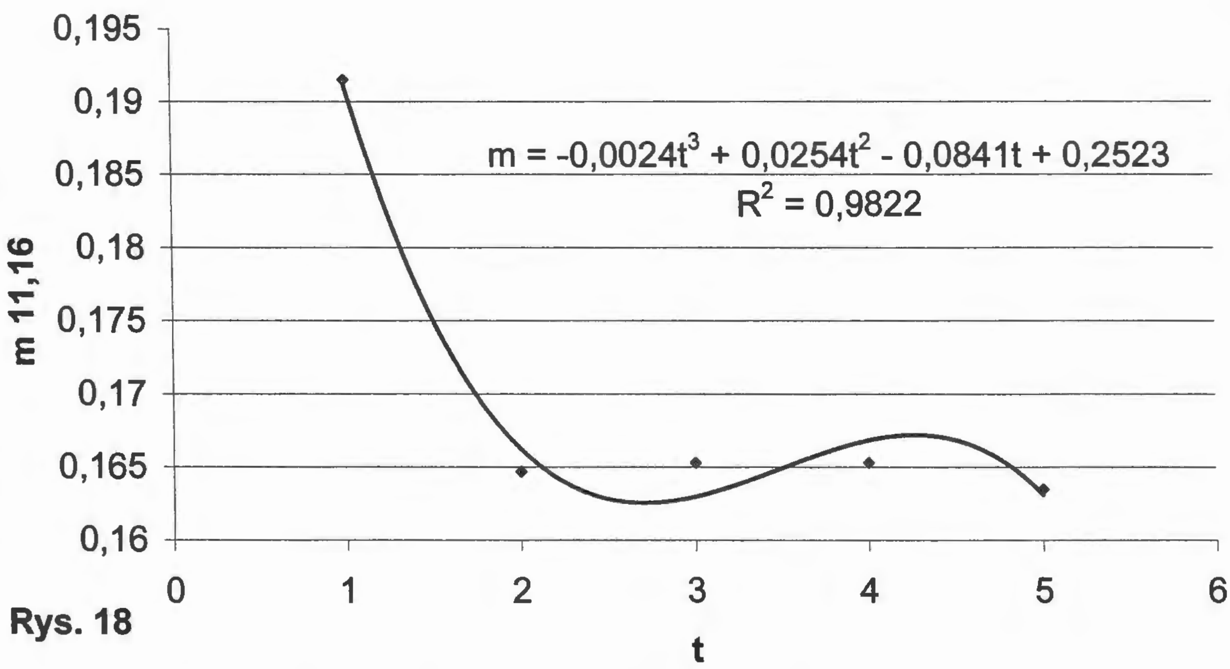


m = 0,0024t³ - 0,0221t² + 0,0635t + 0,7277
R² = 0,9884
0,8
0,795
0,79
0,785
0,78
0,775
0,77
m 11,6
0
1
2
3
4
5
6
t

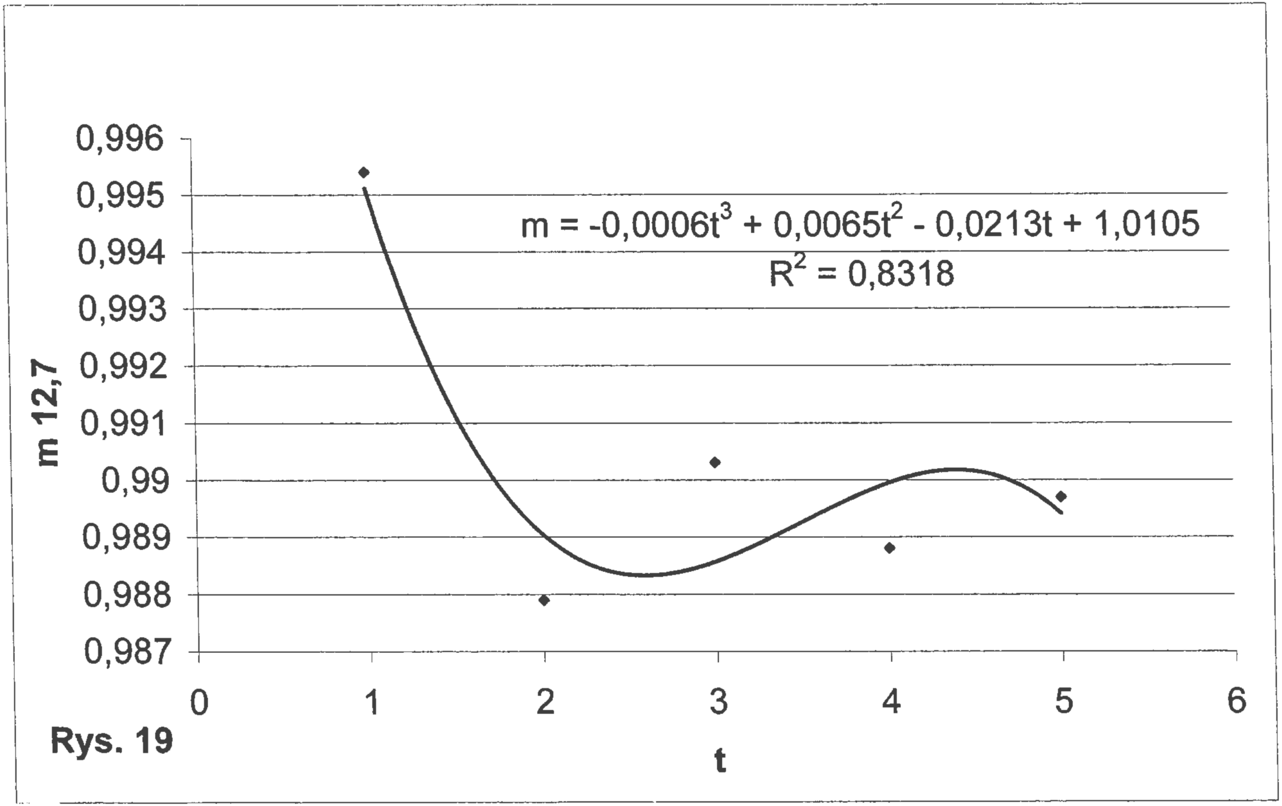
Rys. 16

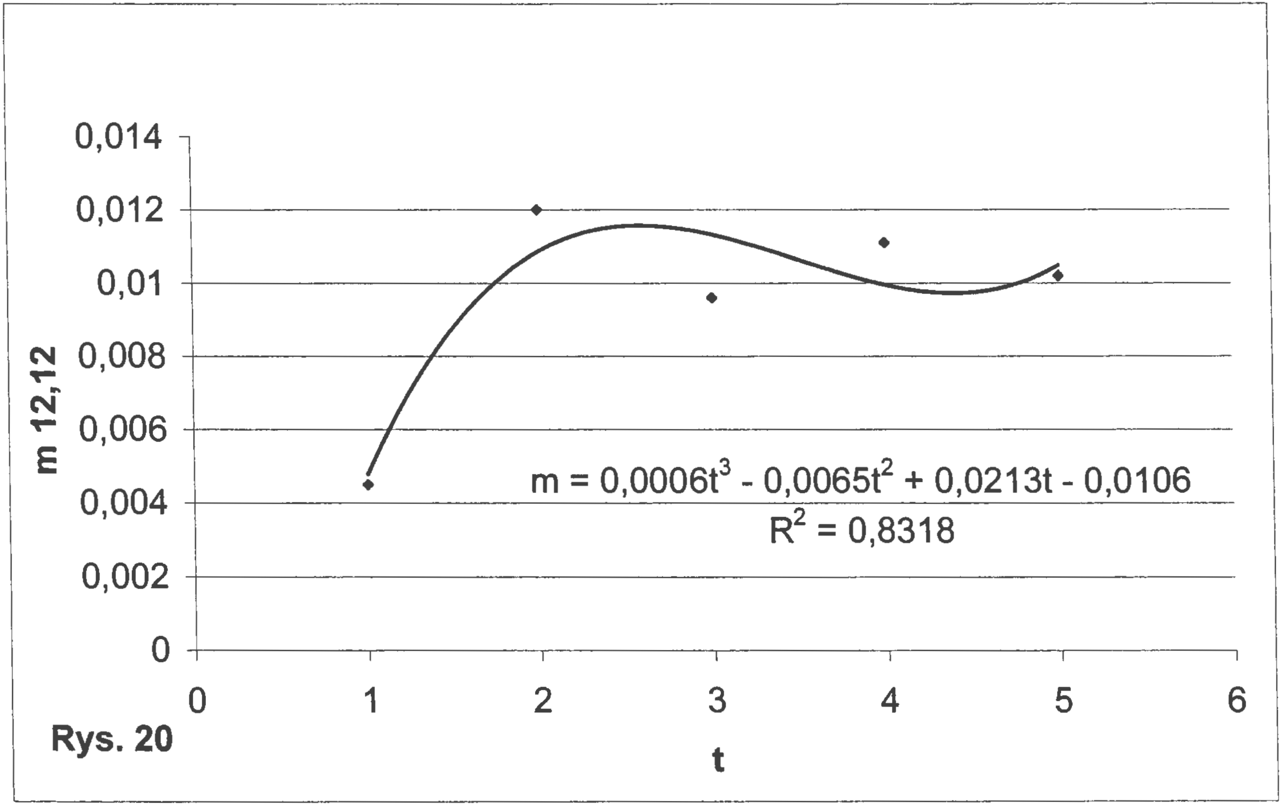

0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0
m 11,11
m = 0,0008t^3 - 0,0089t^2 + 0,0328t + 0,0125
R^2 = 0,9998
0
1
2
3
4
5
6
t

Rys. 17

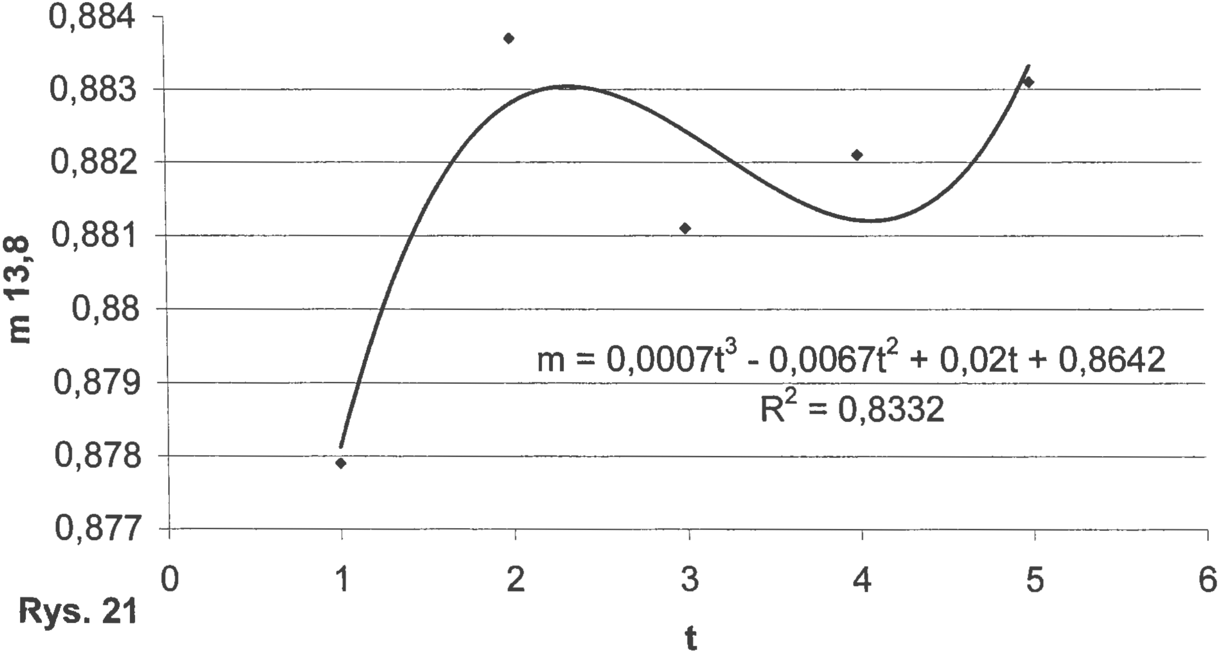

0,195
0,19
0,185
0,18
0,175
0,17
0,165
0,16
m 11,16
0
1
2
3
4
5
6
t
m = -0,0024t^3 + 0,0254t^2 - 0,0841t + 0,2523
R^2 = 0,9822

Rys. 18

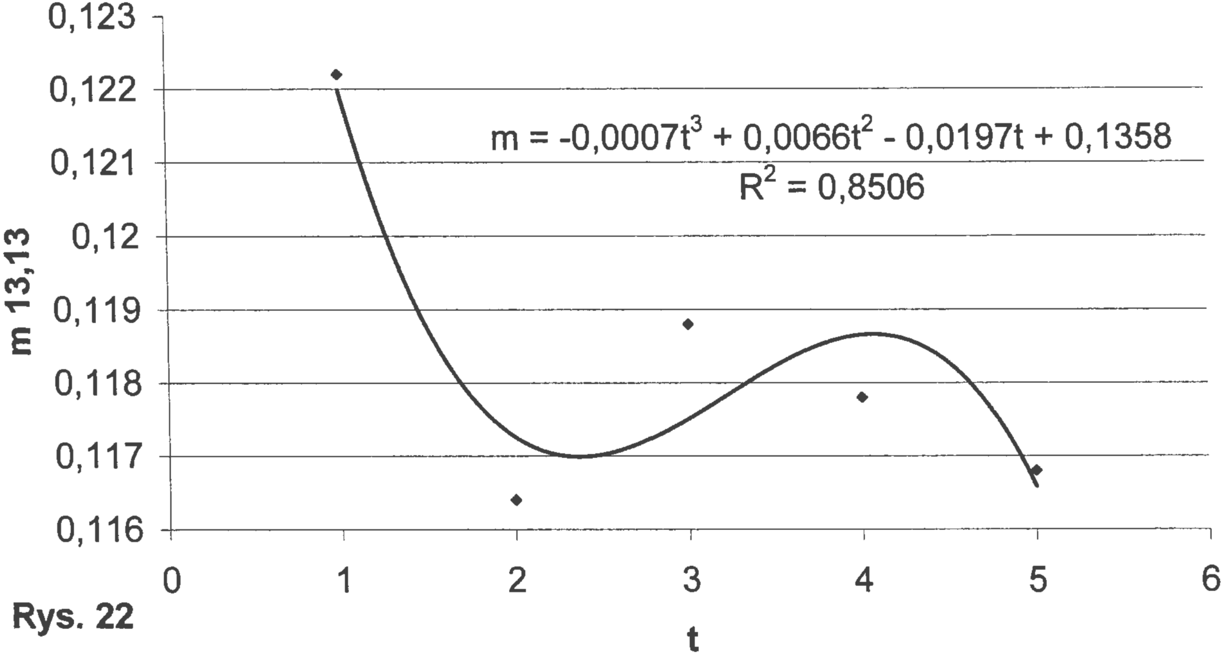

m = -0,0006t^3 + 0,0065t^2 - 0,0213t + 1,0105
R^2 = 0,8318
m 12,7
0,996
0,995
0,994
0,993
0,992
0,991
0,99
0,989
0,988
0,987
0
1
2
3
4
5
6
t
Rys. 19


0,014
0,012
0,01
0,008
0,006
0,004
0,002
0
m 12,12
m = 0,0006t³ - 0,0065t² + 0,0213t - 0,0106
R² = 0,8318
0
1
2
3
4
5
6
t

Rys. 20

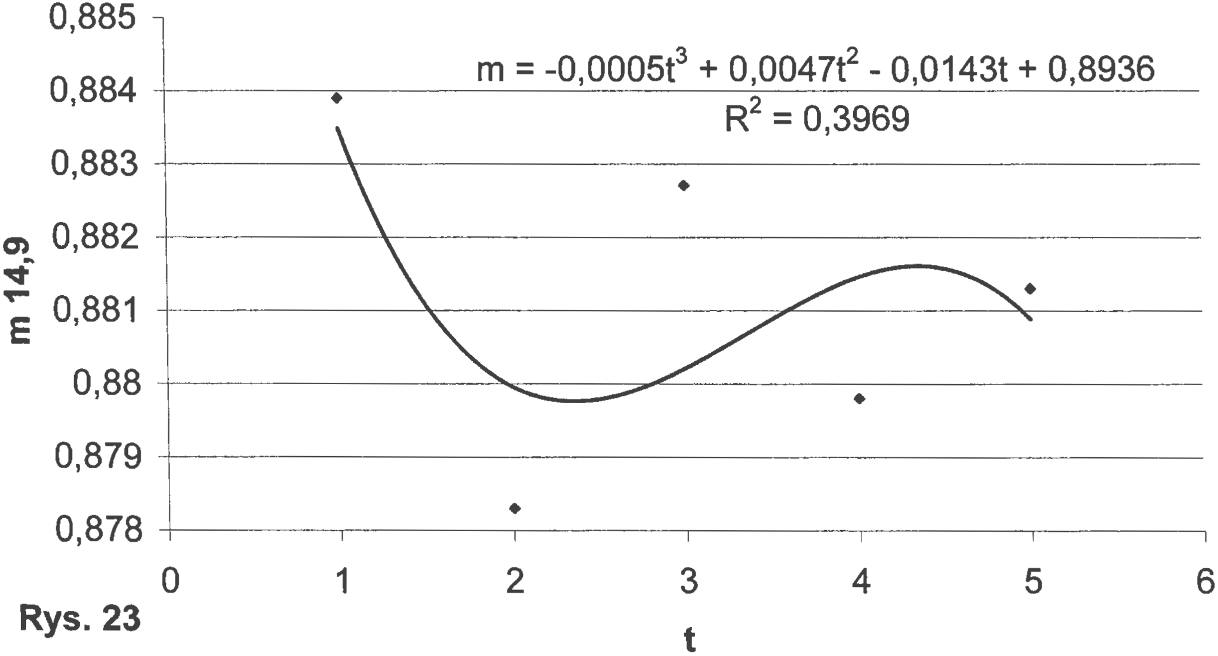

0,884
0,883
0,882
0,881
0,88
0,879
0,878
0,877
m 13,8
0
1
2
3
4
5
6
t
m = 0,0007t^3 - 0,0067t^2 + 0,02t + 0,8642
R^2 = 0,8332

Rys. 21

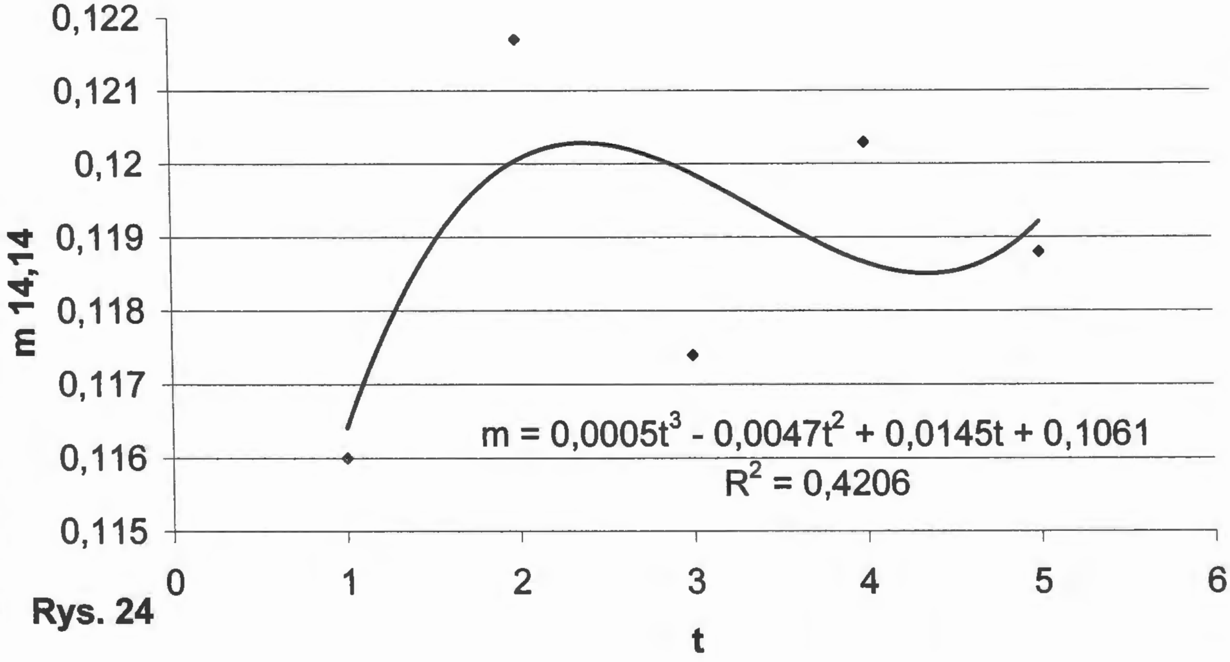


0,123
0,122
0,121
0,12
0,119
0,118
0,117
0,116
m 13,13
m = -0,0007t3 + 0,0066t2 - 0,0197t + 0,1358
R2 = 0,8506
0
1
2
3
4
5
6
t

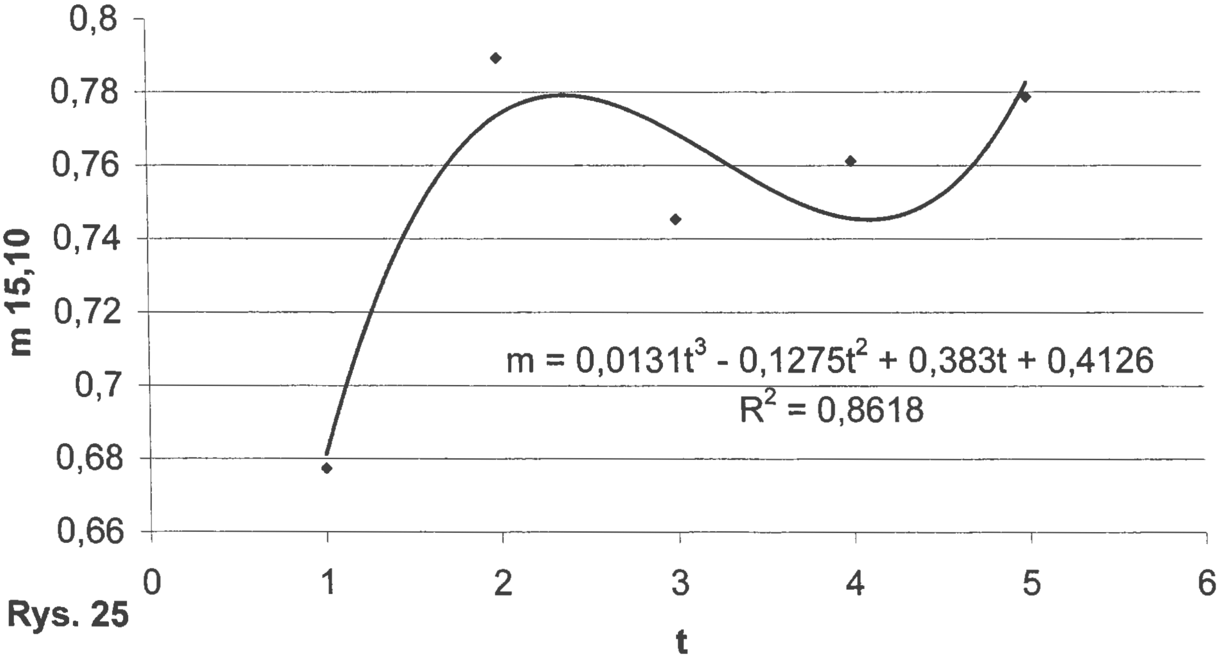
Rys. 22


0,885
0,884
0,883
0,882
0,881
0,88
0,879
0,878
m 14,9
m = -0,0005t3 + 0,0047t2 - 0,0143t + 0,8936
R2 = 0,3969
0
1
2
3
4
5
6
t

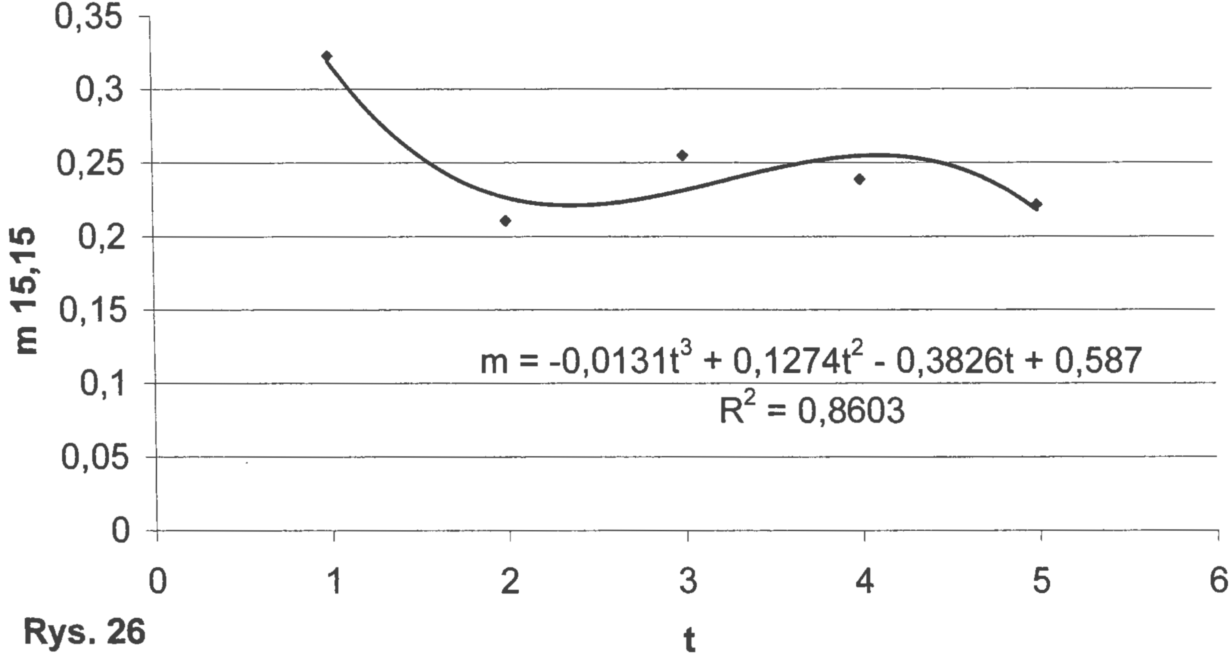
Rys. 23


0,122
0,121
0,12
0,119
0,118
0,117
0,116
0,115
m 14,14
m = 0,0005t^3 - 0,0047t^2 + 0,0145t + 0,1061
R^2 = 0,4206
0
1
2
3
4
5
6
t

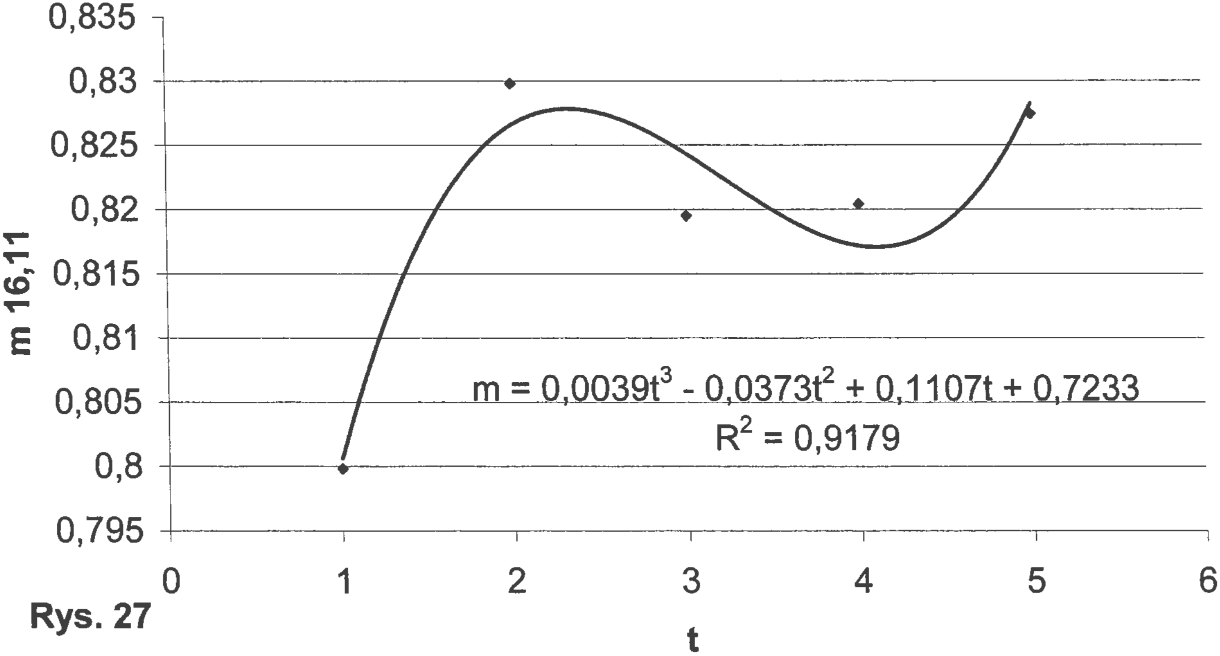
Rys. 24


0,8
0,78
0,76
0,74
0,72
0,7
0,68
0,66
m 15,10
m = 0,0131t3 - 0,1275t2 + 0,383t + 0,4126
R2 = 0,8618
0
1
2
3
4
5
6
t

Rys. 25

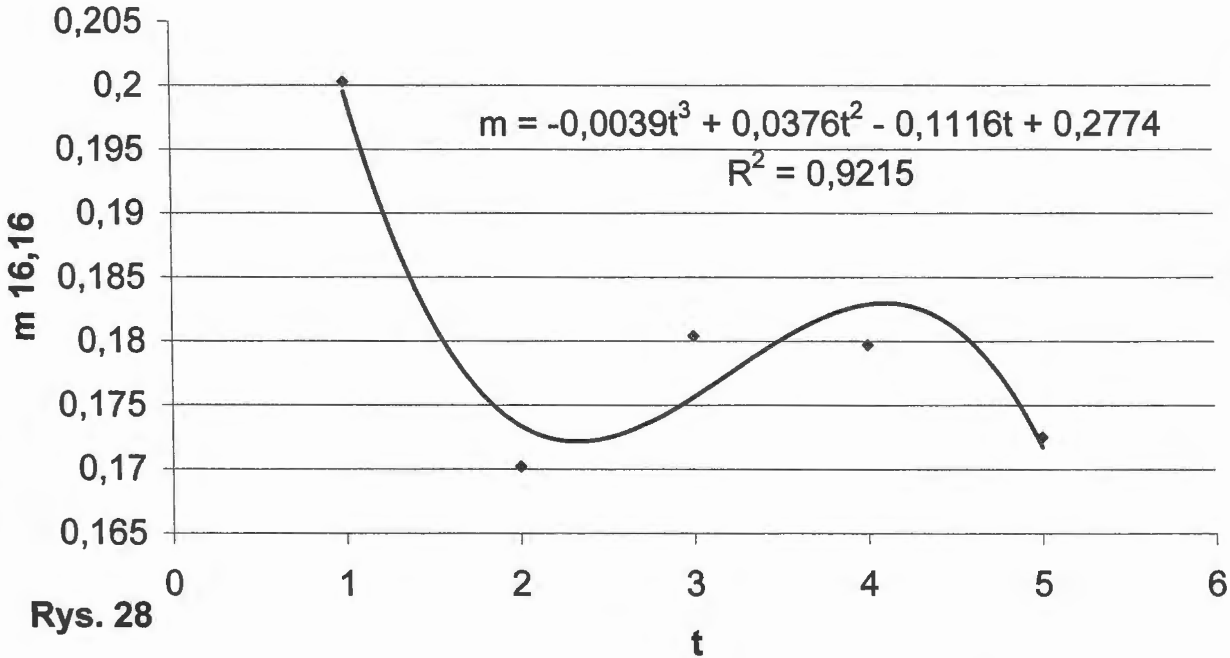

0,35
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
m 15,15
0
1
2
3
4
5
6
t
m = -0,0131t^3 + 0,1274t^2 - 0,3826t + 0,587
R^2 = 0,8603

Rys. 26



0,835
0,83
0,825
0,82
0,815
0,81
0,805
0,8
0,795
m 16,11
m = 0,0039t³ - 0,0373t² + 0,1107t + 0,7233
R² = 0,9179
0
1
2
3
4
5
6
t

Rys. 27


0,205
0,2
0,195
0,19
0,185
0,18
0,175
0,17
0,165
m 16,16
0
1
2
3
4
5
6
t
m = -0,0039t3 + 0,0376t2 - 0,1116t + 0,2774
R2 = 0,9215

Rys. 28