273/2003

Raport Badawczy
Research Report

RB/59/2003

Zarządzanie portfelowe na rynku obligacji

A. Jakubowski

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr inż. Roman Kulikowski

Warszawa 2003

Andrzej Jakubowski

ZARZĄDZANIE PORTFELOWE NA RYNKU OBLIGACJI *

Streszczenie

Przedmiotem rozważań jest zagadnienie aktywnego zarządzania portfelem obligacji w warunkach ryzyka stopy procentowej. Pod pojęciem aktywnego zarządzania, rozumie się tu optymalizację portfela obligacji ze względu na maksymalizację oczekiwanej stopy zawrotu z podejmowanych decyzji inwestycyjnych, przy zadanym poziomie ryzyka. Jest to – obok tzw. immunizacji portfela ze względu na ryzyko stóp procentowych – jedno z podstawowych zagadnień dotyczących zarządzania portfelem obligacji w warunkach niepewności.

Przedstawiono szczegółowe założenia oraz sformułowano model jednoindeksowy dla rynku obligacji, będący w pewnym sensie analogiem modelu Sharpe'a rozpatrywanego powszechnie dla rynku akcji (*single-index model*). Wskazano na podobieństwa i różnice pomiędzy analizowanymi modelami. Przedstawiono również model portfela rynkowego obligacji. Sformułowano opis matematyczny oraz dokonano interpretacji następujących parametrów modelu jednoindeksowego obligacji: spodziewanej stopy zwrotu (*anticipated return*), oczekiwanej stopy zwrotu (*expected return*), nieoczekiwanej stopy zwrtu (*excess return*) oraz wartości oczekiwanej nieoczekiwanej stopy zwrotu (*expected excess return*). Podano również zależność wariancji oraz kowariancji stóp zwrotu od parametrów okresowości (*duration*) analizowanych obligacji.

W końcowej części pracy sformułowano założenia oraz podano opis matematyczny zagadnienia portfelowego Markowitza w odniesieniu do rynku obligacji. Przedstawiono również dyskusję warunków stosowalności zaproponowanego podejścia w praktyce. W tym zakresie, dokonano analizy stabilności parametrów rozpatrywanego modelu. Wskazano, że zastosowanie zaproponowanej metody zarządzania portfelowego może być szczególnie obiecujące w przypadku obligacji długoterminowych, w którym problem niestabilności w czasie parametrów modelu nie jest tak znaczący.

Prezentowane wyniki stanowią pewne istotnie nowe rozwiązania w stosunku do istniejących opracowań z zakresu aktywnego zarządzania portfelem obligacji, przedstawionych w ostatnich latach przez G.Bierwaga (1983), T.S.Y.Ho (1990), G.Fonga (1994), E.J.Eltona, M.J.Grubera (1995), R.E.Dattarey'a (1995), F.J.Fabozziego (2000) i innych.

* Skrócona wersja niniejszej pracy została zgłoszona do publikacji w: *„Modelowanie Preferencji a Ryzyko'03"*, T.Trzaskalik (Red.), Akademia Ekonomiczna w Katowicach, Katowice 2003 (w przygotowaniu).

Spis treści

1. Wprowadzenie

Przedmiotem prowadzonych rozważań będzie zagadnienie aktywnego zarządzania portfelem obligacji z wykorzystaniem znajomości kształtu struktury terminowej rynkowych stóp procentowych. Pod pojęciem *aktywnego zarządzania*, rozumie się tu optymalizację portfela obligacji ze względu na maksymalizację stopy zwrotu z podejmowanych decyzji inwestycyjnych, przy zadanym poziomie ryzyka. Jest to - obok tzw. *immunizacji portfela* ze względu na ryzyko stóp procentowych - jedno z podstawowych zagadnień dotyczących zarządzania portfelem obligacji w warunkach niepewności.

Badania dotyczyć będą dwóch klas analizowanych modeli. Do *pierwszej klasy* zalicza się problematykę aktywnego zarządzania portfelem obligacji przy założeniu, że struktura terminowa stóp procentowych jest płaska, przy czym bezwzględny poziom tych stóp może podlegać w przyszłości zmianom. Natomiast w *drugiej klasie* metod dopuszcza się różnorodność kształtu tej struktury. Podstawowym zagadnieniem, jakie należy w rozpatrywanym przypadku rozwiązać jest prognozowanie przyszłego kształtu struktury terminowej stóp procentowych na podstawie znajomości bieżącej postaci tej struktury. Wiąże się to z prognozowaniem tzw. oczekiwanych stóp procentowych *spot.*

Zagadnienia modelowania oraz analizy dynamiki zmian struktury terminowej stóp procentowych (*the term structure of interest rates*) zostały obszernie omówione w jednej z prac autora (*Jakubowski,* 1996). Pewne szczegółowe rozwiązania z tego zakresu, wiążące się z zastosowaniem metody analizy czynnikowej zawierają prace (*Jakubowski,* 1997a) oraz (*Kulikowski, Bury, Jakubowski,* 1995, 1996). Ponadto, ważne z punktu widzenia zarządzania portfelem obligacji, zagadnienie wyceny tych instrumentów przedstawiono w pracach (*Kulikowski, Jakubowski,* 2000 a, b). Problematyka ta, poza pewnymi ogólnymi pojęciami, nie będzie w niniejszym opracowaniu szerzej rozpatrywana.

Natomiast przedstawimy szczegółowo założenia oraz sformułowanie zagadnienia portfelowego Markowitza w odniesieniu do rynku obligacji. Prezentowane wyniki stanowią pewne istotnie nowe rozwiązania w stosunku do istniejących opracowań z zakresu aktywnego zarządzania portfelem obligacji; por. *Bierwag* (1983), *Ho* (1990), *Elton, Gruber* (1995), *Dattatreya, Fabozzi* (1995).

W zakończeniu pracy, przedstawimy również dyskusję warunków stosowalności zaproponowanego podejścia w praktyce. Chodzi w tym przypadku o analizę stabilności w czasie parametrów rozpatrywanego modelu. Niektórzy badacze twierdzą, że ze względu na niestabilność tych parametrów, zastosowanie w praktyce klasycznego podejścia Markowitza w odniesieniu do rynku obligacji – nie jest możliwe; *Fabozzi, Fong* (1994). Zdaniem autora niniejszego opracowania, stwierdzenie to nie jest w ogólnym przypadku prawdziwe. Zastosowanie zaproponowanej metody zarządzania portfelowego może być szczególnie obiecujące w przypadku obligacji długoterminowych, w którym problem niestabilności parametrów modelu nie jest tak znaczący.

2. Ryzyko stóp procentowych - parametry okresowości i wypukłości obligacji

Z podstaw teorii obligacji wynika, że wartość bieżąca obligacji P wyraża się następującym wzorem (*Fabozzi*, 2000)

$$P = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r_{0t})^t}, \tag{2.1}$$

gdzie T - okres do wykupu, t - kolejny okres odsetkowy; $t = 1, \ldots, T$,

C_t - kupon, tj. wartość odsetek za dany okres wyrażona w jednostkach pieniężnych,

$C_t = C$ dla $t = 1, \ldots, (T-1)$ i $C_T = C + N$, N - wartość nominalna obligacji,

r_{0t} - rynkowa stopa procentowa *spot* dla okresu $[0, t]$.

Z zależności (2.1) bezpośrednio wynika, że wartość bieżąca obligacji może podlegać ciągłym oraz nieoczekiwanym fluktuacjom (*price volatility*) ze względu na zmiany obowiązujących w danym momencie rynkowych stóp procentowych, za pomocą których dyskontujemy w czasie do chwili bieżącej wszystkie przyszłe wpływy pieniężne związane z posiadaniem obligacji (tj. odsetki oraz nominał).

Często trudne do przewidzenia zmiany rynkowych stóp procentowych oraz wynikające stąd zmiany wartości obligacji (czy też szerzej - instrumentów finansowych) są utożsamiane z ryzykiem stóp procentowych. Ryzyko to wywołuje tzw. nieoczekiwaną zmianę stopy zwrotu z inwestycji (*excess return*). W związku z tym istotna jest - z punktu widzenia zarówno inwestora jak i emitenta - wrażliwość (lub też przeciwnie - odporność) wartości rozpatrywanej obligacji na zmiany rynkowych stóp procentowych. Parametrami umożliwiającymi pomiar takiej wrażliwości jest **okresowość** (*duration*) oraz **wypukłość** (*convexity*) obligacji.

Przypadek płaskiej krzywej dochodowości

Klasyczne definicje (*Macaulay'a*) okresowości i wypukłości obligacji związane są z przyjęciem silnie ograniczającego założenia, że wszystkie rynkowe stopy procentowe *spot* (wyrażone w skali roku) są sobie równe, niezależnie od terminów zapadalności zobowiązań, tj.

$$r_{0t} = r; \quad \text{dla} \quad t = 1, \ldots, T. \tag{2.2}$$

Oznacza to, że struktura terminowa stóp procentowych – reprezentowana przez tzw. *krzywą dochodowości* skarbowych obligacji czysto-dyskontowych - jest „płaska", przy czym zachodzi to dla dowolnej chwili bieżącej $\tau = 1, 2, 3, \ldots$. Efekt ten możemy uzyskać dokonując np. uśrednienia wartości r_{0t} $(t = 1, \ldots, T)$, tj. przyjmując $r = \overline{r}_{0t}$.

Z powyższego założenia wynika bezpośrednio, że jeżeli chodzi o zmiany rynkowej stopy procentowej r (w tym przypadku już tylko jednej) to możliwe są jedynie równoległe przesunięcia w górę lub w dół rozpatrywanej krzywej dochodowości o wartość Δr.

Klasyczna definicja **okresowości** (*duration*) obligacji jest następująca.

Formuła Macaulay'a:

$$D = -\frac{\Delta P}{P} / \frac{\Delta(1+r)}{1+r}, \tag{2.3}$$

gdzie D - okresowość obligacji,
r - rynkowa stopa procentowa,
P - wartość bieżąca obligacji,
ΔP, $\Delta(1+r) = \Delta r$ - przyrosty bezwzględne wartości P oraz r.

Ze wzoru (2.3) wynika, że okresowość obligacji jest równa tzw. *współczynnikowi elastyczności* (ze znakiem minus) ceny P obligacji ze względu na zmiany wartości jeden plus stopa procentowa r. Inaczej mówiąc, okresowość D obligacji określa o ile procent zmieni się cena obligacji (w przybliżeniu) przy zmianie wartości $(1+r)$ o 1 %.

Ponadto, z (2.3) mamy

$$\frac{\Delta P}{P} = -D\frac{\Delta r}{1+r} . \tag{2.4}$$

Tak więc, wzrost rynkowej stopy procentowej powoduje spadek bieżącej wartości obligacji i odwrotnie - spadek stopy procentowej powoduje wzrost wartości obligacji.

Wzór (2.3), dla nieskończenie małych przyrostów Δr, można przekształcić do następującej postaci

$$D = -\frac{\partial P}{\partial r} \times \frac{1+r}{P} , \tag{2.5}$$

gdzie $\partial P / \partial r$ - pochodna wartości bieżącej P obligacji, jako funkcji stopy procentowej r (tzw. *dollar duration*).

Okresowość obligacji o stałym oprocentowaniu można wyznaczyć następująco:

Ze wzoru (2.1), dla $r_{0t} = r$ $(t = 1, \ldots, T)$, otrzymamy

$$P = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t} , \tag{2.6}$$

gdzie P - wartość bieżąca obligacji, r - rynkowa stopa procentowa, oraz z (2.5) i (2.6), po przekształceniach,

$$D = -\frac{\partial P}{\partial r}\frac{1+r}{P} = \sum_{t=1}^{T}\frac{t\,C_t}{(1+r)^t} / P. \tag{2.7}$$

Należy podkreślić, że wzór (2.4) ma jedynie charakter przybliżony; jest on prawdziwy tylko dla małych zmian Δr rynkowej stopy procentowej. W związku z tym, w teorii obligacji wprowadza się dodatkowo jeszcze jeden parametr zwany „wypukłością" obligacji (*convexity*). Nazwa tego parametru wynika stąd, że zależność wartości obligacji P od stopy procentowej r dana wzorem (2.6) jest funkcją wypukłą.

Definicja **wypukłości V obligacji** (*convexity*) jest następująca:

$$V \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\frac{(1+r)^2}{P}. \tag{2.8}$$

Dla obligacji o stałym oprocentowaniu, ze wzorów (2.6) i (2.8), po przekształceniach, otrzymamy:

$$V = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\frac{(1+r)^2}{P} = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{t(t+1)C_t}{(1+r)^t} / P. \tag{2.9}$$

Nieoczekiwana zmiana wartości bieżącej obligacji

Wyznaczymy teraz wzór na nieoczekiwaną zmianę $(\Delta P / P)$ bieżącej wartości wewnętrznej P obligacji w chwili $\tau = 0$. Funkcję $P(r)$ obrazującą zależność między wartością obligacji P a stopą procentową r, daną wzorem (2.6) rozwijamy w szereg Taylora:

oznaczając $h = \Delta(1+r) = \Delta r$, mamy

$$P(r+h) = P(r) + \frac{\partial P}{\partial r}h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}h^2 + \ldots \tag{2.10}$$

Z zależności (2.7), (2.9) i (2.10), po przekształceniach (oraz pominięciu pochodnych wyższego rzędu), otrzymamy

$$\frac{\Delta P}{P} = -D(\Delta_r) + V(\Delta_r)^2, \tag{2.11}$$

gdzie $\Delta_r = \frac{\Delta(1+r)}{1+r} = \frac{\Delta r}{1+r}$ oraz $\frac{\Delta P}{P} = \frac{P(r+h) - P(r)}{P(r)}$.

Interpretacja parametru okresowości obligacji

Wprowadzimy następujące oznaczenie

$$x_t = \frac{C_t(1+r)^{-t}}{P}. \tag{2.12}$$

Ze wzorów (2.7) i (2.12) otrzymamy

$$D = \sum_{t=1}^{T} \frac{tC_t}{(1+r)^t} / P = \sum_{t=1}^{T} x_t t; \qquad \text{przy czym} \quad \sum_{t=1}^{T} x_t = 1. \tag{2.13}$$

Z wyprowadzonej zależności wynika, że *okresowość* obligacji to średni ważony okres otrzymywania wpływów pieniężnych z tytułu posiadania obligacji, przy czym współczynnikami wagowymi są zdyskontowane w czasie wartości tych wpływów, przypadające na jednostkę wartości bieżącej P obligacji. Okresowość ta jest wyrażana w latach.

Ujmując to jeszcze inaczej (*Ladko*, 1994), *okresowość D to średni ważony okres zwrotu z inwestycji*, rozumiany jako pewien przeciętny okres, po upływie którego inwestor otrzyma zwrot zainwestowanego kapitału wraz z oczekiwanymi dochodami. Okres ten zwykle nie pokrywa się z terminem trwania inwestycji (tj. czasem życia obligacji), gdyż w trakcie tego okresu inwestor otrzymuje periodyczne wpływy pieniężne, które przyśpieszają zwrot zainwestowanych środków.

Podobny wniosek można sformułować z punktu widzenia emitenta obligacji, który jest w rozpatrywanym przypadku pożyczkobiorcą. Emisja obligacji np. 3-letnich nie oznacza wcale, że emitent korzysta z pożyczonych środków przez pełne trzy lata. Okres ten jest krótszy z racji konieczności regulowania płatności odsetkowych.

Ponadto, biorąc pod uwagę przyjęte oznaczenia

$$C_t = C \quad \text{dla} \quad t = 1, \ldots, (T-1) \quad \text{oraz} \quad C_t = C + N \quad \text{dla} \quad t = T,$$

ze wzoru (2.7) otrzymamy

$$D = \left\{ \sum_{t=1}^{T} \left[tC / (1+r)^t \right] + TN / (1+r)^T \right\} / P. \tag{2.14}$$

Z zależności (2.6) i (2.14) wynika bezpośrednio, że

(i) Okresowość każdej obligacji z kuponem zerowym jest równa czasowi życia T tej obligacji; dla obligacji zero-kuponowej mamy bowiem:

$P = N / (1+r)^T$;

a zatem, dla $C = 0$, $\quad D = T[N / (1+r)^T / P] = T$.

(ii) Okresowość obligacji wielokuponowej jest mniejsza od czasu życia T tej obligacji. Wynika to bezpośrednio ze wzoru (2.13). Dla niezerowych wag x_t rozpatrywanych dla $t = 1,\ldots,(T-1)$ - co zachodzi dla obligacji wielokuponowej - okresowość D jest średnią ważoną czasów t $(t = 1,\ldots,T)$. Okresowość D musi być więc mniejsza od ostatniego z analizowanych czasów, tj. $t = T$.

PRZYKŁAD 2.1

Obliczmy okresowość D obligacji wielokuponowej o następujących danych:

$C = 10$ zł/rok, $N = 100$ zł; $T = 4$ lata.

Załóżmy, że rynkowa stopa procentowa wynosi $r = 20\% = 0.20$. Mamy

$$P = \frac{10}{(1.2)} + \frac{10}{(1.2)^2} + \frac{10}{(1.2)^3} + \frac{110}{(1.2)^4} = 74.11 \text{ zł}.$$

A zatem okresowość D rozpatrywanej obligacji 4-letniej wynosi

$$D = \left[(1 \text{ rok})\frac{10}{1.2} + (2 \text{ lata})\frac{10}{(1.2)^2} + (3 \text{ lata})\frac{10}{(1.2)^3} + (4 \text{ lata})\frac{110}{(1.2)^4}\right] / 74.11 = 3.4 \text{ lat}.$$

Powyższy przykład jest ilustracją faktu, że *okresowość D obligacji jest pewnym przeciętnym ważonym okresem zwrotu* z inwestycji w obligacje, stąd też - przyjęta w niniejszej pracy nazwa tego parametru; por. również *Ladko* (1994).

Oczekiwana okresowość obligacji

Wprowadzimy teraz pewne nowe pojęcie związane z tzw. *oczekiwaną okresowością* D^1 obligacji. Stosując to pojęcie, weźmiemy bardziej szczegółowo pod uwagę oddziaływanie „upływu czasu bieżącego" $\tau = 0,1,2,3,\ldots,$ na wartość parametru bieżącej okresowości D^0.

Prowadząc w dalszym ciągu rozważania dla płaskiej krzywej dochodowości, oznaczymy:

P_0 - wartość bieżąca obligacji w chwili $\tau = 0$, czyli

$$P_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t}, \tag{2.15}$$

D^0 - parametr bieżącej okresowości obligacji, rozpatrywany dla chwili $\tau = 0$, tj.

$$D^0 = D(\tau = 0) = -\frac{\Delta P_0}{P_0} / \frac{\Delta r}{1+r}, \tag{2.16}$$

czyli - dla małych Δr - otrzymamy

$$D^0 = -\frac{\partial P_0}{\partial r}\frac{1+r}{P_0} = \sum_{t=1}^{T}\frac{t\,C_t}{(1+r)^t}\,/\,P_0\,. \tag{2.17}$$

Tak więc okresowość D^0 określa nam wrażliwość wartości bieżącej P_0 obligacji, rozpatrywanej w chwili $\tau = 0$, na zmianę stopy procentowej r o Δr jaka następuje w chwili $\tau = 0+\varepsilon$, gdzie ε - dowolnie małe. Możemy wyobrazić sobie następującą sytuację: kupujemy w chwili $\tau = 0$ daną obligację według ceny P_0 i zastanawiamy się jaka będzie natychmiastowa zmiana wartości tej obligacji, o ile bezpośrednio po zakupie (tj. dla $\tau = 0+\varepsilon$) stopa procentowa zmieni się o Δr. Odpowiedź na to pytanie możemy uzyskać wykorzystując właśnie parametr D^0, a mianowicie z (2.16) mamy

$$\frac{\Delta P_0}{P_0} = -D^0\,\frac{\Delta r}{1+r}\,. \tag{2.18}$$

Załóżmy teraz, że nabyliśmy daną obligację w chwili $\tau = 0$, oraz - że przez pierwszy okres odsetkowy stopa procentowa r nie uległa zmianie. Zastanawiamy się jak wrażliwa będzie wartość bieżąca posiadanej obligacji na zmianę stopy procentowej o Δr w chwili $\tau = 1+\varepsilon$, tj. po upływie pierwszego okresu odsetkowego i wypłacie pierwszych odsetek wynoszących $C_1 = C$. Analizę powyższą prowadzimy w chwili obecnej, tj. dla $\tau = 0$. W tym celu wprowadzamy właśnie pojęcie *oczekiwanej okresowości* D^1, tj. przy oczekiwaniu, że stopa procentowa r nie ulegnie zmianie w okresie $\tau \in [0,1]$.

Oznaczmy

P_1 - wartość bieżąca obligacji w chwili $\tau = 1$, przy założeniu, że stopa procentowa $r = const$, tj.

$$P_1 = \sum_{t=2}^{T}\frac{C_t}{(1+r)^{t-1}}\,. \tag{2.19}$$

Wartość P_1 jest więc oczekiwaną (czy też spodziewaną) wartością bieżącą obligacji wyznaczoną w chwili $\tau = 0$ dla chwili $\tau = 1$, w warunkach stałości stopy procentowej r.

Parametr **oczekiwanej okresowości D^1** obligacji definiujemy następująco:

D^1 - oczekiwana okresowość obligacji w chwili $\tau = 1$, przy założeniu, że $r = const$, tj.

$$D^1 = D(\tau = 1) \stackrel{\Delta}{=} -\frac{\Delta P_1}{P_1}\,/\,\frac{\Delta r}{1+r}, \tag{2.20}$$

czyli, dla małych Δr, z (2.20) otrzymamy

$$D^1 = -\frac{\partial P_1}{\partial r}\frac{1+r}{P_1} \tag{2.21}$$

oraz z (2.19) i (2.21)

$$D^1 = \sum_{t=2}^{T} \frac{(t-1)C_t}{(1+r)^{t-1}} / P_1 . \tag{2.22}$$

Tak więc w chwili $\tau = 0$, przy założeniu, że stopa procentowa r nie ulegnie zmianie w ciągu pierwszego okresu odsetkowego, możemy oszacować wpływ zmiany tej stopy o Δr (w chwili $\tau = 1 + \varepsilon$) - na zmianę wartości P_1 obligacji; z definicji (2.20) mamy bowiem

$$\frac{\Delta P_1}{P_1} = -D^1 \frac{\Delta r}{1+r}. \tag{2.23}$$

* * *

Omówiony powyżej pokrótce parametr *bieżącej okresowości* D^0 obligacji ma zasadnicze znaczenie przy stosowaniu tzw. techniki immunizacji portfela obligacji ze względu na ryzyko stóp procentowych. Chodzi w tym przypadku o takie zaprojektowanie udziałów wartościowych poszczególnych obligacji (o różnych terminach wykupu) wchodzących w skład analizowanego portfela, aby wartość globalna tego portfela była jak najmniej wrażliwa na nieoczekiwane zmiany rynkowych stóp procentowych. Zagadnienie to jest obszernie omawiane w literaturze (por. *Bierwag* 1983, 1987, *Dahl* 1993); w tym - również w pracach autora *et.al.* (*Kulikowski, Bury, Jakubowski* 1995; *Jakubowski* 1997a).

Problematyka immunizacji portfela nie będzie dalej szerzej rozpatrywana. Natomiast naszą uwagę skupimy na zastosowaniu wprowadzonej powyżej koncepcji parametru *oczekiwanej okresowości* D^1 dla aktywnego zarządzania portfelem obligacji. W dalszej części pracy sformułujemy najpierw tzw. jednoindeksowy model dla rynku obligacji. Rozważania nasze rozpoczniemy od przypadku płaskiej krzywej dochodowości. Następnie, otrzymane wyniki uogólnimy na przypadek krzywej dochodowości o dowolnym kształcie. W tym celu, podamy pewne uogólnione definicje wprowadzonych w tym punkcie pojęć *okresowości* oraz *oczekiwanej okresowości* obligacji.

Zagadnienia te wiążą się już bezpośrednio z aktywnym zarządzaniem portfelem obligacji, co stanowić będzie zasadniczy przedmiot rozważań prowadzonych w następnych punktach niniejszej pracy.

3. Model jednoindeksowy dla rynku obligacji - przypadek płaskiej krzywej dochodowości

Prowadzone w dalszej części tego punktu rozważania poprzedzimy sformułowaniem następujących założeń oraz definicji.

Płaska krzywa dochodowości:

Warunek płaskiej krzywej dochodowości (*yield curve*), jaki przyjmiemy dla analizowanego rynku finansowego można formalnie zapisać następująco.

$$r_{0t} = const\,(t) = r\,; \quad \forall t = 1,\ldots,T, \tag{3.1}$$

gdzie r_{0t} - rynkowa stopa procentowa *spot* dla okresu $[0,t]$,

t - termin zapadalności zobowiązań; w przypadku obligacji zero-kuponowych termin ten jest nazywany okresem do wykupu (*term to maturity*).

Założymy również, że jedynymi możliwymi zmianami płaskiej krzywej dochodowości, jakie mogą nastąpić wraz z upływem czasu bieżącego $\tau = 0,1,2,3,\ldots$, są przesunięcia równoległe tej krzywej o tę samą wartość Δr w górę lub w dół. Zauważmy, że założenie to jest konieczne, ponieważ w przeciwnym przypadku początkowo płaska krzywa dochodowości (dla $\tau = 0$) przestawałaby być płaska dla przyszłych chwil τ. Mamy więc

$$\Delta r = \Delta r_t = const\,(t)\,; \quad \forall t = 1,\ldots,T \tag{3.2}$$

— nieoczekiwana zmiana płaskiej krzywej dochodowości o tę samą wartość.

Horyzont inwestycyjny:

Zagadnienie aktywnego zarządzania portfelem obligacji rozpatrywać będziemy przy założeniu, że horyzont inwestycyjny jest równy jednemu (najbliższemu) okresowi odsetkowemu. Z powyższego wynika więc, że analizując portfele inwestycyjne, rozpatrywać będziemy tylko te obligacje (o różnych terminach wykupu), których okresy odsetkowe pokrywają się ze sobą.

Ponadto przyjmiemy, że inwestycji w określone obligacje dokonujemy wyłącznie na początku danego okresu odsetkowego, tj. w chwilach

$$\tau = 0 + \varepsilon, \quad \tau = 1 + \varepsilon, \quad \tau = 2 + \varepsilon, \ldots,$$

gdzie $\varepsilon > 0$ - wartość dowolnie mała.

Powyższe oznacza, że rozpatrujemy tylko tzw. ceny „czyste” P_c obligacji (*clean price*); ceny te są bowiem równe cenom „brudnym” P_b (*dirty price*) tylko na początku kolejnych okresów odsetkowych. W ogólnym przypadku mamy bowiem

$$P_b = P_c + \frac{q}{d} C, \tag{3.3}$$

gdzie q - liczba dni, które upłynęły od początku danego okresu odsetkowego do dnia zakupu obligacji (*settlement date*),

d - czas trwania okresu odsetkowego (w dniach),

$\frac{q}{d} C$ - odsetki, które narosły od początku danego okresu odsetkowego do dnia zakupu obligacji (*accrued interest*).

Cena czysta P_c obligacji ustalana jest jako określona część wartości nominalnej N; cena ta może być wyrażana kwotowo lub procentowo.

Klasa analizowanych obligacji:

Prowadzone dalej rozważania dotyczyć będą *obligacji długoterminowych* o stałym oprocentowaniu. Chodzi w tym przypadku o to, że parametr okresowości obligacji D^0 jest silnie niestabilny z upływem czasu bieżącego. Okresowość D^0 maleje z czasem, przy czym spadek wartości D^0 jest tym silniejszy im krótszy jest okres do wykupu T (*term to maturity*) rozpatrywanej obligacji.

W najprostszym przypadku obligacji zero-kuponowych mamy: dla $T=15$, $D^0=15$; $T=14$, $D^0=14$; ... ; $T=2$, $D^0=2$; $T=1$, $D^0=1$.

Tak więc dla okresu do wykupu równego $T=15$ lat, po upływie 1 roku, procentowy spadek okresowości obligacji wynosi $\frac{\Delta D^0}{D^0} = \frac{14-15}{15} \times 100 = -6.7\%$.

Natomiast dla okresu do wykupu równego $T=3$ lata, po upływie 1 roku, mamy

$$\frac{\Delta D^0}{D^0} = \frac{2-3}{3} \times 100 = -33.3\%$$

oraz dla $T=2$ lata, po upływie 1 roku

$$\frac{\Delta D^0}{D^0} = \frac{1-2}{2} \times 100 = -50.0\%.$$

Powyższe wnioski pozostają również aktualne w przypadku obligacji o niezerowym kuponie (tj. $C_t \neq 0$), w którym spadek okresowości D^0 obligacji wraz z upływem czasu bieżącego τ ma charakter nieliniowy; *Bierwag* (1987), *Francis* (1991).

Rosnąca niestabilność parametru okresowości D^0 analizowanych obligacji - wraz z upływem czasu bieżącego - staje się źródłem określonej niestabilności parametrów modelu zarządzania portfelowego rozpatrywanego w dalszej części pracy. Z tego też powodu prowadzone rozważania dotyczyć będą obligacji długoterminowych O_i o okresowościach

$$D_i^o >> 1; \qquad \forall\, i = 1,\dots,n. \tag{3.4}$$

Dla tego typu obligacji, procentowa zmiana (tj. spadek) okresowości D_i^o po upływie jednego okresu odsetkowego nie będzie zbyt duża, co pokazaliśmy na przedstawionym powyżej przykładzie.

Rynek zrównoważony, rynek niezrównoważony:

Oznaczymy

P_r - cena rynkowa obligacji, P_0 - wartość bieżąca obligacji.

Wartość bieżąca obligacji, określona w punkcie 2 wzorem (2.15) jest pewną wartością teoretyczną, wynikającą ze zdyskontowania na chwilę bieżącą wszystkich przyszłych strumieni finansowych C_t $(t = 1,\dots,T)$, wynikających z faktu posiadania danej obligacji. Wartość ta jest często nazywana wartością wewnętrzną obligacji (*bond intrinsic value*).

O *rynku zrównoważonym* mówimy, gdy dla każdej obligacji O_i zachodzi

$$P_r^i = P_0^i, \qquad \forall\, i = 1,\dots,n, \tag{3.5}$$

gdzie n - ogólna liczba rozpatrywanych obligacji.

W przeciwnym przypadku - mówimy, że *rynek jest niezrównoważony*.

Oczywiście o zrównoważeniu lub niezrównoważeniu rynku możemy mówić również tylko w odniesieniu do danej obligacji O_i. Niezrównoważenie rynku danej obligacji wyrażające się różnicą ceny rynkowej P_r tej obligacji od jej wartości wewnętrznej P_0, wynikać może np. z określonych działań spekulacyjnych.

W teorii finansów dowodzi się, że w dłuższym okresie ceny rynkowe P_r obligacji są zbieżne do ich wartości wewnętrznych P_0. W dalszej części pracy założymy, że owo niezrównoważenie rynku danej obligacji trwa tylko jeden okres odsetkowy. Oznacza to, że nawet gdy w chwili $\tau = 0$ dla danej obligacji zachodzi

$$P_r(\tau = 0) \neq P_0(\tau = 0), \tag{3.6}$$

to już po upływie jednego okresu odsetkowego, mamy

$$P_r(\tau = 1) = P_0(\tau = 1). \tag{3.7}$$

Powyższe założenie, jakkolwiek nieco upraszczające - jest powszechnie przyjmowane w literaturze przedmiotu; por. *Elton, Gruber* (1995). Ma ono również zasadnicze znaczenie z punktu widzenia rozważań, prowadzonych w dalszej części tej pracy.

Oczywiście stan ogólnego zrównoważenia rynku jest pewnym stanem „idealnym", który w praktyce nigdy nie ma miejsca. Jednak w przypadku tzw. rynków efektywnych, rynki te są zbieżne do stanu równowagi, który może być w powyższym sensie traktowany jako pewien stan graniczny. Owa zbieżność do stanu równowagi rynkowej wynika z występujących powszechnie transakcji arbitrażowych charakteryzujących rynki efektywne. Mówi się w tym przypadku o obowiązywaniu tzw. prawa jednej ceny (*the law of one price*).

3.1. Spodziewana stopa zwrotu oraz rzeczywista stopa zwrotu

Wyprowadzimy teraz podstawowe wzory wyrażające spodziewaną oraz rzeczywistą stopę zwrotu z inwestycji w obligacje, przy wprowadzonym wcześniej założeniu, że analizowany horyzont inwestycyjny jest równy jednemu okresowi odsetkowemu. Owe stopy zwrotu nazywane są w literaturze stopami zwrotu „z okresu na okres" (*period-by-period return*). Rozważania nasze rozpoczniemy od założenia, że analizowany rynek kapitałowy jest w równowadze, a następnie - uogólnimy uzyskane wyniki na przypadek rynku niezrównoważonego.

3.1.1. Rynek zrównoważony ($P_r = P_0$)

Pomijając dla uproszczenia zapisu indeks i obligacji O_i, wprowadzimy następujące oznaczenia

P_0 - wartość bieżąca obligacji w chwili $\tau = 0$,

P_1 - wartość bieżąca obligacji w chwili $\tau = 1$ przy założeniu, że rynkowa stopa procentowa r nie zmieniła się; $r = const$,

P_1^* - wartość bieżąca obligacji w chwili $\tau = 1$ przy założeniu, że stopa procentowa r zmieniła się (w chwili $\tau = 1 + \varepsilon$) o Δr, tj. $r^* = r + \Delta r$,

R^a - spodziewana stopa zwrotu (*anticipated return*) za jeden okres dla $r = const$,

R^* - rzeczywista stopa zwrotu (*realized return*) za jeden okres dla $r^* = r + \Delta r$.

Wzory na spodziewaną oraz rzeczywistą stopę zwrotu są następujące

$$R^a = \frac{C + P_1 - P_0}{P_0}, \quad \text{oraz} \tag{3.8}$$

$$R^* = \frac{C + P_1^* - P_0}{P_0}, \tag{3.9}$$

gdzie C - odsetki wypłacane za dany okres.

Zależności (3.8), (3.9) obowiązują dla okresów poprzedzających ostatni okres odsetkowy; natomiast dla okresu ostatniego mamy

$$R^a = R^* = \frac{C + N - P_0}{P_0}, \tag{3.10}$$

gdzie N - wartość nominalna obligacji.

Z zależności (3.10) wynika bezpośrednio, że w przypadku obligacji kupionej na początku ostatniego okresu odsetkowego (tj. dla $\tau = T - 1$) nie występuje ryzyko stopy procentowej. Obligacja ta może być bowiem traktowana jako obligacja czysto-dyskontowa o „wartości nominalnej" równej $(C + N)$, która jest przetrzymywana do terminu wykupu. Przypadek ten, charakteryzujący się równością spodziewanej (R^a) i rzeczywistej (R^*) stopy zwrotu, pominiemy w dalszych rozważaniach - jako przypadek trywialny.

Ponadto zauważmy, że w myśl wprowadzonych w punkcie 2 wzorów (2.15) i (2.19) na bieżącą wartość wewnętrzną P_0 i P_1, wartości te są funkcjami stóp procentowych, tj.

$$P_0 = P_0(r); \quad P_1 = P_1(r) \quad \text{oraz} \quad P_1^* = P_1(r^*). \tag{3.11}$$

A zatem, ze wzorów (3.8) i (3.9) bezpośrednio wynika, że zachodzi również

$$R^a = R^a(r) \quad \text{oraz} \quad R^* = R^*(r^*) = R^*(r + \Delta r). \tag{3.12}$$

Tak więc już na początku prowadzonych dalej rozważań możemy zauważyć, że dla danej stopu procentowej r, *spodziewana stopa zwrotu* R^a jest zmienną deterministyczną, którą możemy efektywnie obliczyć.

Natomiast, gdy nieoczekiwaną zmianę stopy zwrotu Δr traktować jako zmienną losową, to rzeczywista stopa zwrotu R^* z obligacji jest również zmienną losową. Wartości tej nie możemy więc a priori, tj. „deterministycznie" - wyznaczyć. Powyższe uwagi dotyczyć będą również przypadku - analizowanego w dalszej części tego punktu - rynku niezrównoważonego.

Spodziewana stopa zwrotu R^a

Dla spodziewanej stopy zwrotu R^a udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.1

W przypadku rynku zrównoważonego oraz płaskiej krzywej dochodowości, spodziewane stopy zwrotu R_i^a wszystkich występujących na tym rynku obligacji o stałym oprocentowaniu (w tym obligacji czysto-dyskontowych) są sobie równe. Stopy te są równe obowiązującej dla danego rynku stopie procentowej r, tj.

$$R_i^a = R^a = r\,; \quad \forall i = 1,\dots,n\,, \tag{3.13}$$

gdzie n - liczba obligacji występujących na danym rynku.

Dowód: Dla danej obligacji O_i mamy (indeks i - pomijamy)

$$P_0 \stackrel{\Delta}{=} \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C_T}{(1+r)^T}, \tag{3.14}$$

oraz

$$P_1 \stackrel{\Delta}{=} \frac{C_2}{1+r} + \frac{C_3}{(1+r)^2} + \dots + \frac{C_T}{(1+r)^{T-1}}, \tag{3.15}$$

gdzie $C_t = C$ $(t = 1,\dots,T-1)$ oraz $C_T = C + N$.

A zatem, mnożąc równanie (3.14) przez $(1+r)$ otrzymamy

$$P_0(1+r) = C_1 + \left[\frac{C_2}{1+r} + \dots + \frac{C_T}{(1+r)^{T-1}}\right] = C_1 + P_1. \tag{3.16}$$

Czyli z (3.8) i (3.16)

$$R^a \stackrel{\Delta}{=} \frac{C_1 + P_1 - P_0}{P_0} = \frac{P_0(1+r) - P_0}{P_0} = r\,. \tag{3.17}$$

Wartość rynkowej stopy procentowej r nie zależy oczywiście od indeksu i obligacji O_i; tak więc równość (3.13) zachodzi dla wszystkich obligacji.

c.n.d.

Udowodnione powyżej twierdzenie o równości spodziewanych stóp zwrotu jest również prawdziwe dla dowolnych okresów inwestycyjnych, będących wielokrotnością jednego okresu odsetkowego. Mamy bowiem

Twierdzenie 3.2

W przypadku rynku zrównoważonego oraz płaskiej krzywej dochodowości, spodziewane stopy zwrotu za ten sam okres inwestycyjny wszystkich występujących na tym rynku obligacji o stałym oprocentowaniu (w tym obligacji czysto-dyskontowych) są sobie równe. Stopy te są równe wartości:

$(1+r)^K - 1$;

gdzie K - okres inwestycyjny, r - rynkowa stopa procentowa.

Dowód: Oznaczymy $R_i^a(K)$ - spodziewana stopa zwrotu i-tej obligacji za okres K.

Z zasady procentu składanego, mamy

$$R_i^a(K) = (1+R_i^a)^K - 1, \qquad \forall i = 1,\ldots,n \tag{3.18}$$

oraz - z Twierdzenia 3.1,

$$R_i^a = r, \qquad \forall i = 1,\ldots,n. \tag{3.19}$$

A zatem $R_i^a(K) = (1+r)^K - 1, \qquad \forall i = 1,\ldots,n.$ (3.20)

c.n.d.

Można również wykazać z łatwością następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.3

W przypadku rynku zrównoważonego oraz płaskiej krzywej dochodowości, rentowności do wykupu YTM_i wszystkich występujących na danym rynku obligacji o stałym oprocentowaniu (w tym obligacji czysto-dyskontowych) są sobie równe. Rentowności te są równe obowiązującej dla danego rynku stopie procentowej r, tj.

$$YTM_i = r; \quad \forall i = 1,\ldots,n. \tag{3.21}$$

Dowód: Powyższe twierdzenie można by wykazać korzystając z Twierdzenia 3.2. Poniżej zastosujemy jednak bezpośrednio dowód „nie wprost".

Załóżmy, że dla i-tej obligacji zachodzi $YTM_i \neq r$ oraz oznaczmy przez P_r^i - cenę rynkową tej obligacji.

Z definicji rentowności do wykupu YTM_i (*yield-to-maturity*) mamy

$$P_r^i = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t^i}{(1+YTM_i)^t}. \tag{3.22}$$

Natomiast z definicji wartości bieżącej tej obligacji

$$P_0^i = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t^i}{(1+r)^t}, \tag{3.23}$$

gdzie r - rynkowa stopa procentowa.

Zauważmy teraz, że dla $r \neq YTM_i$ ze wzorów (3.22), (3.23) wynika, że $P_r^i \neq P_0^i$ co jest sprzeczne z założeniem, że rynek jest zrównoważony.

c.n.d.

Wyprowadzimy teraz zależność funkcyjną pomiędzy parametrem *oczekiwanej okresowości* D^1 a parametrem *bieżącej okresowości* D^0. W tym celu wykorzystamy wyprowadzone w punkcie 2 równania (2.17) i (2.22) umożliwiające wyznaczenie wartości tych parametrów.

Lemat 3.1

Zależność funkcyjna pomiędzy parametrem oczekiwanej okresowości D^1 a parametrem bieżącej okresowości D^0 obligacji wyraża się wzorem:

$$D^1 = (D^0 - 1)(1+r)\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{-1}, \tag{3.24}$$

gdzie r - rynkowa stopa procentowa, P_0 - wartość bieżąca obligacji w chwili $\tau = 0$, P_1 - wartość bieżąca obligacji w chwili $\tau = 1$, wyznaczona przy założeniu, że stopa procentowa r nie uległa zmianie; oraz z założenia (3.4), $D^0 > 1$.

Dowód: Biorąc pod uwagę wzory (2.17) i (2.22) mamy

$$D^0 \overset{\Delta}{=} \sum_{t=1}^{T} \frac{tC_t}{(1+r)^t} / P_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{tC_t}{(1+r)^t} / P_0 - \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t} / P_0 + 1 =$$

$$= \sum_{t=1}^{T} \frac{tC_t}{(1+r)^t} / P_0 - \frac{C_1}{(1+r)} / P_0 - \sum_{t=2}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t} / P_0 + 1 =$$

$$= \sum_{t=2}^{T} \frac{tC_t}{(1+r)^t} / P_0 - \sum_{t=2}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t} / P_0 + 1 =$$

$$= \sum_{t=2}^{T} \frac{(t-1)C_t}{(1+r)^t} / P_0 + 1 = \left[\sum_{t=2}^{T} \frac{(t-1)C_t}{(1+r)^{t-1}} / P_0\right] \frac{1}{1+r} + 1 =$$

$$= \left[\sum_{t=2}^{T} \frac{(t-1)C_t}{(1+r)^{t-1}} / P_1\right]\left(\frac{P_1}{P_0}\right) \frac{1}{1+r} + 1 = D^1 \left(\frac{P_1}{P_0}\right) \frac{1}{1+r} + 1.$$

A zatem,

$$D^1 = (D^0 - 1)(1+r)\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{-1}$$

c.n.d.

Wzór (3.24) możemy również przekształcić do następującej postaci:

Lemat 3.2

Zależność funkcyjna pomiędzy parametrem oczekiwanej okresowości D^1 a parametrem bieżącej okresowości D^0 obligacji wyraża się wzorem:

$$D^1 = (D^0 - 1)\frac{1+r}{1+(r-CY_0)}, \tag{3.25}$$

gdzie r - rynkowa stopa procentowa, oraz

$CY_0 \stackrel{\Delta}{=} \frac{C}{P_0}$ - oprocentowanie bieżące obligacji (*current yield*), wyznaczone dla rynku zrównoważonego (tj. dla $P_r = P_0$);

przy czym zakładamy, że $CY_0 < 1+r$ oraz $D^0 > 1$; por. (3.4).

Dowód: Przyjęte w sformułowaniu Lematu 3.2 założenie $CY_0 < 1+r$ jest w praktyce zawsze spełnione. Trudno bowiem wyobrazić sobie sytuację, w której oprocentowanie bieżące odsetek CY_0 obligacji przekracza o 100 punktów procentowych rynkową stopę procentową r.

Biorąc pod uwagę wzór (3.8) określający *spodziewaną stopę zwrotu* r obligacji (na rynku zrównoważonym), tj.

$$R^a = \frac{C+P_1-P_0}{P_0}, \text{ mamy}$$

$$1 + R^a - CY_0 \stackrel{\Delta}{=} 1 + \frac{C+P_1-P_0}{P_0} - \frac{C}{P_0} = \frac{P_1}{P_0}. \tag{3.26}$$

Wykorzystując dodatkowo Twierdzenie 3.1, na mocy którego dla dowolnej obligacji O_i zachodzi

$$R_i^a = R^a = r; \quad \forall i = 1,\dots,n, \tag{3.27}$$

z (3.26), (3.27) otrzymamy

$$\frac{P_1}{P_0} = 1 + r - CY_0. \tag{3.28}$$

Uwzględniając teraz Lemat 3.1, z (3.24) i (3.28) mamy

$$D^1 = (D^0 - 1)(1+r)\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{-1} = (D^0 - 1)\,\frac{1+r}{1+(r-CY_0)}.$$

c.n.d.

Z Lematu 3.2 wynika bezpośrednio następujący wniosek.

Wniosek 3.1

W przypadku, gdy dla danej obligacji oprocentowanie bieżące odsetek CY_0 jest równe rynkowej stopie procentowej r, tj. $CY_0 = r$, mamy

$$D^1 = (D^0 - 1)(1+r). \tag{3.29}$$

Rzeczywista stopa zwrotu R_i^* :

Wyprowadzimy teraz wzór na rzeczywistą stopę zwrotu R_i^* z inwestycji w obligacje O_i przy horyzoncie czasowym równym jednemu okresowi odsetkowemu; indeks i - dla uproszczenia zapisu - początkowo pominiemy. W rozważaniach, wykorzystamy koncepcję *oczekiwanej okresowości* D^1 obligacji.

Oznaczmy

$\Delta R = R^* - R^a$ - nieoczekiwana zmiana stopy zwrotu wywołana zmianą stopy procentowej r o wartość Δr.

Wartość ΔR będziemy nazywali krótko nieoczekiwaną stopą zwrotu (*excess return*); por. *Elton, Gruber* (1995), *Bierwag* (1987).

Ze wzorów (3.8) i (3.9) mamy

$$\Delta R = R^* - R^a = \frac{C + P_1^* - P_0}{P_0} - \frac{C + P_1 - P_0}{P_0} = \frac{P_1^* - P_1}{P_0} = \frac{P_1^* - P_1}{P_1}\,\frac{P_1}{P_0}. \tag{3.30}$$

Biorąc pod uwagę definicję (2.20) oczekiwanej okresowości D^1 obligacji otrzymamy

$$\frac{P_1^* - P_1}{P_1} = -D^1\,\frac{\Delta r}{1+r}. \tag{3.31}$$

A zatem, z (3.30) i (3.31)

$$R^* - R^a = -D^1\,\frac{\Delta r}{1+r}\,\frac{P_1}{P_0}, \tag{3.32}$$

czyli $R^* = R^a - \left(D^1 \frac{P_1}{P_0} \frac{1}{1+r} \right) \Delta r .$ (3.33)

Ponadto, po przekształceniu wzoru (3.24) z Lematu 3.1, otrzymamy

$$D^1 \frac{P_1}{P_0} \frac{1}{1+r} = D^0 - 1 , \tag{3.34}$$

gdzie $D^0 > 1$ na mocy założenia (3.4).

A zatem, z (3.33) i (3.34) mamy

$$R^* = R^a - (D^0 - 1)\Delta r . \tag{3.35}$$

Korzystając teraz z Twierdzenia 3.1, mamy $R^a = r$ dla dowolnej obligacji. Uwzględniając to we wzorze (3.35), otrzymamy ostatecznie

$$R^* = r - (D^0 - 1)\Delta r ; \tag{3.36}$$

oraz dla dowolnej obligacji O_i,

$$R_i^* = r - (D_i^0 - 1)\Delta r . \tag{3.37}$$

Pewną odmianę wzoru (3.37), na rzeczywistą stopę zwrotu R_i^* z obligacji, przy założeniu, że rynek jest zrównoważony – można znaleźć w pracy *Babcocka* (1984); por. również *Haugen* (1993), str. 411. Wzór ten uogólnimy teraz na przypadek, gdy cena rynkowa P_r^i danej obligacji nie jest równa jej bieżącej wartości wewnętrznej P_0^i, co jest charakterystyczne dla rynku niezrównoważonego.

3.1.2. Rynek niezrównoważony ($P_r \neq P_0$)

Pomijając chwilowo indeks i obligacji O_i, wprowadzimy następujące oznaczenia:

P_r - cena rynkowa obligacji w chwili $\tau = 0$,

P_0 - wartość bieżąca obligacji w chwili $\tau = 0$,

P_1 - wartość bieżąca obligacji w chwili $\tau = 1$, dla $r = const$,

P_1^* - wartość bieżąca obligacji w chwili $\tau = 1$, dla $r^* = r + \Delta r$,

R_r^a - spodziewana stopa zwrotu (*anticipated return*) za jeden okres, przy założeniu $r = const$,

R_r^* - rzeczywista stopa zwrotu (*realized return*) za jeden okres, przy założeniu $r^* = r + \Delta r$.

Uwzględniając sformułowane na początku tego punktu założenie (3.6), (3.7), że cena rynkowa P_r obligacji (w chwili $\tau = 0$) jest zbieżna - po upływie jednego okresu odsetkowego - do wartości wewnętrznej P_1 (dla $r = const$) lub P_1^* (dla $r^* = r + \Delta r$), otrzymamy

$$R_r^a = \frac{C + P_1 - P_r}{P_r}, \quad \text{oraz} \tag{3.38}$$

$$R_r^* = \frac{C + P_1^* - P_r}{P_r}. \tag{3.39}$$

W przedstawionym powyżej wzorze (3.38), wartości P_1 oraz R_r^a są zmiennymi deterministycznymi i można je (podobnie jak dla rynku zrównoważonego) efektywnie obliczyć dla każdej z rozpatrywanych obligacji. Zakładamy przy tym, że cena rynkowa P_r obligacji jest dla $\tau = 0$ zadana deterministycznie; jest to po prostu cena wzięta z tablicy notowań giełdowych.

Natomiast występujące we wzorze (3.39) wartości P_1^* oraz R_r^* są - dla losowej zmiany Δr stopy procentowej - zmiennymi losowymi.

Spodziewana stopa zwrotu R_r^a:

W celu obliczenia spodziewanej stopy zwrotu dla przypadku rynku niezrównoważonego dokonamy następującego przekształcenia równania (3.38):

$$\begin{aligned} R_r^a &\stackrel{\Delta}{=} \frac{C + P_1 - P_r}{P_r} = \frac{C + P_1 - P_0 + P_0 - P_r}{P_r} = \frac{C + P_1 - P_0}{P_r} + \frac{P_0 - P_r}{P_r} = \\ &= \frac{C + P_1 - P_0}{P_0}\frac{P_0}{P_r} + \frac{P_0 - P_r}{P_r} = R^a \frac{P_0}{P_r} + \frac{P_0 - P_r}{P_r}, \end{aligned} \tag{3.40}$$

gdzie R^a - spodziewana stopa zwrotu dla rynku zrównoważonego.

Wprowadzimy teraz oznaczenie:

$$\rho = \frac{P_0 - P_r}{P_r} \tag{3.41}$$

— stopa zwrotu wynikająca z nierównowagowej wyceny przez rynek bieżącej wartości wewnętrznej P_0 danej obligacji (tzw. *mispricing effect*).

Z (3.40) i (3.41) mamy zatem

$$R_r^a = R^a(1+\rho) + \rho = R^a + (1 + R^a)\rho .$$

Wykorzystamy teraz Twierdzenie 3.1, na mocy którego dla dowolnej obligacji zachodzi $R^a = r$; gdzie r - rynkowa stopa procentowa.

A więc, $\quad R_r^a = r + (1+r)\rho$. $\qquad$ (3.42)

Otrzymaliśmy zatem, że dla dowolnej obligacji O_i rozpatrywanej na rynku niezrównoważonym zachodzi

$$(R_r^a)_i = r + (1+r)\rho_i\,, \qquad \forall\, i = 1,\ldots,n\,, \tag{3.43}$$

gdzie $\quad \rho_i = \dfrac{P_0^i - P_r^i}{P_r^i}\,; \qquad i = 1,\ldots,n\,.$

Wzór (3.43) interpretujemy następująco:

Na rynku niezrównoważonym, spodziewana stopa zwrotu z danej obligacji, za jeden okres odsetkowy, jest równa sumie rynkowej stopy procentowej r (za ten okres) oraz zdyskontowanej na chwilę $\tau = 1$ nierównowagowej stopy zwrotu ρ_i. Dla $\rho_i = 0$ $(i = 1,\ldots,n)$ zachodzi

$(R_r^a)_i = r = R_i^a = const(i)\,; \quad \forall\, i = 1,\ldots,n\,,$

co wynika bezpośrednio z równania (3.43).

Natomiast dla $\rho_i \neq 0$ $(i = 1,\ldots,n)$, spodziewane stopy zwrotu $(R_r^a)_i$ z inwestycji w obligacje O_i - będą oczywiście różne.

Rzeczywista stopa zwrotu R_r^*:

Wprowadzamy oznaczenie (indeks i obligacji chwilowo pomijamy)

$\Delta R_r = R_r^* - R_r^a$

– nieoczekiwana zmiana stopy zwrotu (*excess return*) dla rynku niezrównoważonego, wynikająca ze zmiany stopy procentowej r o losową wartość Δr.

Dalej, obliczenia przebiegają podobnie jak dla rynku zrównoważonego; mamy zatem:

ze wzorów (3.38) i (3.39)

$$\Delta R_r = R_r^* - R_r^a = \frac{C + P_1^* - P_r}{P_r} - \frac{C + P_1 - P_r}{P_r} = \frac{P_1^* - P_1}{P_r} = \frac{P_1^* - P_1}{P_1}\frac{P_1}{P_r}\,. \tag{3.44}$$

Z definicji (2.20) oczekiwanej okresowości D^1 obligacji zachodzi

$$\frac{P_1^* - P_1}{P_1} = -D^1\frac{\Delta r}{1+r}\,. \tag{3.45}$$

Ponadto, uwzględniając wzór (3.41) na nierównowagową stopę zwrotu ρ, mamy

$$\frac{P_1}{P_r} = \frac{P_1}{P_0}\frac{P_0}{P_r} = \frac{P_1}{P_0}(1+\rho). \tag{3.46}$$

A zatem, z (3.44)-(3.46)

$$R_r^* - R_r^a = -D^1 \frac{\Delta r}{1+r}\left(\frac{P_1}{P_0}\right)(1+\rho),$$

czyli $$R_r^* = R_r^a - \left(D^1 \frac{P_1}{P_0}\frac{1}{1+r}\right)(1+\rho)\Delta r. \tag{3.47}$$

Dokonując teraz przekształcenia wzoru (3.24) z Lematu 3.1, otrzymamy

$$D^1 \frac{P_1}{P_0}\frac{1}{1+r} = D^0 - 1. \tag{3.48}$$

A zatem, z (3.47), (3.48)

$$R_r^* = R_r^a - (D^0 - 1)(1+\rho)\Delta r. \tag{3.49}$$

Uwzględniając teraz wzór (3.42) na spodziewaną stopę zwrotu R_r^a, otrzymamy

$$R_r^* = [r + (1+r)\rho] - (D^0 - 1)(1+\rho)\Delta r. \tag{3.50}$$

Biorąc pod uwagę indeks i obligacji O_i, mamy ostatecznie

$$(R_r^*)_i = [r + (1+r)\rho_i] - (D_i^0 - 1)(1+\rho_i)\Delta r. \tag{3.51}$$

Wyprowadzony powyżej wzór na rzeczywistą stopę zwrotu z obligacji O_i, rozpatrywanej na rynku niezrównoważonym, ma zasadnicze znaczenie dla analizowanej w dalszej części pracy teorii. Zauważmy, że dla $\rho_i = 1$ - zależność (3.51) przybiera identyczną postać jak wzór (3.37) wyprowadzony dla przypadku rynku zrównoważonego, tj. dla $P_r^i = P_0^i$.

Dyskusja otrzymanego wyniku:

Wzór (3.51) zapiszemy w następującej postaci

$$(R_r^*)_i = R_i^a - B_i\,\Delta r, \tag{3.52}$$

gdzie

$R_i^a = r + (1+r)\rho_i$ - spodziewana stopa zwrotu, (3.53)

$B_i = (D_i^0 - 1)(1+\rho_i)$ - zmodyfikowany parametr okresowości. (3.54)

A zatem

$$(\Delta R_r)_i \stackrel{\Delta}{=} (R_r^*)_i - R_i^a = - B_i \; \Delta r \, . \tag{3.55}$$

Wynika stąd, że nieoczekiwana zmiana $(\Delta R_r)_i$ stopy zwrotu z inwestycji w obligację O_i, tj. odchylenie rzeczywistej stopy zwrotu od spodziewanej stopy zwrotu, jest proporcjonalna (ze znakiem minus) do zmiany Δr rynkowej stopy procentowej. Współczynnikiem proporcjonalności jest parametr B_i dany wzorem (3.54), który nazwaliśmy *zmodyfikowaną okresowością* obligacji O_i.

Zauważmy, że równanie (3.55) jest pewnym analogiem równania (2.18) z punktu 2, wynikającego z klasycznej definicji okresowości obligacji. W równaniu (3.55) chodzi jednak nie o wrażliwość wartości bieżącej P_0 obligacji na zmiany Δr stopy procentowej, a o wrażliwość rzeczywistej stopy zwrotu z inwestycji w daną obligację O_i. Należałoby w tym miejscu przypomnieć, że horyzont czasowy analizowanej inwestycji jest równy (z założenia) jednemu okresowi odsetkowemu obligacji O_i.

Wyprowadzone powyżej równanie (3.52) na rzeczywistą stopę zwrotu z obligacji może być wykorzystane dla celów dalszych badań w różny sposób:

(i) Dla danych wartości r, P_0^i, P_r^i, D_i^0 oraz zadawanych skokowo zmian Δr możemy rozpatrywać różne wartości rzeczywistej stopy zwrotu $(R_r^*)_i$, a tym samym - analizować różne scenariusze sytuacyjne dotyczące aktywnego zarządzania portfelem obligacji. Taka analiza różnych wariantów jest często niezwykle pomocna w rzeczywistych przypadkach dotyczących inwestowania na rynku obligacji. Przykład analizy różnych scenariuszy zmian rynkowych stóp procentowych - stosowanej dla aktywnego zarządzania inwestycjami w obligacje - zawiera m.in. praca *Fabozziego* (1995).

(ii) W najnowszych pracach dotyczących ***teorii struktury terminowej stóp procentowych*** wykorzystuje się często modele stochastyczne dynamiki zmian Δr tych stóp. Jednym z takich opracowań jest model *CIR* - *Coxa, Ingersolla, Rossa* (1981) - w którym, dla opisu małych zmian dr stopy procentowej rozpatruje się pewien szczególny przypadek stochastycznego równania różniczkowego *Ito*, a mianowicie ***równanie dyfuzji***. Model *CIR* mógłby więc być bezpośrednio powiązany z równaniem (3.52), w celu modelowania dynamiki zmian w czasie - rzeczywistej stopy zwrotu w obligacje. W szczególności, można by w tym przypadku wykorzystać wersję dyskretną tego modelu, prowadzącą do stochastycznego równania różnicowego na zmianę Δr stopy procentowej; por. *Fabozzi, Fong* (1994).

(iii) Wzór (3.52) może być bezpośrednio wykorzystany do opracowania tzw. *modelu jednoindeksowego obligacji*, co prowadzi do sformułowania zagadnienia Markowitza zarządzania portfelowego - dla tego przypadku. Zagadnienie to rozwiniemy szerzej w następnych punktach niniejszej pracy.

Przedstawimy teraz następujący przykład obliczeniowy.

PRZYKŁAD 3.1

Bierzemy pod uwagę obligację o następujących parametrach $C=8$ zł, $N=100$ zł, $T=3$ lata. Załóżymy, że struktura terminowa stóp procentowych jest dla analizowanego rynku płaska, przy czym zachodzi

$$r_{01}=r_{02}=r_{03}=r=10\%.$$

W zależności od relacji pomiędzy ceną rynkową P_r obligacji, a jej wartością wewnętrzną P_0, wyróżnimy dwa przypadki.

1° ***Rynek zrównoważony*** $(P_r=P_0)$:

Dla chwil $\tau=0$ i $\tau=1$ wyznaczymy bieżące wartości wewnętrzne P_0, P_1 oraz parametry okresowości D^0 i D^1 obligacji.

Dla $\tau=0$ mamy

$$P_0=\sum_{t=1}^{T}\frac{C_t}{(1+r)^t}=\frac{8}{1.10}+\frac{8}{(1.10)^2}+\frac{108}{(1.10)^3}=95.02 \text{ zł.}$$

$$D^0=\sum_{t=1}^{T}\frac{tC_t}{(1+r)^t}/P_0=$$
$$=\left[1\times\frac{8}{(1.10)}+2\times\frac{8}{(1.10)^2}+3\times\frac{108}{(1.10)^3}\right]/95.02=$$
$$=1\times0.0765+2\times0.0696+3\times0.8539=2.7774 \text{ lat.}$$

Dla $\tau=1$ mamy

$$P_1=\sum_{t=2}^{T}\frac{C_t}{(1+r)^{t-1}}=\frac{8}{1.10}+\frac{108}{(1.10)^2}=96.53 \text{ zł.}$$

$$D^1=\sum_{t=2}^{T}\frac{(t-1)C_t}{(1+r)^{t-1}}/P_1=$$
$$=\left[1\times\frac{8}{1.10}+2\times\frac{108}{(1.10)^2}\right]/96.53=$$
$$=1\times0.0753+2\times0.9247=1.9247 \text{ lat.}$$

Zauważmy, że zgodnie z teorią przedstawioną w punkcie 2 otrzymaliśmy

$$D^1=1.9247<D^0=2.7774<T=3.$$

Wyznaczoną powyżej (z definicji 2.22) wartość oczekiwanej okresowości D^1 obligacji możemy również obliczyć wykorzystując Lemat 3.1 lub Lemat 3.2.

Ze wzoru (3.24) z Lematu 3.1, mamy

$$D^1 = (D^0 - 1)(1+r)\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{-1} =$$

$$= (2.7774 - 1) \times (1 + 0.10) \times \left(\frac{96.53}{95.02}\right)^{-1} = 1.9247 \text{ lat.}$$

Natomiast aby wykorzystać Lemat 3.2 musimy najpierw wyznaczyć oprocentowanie bieżące odsetek CY_0 obligacji, tj.

$$CY_0 = \frac{C}{P_0} = \frac{8}{95.02} = 0.0842 = 8.42\%.$$

Ze wzoru (3.25) z Lematu 3.2, mamy zatem

$$D^1 = (D^0 - 1)\frac{1+r}{1+(r - CY_0)} =$$

$$= (2.7774 - 1)\frac{1+0.10}{1+(0.10 - 0.0842)} = 1.9247 \text{ lat.}$$

Zauważmy że, nawet przy założeniu stałej stopy procentowej $r = 10\% = const$ wartość bieżąca obligacji uległa zmianie; różnica ta wynosi

$$P_1 - P_0 = 96.53 - 95.02 = 1.51 \text{ zł.}$$

Owa zmiana wartości obligacji o 1.51 zł wynika bezpośrednio „z upływu czasu bieżącego". A mianowicie, obligacja rozpatrywana w chwili $\tau = 0$ jako obligacja 3-letnia, staje się po upływie jednego okresu odsetkowego (tj. dla $\tau = 1$) – obligacją 2-letnią o wartości wewnętrznej $P_1 = 96.53$ zł.

Spodziewana stopa zwrotu (za pierwszy okres odsetkowy) jest więc równa

$$R^a \stackrel{\Delta}{=} \frac{C + P_1 - P_0}{P_0} = \frac{C}{P_0} + \frac{P_1 - P_0}{P_0} = \frac{8}{95.02} + \frac{1.51}{95.02} =$$

$$= 0.0842 + 0.0158 = 8.42\% + 1.58\% = 10\%.$$

Zauważmy, że spodziewana stopa zwrotu R^a jest równa w tym przypadku (tj. dla $P_r = P_0$) sumie bieżącego oprocentowania odsetek $CY_0 = 8.42\%$ (*current yield*) oraz względnego przyrostu wartości obligacji $\Delta P / P_0 = 1.58\%$ (*capital gains*). Co więcej, wartości R^a nie musieliśmy w ogóle obliczać, bowiem z Twierdzenia 3.1 (por. wzór 3.13) bezpośrednio wynika, że powinno być $R_a = r = 10\%$, co znalazło potwierdzenie w powyższym przykładzie.

Załóżmy teraz, że w chwili $\tau = 1+\varepsilon$ rynkowa stopa procentowa spadła o wartość $\Delta r = -1\%$, czyli

$$r^* = r + \Delta r = 10\% - 1\% = 9\% = 0.09.$$

Mamy wówczas

$$P_1^* = \frac{8}{1.09} + \frac{108}{(1.09)^2} = 98.24 \text{ zł}; \quad \text{oraz } P_1^* - P_0 = 3.22 \text{ zł}.$$

Obliczymy rzeczywistą stopę zwrotu R^* dwukrotnie, tj. bezpośrednio z definicji oraz na podstawie modelu (3.50).

Z definicji, mamy

$$R^* = \frac{C + P_1^* - P_0}{P_0} = \frac{8 + 3.22}{95.02} = 8.42\% + 3.39\% = 11.81\%.$$

Natomiast z modelu (3.50), dla $\rho = 0$, otrzymamy

$$\tilde{R}^* = r - (D^0 - 1)\Delta r,$$

gdzie $r = 0.10$, $D^0 = 2.7774$, $\Delta r = -0.01$.

A zatem,

$$\tilde{R}^* = 0.10 - (2.7774 - 1)(-0.01) = 0.1178 = 11.78\%.$$

Otrzymaliśmy więc bardzo dobrą aproksymację rzeczywistej stopy zwrotu; różnica wyniosła $\tilde{R}^* - R^* = -0.03\%$ co daje błąd względny modelu

$$\frac{\tilde{R}^* - R^*}{R^*} = \frac{-0.03}{11.81} = -0.25\%.$$

2° *Rynek niezrównoważony* ($P_r \neq P_0$).

Załóżmy teraz, że cena rynkowa obligacji wynosi $P_r = 90.27$; mamy więc $P_r < P_0 = 95.02$ zł, oraz

$$CY = \frac{C}{P_r} = \frac{8}{90.27} = 0.0886 = 8.86\% \quad \text{(oprocentowanie bieżące odsetek)},$$

$$\rho = \frac{P_0 - P_r}{P_r} = 0.0526 = 5.26\% \quad \text{(nierównowagowa stopa zwrotu)}.$$

Dla stopy procentowej $r = 10\% = const$, ze wzoru (3.42) wyznaczymy *spodziewaną stopę zwrotu*.

$$R_r^a = r + (1+r)\rho = 0.10 + (1.10)\times(0.0526) = 0.1579 = 15.79\% .$$

Założymy teraz (podobnie jak poprzednio), że w chwili $\tau = 1+\varepsilon$ rynkowa stopa procentowa spadła o $\Delta r = -1\%$, czyli

$$r^* = r + \Delta r = 10\% - 1\% = 9\% = 0.09$$

oraz $P_1^* = 98.24$ zł (identycznie jak w przypadku 1^0).

Mamy wówczas

$$P_1^* - P_r = 98.24 - 90.27 = 7.97 \text{ zł}.$$

Bezpośrednio z definicji otrzymamy

$$R_r^* \stackrel{\Delta}{=} \frac{C + P_1^* - P_r}{P_r} = \frac{8 + 7.97}{90.27} = 8.86\% + 8.83\% = 17.69\% .$$

Natomiast z modelu (3.50) mamy

$$\widetilde{R}_r^* = [r + (1+r)\rho] - (D^0 - 1)(1+\rho)\Delta r ,$$

gdzie $r = 0.10$, $\rho = 0.0526$, $D^0 = 2.7774$, $\Delta r = -0.01$.

Czyli

$$\widetilde{R}_r^* = 0.1579 - (2.7774 - 1)\times 1.0526 \times \Delta r =$$

$$= 0.1579 - 1.8709 \times \Delta r = 0.1766 = 17.66\%.$$

Błąd bezwzględny modelu: $\widetilde{R}_r^* - R_r^* = -0.03\%$.

Błąd względny modelu: $(\widetilde{R}_r^* - R_r^*) / R_r^* = -0.17\%$.

Przeprowadzimy jeszcze analogiczne obliczenia dla spadku stopy procentowej r o wartość $\Delta r = -2\%$; czyli

$$r^* = r + \Delta r = 10\% - 2\% = 8\% = 0.08 .$$

Mamy wówczas

$$P_1^* = \frac{8}{(1.08)} + \frac{108}{(1.08)^2} = 100.00 \text{ zł}; \qquad P_1^* - P_r = 9.73 \text{ zł},$$

$$R_r^* \stackrel{\Delta}{=} \frac{C + P_1^* - P_r}{P_r} = \frac{8 + 9.73}{90.27} = 8.86\% + 10.78\% = 0.1964 = 19.64\%.$$

Natomiast z modelu (3.50),

$$\widetilde{R}^* = 0.1579 - 1.8710 \times \Delta r = 0.1953 = 19.53\%.$$

Błąd bezwzględny modelu: $\widetilde{R}_r^* - R_r^* = -0.11\%$,

Błąd względny modelu: $(\widetilde{R}_r^* - R_r^*) / R_r^* = -0.56\%$.

Jak można zauważyć, błąd modelu w powyższym przypadku nieco się zwiększył, co wynika bezpośrednio z przybliżenia związanego z użyciem w modelu parametru okresowości D^0, przy dość dużej zmianie $\Delta r = -2\%$ stopy procentowej. Tym niemniej, uzyskany wynik jest w dalszym ciągu zadawalający.

* * *

Zdaniem autora, wzór (3.51) na rzeczywistą stopę zwrotu $(R_r^*)_l$ stanowi pewne nowe rozwiązanie z zakresu omawianej teorii. Występujący w pracy *Eltona, Grubera* (1995) wzór o podobnej postaci jest nie tylko niezrozumiały co wręcz błędny (por. strona 553 cytowanej pracy, wzór 21.5). Wzór ten ma postać

$$R_i = \overline{R}_i - D_i \Delta + e_i, \tag{3.56}$$

gdzie $\overline{R}_i$ - wartość oczekiwana stopy zwrotu (*expected return*), D_i - parametr okresowości, Δ - względna zmiana stopy procentowej; tj. $\Delta = \Delta r / (1 + r)$, e_i - składnik resztowy, przy czym $Ee_i = 0$ i $Ee_i e_j = 0$, $\operatorname{var}(e_i) = \sigma_{ei}^2$.

Zauważmy następujące fakty:

— Obliczając wartość oczekiwaną obu stron równania (3.56) mamy

$$E(R_i) = \overline{R}_i - D_i E(\Delta) \quad \text{oraz z definicji,} \quad E(R_i) \stackrel{\Delta}{=} \overline{R}_i.$$

Z powyższego wynikałoby, że

$$E(\Delta) = E\left(\frac{\Delta r}{1 + r}\right) = 0, \quad \text{a stąd} \quad E(\Delta r) = 0.$$

Założenie, że $E(\Delta r) = 0$ jest na pewno zbyt dużym przybliżeniem, nie znajdującym potwierdzenia w literaturze przedmiotu (por. *Smith, Spudeck*, 1993; *Jones*, 1991).

– Ze wzoru (3.56) *Eltona, Grubera* wynikają zresztą dalsze błędne wnioski: a mianowicie, na stronie 554 cytowanej pracy podano, że wariancja i kowariancja zmiennych R_i i R_j wynosi

$$\mathrm{var}(R_i) = \frac{D_i^2}{D_m^2}\sigma_m^2 \quad \text{oraz} \quad \mathrm{cov}(R_i, R_j) = \frac{D_i D_j}{D_m^2}\sigma_m^2, \tag{3.57}$$

gdzie σ_m^2, D_m - wariancja oraz okresowość portfela rynkowego.

Otóż wzór na wariancję $\mathrm{var}(R_i)$ jest błędny, ponieważ nie występuje w nim wprowadzona wcześniej wariancja σ_{ei}^2 składnika resztowego, reprezentującego ryzyko specyficzne obligacji. Jest to zupełnie niezrozumiałe, szczególnie w obecności wyprowadzonego na tej samej stronie wzoru

$$R_i = \overline{R}_i + \frac{D_i}{D_m}(R_m - \overline{R}_m) + e_i, \tag{3.58}$$

gdzie R_m, $\overline{R}_m$ - odpowiednio stopa zwrotu oraz jej średnia dla indeksu rynkowego. Ze wzoru tego wynika bowiem bezpośrednio, że powinno zachodzić

$$\mathrm{var}(R_i) = \frac{D_i^2}{D_m^2}\sigma_m^2 + \sigma_{ei}^2. \tag{3.59}$$

Poza tym, ze wzorów (3.57) wynika, że *współczynnik korelacji* pomiędzy zmiennymi R_i i R_j wynosi

$$cor(R_i, R_j) \overset{\Delta}{=} \frac{\mathrm{cov}(R_i, R_j)}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{D_i D_j}{D_m^2}\sigma_m^2 \Big/ \left[\frac{D_i}{D_m}\sigma_m \times \frac{D_j}{D_m}\sigma_m\right] = \frac{D_i D_j}{D_m^2}\sigma_m^2 \Big/ \frac{D_i D_j}{D_m^2}\sigma_m^2 = 1;$$

$$\forall\, i, j = 1, \ldots, n; \quad i \neq j.$$

Oznacza to, że współczynniki korelacji stóp zwrotu wszystkich obligacji występujących na rynku są równe jedności; a to - jest już kompletnym nieporozumieniem.

Reasumując, zdaniem autora, podrozdział pt. *Single index models*, cytowanej pracy *Eltona, Grubera* (1995) - powinien być z tej publikacji w całości usunięty; dla dobra przyszłych czytelników. Zauważmy, że jest to już *piąte wydanie* tej książki, przy czym we wprowadzeniu do tego wydania podano, że rozdziały o obligacjach zostały napisane od nowa! Tymczasem cytowane powyżej błędy, występowały już i poprzednio w *wydaniu czwartym* pracy; tak więc - nie zostały one poprawione.

3.2. Model jednoindeksowy

Sformułujemy teraz model jednoindeksowy dla rynku obligacji. Model ten będzie w pewnym sensie analogiem w stosunku do modelu Sharpe'a rozpatrywanego powszechnie dla rynku akcji (*single-index model*); por. *Francis* (1991). Natomiast podstawową różnicą między tymi modelami jest to, że model Sharpe'a jest modelem regresyjnym, natomiast przedstawiony poniżej model będzie wynikał bezpośrednio z wyprowadzonego w punkcie 3.1 wzoru (3.51).

Należy więc wyraźnie podkreślić, że model jednoindeksowy dla rynku obligacji nie jest w żadnym wypadku modelem regresyjnym. Natomiast podobieństwo obu modeli tkwi wyłącznie w ich liniowości oraz w fakcie uwzględniania w obu przypadkach dwóch nieskorelowanych czynników. A mianowicie *czynnika wspólnego* (indeksu) będącym z założenia wyłącznym źródłem korelacji pomiędzy analizowanymi walorami oraz *czynnika specyficznego* (zmienna resztowa), charakterystycznego tylko dla danego papieru wartościowego.

Ujmując powyższe jeszcze inaczej, można stwierdzić, że pomimo podobieństwa obu liniowych modeli jednoindeksowych, różnica między tymi modelami tkwi przede wszystkim w sposobie identyfikacji parametrów występujących w tych modelach. W przypadku modelu dla rynku akcji parametry te (powszechnie oznaczane jako α_i, β_i) są wyznaczane na podstawie danych z przeszłości, w sposób typowy dla metody regresji liniowej. Natomiast dla sformułowanego poniżej modelu określonego dla rynku obligacji, parametr - będący odpowiednikiem parametru β_i akcji - może być efektywnie (*a priori*) obliczony na podstawie danych bieżących oraz wprowadzonej wcześniej koncepcji okresowości obligacji (*duration*).

Podstawowe oznaczenia i definicje

W przedstawionym poniżej opisie modelu będziemy wykorzystywali następujące kategorie, z których część była już stosowana w punkcie 3.1. A mianowicie, wprowadzimy następujące oznaczenia (indeks i obligacji chwilowo pomijamy):

r - znana w chwili bieżącej $\tau = 0$ rynkowa stopa procentowa; zmienna deterministyczna,

$r^* = r + \Delta r$ - nowa wartość stopy procentowej r wynikająca z nieoczekiwanej (losowej) zmiany Δr tej stopy; zmienna losowa,

R^a - spodziewana stopa zwrotu (*anticipated return*), przy założeniu, że $r = const$; zmienna deterministyczna,

R^* - rzeczywista stopa zwrotu (*realized return*), przy założeniu, że $r^* = r + \Delta r$; zmienna losowa,

$\overline{R}^* = E(R^*)$ - oczekiwana stopa zwrotu (*expected return*), tj. wartość oczekiwana rzeczywistej stopy zwrotu R^*,

$\Delta R = R^* - R^a$ - nieoczekiwana stopa zwrotu (*excess return*), tj. nieoczekiwana zmiana stopy zwrotu wywołana zmianą Δr stopy procentowej; zmienna losowa,

$\Delta R_e = E(\Delta R) = E(R^* - R^a)$ - wartość oczekiwana nieoczekiwanej zmiany stopy zwrotu (*expected excess return*).

Uwaga: W dalszych rozważaniach przyjmiemy, że rozpatrujemy ogólnie rzecz biorąc rynek niezrównoważony obligacji; w przedstawionych powyżej oznaczeniach stóp zwrotu R^a, R^* - stosowany wcześniej dolny indeks r został pominięty - tylko dla uproszczenia zapisu.

Jak już wcześniej wspomniano, wszystkie rozpatrywane powyżej stopy zwrotu dotyczą horyzontu inwestycyjnego równego jednemu okresowi odsetkowemu analizowanych obligacji O_i; są to tzw. stopy zwrotu „z okresu na okres" (*period-by-period return*). Zakładamy przy tym, że wszystkie okresy odsetkowe obligacji pokrywają się ze sobą. Oznacza to że rozpatrujemy zbiór obligacji $\{O_i,\ i = 1,\dots,n\}$ będący pewnym podzbiorem zbioru wszystkich obligacji występujących na danym rynku kapitałowym. Mamy zatem

$$\{O_i,\ i = 1,\dots,n\} \subset \mathcal{A}, \tag{3.60}$$

gdzie $\mathcal{A}$ - zbiór wszystkich obligacji na rynku; n - liczba wszystkich obligacji o tych samych okresach odsetkowych. Terminy do wykupu T_i obligacji O_i mogą być oczywiście różne; przy czym zakładamy, że rozpatrywane są wyłącznie obligacje długoterminowe, o parametrach okresowości $D_i^0 >> 1$. W praktyce oznacza to, że bierzemy pod uwagę obligacje o terminach do wykupu (*term to maturity*) $T_i \geq 3 \div 5$ lat.

Portfel rynkowy obligacji

Wprowadzimy też pewien umowny *portfel rynkowy* obligacji o tych samych okresach odsetkowych, tj.

I_m - portfel utworzony ze zbioru wszystkich obligacji $\{O_i,\ i = 1,\dots,n\}$, oraz

$$R_m \stackrel{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{n} X_i R_i^* \text{ - stopa zwrotu z portfela } I_m \text{ za jeden okres odsetkowy,} \tag{3.61}$$

gdzie

$X_i \in (0,1)$ - udział wartościowy obligacji O_i w portfelu I_m; $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$.

Stopę zwrotu R_m z portfela rynkowego I_m obligacji O_i $(i=1,\ldots,n)$ definiujemy więc jako średnią ważoną jednookresowych stóp zwrotu R_i^* z inwestycji w poszczególne obligacje, przy czym przyjmiemy że

$$X_i = \frac{l_i P_i}{\sum_{i=1}^{n} l_i P_i}, \quad \forall\, i=1,\ldots,n, \tag{3.62}$$

gdzie l_i - liczba wyemitowanych obligacji O_i, P_i - cena „czysta" obligacji na początku danego okresu odsetkowego.

Mając na uwadze powyższe oznaczenia i wprowadzając pojęcie *przestrzeni liniowej obligacji*, możemy formalnie zapisać portfel rynkowy I_m jako kombinację wypukłą

$$I_m = \bigcup_{i=1}^{n} X_i O_i \,. \tag{3.63}$$

Mamy ponadto

$$R_i^* \stackrel{\Delta}{=} \frac{C_i + P_1^i - P_r^i}{P_r^i}, \quad i=1,\ldots,n, \tag{3.64}$$

gdzie C_i - odsetki od obligacji O_i,

P_r^i - cena rynkowa obligacji O_i na początku danego okresu odsetkowego,

P_1^i - cena rynkowa obligacji O_i na końcu danego okresu odsetkowego.

Z powyższego wynika, że stopa zwrotu R_m portfela I_m jest zmienna losową; oznaczymy więc

$\overline{R}_m = E(R_m)$ - wartość oczekiwana stopy zwrotu R_m,

$\sigma_m^2 = E(R_m - \overline{R}_m)^2$ - wariancja stopy zwrotu R_m.

Dla celów dalszych rozważań zakładamy, że parametry $\overline{R}_m$, σ_m^2 rozkładu rynkowej stopy zwrotu R_m są określane na podstawie danych z przeszłości. Oznaczymy

M - okres obserwacji, $R_{m\nu}$ - wartość rynkowej stopy zwrotu w chwili ν. A zatem,

$$\overline{R}_m = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{M} R_{m\nu}\,, \tag{3.65}$$

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{M-1}\sum_{\nu=1}^{M}(R_{m\nu} - \overline{R}_m)^2\,. \tag{3.66}$$

Z równań (3.61) i (3.65) wynika, że w celu wyznaczenia estymatora wartości oczekiwanej $\overline{R}_m = E(R_m)$ musimy dokonać dwóch uśrednień; tzw. najpierw „uśrednienia po zbiorze", a później „uśrednienia po czasie".

Zmienna resztowa

W wyprowadzonym w punkcie 3.1 wzorze (3.51) na rzeczywistą stopę zwrotu R_i^* z obligacji O_i, wprowadzimy dodatkowo losowy składnik resztowy (*residual*) ε_i. Wprowadzenie tego składnika ma na celu uwzględnienie tych wszystkich sytuacji, w których wprowadzone przez nas wcześniej założenia mogą nie być spełnione.

Mamy więc

ε_i - losowa zmienna resztowa o parametrach

$E\varepsilon_i = 0$; $\operatorname{var}(\varepsilon_i) = \sigma_{\varepsilon i}^2$; $\quad \forall\, i = 1,\dots,n$, przy czym zakładamy, że

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0, \qquad \forall\, i, j = 1,\dots,n;\quad i \neq j, \tag{3.67}$$

oraz

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_i, R_m) = E[\varepsilon_i (R_m - \overline{R}_m)] = 0, \qquad \forall\, i = 1,\dots,n. \tag{3.68}$$

Sformułowanie modelu

Przedstawimy teraz trzy równoważne sformułowania modelu jednoindeksowego dla rynku obligacji. Sformułowania te oznaczymy kolejno jako modele I, II i III.

Uwzględniając we wzorze (3.51) na rzeczywistą stopę zwrotu R_i^* - dodatkowo - składnik resztowy ε_i, otrzymamy

$$R_i^* = [r + (1+r)\rho_i] - (D_i^0 - 1)(1+\rho_i)\Delta r + \varepsilon_i; \qquad i = 1,\dots,n. \tag{3.69}$$

A zatem, uwzględniając wprowadzone wcześniej oznaczenia (3.53)-(3.54), mamy

Model jednoindeksowy I

$$R_i^* = R_i^a - B_i \Delta r + \varepsilon_i, \qquad \forall\, i = 1,\dots,n, \tag{3.70}$$

gdzie

$$R_i^a = r + (1+r)\rho_i \qquad \text{- spodziewana stopa zwrotu,} \tag{3.71}$$

$$B_i = (D_i^0 - 1)(1+\rho_i) \qquad \text{- zmodyfikowany parametr okresowości,} \tag{3.72}$$

$$\rho_i = \frac{P_0^i - P_r^i}{P_r^i} \qquad \text{- nierównowagowa stopa zwrotu.} \tag{3.73}$$

Wyjaśnimy teraz dokładniej jakie sytuacje uzasadniają wprowadzenie do modelu (3.70) zmiennej resztowej ε_i. Otóż przy wyprowadzeniu wzoru (3.52) przyjęliśmy następujące założenia upraszczające, które w ogólnym przypadku mogą nie być spełnione:

(i) Cena rynkowa P_1^l obligacji jest równa jej wartości wewnętrznej w chwili $\tau = 1$ nawet w przypadku, gdy rynek w chwili $\tau = 0$ jest niezrównoważony, tj. $P_0^l \neq P_r$.

(ii) Struktura terminowa stóp procentowych jest płaska, tj. $r_{0t} = r$, $\forall\, t = 1,\dots,T$, a ponadto, możliwe są tylko przesunięcia równoległe Δr tej struktury.

(iii) Zmiana wartości obligacji P_1^l spowodowana zmianą Δr stopy procentowej może być oszacowana za pomocą parametru okresowości D_i^1, co jest prawdziwe tylko dla małych zmian Δr.

(iv) Przyjęliśmy, że okresy odsetkowe obligacji O_i $(i = 1,\dots,N)$ o różnych terminach do wykupu T_i - ściśle pokrywają się ze sobą. Mając na uwadze, że obligacje O_i mogą pochodzić z różnych emisji oraz - że analizujemy różne serie tych obligacji - wymaga to specjalnego doboru zbioru obligacji. Jednak, nawet wówczas, poszczególne okresy odsetkowe mogą być względem siebie w praktyce - nieco przesunięte. Zjawisko to nosi w teorii finansów nazwę asynchronizmu (*asynchronous effect*). Oczywiście może to być źródłem pewnych dodatkowych błędów modelu.

Efekt *ścisłego synchronizmu* okresów odsetkowych zachodzi tylko pomiędzy obligacjami z tej samej emisji (tj. jeden emitent) lecz z różnych serii - wypuszczanych na przykład co miesiąc, co pół roku lub co rok. Pokrywanie się ze sobą okresów odsetkowych jest wówczas zagwarantowane bezpośrednio poprzez prospekt emisyjny danej obligacji. Umożliwia to między innymi subskrypcję obligacji nowej serii na podstawie dotychczas posiadanej obligacji tej samej emisji, której okres istnienia właśnie się kończy. Subskrypcja ta odbywa się na ogół po promocyjnych cenach, w stosunku do ceny tej obligacji sprzedawanej w ofercie publicznej na rynku pierwotnym. Tak więc cena subskrypcyjna obligacji jest na ogół na mocy odnośnych przepisów niższa od ceny emisyjnej, co niesie określone korzyści dla dotychczasowych posiadaczy obligacji tej samej emisji. Zjawisko to nosi potocznie nazwę tzw. „rolowania" obligacji.

W analizowanym modelu przyjęto, że oddziaływanie wszystkich czynników wynikających z niespełnienia założeń (i)-(iv), reprezentowanych przez zmienną losową ε_i, „przeciętnie ulegnie zniesieniu" - co uzasadnia przyjęcie założenia, że $E\varepsilon_i = 0$, $\forall\, 1,\dots,n$.

Ponadto, kluczowym założeniem, jakie rozpatruje się w ramach modelu (3.70) jest to, że współczynniki korelacji pomiędzy zmiennymi ε_i, ε_j są dla $i \neq j$ równe zeru.

Powyższe oznacza bowiem postulat, że głównym i jedynym czynnikiem obserwowanej na rynkach kapitałowych korelacji pomiędzy stopami zwrotu z różnych obligacji jest zmiana stopy procentowej Δr. Tak więc ryzyko stopy procentowej, wyrażające się zmianą Δr - jest wspólne dla wszystkich analizowanych obligacji. Ryzyko to możemy traktować jako pewne **ryzyko systematyczne** (*systematic risk*), oddziaływujące jednocześnie na stopę zwrotu wszystkich obligacji. Należy przy tym podkreślić przeciwny kierunek tych oddziaływań; tj. wzrost stopy procentowej ($\Delta r > 0$) powoduje spadek R_i^* oraz spadek tej stopy ($\Delta r < 0$) powoduje wzrost R_i^*. Wynika to bezpośrednio ze znaku „minus" występującym w modelu (3.70).

Natomiast zmienność składnika resztowego ε_i - mierzona wariancją $\sigma_{\varepsilon i}^2$ - reprezentuje w analizowanym modelu **ryzyko specyficzne** (*residual risk*), charakterystyczne tylko dla danej obligacji O_i. Jak to później pokażemy, ryzyko to można wyraźnie zmniejszyć (a teoretycznie nawet zredukować do zera) poprzez odpowiednią dywersyfikację przyjętego portfela inwestycyjnego. Chodzi w tym przypadku o odpowiedni dobór udziałów wartościowych poszczególnych obligacji w portfelu, dokonany na podstawie znajomości wzajemnych korelacji pomiędzy stopami zwrotu z inwestycji w te walory. Z tego też powodu ryzyko specyficzne papieru wartościowego nosi często w teorii portfela nazwę ryzyka dywersyfikowalnego; w odróżnieniu od rynkowego ryzyka systematycznego, którego nie można pomniejszyć za pomocą dywersyfikacji. Jak to wykazaliśmy powyżej, ryzyko to - przy pewnych założeniach upraszczających - wynika wprost z ryzyka stopy procentowej.

Powyższe uwagi uzasadniają zastosowanie w odniesieniu do modelu (3.70), wprowadzonej wcześniej koncepcji stopy zwrotu R_m z portfela rynkowego.

A mianowicie, ze wzorów (3.61) i (3.70) mamy

$$R_m \stackrel{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{n} X_i R_i^* = \sum_{i=1}^{n} X_i R_i^a - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i B_i \right) \Delta r + \sum_{i=1}^{n} X_i \varepsilon_i \,. \tag{3.74}$$

We wzorze tym, dla dużej liczby n rozpatrywanych w portfelu rynkowym obligacji O_i, otrzymamy:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i R_i^a = \sum_{i=1}^{n} X_i [r + (1+r)\rho_i] = r \sum_{i=1}^{n} X_i + (1+r) \sum_{i=1}^{n} X_i \rho_i \approx r \,, \tag{3.75}$$

bowiem $\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$, (3.76)

a ponadto, możemy przyjąć, że

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \rho_i \approx 0 \,, \tag{3.77}$$

tj. że średnie „niezrównoważenie" portfela rynkowego jest zerowe.

We wzorze (3.74) mamy również

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \varepsilon_i \approx 0, \tag{3.78}$$

bo średnia ważona dużej liczby nieskorelowanych zmiennych losowych o zerowej wartości oczekiwanej jest zbieżna do zera, co można łatwo wykazać. Wystarczy w tym celu zauważyć, że wariancja wyrażenia (3.78) dla dowolnie dużych n - jest dowolnie mała; natomiast wartość oczekiwana tego wyrażenia jest oczywiście równa zeru.

Ponadto, we wzorze (3.74) oznaczymy

$$B_m = \sum_{i=1}^{n} X_i B_i \text{ - parametr zmodyfikowanej okresowości portfela rynkowego.} \tag{3.79}$$

Zauważmy, że ze wzorów (3.72) i (3.79) zachodzi

$$B_m = \sum_{i=1}^{n} X_i B_i = \sum_{i=1}^{n} X_i (D_i^0 - 1)(1+\rho_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i D_i^0 (1+\rho_i) - \sum_{i=1}^{n} X_i (1+\rho_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i D_i^0 (1+\rho_i) - \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \rho_i . \tag{3.80}$$

Tak więc, biorąc pod uwagę (3.76), (3.77) i (3.80) mamy

$$B_m = \sum_{i=1}^{n} X_i B_i = \sum_{i=1}^{n} X_i D_i^0 (1+\rho_i) - 1 . \tag{3.81}$$

W przypadku rynku zrównoważonego (tj. dla $\rho_i = 0, \quad \forall i = 1,...,n$), wzór (3.81) określający parametr zmodyfikowanej okresowości portfela rynkowego – przybiera prostszą postać; a mianowicie

$$B_m = \sum_{i=1}^{n} X_i B_i = \sum_{i=1}^{n} X_i D_i^0 - 1 = D_m^0 - 1, \tag{3.82}$$

gdzie $D_m^0 = \sum_{i=1}^{n} X_i D_i^0$ - okresowość portfela rynkowego.

Można bowiem wykazać, że okresowość dowolnego portfela obligacji jest równa sumie ważonej parametrów okresowości D_i^0 poszczególnych obligacji wchodzących w skład tego portfela; *Bierwag* (1987).

Model portfela rynkowego

Podstawiając wzory (3.75), (3.78) i (3.79) do zależności (3.74) otrzymamy

$$R_m = r - B_m \Delta r . \tag{3.83}$$

Wyprowadzony model portfela rynkowego jest analogiem modelu (3.70) rozpatrywanego dla pojedynczej akcji O_i. Zauważmy, że w przypadku modelu (3.83), *spodziewana stopa zwrotu z portfela* (wyznaczona dla $\Delta r = 0$) jest równa rynkowej stopie procentowej, tj.

$$R_m^a = \sum_{i=1}^{n} X_i R_i^a = r , \tag{3.84}$$

co wynikło z założonego efektu „zniesienia się" niezrównoważenia rynku poszczególnych obligacji O_i; por. wzór (3.77).

Ponadto, w modelu rynkowym nie występuje składnik *ryzyka specyficznego* reprezentowanego, w przypadku pojedynczej obligacji - przez zmienna resztową ε_i. W modelu tym występuje więc wyłącznie czynnik *ryzyka systematycznego*, reprezentowanego przez zmienność Δr rynkowej stopy procentowej.

Z powyższego wynika, że o ile tylko dysponujemy odpowiednio dużym portfelem obligacji o tych samych okresach odsetkowych i potrafimy przewidzieć zmianę Δr rynkowej stopy procentowej, to oszacowanie stopy zwrotu na najbliższy okres z tak utworzonego portfela - jest już bardzo proste. Wystarczy w tym celu obliczyć parametr B_m zmodyfikowanej okresowości tego portfela na podstawie wzoru (3.81), a następnie zastosować model (3.83). Natomiast, gdy nie przewidujemy zmiany stopy procentowej (tj. zakładamy, że $\Delta r = 0$) - to oszacowanie stopy zwrotu z portfela rynkowego jest natychmiastowe: stopa zwrotu R_m jest bowiem w tym przypadku równa stopie procentowej r, jaka obowiązuje w danej chwili na rynku. Stopa ta powinna być oczywiście odniesiona do horyzontu czasowego równego okresowi odsetkowemu posiadanych obligacji. W praktyce rynków finansowych, obowiązujące w danej chwili stopy procentowe podawane są bowiem w skali roku (365 dni).

Wydaje się, że jest to niezmiernie interesujący wynik; przede wszystkim ze względu na prostotę modelu (3.83) portfela rynkowego. Ponadto, z równania modelu (3.83) otrzymamy

$$\Delta r = \frac{1}{B_m}(r - R_m) , \tag{3.85}$$

a stąd

$$E(\Delta r) = \overline{\Delta r} = \frac{1}{B_m}(r - \overline{R}_m) \tag{3.86}$$

oraz

$$\operatorname{var}(\Delta r) = \frac{\sigma_m^2}{B_m^2} . \tag{3.87}$$

Tak więc znając (na podstawie danych empirycznych) wartości parametrów $\overline{R}_m$, σ_m^2 stopy zwrotu R_m indeksu rynkowego, ze wzorów (3.86), (3.87) możemy oszacować bezpośrednio wartość oczekiwaną i wariancję losowej zmiany Δr stopy procentowej. Oczywiście wartości te można by również dla Δr estymować na podstawie danych z przeszłości; podobnie, jak to czyniliśmy wyznaczając $\overline{R}_m$, σ_m^2. Wystarczyłoby w tym celu wziąć pod uwagę wartości $(\Delta r)_\nu$; $\nu = 1,\dots,M$, M - okres obserwacji. Jednak mógłby tu pojawić się pewien problem. Otóż założyliśmy, że krzywa dochodowości jest płaska i możliwe są tylko równoległe przesunięcia tej krzywej, tj.

$$r_{0t} = r = const(t), \qquad \Delta r_{0t} = \Delta r = const(t). \tag{3.88}$$

Założenie powyższe dotyczy chwili bieżącej $\tau = 0$ oraz przyszłości. Natomiast nie oznacza to, że założenie to było spełnione w przeszłości - szczególnie dla długich okresów obserwacji M. Gdy tak nie jest - a należy się tego w praktyce spodziewać - to nie bardzo wiadomo, które z wartości nierównoległych przesunięć krzywej dochodowości $(\Delta r_{0t})_\nu$ wziąć pod uwagę w celu estymacji parametrów zmiennej losowej Δr. Sama zmienna Δr nie jest bowiem w tym przypadku dobrze zdefiniowana.

Jak widzimy więc, zastosowanie wzorów (3.86), (3.87) w celu oszacowania parametrów rozkładu zmiennej Δr, pozwala w pewien sposób na ominięcie powyższego problemu. A znajomość tych parametrów może być niezwykle przydatna dla celów dalszych analiz.

Możemy również odwrócić tok przedstawionego powyżej rozumowania. A mianowicie, załóżmy, że w przeszłości struktura terminowa stóp procentowych była rzeczywiście w przybliżeniu płaska (tj. $r_{0t} = r$, $t = 1,\dots,T$) i obserwowaliśmy wyłącznie losowe przesunięcia równoległe Δr tej struktury (w górę lub w dół). Prawdziwość tego założenia można oczywiście z łatwością sprawdzić na podstawie danych empirycznych. Wówczas, na podstawie danych z przeszłości Δr_ν $(\nu = 1,\dots,M)$ możemy wyznaczyć estymatory wartości oczekiwanej i wariancji zmiennej losowej Δr, tj.

$$E(\Delta r) = \overline{\Delta r} = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{M} \Delta r_\nu \qquad \text{oraz}$$

$$\operatorname{var}(\Delta r) = \sigma_{\Delta r}^2 = \frac{1}{M-1}\sum_{\nu=1}^{M} (\Delta r_\nu - \overline{\Delta r})^2.$$

Z modelu portfela rynkowego (3.83) otrzymamy wówczas oszacowanie wartości oczekiwanej i wariancji stopy zwrotu R_m z portfela rynkowego, tj.

$$\overline{R}_m = r - B_m \overline{\Delta r} \qquad \text{oraz}$$

$$\sigma_m^2 = B_m^2\, \sigma_{\Delta r}^2 .$$

Przedstawiony powyżej sposób określania parametrów $\overline{R}_m$ i σ_m^2 rynkowej stopy zwrotu R_m, na podstawie znajomości analogicznych parametrów dla zmiennej losowej Δr, może mieć duże znaczenie w praktyce. A mianowicie, gdy na rynku istnieją wyłącznie obligacje O_i o niezbyt odległych terminach do wykupu T_i - powiedzmy obligacje 3-letnie,...,5-letnie - możemy mieć zbyt mało danych historycznych, umożliwiających odpowiednio wiarygodną estymację parametrów $\overline{R}_m$, σ_m^2 dokonaną bezpośrednio - na podstawie danych z przeszłości.

Wykorzystując wzór (3.85), model jednoindeksowy (3.70) sformułowany dla pojedynczej obligacji O_i, można wyrazić następująco:

Model jednoindeksowy II

$$R_i^* = R_i^a + \frac{B_i}{B_m}(R_m - r) + \varepsilon_i, \qquad \forall\, i = 1,\dots,n. \tag{3.89}$$

Jest to ostateczna postać rozpatrywanego w tym punkcie modelu stopy zwrotu z obligacji. Z modelu tego można bezpośrednio wyznaczyć podstawowe parametry, mające zasadnicze znaczenie dla aktywnego zarządzania portfelowego. Są to:

— **Spodziewana stopa zwrotu** (*anticipated return*)

$$R_i^a = r + (1+r)\rho_i, \qquad i = 1,\dots,n, \tag{3.90}$$

— **Oczekiwana stopa zwrotu** (*expected return*)

$$\overline{R}_i = E(R_i^*) = R_i^a + \frac{B_i}{B_m}(\overline{R}_m - r), \qquad i = 1,\dots,n, \tag{3.91}$$

— **Wariancja stopy zwrotu**

$$\operatorname{var}(R_i^*) = \sigma_i^2 = \frac{B_i^2}{B_m^2}\sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2, \qquad i = 1,\dots,n, \tag{3.92}$$

— **Kowariancja**

$$\operatorname{cov}(R_i, R_j) = \sigma_{ij} = \frac{B_i B_j}{B_m^2}\sigma_m^2, \qquad i,j = 1,\dots,n; \quad i \neq j. \tag{3.93}$$

Ponadto, z modelu (3.89) mamy:

— **Nieoczekiwana stopa zwrotu** (*excess return*)

$$\Delta R_i \overset{\Delta}{=} R_i^* - R_i^a = \frac{B_i}{B_m}(R_m - r) + \varepsilon_i, \qquad i = 1,\dots,n, \tag{3.94}$$

– **Wartość oczekiwana nieoczekiwanej stopy zwrotu** (*expected excess return*)

$$\Delta R_i^e \stackrel{\Delta}{=} E(R_i^* - R_i^a) = \frac{B_i}{B_m}(\overline{R}_m - r). \tag{3.95}$$

Uwaga: Przedstawione powyżej parametry (3.91)-(3.95) można łatwo wyznaczyć bezpośrednio z równania (3.89) modelu. Tym niemniej, w przypadku obliczania kowariancji $\mathrm{cov}(R_i, R_j)$ należy dodatkowo wziąć pod uwagę przyjęte wcześniej założenie (3.68), tj.

$$\mathrm{cov}(\varepsilon_i, R_m) \stackrel{\Delta}{=} E[\varepsilon_i(R_m - \overline{R}_m)] = 0, \qquad \forall\, i = 1,\dots,n.$$

Założenie to jest pewnym arbitralnym założeniem modelowym, którego prawdziwość należałoby sprawdzić na podstawie danych empirycznych. Przyjęty warunek nieskorelowania stopy zwrotu R_m portfela rynkowego i zmiennej resztowej ε_i jest niezwykle istotny; determinuje on bowiem rozłączność analizowanego w ramach powyższego modelu ryzyka systematycznego i ryzyka specyficznego danej obligacji.

Natomiast w przypadku, gdy przedstawiony powyżej warunek nieskorelowania zmiennych losowych R_m i ε_i nie jest spełniony - wzór (3.93) na kowariancję $\mathrm{cov}(R_i, R_j)$ nie jest oczywiście prawdziwy. Powyższa uwaga jest o tyle istotna, że wzór (3.93) ma zasadnicze znaczenie z punktu widzenia rozpatrywanego w dalszej części pracy zagadnienia Markowitza zarządzania portfelem obligacji.

Z wyprowadzonych powyżej równoważnych postaci modelu jednoindeksowego obligacji O_i, danych równomianami (3.70) i (3.89) możemy również dokonać następujących interpretacji:

* ***Spodziewana stopa zwrotu:***

Z modelu (3.70) mamy

$$E(R_i^* | \Delta r = 0) = R_i^a = r + (1+r)\rho_i; \quad i = 1,\dots,n. \tag{3.96}$$

Spodziewana stopa zwrotu R_i^a jest więc *warunkową wartością oczekiwaną* rzeczywistej stopy zwrotu R_i^*, wyznaczoną przy warunku, że $\Delta r = 0$.

* ***Oczekiwana stopa zwrotu:***

Z modelu (3.89) mamy

$$E(R_i^*) = \overline{R}_i = R_i^a + \frac{B_i}{B_m}(\overline{R}_m - r); \qquad i = 1,\dots,n. \tag{3.97}$$

Tak więc oczekiwana stopa zwrotu $\overline{R}_i$ jest *bezwarunkową wartością oczekiwaną* rzeczywistej stopy zwrotu R_i^*.

Ponadto, z równania (3.97) wynika, że *spodziewana stopa zwrotu* R_i^a jest częścią składową *oczekiwanej stopy zwrotu* $\overline{R}_i$, przy czym - zależnie od znaku wyrażenia $(\overline{R}_m - r)$ - wartość $\overline{R}_i$ może być zarówno większa, jak i mniejsza od wartości R_i^a. Różnica między tymi wartościami jest właśnie równa *wartości oczekiwanej nieoczekiwanej stopy zwrotu* ΔR_e^i danej wzorem (3.95).

Wyróżnienie wprowadzonych powyżej kategorii: spodziewanej stopy zwrotu (*anticipated return*), oczekiwanej stopy zwrotu (*expected return*) oraz wartości oczekiwanej nieoczekiwanej stopy zwrotu (*expected excess return*) jest istotne dla właściwego zrozumienia większości zaawansowanych prac z dziedziny matematyki finansowej, odnoszących się do rynku obligacji; por. *Dahl* (1993), *Zenios* (1993). Jedną z zalet wyprowadzonego powyżej modelu jednoindeksowego (3.89) jest właśnie możliwość dokonania przejrzystej interpretacji tych pojęć.

Przedstawimy teraz trzecią postać modelu jednoindeksowego obligacji. A mianowicie, odejmując stronami wzory (3.89) i (3.91) otrzymamy

$$R_i^* - \overline{R}_i = \frac{B_i}{B_m}(R_m - \overline{R}_m) + \varepsilon_i, \qquad i = 1,\dots,n. \tag{3.98}$$

Z równania (3.98) mamy zatem

Model jednoindeksowy III

$$R_i^* = \overline{R}_i + \frac{B_i}{B_m}(R_m - \overline{R}_m) + \varepsilon_i, \qquad i = 1,\dots,n, \tag{3.99}$$

gdzie $\overline{R}_i$, $\overline{R}_m$ - wartości oczekiwane rzeczywistych stóp zwrotu z pojedynczej obligacji O_i i portfela rynkowego I_m dane wzorami (3.91) i (3.65).

Natomiast parametry B_i, B_m dane są wzorami (3.72) i (3.81), tj.

$$B_i = (D_i^0 - 1)(1 + \rho_i), \qquad i = 1,\dots,n, \tag{3.100}$$

$$B_m = \sum_{i=1}^{n} X_i B_i = \sum_{i=1}^{n} X_i D_i^0 (1 + \rho_i) - 1. \tag{3.101}$$

Warto zauważyć, że wyprowadzony powyżej model (3.99) ma podobną postać do modelu przedstawionego w pracy *Eltona, Grubera* (1995), przy czym w pracy tej w miejsce zmodyfikowanych parametrów okresowości B_i i B_m wprowadzono parametry *bieżącej okresowości* D_i i D_m co - jak już wspomnieliśmy - jest nieuzasadnione.

Na zakończenie rozważań dotyczących jednoindeksowego modelu obligacji, podamy sposób oszacowania wariancji $\sigma_{\varepsilon i}^2$ zmiennej resztowej ε_i - bez czego rozpatrywany model byłby niekompletny. Otóż wariancję tę można wyznaczyć na podstawie danych z przeszłości, wykorzystując model jednoindeksowy II dany równaniem (3.89). Mamy zatem

Identyfikacja wariancji $\sigma_{\varepsilon i}^2$

Nieobciążony estymator wariancji zmiennej losowej ε_i, szacowany na podstawie danych empirycznych, wyraża się wzorem

$$\sigma_{\varepsilon i}^2 = \frac{1}{M-1}\sum_{\nu=1}^{M}\varepsilon_{i\nu}^2, \qquad (3.102)$$

gdzie $\varepsilon_{i\nu}$ - realizacja zmiennej losowej ε_i w chwili $\nu = 1,\dots,M$; M - horyzont obserwacji.

Wartości $(\varepsilon_{i\nu},\ \nu = 1,\dots,M)$ można wyznaczyć z modelu (3.89) w następujący sposób. Ze wzorów (3.89) i (3.90) mamy

$$R_i^* = [r + (1+r)\rho_i] + \frac{B_i}{B_m}(R_m - r) + \varepsilon_i; \qquad i = 1,\dots,n, \qquad (3.103)$$

czyli

$$\varepsilon_{i\nu} = R_{i\nu}^* - [r_\nu + (1+r_\nu)\rho_{i\nu}] - \left(\frac{B_i}{B_m}\right)_\nu (R_{m\nu} - r_\nu), \quad \nu = 1,\dots,M; \; i = 1,\dots,n, \qquad (3.104)$$

gdzie $R_{i\nu}^*$, r_ν, $\rho_{i\nu}$, $R_{m\nu}$, $B_{i\nu}$, $B_{m\nu}$ - obserwowane w przeszłości wartości zmiennych i parametrów modelu (3.103).

Z równań (3.102) i (3.104) otrzymamy ostatecznie

$$\sigma_{\varepsilon i}^2 = \frac{1}{M-1}\sum_{\nu=1}^{M}\left\{R_{i\nu}^* - [r_\nu + (1+r_\nu)\rho_{i\nu}] - \left(\frac{B_i}{B_m}\right)_\nu (R_{m\nu} - r_\nu)\right\}^2, \qquad i = 1,\dots,n. \qquad (3.105)$$

Oczywiście, wykorzystując w analogiczny sposób dane historyczne, należałoby jeszcze zweryfikować przyjętą na początku tego punktu hipotezę, że zachodzi

$$E\varepsilon_i = \overline{\varepsilon_i} = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{M}\varepsilon_{i\nu} = 0. \qquad (3.106)$$

Można to uczynić podstawiając wartości $\varepsilon_{i\nu}$ dane wzorem (3.104) do równania (3.106). Oczywiście w praktyce otrzymamy $\overline{\varepsilon_i} \neq 0$; należałoby więc w tym przypadku zastosować odpowiedni test statystyczny w celu wykazania nieistotności wyznaczonego estymatora wartości oczekiwanej $\overline{\varepsilon_i} \neq 0$.

Podobne uwagi odnoszą się również do empirycznego zweryfikowania przyjętej wcześniej hipotezy (3.68), że $\operatorname{cov}(\varepsilon_i, R_m) = E[\varepsilon_i(R_m - \overline{R}_m)] = 0, \quad \forall\, i = 1,\dots,n.$

Porównanie modeli jednoindeksowych dla rynku akcji i rynku obligacji

W przypadku rynku akcji, formułuje się następujący model jednoindeksowy (*Elton, Gruber*, 1995)

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i, \qquad i = 1,\dots,n, \tag{3.107}$$

gdzie R_i - stopa zwrotu z akcji, R_m - stopa zwrotu z indeksu rynkowego I_m,

ε_i - zmienna resztowa; $E\varepsilon_i = 0$, $\mathrm{var}(\varepsilon_i) = \sigma_{\varepsilon i}^2$, $i = 1,\dots,n$,

$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$; $i,j = 1,\dots,n$; $i \neq j$,

α_i, β_i - parametry modelu wyznaczane na podstawie danych historycznych za pomocą analizy regresyjnej.

Z modelu (3.107) mamy

$$\overline{R}_i = \alpha_i + \beta_i \overline{R}_m, \qquad i = 1,\dots,n, \tag{3.108}$$

gdzie $\overline{R}_i$, $\overline{R}_m$ - wartości oczekiwane zmiennych losowych R_i, R_m.

Odejmując równania (3.107) i (3.108) stronami, otrzymamy

$$R_i - \overline{R}_i = \beta_i (R_m - \overline{R}_m) + \varepsilon_i,$$

czyli $$R_i = \overline{R}_i + \beta_i (R_m - \overline{R}_m) + \varepsilon_i. \tag{3.109}$$

Model jednoindeksowy II obligacji dany równaniem (3.89) można zapisać następująco

$$R_i^* = \left(R_i^a - \frac{B_i}{B_m} r \right) + \frac{B_i}{B_m} R_m + \varepsilon_i, \qquad i = 1,\dots,n. \tag{3.110}$$

Zauważmy teraz, że przyjmując dla rynku obligacji oznaczenia

$$\alpha_i^* = R_i^a - \frac{B_i}{B_m} r, \qquad \beta_i^* = \frac{B_i}{B_m}, \tag{3.111}$$

otrzymamy $$R_i^* = \alpha_i^* + \beta_i^* R_m + \varepsilon_i, \qquad i = 1,\dots,n. \tag{3.112}$$

Model (3.112) dla obligacji ma więc podobną postać jak model (3.107) sformułowany dla rynku akcji.

Natomiast bezpośrednio z modelu III dla obligacji danego równaniem (3.99), uwzględniając oznaczenie (3.111) na wartość β_i^*, otrzymujemy

$$R_i^* = \overline{R}_i + \beta_i^* (R_m - \overline{R}_m) + \varepsilon_i, \qquad i = 1,\dots,n, \tag{3.113}$$

co jest odpowiednikiem modelu jednoindeksowego (3.109) określonego dla rynku akcji.

Jak już wspomnieliśmy we wprowadzeniu do tego punktu, podstawową różnicą pomiędzy analizowanymi dla rynku akcji i obligacji modelami jednoindeksowymi jest to, że w przypadku modelu akcji (3.107) - parametry α_i, β_i są wyznaczane na podstawie danych historycznych, przy zastosowaniu wzorów regresji liniowej. Natomiast w przypadku modelu obligacji (3.112), parametry α_i^*, β_i^* są dane wzorami (3.111) - tak więc można je wyznaczyć na podstawie danych bieżących. Nie zachodzi więc w tym miejscu przypadek błędu estymacji, co wynika bezpośrednio z faktu, że model jednoindeksowy obligacji (3.112) nie jest modelem regresyjnym.

* * *

4. Zagadnienie Markowitza zarządzania portfelem obligacji

Sformułujemy teraz zagadnienie portfelowe Markowitza dla rynku obligacji. Zagadnienie to przedstawimy w podobny sposób jak się to czyni dla rynku akcji (*Elton, Gruber*, 1995).

Dla rynku obligacji, wykorzystując model jednoindeksowy II dany równaniem (3.89) oraz przyjmując dla uproszczenia zapisu $R_i = R_i^*$ - rzeczywista stopa zwrotu z obligacji O_i, mamy

$$R_i = R_i^a + \frac{B_i}{B_m}(R_m - r) + \varepsilon_i, \qquad i = 1,\dots,n, \tag{4.1}$$

$$\overline{R}_i = R_i^a + \frac{B_i}{B_m}(\overline{R}_m - r); \quad \text{gdzie} \quad R_i^a = r + (1+r)\rho_i, \tag{4.2}$$

$$\mathrm{var}(R_i) = \sigma_i^2 = \frac{B_i^2}{B_m^2}\sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2, \qquad i = 1,\dots,n, \tag{4.3}$$

$$\mathrm{cov}(R_i, R_j) = \sigma_{ij} = \frac{B_i B_j}{B_m^2}\sigma_m^2; \qquad i,j = 1,\dots,n; \quad i \neq j. \tag{4.4}$$

Przyjmując oznaczenie

$$\beta_i = \frac{B_i}{B_m}, \qquad i = 1,\dots,n, \qquad \text{(parametr „beta" obligacji)} \tag{4.5}$$

wzory (4.1)-(4.4) mają następującą postać

$$R_i = R_i^a + \beta_i(R_m - r) + \varepsilon_i\,; \qquad i = 1,\ldots,n, \tag{4.6}$$

$$\overline{R}_i = R_i^a + \beta_i(\overline{R}_m - r), \tag{4.7}$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2\sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2, \tag{4.8}$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i\beta_j\sigma_m^2. \tag{4.9}$$

Wprowadzamy następujące oznaczenia:

$\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{N} w_i O_i$ - portfel obligacji,

w_i - udział wartościowy obligacji O_i w portfelu $\mathcal{P}$, $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$,

R_p - stopa zwrotu z portfela obligacji $\mathcal{P}$,

$\overline{R}_p$, V_p - wartość oczekiwana i wariancja stopy zwrotu R_p.

W przedstawionym ujęciu portfel $\mathcal{P}$ jest kombinacją wypukłą obligacji O_i $(i = 1,\ldots,N)$, traktowanych jako elementy pewnej przestrzeni liniowej obligacji.

Ogólnie rzecz biorąc, dla portfela $\mathcal{P}$ można łatwo wykazać następujące relacje (*Elton, Gruber*, 1995)

$$R_p = \sum_{i=1}^{N} w_i R_i, \tag{4.10}$$

$$\overline{R}_p \stackrel{\Delta}{=} E(R_p) = \sum_{i=1}^{N} w_i \overline{R}_i, \tag{4.11}$$

$$V_p \stackrel{\Delta}{=} \mathrm{var}(R_p) = \sum_{i=1}^{N} w_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}. \tag{4.12}$$

Podstawiając do wzorów (4.11), (4.12) wartości $\overline{R}_i$, σ_i^2, σ_{ij} określone dla rynku obligacji wzorami (4.7)-(4.9), otrzymamy

$$\overline{R}_p = \sum_{i=1}^{N} w_i \overline{R}_i = \sum_{i=1}^{N} w_i [R_i^a + \beta_i (\overline{R}_m - r)], \tag{4.13}$$

$$V_p = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 (\beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2) + \sum_i \sum_{j \neq i} w_i w_j \beta_i \beta_j \sigma_m^2, \tag{4.14}$$

gdzie $\beta_i = B_i / B_m$, $i = 1, \ldots, n$.

4.1. Optymalizacja portfela obligacji

Należy tak dobrać udziały wartościowe w_i obligacji O_i $(i = 1, \ldots, N)$ wchodzących w skład analizowanego portfela $\mathcal{P}$, aby przy zadanej w góry wartości oczekiwanej $\overline{R}_p^*$ stopy zwrotu z portfela $\mathcal{P}$ - wariancja V_p tej stopy zwrotu była minimalna. Mamy zatem

$$\hat{V}_p = \min_{\{w_i\}} V_p(w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_N) \tag{4.15}$$

przy ograniczeniach

$$\overline{R}_p = \sum_{i=1}^{N} w_i \overline{R}_i = \overline{R}_p^* \tag{4.16}$$

oraz $$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1; \qquad w_i \in [0,1], \qquad \forall\, i = 1, \ldots, N, \tag{4.17}$$

gdzie wartości $\overline{R}_p(\cdot)$, $V_p(\cdot)$ są dane wzorami (4.13), (4.14).

Sformułowane powyżej zagadnienie optymalizacji (4.15)-(4.17) jest klasycznym *zadaniem programowania kwadratowego* i może być rozwiązane za pomocą jednej ze znanych metod. Również wszystkie pozostałe pojęcia, charakterystyczne dla analizy portfelowej rynku akcji - przenoszą się bez zmian na przypadek analizowanego powyżej rynku obligacji. Dotyczy to w szczególności analizy tzw. brzegu efektywnego (*effective frontier*) rozwiązań dopuszczalnych i wielu innych zagadnień.

Jednym z ważniejszych problemów, jakie należy w rozpatrywanym przypadku wziąć pod uwagę - jest zagadnienie dywersyfikacji portfela. Zagadnienie to omówimy teraz nieco szerzej oraz podamy prosty przykład obliczeniowy.

4.2. Zagadnienie dywersyfikacji portfela obligacji

Podobnie jak w przypadku rynku akcji, chodzi w tym przypadku o dywersyfikację tzw. *ryzyka specyficznego* portfela $\mathcal{P}$. Rozważania nasze rozpoczniemy od analizy ryzyka pojedynczej obligacji O_i.

Ryzyko systematyczne i ryzyko specyficzne obligacji O_i

Przyjmiemy, że miarą całkowitego ryzyka inwestycyjnego dotyczącego pojedynczej obligacji O_i jest zmienność rzeczywistej stopy zwrotu R_i z tej obligacji, odniesiona do wartości oczekiwanej $\overline{R}_i$. Zmienność ta wyrażona jest wariancją σ_i^2 stopy zwrotu R_i.

Ze wzoru (4.3) mamy

$$\operatorname{var}(R_i) \stackrel{\Delta}{=} E(R_i - \overline{R}_i)^2 = \sigma_i^2 = \frac{B_i^2}{B_m^2}\sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2, \qquad i = 1,\dots,n, \tag{4.18}$$

gdzie B_i, B_m - zmodyfikowane okresowości obligacji O_i i portfela rynkowego I_m, σ_m^2 - wariancja stopy zwrotu R_m portfela rynkowego, $\sigma_{\varepsilon i}^2$ - wariancja zmiennej resztowej modelu jednoindeksowego obligacji (4.1).

Widzimy więc, że wariancję σ_i^2 stopy zwrotu R_i pojedynczej obligacji, tj. jej *ryzyko całkowite*, można wyrazić w postaci dwóch niezależnych składników. Składniki te interpretujemy następująco:

$\frac{B_i^2}{B_m^2}\sigma_m^2$ - ryzyko systematyczne obligacji O_i,

$\sigma_{\varepsilon i}^2$ - ryzyko specyficzne obligacji O_i.

Ryzyko systematyczne danej obligacji O_i jest więc częścią *całkowitego ryzyka rynkowego*, reprezentowanego przez wariancję σ_m^2 indeksu I_m obligacji. Jak to za chwilę wykażemy, ryzyko to jest również częścią *ryzyka systematycznego portfela* $\mathcal{P}$. Ryzyka systematycznego portfela nie daje się pomniejszyć tj. zdywersyfikować. Natomiast ryzyko specyficzne poszczególnych obligacji reprezentowane przez wariancję $\sigma_{\varepsilon i}^2$ składa się na *ryzyko specyficzne portfela* $\mathcal{P}$ i ryzyko to podlega w portfelu dywersyfikacji. W tym właśnie tkwi podstawowy sens analizy portfelowej rynku obligacji. Wnioski z tej analizy są zresztą analogiczne jak w przypadku rynku akcji; por. *Francis* (1991), *Elton, Gruber* (1995).

Ryzyko systematyczne i ryzyko specyficzne portfela $\mathcal{P}$

W przedstawionych dalej rozważaniach zakładamy, że analizowany portfel $\mathcal{P}$ jest tworzony ze zbioru obligacji O_i $(i = 1,\dots,N)$ będącego pewnym podzbiorem zbioru, w skład którego wchodzą wszystkie obligacje O_i $(i = 1,\dots,n)$, z rozpatrywanej klasy obligacji o stałym oprocentowaniu i o pokrywających się okresach odsetkowych. Mamy zatem

$$\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^{N} w_i O_i \quad \text{(kombinacja wypukła)},$$

przy czym

$$\{O_i,\ i=1,\dots,N\} \subseteq \{O_i,\ i=1,\dots,n\} \subset \mathcal{A}, \tag{4.19}$$

gdzie N - liczba obligacji w portfelu $\mathcal{P}$, n - liczba wszystkich obligacji o tych samych okresach odsetkowych; przy czym $N \le n$, $\mathcal{A}$ - zbiór wszystkich obligacji występujących na danym rynku kapitałowym.

Wartość oczekiwana stopy zwrotu z portfela $\mathcal{P}$

Przyjmiemy następujące oznaczenia

$$\beta_i = \frac{B_i}{B_m} \quad \text{- parametr „beta" obligacji } O_i;\ i=1,\dots,n, \tag{4.20}$$

$$R_p^a \stackrel{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{N} w_i R_i^a \quad \text{- spodziewana stopa zwrotu z portfela } \mathcal{P}, \tag{4.21}$$

$$\text{gdzie } R_i^a = r + (1+r)\rho_i,\ \ i=1,\dots,N,$$

$$\beta_p \stackrel{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{N} w_i \beta_i = \sum_{i=1}^{N} w_i \left(\frac{B_i}{B_m}\right) \quad \text{- parametr „beta" portfela } \mathcal{P}. \tag{4.22}$$

Ze wzoru (4.13) otrzymamy

$$\overline{R}_p = \sum_{i=1}^{N} w_i \overline{R}_i = \sum_{i=1}^{N} w_i R_i^a + \left(\sum_{i=1}^{N} w_i \beta_i\right)(\overline{R}_m - r), \tag{4.23}$$

a więc biorąc pod uwagę (4.21) i (4.22) mamy

$$\overline{R}_p = R_p^a + \beta_p(\overline{R}_m - r) \tag{4.24}$$

— wartość oczekiwana stopy zwrotu z portfela $\mathcal{P}$.

Wariancja stopy zwrotu z portfela $\mathcal{P}$

Dokonamy teraz następującego przekształcenia wzoru (4.14) na wariancję V_p stopy zwrotu R_p z portfela $\mathcal{P}$; por. *Elton, Gruber* (1995).

$$\begin{aligned} V_p &= \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j\neq i=1}^{N} w_i w_j \beta_i \beta_j \sigma_m^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j \beta_i \beta_j \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2 = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{N} w_i \beta_i\right)\left(\sum_{j=1}^{N} w_j \beta_j\right)\sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2. \end{aligned} \tag{4.25}$$

A zatem z (4.22), (4.25) otrzymamy

$$V_p \stackrel{\Delta}{=} E(R_p - \overline{R}_p)^2 = \beta_p^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2 . \tag{4.26}$$

Powyższe równanie ma zasadnicze znaczenie z punktu widzenia teorii zarządzania portfelowego aktywami. Jak można łatwo zauważyć wariancję V_p stopy zwrotu z portfela, będącą miarą *całkowitego ryzyka portfela* $\mathcal{P}$, można zdekomponować na dwa niezależne składniki; są to

$$\beta_p^2 \sigma_m^2 \qquad \text{- ryzyko systematyczne portfela } \mathcal{P}, \tag{4.27}$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2 \qquad \text{- ryzyko specyficzne portfela } \mathcal{P}. \tag{4.28}$$

Mamy więc sytuację podobną do rynku pojedynczej obligacji O_i ; a mianowicie ryzyko całkowite jest sumą dwóch rodzajów ryzyka, tj. *ryzyka systematycznego* będącego częścią ogólnego ryzyka rynkowego σ_m^2 oraz *ryzyka specyficznego*, wynikającego z oddziaływania zmiennych resztowych ε_i $(i = 1,...,N)$.

Istnieje jednak w tym przypadku jedna podstawowa różnica. Otóż można wykazać, że ryzyko specyficzne portfela $\mathcal{P}$ wyrażone wzorem (4.28) można - w odróżnieniu od przypadku pojedynczej obligacji O_i - uczynić dowolnie małym. Oznacza to, że w wyniku odpowiednio dużej dywersyfikacji (a więc zróżnicowania) portfela $\mathcal{P}$, wpływ oddziaływania zmiennych resztowych ε_i poszczególnych obligacji O_i $(i = 1,...,N)$ można zredukować - teoretycznie - do zera. Zagadnienie to wyjaśnimy na następującym przykładzie.

PRZYKŁAD 4.1

Załóżmy dla uproszczenia rozważań, że wagi w_i są dla portfela $\mathcal{P}$ jednakowe, tj.

$$w_i = \frac{1}{N}, \qquad \forall\, i = 1,...,N.$$

Wówczas, ze wzoru (4.26) otrzymamy

$$V_p = \beta_p^2 \sigma_m^2 + \frac{1}{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \sigma_{\varepsilon i}^2\right). \tag{4.29}$$

Oznaczymy

$$\overline{\sigma}_{\varepsilon i}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \sigma_{\varepsilon i}^2 \tag{4.30}$$

— średnie ryzyko specyficzne obligacji O_i $(i = 1,...,N)$ wchodzących w skład portfela $\mathcal{P}$.

Z (4.29), (4.30) mamy zatem

$$V_p = \beta_p^2 \sigma_m^2 + \frac{1}{N} \overline{\sigma_{\varepsilon i}^2} . \tag{4.31}$$

Wynika stąd, że ze wzrostem liczby N analizowanych obligacji O_i, ryzyko specyficzne portfela $\mathcal{P}$ (tj. średnie ryzyko specyficzne obligacji $\overline{\sigma_{\varepsilon i}^2}$ razy $\frac{1}{N}$) - gwaltownie maleje.

Dla zilustrowania tego faktu założymy, że wariancje składników resztowych ε_i są jednakowe, tj.

$$\sigma_{\varepsilon i}^2 = \sigma^2, \qquad \forall i = 1,\dots,N . \tag{4.32}$$

Z (4.30) i (4.32) otrzymamy wówczas

$$\overline{\sigma_{\varepsilon i}^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (\sigma^2) = \frac{1}{N} (N\sigma^2) = \sigma^2 . \tag{4.33}$$

A zatem z (4.31), (4.33) mamy

$$V_p = \beta_p^2 \sigma_m^2 + \frac{1}{N} \sigma^2 , \tag{4.34}$$

oraz

$$\lim_{N\to+\infty} V_p = \lim_{N\to+\infty} \left(\beta_p^2 \sigma_m^2 + \frac{1}{N} \sigma^2 \right) = \beta_p^2 \sigma_m^2 . \tag{4.35}$$

Tak więc ryzyko specyficzne portfela $\mathcal{P}$ (wynoszące w analizowanym przykładzie $\frac{1}{N}\sigma^2$) - może być dla dostatecznie dużej liczby N rozpatrywanych obligacji - praktycznie zredukowane do zera. To co pozostaje, to rynkowe ryzyko systematyczne $\beta_p^2 \sigma_m^2$, wynikające bezpośrednio (w przypadku rynku obligacji) z ryzyka stopy procentowej.

Aby się o tym przekonać, wystarczy wziąć pod uwagę wyprowadzone wcześniej równanie (3.83) *modelu portfela rynkowego.*

Mamy bowiem

$$R_m = r - B_m(\Delta r) , \tag{4.36}$$

gdzie B_m - zmodyfikowana okresowość portfela rynkowego, Δr - losowa zmiana stopy procentowej r.

A zatem, zmienność stopy zwrotu R_m z portfela rynkowego obligacji (mierzona wariancją σ_m^2) wynika bezpośrednio z nieoczekiwanych zmian Δr stopy procentowej. Jak już to wcześniej analizowaliśmy, z równania (4.36) wynika również bezpośrednio, że

$$\sigma_m^2 = B_m^2 \, \sigma_{\Delta r}^2 , \tag{4.37}$$

gdzie $\sigma_{\Delta r}^2 = \mathrm{var}(\Delta r)$ - wariancja zmiennej losowej Δr.

Na zakończenie powyższych rozważań zauważmy, że dla $\sigma_{\varepsilon i}^2 = \sigma^2$ $(i = 1,\ldots,N)$, biorąc pod uwagę wzór (4.34) mamy

σ^2 - ryzyko specyficzne pojedynczej obligacji O_i; $i = 1,\ldots,N$,

$\frac{1}{N}\sigma^2$ - ryzyko specyficzne portfela $\mathcal{P}$.

A zatem,

$$\frac{(\text{ryzyko specyficzne portfela})}{(\text{ryzyko specyficzne obligacji})} \times 100\% = \frac{1}{N} \times 100\% , \tag{4.38}$$

gdzie N - liczba obligacji w portfelu $\mathcal{P}$.

Wynik ten zilustrowano w tablicy 4.1; w pracy *Elton, Gruber* (1995) zamieszczono analogiczną tabelę dla rynku akcji.

Tablica 4.1

Liczba (N) obligacji w portfelu	Ryzyko specyficzne portfela jako procent ryzyka specyficznego pojedynczej obligacji (dla $\sigma_{\varepsilon i}^2 = \sigma^2 = const$)
1	100%
2	50%
3	33%
4	25%
5	20%
10	10%
20	5%
100	1%
1000	0.1%

Zauważmy, że już dla portfela $\mathcal{P}$ zawierającego $N = 20$ walorów (o tym samym parametrze $\sigma_{\varepsilon i}^2 = \sigma^2$), ryzyko specyficzne portfela zostało zredukowane do pięciu procent ryzyka specyficznego pojedynczej obligacji O_i. Dlatego też w praktyce rynków finansowych uważa się, że zbyt duża dywersyfikacja portfela nie ma sensu. Powyżej $N = 20$ aktywów, dalsza dywersyfikacja portfela nic już bowiem nowego nie wnosi z punktu widzenia redukcji ryzyka specyficznego. Uwagę należy raczej skupić na tym, jakie walory z ograniczonego ilościowo zestawu należy dobierać z punktu widzenia założonego kryterium inwestycyjnego. Chodzi tu przede wszystkim o dobór aktywów o możliwie małych współczynnikach korelacji, co wynika bezpośrednio z zagadnienia optymalizacji portfela (4.15)-(4.17).

Ze wzoru (4.12) na wariancję V_p stopy zwrotu z portfela $\mathcal{P}$ wynika również, że byłoby dobrze aby współczynniki korelacji jak największej liczby walorów dobieranych do portfela były przeciwnych znaków. W przypadku portfela obligacji nie jest to jednak w praktyce możliwe. Ze wzoru (4.4) na kowariancję pomiędzy stopami zwrotu R_i oraz R_j obligacji mamy bowiem

$$\operatorname{cov}(R_i, R_j) \stackrel{\Delta}{=} \sigma_{ij} = \frac{B_i B_j}{B_m^2} \sigma_m^2; \quad i,j = 1,\ldots,n; \quad i \neq j, \tag{4.39}$$

gdzie

$$B_i = (D_i^0 - 1)(1 + \rho_i), \qquad i = 1,\ldots,n, \tag{4.40}$$

$$B_m = \sum_{i=1}^{n} X_i B_i. \tag{4.41}$$

Biorąc zatem pod uwagę, że w praktyce zawsze zachodzi

$$\rho_i > -1, \text{ oraz (z założenia) } D_i^0 > 1, \ \forall i = 1,\ldots,n, \tag{4.42}$$

wartości zmodyfikowanych okresowości B_i i B_j są dodatnie, a tym samym

$$\operatorname{cov}(R_i, R_j) > 0, \qquad \forall i,j = 1,\ldots,n; \qquad i \neq j. \tag{4.43}$$

Przedstawiona powyżej własność rynku obligacji O_i $(i = 1,\ldots,n)$ mówiąca o tym, że rzeczywiste stopy zwrotu z tych obligacji są prawie zawsze dodatnio skorelowane, wyraźnie odróżnia ten rynek od rynku akcji, na którym ujemne korelacje jednak są możliwe.

Można stąd wysnuć wniosek, że możliwości jakie oferuje rynkowi obligacji teoria portfela są znacznie mniejsze niż to ma miejsce w przypadku akcji. Dla obligacji, nie można bowiem dobierać do portfela $\mathcal{P}$ walorów o przeciwnych korelacjach - co wyraźnie zmniejszyłoby wariancję V_p stopy zwrotu z portfela - bowiem walory takie praktycznie nie występują. Oczywiście powyższy wniosek jest prawdziwy jedynie pod warunkiem spełnienia szeregu założeń, jakie poczyniliśmy formułując model jednoindeksowy obligacji.

4.3. Zagadnienie stabilności parametrów modelu

W przypadku zastosowania w praktyce sformułowanego w tym punkcie modelu zarządzania portfelem obligacji może się pojawić pewien problem. Otóż w klasycznym zagadnieniu portfelowym Markowitza, zakłada się stabilność w czasie użytych w analizowanym modelu parametrów. W szczególności dotyczy to *współczynników kowariancji* $\operatorname{cov}(R_i, R_j)$ pomiędzy stopami zwrotu z aktywów wchodzących w skład portfela. W przypadku rynku akcji, obserwowana często niestabilność w czasie tych kowariancji, powoduje zasadnicze trudności w zastosowaniu modelu Markowitza w praktyce rynków kapitałowych.

Zauważmy teraz, że podobne problemy mogą pojawić się w trakcie stosowania rozpatrywanego modelu zarządzania portfelowego dla rynku obligacji. Jak to bowiem wynika ze wzoru (4.39) na kowariancję pomiędzy stopami zwrotu R_i i R_j obligacji, parametr ten zależy od iloczynu zmodyfikowanych okresowości B_i, B_j obligacji O_i i O_j, podzielonego przez zmodyfikowaną okresowość B_m portfela rynkowego. Parametry B_i, B_j i B_m - podobnie jak parametry okresowości D_i^0, D_j^0 i D_m^0 - maleją z upływem czasu bieżącego. Dlatego też, należałoby przeprowadzić zarówno teoretyczne jak i empiryczne badania - jaka jest zależność od czasu kowariancji $\operatorname{cov}(R_i, R_j)$, $i,j=1,\dots,n$; $i \neq j$, analizowanych obligacji. W przypadku, gdyby kowariancje te były wolno zmienne w czasie - w obszarze analizowanego horyzontu inwestycyjnego (równego w naszym przypadku okresowi odsetkowemu obligacji) - zastosowanie zaproponowanego podejścia w praktyce mogłoby prowadzić do bardzo obiecujących wyników.

Zagadnienie analizy stabilności parametrów zaproponowanego modelu zarządzania portfelem obligacji można formalnie zapisać następująco. Załóżmy dla uproszczenia, że analizowany rynek obligacji znajduje się w stanie równowagi; tj. $P_r^i = P_0^i$, czyli

$$\rho_i = 0, \qquad \forall\, i = 1,\dots,n. \tag{4.44}$$

Oznaczymy

$D_i^0 = D_i^0(\tau)$ - parametr okresowości obligacji O_i jako funkcja (malejąca) czasu bieżącego $\tau = 1,2,3,\dots$.

Biorąc pod uwagę wzory (4.5), (4.40), (4.41) i (4.44), parametr „beta” obligacji O_i możemy wyrazić następująco

$$\beta_i \stackrel{\Delta}{=} \frac{B_i}{B_m} = \frac{D_i^0(\tau) - 1}{\sum_{i=1}^{n} X_i D_i^0(\tau) - 1} = \frac{D_i^0(\tau) - 1}{D_m^0(\tau) - 1}, \tag{4.45}$$

gdzie $D_m^0(\tau)$ - okresowość portfela rynkowego.

Ponadto, z (4.39) i (4.45) otrzymamy

$$\operatorname{cov}(R_i, R_j) = \sigma_{ij}(\tau) = \beta_i(\tau)\,\beta_j(\tau)\,\sigma_m^2; \quad i,j=1,\ldots,n; \quad i \neq j. \tag{4.46}$$

Tak więc analiza stabilności ze względu na czas bieżący τ kowariancji $\sigma_{ij}(\tau)$ pomiędzy stopami zwrotu R_i i R_j rozpatrywanych obligacji, sprowadza się do analizy przebiegu w czasie parametrów $\beta_i(\tau)$ tych obligacji. Zgodnie ze wzorem (4.45), parametr $\beta_i(\tau)$ jest ilorazem dwóch funkcji malejących z upływem czasu τ. Bardziej szczegółowy charakter przebiegu funkcji $\beta_i(\tau)$ można by określić wprowadzając wzory na okresowość $D_i^0(\tau)$ obligacji dla przypadku ciągłej kapitalizacji odsetek.

Wydaje się (lecz należałoby to sprawdzić), że założenie co do stabilności w czasie parametrów analizowanego modelu jest spełnione w przypadku, gdy rozpatrujemy zbiór długoterminowych obligacji O_i $(i=1,\ldots,n)$. Wówczas, dynamika zmian z upływem czasu bieżącego τ parametrów „beta" obligacji, a tym samym i współczynników kowariancji σ_{ij} - powinna być małą. Natomiast w przypadku obligacji krótkoterminowych (tj. o bliskich terminach do wykupu T_i) mogą się pojawić pewne problemy, związane z zastosowaniem w praktyce zaproponowanego podejścia do zarządzania portfelem obligacji.

5. Model jednoindeksowy dla rynku obligacji - przypadek krzywej dochodowości o dowolnym kształcie

Dokonamy teraz pewnego istotnego uogólnienia zagadnień rozpatrywanych w punktach 2-4. A mianowicie, pominiemy założenie, że dla danego rynku finansowego obowiązuje płaska krzywa dochodowości, przyjmując, że krzywa ta może mieć dowolny kształt. W przedstawionych poniżej rozważaniach przedstawimy szereg definicji oraz twierdzeń bez obszerniejszego komentarza oraz dowodów. Prezentowane zagadnienia są szerzej przedstawione w pracy autora (*Jakubowski*, 2000). Tak więc poniżej, skoncentrujemy się jedynie na przedstawieniu samych wyników uzyskanych w powyższej pracy.

Oznaczymy

$\{r_{0t},\ t=1,\ldots,T\} = \{r_{01},\ldots,r_{0t},\ldots,r_{0T}\}$ - struktura terminowa stóp procentowych,

gdzie t - termin zapadalności zobowiązań, r_{0t} - stopa procentowa *spot* (w skali roku).

Wartość obligacji w chwili bieżącej $\tau = 0$

Wartość tę można - w przypadku krzywej dochodowości o dowolnym kształcie - przedstawić na kilka sposobów.

Podstawowy wzór jest następujący

$$P_0 = \sum_{t=1}^{T-1} \frac{C}{(1+r_{0t})^t} + \frac{C+N}{(1+r_{0t})^T}; \tag{5.1}$$

oznaczając $C_t = C$ dla $t = 1,...,(T-1)$ oraz $C_t = C + N$ dla $t = T$, otrzymamy

$$P_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r_{0t})^t} . \tag{5.2}$$

Stopy procentowe *forward* oraz oczekiwane stopy procentowe *spot*

Problematyka dotycząca tych stóp procentowych była rozpatrywana m.in. w pracy (*Jakubowski*, 1996). Poniżej, przedstawimy tylko pewne uwagi z tego zakresu.

Oznaczymy

${}_0f_{t_1t_2}$ - stopa procentowa *forward* dla okresu $[t_1, t_2]$ obowiązująca (czy też rozpatrywana) w chwili $\tau = 0$.

Ponadto, dla okresów jednorocznych

$$f_t \overset{\Delta}{=} {}_0f_{(t-1)t}; \quad t = 2,3...,T \tag{5.3}$$

oraz dla $t = 1$, $f_1 = r_{01}$ (z definicji),

gdzie f_t - roczna stopa procentowa *forward* dla roku t rozpatrywana w chwili $\tau = 0$,
r_{01} - stopa procentowa *spot* dla pierwszego roku.

Relacja pomiędzy stopami procentowymi *forward* f_t i stopami *spot* r_{0t} jest następująca:

$$(1+r_{0t})^t \overset{\Delta}{=} \left[1+r_{0(t-1)}\right]^{t-1} (1+f_t); \qquad t = 2,...,T \tag{5.4}$$

oraz, dla $t = 1$,

$$1 + r_{01} \overset{\Delta}{=} 1 + f_1 \quad \text{czyli} \quad f_1 = r_{01} .$$

Stąd $$f_t = \frac{(1+r_{0t})^t}{[1+r_{0(t-1)}]^{t-1}} - 1; \qquad t = 2,\ldots,T. \tag{5.5}$$

Stosując rekurencyjnie wzór (5.4) otrzymamy również

$$(1+r_{0t})^t = (1+f_1)(1+f_2)\times\ldots\times(1+f_t). \tag{5.6}$$

Wzory (5.4)-(5.6) są zawsze prawdziwe, niezależnie od *teorii struktury terminowej stóp procentowych*, jaka obowiązuje dla danego rynku finansowego. Stopy procentowe *forward* f_t można więc w powyższym sensie traktować jako pewien fakt matematyczny, określony przez równanie rekurencyjne (5.4).

Ujmując to jeszcze inaczej można stwierdzić, że znając stopy procentowe *spot* r_{0t} określające daną strukturę terminową stóp procentowych, możemy jednoznacznie wyznaczyć stopy procentowe *forward* f_t. Istnieje również zależność odwrotna: znając stopy procentowe *forward* f_t możemy określić jednoznacznie stopy procentowe *spot* r_{0t}, wykorzystując równanie (5.6). Stopy procentowe *forward* f_t mogą być na przykład określone przez wyniki notowań (tj. ceny) na rynkach terminowych obligacji czysto-dyskontowych.

Z powyższego wynika, że można mówić o strukturze terminowej stóp procentowych *spot* jak i o strukturze terminowej stóp procentowych *forward*, przy czym struktury te wzajemnie z siebie wynikają.

Wartość bieżąca obligacji wyrażona za pomocą stóp procentowych *forward*
(w chwili $\tau = 0$)

Z (5.2) i (5.6) mamy

$$P_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r_{0t})^t} = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+f_1)(1+f_2)\times\ldots\times(1+f_t)}, \tag{5.7}$$

przy czym $f_1 = r_{01}$.

Relacja pomiędzy rocznymi stopami *forward*
a rocznymi oczekiwanymi stopami procentowymi *spot*

Jednym z podstawowych problemów rozpatrywanych w teorii stóp procentowych jest zagadnienie na ile stopy procentowe *forward* są dobrymi prognozami przyszłych rocznych stóp procentowych, jakie będą obowiązywać na danym rynku. Te przyszłe stopy procentowe nazywa się właśnie *oczekiwanymi rocznymi stopami spot*. Odpowiedź na to ważne pytanie nie jest niestety jednoznaczna i zależy od obowiązującej dla danego rynku *teorii struktury terminowej stóp procentowych*. Można to sprawdzić wyłącznie empirycznie weryfikując założenia odnośnych teorii. Zagadnienia te zostały obszernie opisane m.in. w pracy autora (*Jakubowski*, 1996).

Ogólnie, przyjmuje się następującą relację

$$f_t = r_t + \alpha_t; \quad t = 2,...,T \tag{5.8}$$

oraz $f_1 = r_1 = r_{01}$ dla $t = 1$,

gdzie r_t - oczekiwane roczne stopy procentowe *spot*, α_t - tzw. parametr płynności (*liquidity premium*).

W przypadku teorii czystych oczekiwań (*pure expectations theory*) zakłada się $\alpha_t = 0$ $(t = 1,...,T)$; dla teorii preferencji płynności (*liquidity preference theory*) - $\alpha_t > 0$ $(t = 2,...,T)$; natomiast w myśl teorii preferowanego środowiska (*preferred habitat theory*) wartości α_t - mogą być zarówno dodatnie jak i ujemne; por. *Elton, Gruber* (1995).

Teoria czystych oczekiwań

Jak wspomniano, w myśl tej teorii zachodzi $\alpha_t = 0$ $(t = 1,...,T)$, a zatem ze wzoru (5.8) otrzymamy

$$f_t = r_t, \qquad \forall\, t = 1,...,T. \tag{5.9}$$

Zależność (5.9) jest chyba najkrótszym z możliwych sformułowaniem teorii czystych oczekiwań; a mianowicie: *roczne stopy procentowe forward są równe oczekiwanym rocznym stopom procentowym spot*. Jest to jednocześnie „bardzo odważne" stwierdzenie. Wynika bowiem z niego bezpośrednio, że mając zidentyfikowaną (dla $\tau = 0$) strukturę terminową bieżących stóp procentowych *spot* r_{0t}, możemy jednoznacznie określić oczekiwane roczne stopy procentowe *spot* r_t, dla przyszłych okresów. Stopy te są jednocześnie prognozowanymi stopami procentowymi, określonymi przy założeniu, że *oczekiwania* rynku co do przyszłości się nie zmienią; *Fama* (1976).

Z (5.5) i (5.9) mamy zatem

$$r_t = \frac{(1 + r_{0t})^t}{[1 + r_{0(t-1)}]^{t-1}} - 1, \qquad t = 2,...,T \tag{5.10}$$

oraz $r_1 = r_{01}$ dla $t = 1$.

Z (5.6) i (5.9) wynika również, że

$$(1 + r_{0t})^t = (1 + r_1)(1 + r_2) \times ... \times (1 + r_t). \tag{5.11}$$

Równanie to jest podstawowym równaniem *teorii czystych oczekiwań*. Jest ono często komentowane, interpretowane, a niekiedy - negowane; por. *McCulloch* (1975), *Jakubowski* (1996). Zauważmy bowiem, że w ogólnym przypadku (tj. dla $\alpha_t \neq 0$) - ze wzorów (5.6) i (5.8) mamy

$$(1+r_{0t})^t = (1+r_1)(1+r_2+\alpha_2)\times\ldots\times(1+r_t+\alpha_t)\ .$$

Wartość bieżąca obligacji wyrażona za pomocą oczekiwanych rocznych stóp procentowych *spot*

Z równań (5.2) i (5.11), w przypadku obowiązywania *teorii czystych oczekiwań*, mamy

$$P_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r_{0t})^t} = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+r_1)(1+r_2)\times\ldots\times(1+r_t)}\ . \tag{5.12}$$

Wartość przyszła obligacji w chwili $\tau = 1$

Wyznaczymy teraz przyszłą wartość wewnętrzną obligacji dla chwili $\tau = 1$ określoną przy założeniu, że oczekiwane roczne stopy procentowe *spot* r_t $(t = 2,\ldots,)$ nie zmienią się. Stosując wzór (5.12) dla chwili $\tau = 1$, a więc dla skróconego horyzontu czasowego wynoszącego $(T-1)$, otrzymamy

$$P_1 = P(\tau = 1) = \sum_{t=2}^{T} \frac{C_t}{(1+r_2)\times\ldots\times(1+r_t)}\ . \tag{5.13}$$

Wprowadzimy następujące oznaczenie

${}_1r_{1t}$ - oczekiwana stopa procentowa *spot* dla okresu $[1, t]$, $t = 2,\ldots,T$.

Z definicji mamy

$$(1+{}_1r_{1t})^{t-1} \stackrel{\Delta}{=} (1+r_2)(1+r_3)\times\ldots\times(1+r_t)\,. \tag{5.14}$$

A zatem, z (5.13) i (5.14) otrzymamy

$$P_1 = P(\tau = 1) = \sum_{t=2}^{T} \frac{C_t}{(1+{}_1r_{1t})^{t-1}}\ . \tag{5.15}$$

Wzory (5.13)-(5.15) są prawdziwe dla dowolnej teorii struktury terminowej stóp procentowych. Tym niemniej, zakładając prawdziwość *teorii czystych oczekiwań* wzory te mają dla nas szczególne znaczenie, bowiem znając bieżącą strukturę terminową stóp procentowych *spot* r_{0t}, potrafimy efektywnie wyznaczyć oczekiwane stopy procentowe *spot* ${}_1r_{1t}$, a tym samym i spodziewaną dla chwili $\tau = 1$ wartość P_1 obligacji.

W przypadku innych teorii, np. *teorii preferencji płynności*, sprawa się poważnie komplikuje, ponieważ w celu wyznaczenia stóp procentowych r_t (a tym samym i stóp ${}_1r_{1t}$), musimy najpierw zidentyfikować (dla chwili $\tau = 0$) parametry α_t. Następnie, musimy założyć, że parametry te nie zmienią się z okresu na okres, tj. że

$$\alpha_t(\tau = 0) = \alpha_t(\tau = 1), \qquad \forall\, t = 2,\dots,T.$$

Ogólnie rzecz biorąc, identyfikacja parametrów płynności α_t (*liquidity premium*) napotyka w praktyce na poważne trudności; oczywiście - o ile w ogóle dla danego rynku obowiązuje teoria preferencji płynności, por. *Fama* (1976, 1984).

Dla celów dalszych rozważań założymy, że dla danego rynku finansowego obowiązuje *teoria czystych oczekiwań*, to znaczy, że potrafimy efektywnie wyznaczyć na podstawie wzoru (5.15) oczekiwaną dla chwili $\tau = 1$ wartość obligacji.

Sformułujemy teraz następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5.1

W przypadku, gdy dla danego rynku obowiązuje teoria czystych oczekiwań oraz rynek ten jest zrównoważony (tj. $P_r^t = P_0^t$), spodziewana stopa zwrotu z wszystkich obligacji o stałym oprocentowaniu jest - dla tego samego okresu inwestycyjnego - jednakowa. Stopa ta, liczona w skali roku, jest dla wszystkich obligacji równa stopie procentowej *spot* r_{0t} dla danego okresu, tj.

$$R_i^a(t) = r_{0t}, \qquad \forall\, 1,\dots,n,$$

gdzie $R_i^a(t)$ - spodziewana stopa zwrotu z obligacji O_i za t okresów odsetkowych (wyrażona w skali roku).

Dowód: (*Jakubowski*, 2000).

Z Twierdzenia 5.1 wypływa natychmiast następujący wniosek.

Wniosek 5.1

O ile założenia Twierdzenia 5.1 są spełnione, to spodziewana stopa zwrotu z wszystkich obligacji liczona za jeden (najbliższy) okres odsetkowy jest taka sama i równa stopie procentowej *spot* r_{01} dla tego okresu, tj.

$$R_i^a = r_{01}, \qquad \forall\, 1,\dots,n,.$$

Można również wykazać, że

Wniosek 5.2

W przypadku rynku niezrównoważonego $(P_r \neq P_0)$ oraz przy spełnionych pozostałych założeniach Twierdzenia 5.1, spodziewana stopa zwrotu z obligacji O_i, za jeden (najbliższy) okres odsetkowy, wyraża się wzorem

$$R_i^n = r_{01} + (1 + r_{01})\,\rho_i,$$

gdzie $\rho_i = \dfrac{P_0^i - P_r^i}{P_r^i}$, P_r^i - bieżąca cena rynkowa obligacji, P_0^i - bieżąca wartość wewnętrzna obligacji.

Dowód: *Jakubowski* (2000).

* * *

Parametr okresowości oraz oczekiwanej okresowości obligacji

W przypadku *struktury terminowej stóp procentowych* o dowolnym kształcie, zdefiniowanie parametru okresowości D obligacji jest nieco bardziej złożone, niż to przedstawiliśmy w punkcie 2. Wymaga to na ogół przyjęcia pewnych dodatkowych założeń co do dynamiki zmian tej struktury; por. *Elton, Gruber* (1995), *Zaremba* (1995), *Jakubowski* (2000).

Dla potrzeb dalszych rozważań przyjmiemy jedno z najprostszych (a jednocześnie najbardziej ograniczających) założeń, tj. że

$$\frac{\Delta r_{0t}}{1 + r_{0t}} = \frac{\Delta r_{01}}{1 + r_{01}}, \qquad \forall\, t = 1, \ldots, T. \tag{5.16}$$

Powyższe oznacza, że zakładamy, że możliwe są tylko proporcjonalne zmiany wartości $(1 + r_{0t})$; wynika to bezpośrednio z faktu, że $\Delta r_{0t} = \Delta(1 + r_{0t})$.

Mamy wówczas (*Jakubowski*, 1997a):

Okresowość obligacji w chwili $\tau = 0$

$$D^0 \stackrel{\Delta}{=} -\frac{\Delta P_0}{P_0} \Big/ \frac{\Delta r_{01}}{1 + r_{01}}, \tag{5.17}$$

przy czym można wykazać, że

$$D^0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{t\,C_t}{(1 + r_{0t})^t} \Big/ P_0; \qquad \text{gdzie} \quad P_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1 + r_{0t})^t}. \tag{5.18}$$

Oczekiwana okresowość obligacji w chwili $\tau = 1$

Podobnie, jak w przypadku płaskiej struktury terminowej stóp procentowych, wprowadzimy teraz pojęcie oczekiwanej okresowości D^1 obligacji O_i. Przyjmiemy następujące oznaczenia:

${}_1r_{1t}$ - oczekiwana stopa procentowa *spot* dla okresu $[1, t]$; oraz w szczególności,

${}_1r_{12} = r_2$ - oczekiwana roczna stopa procentowa *spot* dla okresu $[1, 2]$.

Definicja oczekiwanej okresowości D^1 jest następująca:

$$D^1 = D(\tau = 1) \stackrel{\Delta}{=} -\frac{\Delta P_1}{P_1} / \frac{\Delta_1 r_{12}}{1 + {}_1r_{12}}, \quad \text{przy czym można wykazać, że} \qquad (5.19)$$

$$D^1 = \sum_{t=2}^{T} \frac{(t-1)C_t}{(1+{}_1r_{1t})^{t-1}} / P_1; \qquad \text{gdzie} \quad P_1 = \sum_{t=2}^{T} \frac{C_t}{(1+{}_1r_{1t})^{t-1}}. \qquad (5.20)$$

Wprowadzenie definicji (5.19) oczekiwanej okresowości D^1 wymaga spełnienia następującego warunku

$$\frac{\Delta_1 r_{1t}}{1 + {}_1r_{1t}} = \frac{\Delta_1 r_{12}}{1 + {}_1r_{12}}, \qquad \forall\, t = 2, \dots, T, \qquad (5.21)$$

Warunek (5.21) jest odpowiednikiem warunku (5.16), sformułowanym dla zmian oczekiwanych stóp procentowych *spot* ${}_1r_{1t}$. Dlatego ważne jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.2

Przy założeniu *teorii czystych oczekiwań* oraz dla proporcjonalnych zmian bieżących stóp procentowych *spot* (dla $\tau = 0$) tj.

$$\frac{\Delta r_{0t}}{1 + r_{0t}} = \frac{\Delta r_{01}}{1 + r_{01}}, \qquad \forall\, t = 1, \dots, T,$$

charakter tych zmian przenosi się również (dla małych Δr_{0t}) na oczekiwane stopy procentowe *spot*, rozpatrywane dla $\tau = 1$, tj.

$$\frac{\Delta_1 r_{1t}}{1 + {}_1r_{1t}} = \frac{\Delta_1 r_{12}}{1 + {}_1r_{12}} \qquad \forall t = 2, \dots, T.$$

Dowód: *Jakubowski* (2000).

Z Twierdzenia 5.2 wynika bezpośrednio, że warunek (5.21) jest automatycznie spełniony o ile tylko założymy prawdziwość warunku (5.16) - co uczyniliśmy na początku rozważań. Ponadto, można również łatwo wykazać, że dla małych Δr_{01} zachodzi

$$\frac{\Delta\, {}_1r_{12}}{1+{}_1r_{12}} = \frac{\Delta r_{01}}{1+r_{01}}. \tag{5.22}$$

A zatem z (5.19) i (5.22) mamy

$$\frac{\Delta P_1}{P_1} = -D^1 \frac{\Delta r_{01}}{1+r_{01}}. \tag{5.23}$$

Zależność (5.23) ma zasadnicze znaczenie dla dalszych rozważań. A mianowicie, postępując dalej analogicznie jak w przypadku płaskiej struktury terminowej stóp procentowych (por. punkt 3), można wyprowadzić następujący wzór na zależność funkcyjną pomiędzy parametrem *oczekiwanej okresowości* D^1 a parametrem *bieżącej okresowości* D^0:

$$D^1 = (D^0 - 1)(1+r_{01})\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{-1}, \tag{5.24}$$

gdzie r_{01} - rynkowa stopa procentowa *spot* dla okresu [0,1], P_0 - wartość bieżąca obligacji w chwili $\tau = 0$, P_1 - wartość bieżąca obligacji w chwili $\tau = 1$, wyznaczona przy założeniu, że w okresie $\tau \in [0,1]$ oczekiwane stopy procentowe *spot* ${}_1r_{1t}$ $(t = 2,\ldots,T)$ nie uległy zmianie.

Następnie, wykorzystując zależność (5.24), można wyprowadzić wzór na rzeczywistą stopę zwrotu R_i^* z inwestycji w obligację O_i:

$$R_i^* = [r_{01} + (1+r_{01})\rho_i] - (D_i^0 - 1)(1+\rho_i)\Delta r_{01} + \varepsilon_i. \tag{5.25}$$

Postępując teraz analogicznie jak w punkcie 3, możemy sformułować następujący model jednoindeksowy obligacji:

Model jednoindeksowy I

$$R_i^* = R_i^a - B_i \Delta r_{01} + \varepsilon_i, \qquad \forall\, i = 1,\ldots,n, \tag{5.26}$$

gdzie

$$R_i^a = r_{01} + (1+r_{01})\rho_i \qquad \text{- spodziewana stopa zwrotu,} \tag{5.27}$$

$$B_i = (D_i^0 - 1)(1+\rho_i) \qquad \text{- zmodyfikowany parametr okresowości,} \tag{5.28}$$

$$\rho_i = \frac{P_0^i - P_r^i}{P_r^i} \qquad \text{- nierównowagowa stopa zwrotu.} \tag{5.29}$$

Również sformułowanie modeli jednoindeksowych II i III obligacji O_i jest analogiczne jak w punkcie 3 z tym, że każdorazowo w miejsce rynkowej stopy procentowej r należy podstawić stopę procentową *spot* r_{01}, obowiązującą w pierwszym okresie odsetkowym.

Mamy zatem:

Model jednoindeksowy II

$$R_i^* = R_i^a + \frac{B_i}{B_m}(R_m - r_{01}) + \varepsilon_i, \qquad \forall\, i = 1,\dots,n. \tag{5.30}$$

Model jednoindeksowy III

$$R_i^* = \overline{R}_i + \frac{B_i}{B_m}(R_m - \overline{R}_m) + \varepsilon_i, \qquad \forall\, i = 1,\dots,n, \tag{5.31}$$

gdzie

$$\overline{R}_i = R_i^a + \frac{B_i}{B_m}(\overline{R}_m - r_{01}) \qquad \text{- oczekiwana stopa zwrotu.}$$

Zagadnienie Markowitza

Wykorzystując podany powyżej model jednoindeksowy II o postaci (5.30), sformułowanie *zagadnienie Markowitza* zarządzania portfelem obligacji jest w analizowanym przypadku identyczne ze sformułowaniem zamieszczonym w punkcie 4, odnoszącym się do przypadku płaskiej struktury terminowej stóp procentowych; por. (4.15)-(4.17).

Również rozpatrywane w punkcie 4.2 rozważania dotyczące *zagadnienia dywersyfikacji* portfela obligacji – przenoszą się bez zmian na analizowany powyżej przypadek struktury terminowej stóp procentowych o dowolnym kształcie.

Uwagi końcowe

Wyprowadzone powyżej modele jednoindeksowe I, II, III obligacji, przy założeniu dowolnego kształtu struktury terminowej stóp procentowych *spot* oraz proporcjonalnych zmian tych stóp, stanowią istotne uogólnienie modeli, rozpatrywanych poprzednio dla płaskiej krzywej dochodowości. O ile autorowi jest wiadomo, modele takie nie były jak dotąd rozpatrywane w literaturze przedmiotu.

Dalsze uogólnienie zaproponowanego podejścia na przypadek innych - niż proporcjonalne - zmian stóp procentowych r_{0t}, stwarza już zasadnicze trudności. Na przykład dla często zakładanego modelu zmian (*Elton, Gruber*, 1995)

$$\frac{\Delta r_{0t}}{1+r_{0t}} = L^{t-1}\frac{\Delta r_{01}}{1+r_{01}}, \qquad t=1,\dots,T, \qquad L\in(0,1), \tag{5.32}$$

można wykazać, że nie jest prawdziwe Twierdzenie 5.2. Czy też ujmując to nieco inaczej, można wykazać, że twierdzenie to jest prawdziwe wyłącznie dla wartości $L=1$ i małych zmian Δr_{0t}; *Jakubowski* (2000).

Ponadto, z punktu widzenia Twierdzenia 5.2, istotne jest również spełnienie założeń *teorii czystych oczekiwań*. Można na przykład wykazać, że twierdzenie to nie jest prawdziwe w przypadku *teorii preferencji płynności*.

Z kolei w przypadkach, w których Twierdzenie 5.2 nie jest prawdziwe, pojawiają się zasadnicze trudności w sformułowaniu tego co rozumiemy pod pojęciem oczekiwanej okresowości D^1, por. wzory (5.19) i (5.23). A to z kolei uniemożliwia w ogóle sformułowanie modelu jednoindeksowego obligacji - przynajmniej w postaci - jaka została powyżej zaproponowana przez autora.

Oczywiście zawsze można przyjąć, że wszelkie odstępstwa od sformułowanych w powyższym modelu założeń - są ujęte w losowości zmiennej resztowej ε_t. Jednak to ostatnie - byłoby tylko potwierdzeniem poglądu autora, że dalsza komplikacja - czy też uogólnienie sformułowanego modelu - nie wydaje się możliwe. Przynajmniej w klasie modeli jednoindeksowych. Pozostaje oczywiście otwartą sprawą - czy takie uogólnienie jest w ogóle potrzebne. Ale żeby odpowiedzieć na to pytanie, należałoby najpierw odwołać się do badań empirycznych, dotyczących testowania dokładności sformułowanego modelu w praktyce. Powyższe dotyczy również całości rozpatrywanych w niniejszej pracy zagadnień aktywnego zarządzania portfelem obligacji.

LITERATURA

Babcock G. (1984): Duration as a Link Between Yield and Value. *Journal of Portfolio Management*, Summer & Fall 1984.

Bierwag G., Kaufman G., Toevs (Eds.) (1983): *Innovations in Bond Portfolio Management - Duration Analysis and Immunization*. Greenwich, Conn., JAI Press.

Bierwag G. (1987): *Duration Analysis - Managing Interest Rate Risk*. Ballinger Press, Cambridge, Mass.

Brennan M., Schwartz E. (1983): Duration, Bond Pricing and Portfolio Management. W: *Innovations in Bond Portfolio Management*, Bierwag G., Kaufman G., Toevs (Eds.), Greenwich, Conn., JAI Press.

Campbell J.Y. (1986): A Defense of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, March 1986, Vol. XLI, No. 1, pp. 183-193.

Carleton W.T., Cooper I.A. (1976): Estimation and Uses of the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, Vol. 31, pp. 1067-1083.

Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. (1981): A Re-examination of Traditional Hypotheses about the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, September 1981, pp. 769-799.

Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. (1985):A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, pp. 385-407.

Dahl H. (1993): *A Flexible Approach to Interest-Rate Risk Management.* In: Zenios S.A. (Ed.), Financial Optimization. Cambridge University Press, Cambridge.

Dattareya R.E., Fabozzi F.J. (1995): *Active Total Return Management of Fixed-Income Portfolios.* Irwin, Burr Ridge, Ill.

Elton E.J., Gruber M., Naber P. (1988): Bond Returns, Immunization and the Return Generating Process. In: Sarnat M., Szego G. (Eds.), *Studies in Banking&Finances*, New York, North-Holland, 1988.

Elton E.J., Gruber M.J. (1995): *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis.* Wiley, New York, 5-th Ed.

Fabozzi F.J. (2000): *Bond Markets - Analysis and Strategies.* Prentice-Hall, 4-th ed.

Fabozzi F.J. (1995): *Investment Management.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Fabozzi F.J., Fong G. (1994): *Advanced Fixed Income Portfolio Management - The State of Art.* Probus, Chicago, Ill.

Fama E.F. (1976): Forward Rates as Predictors of Future Spot Rates. *Journal of Financial Economics*, No.3, April 1976.

Fama E.F. (1984): Term Premiums in Bond Returns. *Journal of Financial Economics*, December 1984.

Fong H.G., Fabozzi F.J. (1985): *Fixed Income Portfolio Management.* Dow Jones-Irwin, Homewood, Ill.

Francis J.C. (1991): *Investments - Analysis and Management.* McGraw-Hill, New York, 5-th ed.

Garbade K. (1986): *Modes of Fluctuations in Bond Yields - an Analysis of Principal Components.* Bankers Trust Company, Money Market Center, New York, June 1986.

Garbade K. (1989): *Polynomial Representations of the Yield Curve and its Modes of Fluctuations.* Bankers Trust Company, Money Market Center, New York, No. 53, July 1989.

Haugen R.A. (1993): *Modern Investment Theory.* Prentice-Hall.

Ho T.S.Y. (1990): *Strategic Fixed Income Investment.* Dow Jones-Irwin, Homewood, Ill.

Jajuga K., Jajuga T. (1996): *Inwestycje - instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa.* PWN, Warszawa.

Jakubowski A. (1994): *Przegląd instrumentów finansowych na rynkach światowych oraz w Polsce.* Raport IBS PAN, A 20.53, Warszawa 1994.

Jakubowski A. (1995): *Podstawowe własności obligacji i instrumentów pochodnych. Analiza rynku obligacji w kraju i za granicą.* W: Metodologia planowania rozwoju strategicznego TP SA - etap II. (Praca zbiorowa), Raport IBS PAN - TP SA, Warszawa, lipiec 1995, Rozdz. 4.1-4.2, s. 107-145.

Jakubowski A. (1996): *Modelowanie struktury czasowej stóp procentowych.* Projekt Badawczy KBN Nr PB 536/H02/96/10-G37, IBS PAN, Warszawa.

Jakubowski A. (1997a): *Ryzyko zmian stóp procentowych - zasady tworzenia zimmunizowanych portfeli inwestycyjnych.* Projekt Badawczy KBN Nr PB 536/H02/96/10-G37, IBS PAN, Warszawa.

Jakubowski A. (1997b): *Zagadnienia teorii stóp procentowych.* Projekt Badawczy KBN Nr PB 536/H02/96/10-G37, IBS PAN, Warszawa.

Jakubowski A. (2000): *Zarządzanie portfelem obligacji - model jednoindeksowy.* IBS PAN Working Paper, PB 1352/H02/98/14-G47, Warszawa (*w przygotowaniu*).

Jones F.J. (1991): Yield Curve Strategies. *Journal of Fixed Income*, Sept. 1991, pp. 41-43.

Kulikowski R., Bury H., Jakubowski A. (1995): *Analiza czynnikowa struktury czasowej stóp procentowych oraz inflacji w Polsce.* Raport IBS PAN, PSWD 5/95, Warszawa.

Kulikowski R., Bury H., Jakubowski A. (1996): *Analiza czynnikowa i modelowanie struktury czasowej stóp procentowych oraz inflacji z długim horyzontem.* Raport IBS PAN, PSWD 13/96, Warszawa.

Kulikowski R., Jakubowski A. (2000a): Valuation of Catastrophe Bonds. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*, Ser. Technical Sciences, Vol. 48, No. 2, 2000, pp. 181-211.

Kulikowski R., Jakubowski A. (2000b): Wycena obligacji w warunkach ryzyka niewypłacalności emitenta. W: *Modelowanie Preferencji a Ryzyko*, T. Trzaskalik (red.), Katowice.

Ładko A. (1994): *Wybrane instrumenty rynku pieniężnego i kapitałowego*. Bibl. Menedżera i Bankowca, Warszawa.

Litterman R., Scheinkman J. (1991): Common Factors Affecting Bond Returns. *Journal of Fixed Income*, June 1991, pp. 54-61.

Malkiel B.G. (1966): *The Term Structure of Interest Rates*. Princeton University Press, Princenton, N.J.

McCulloch J.H. (1971): Measuring the Term Structure of Interest Rates. *Journal of Business*, Jan. 1971, pp. 19-31.

McCulloch J.H. (1975): An Estimate of the Liquidity Premium. *Journal of Political Economy*, Vol. 83, pp. 95-119.

Nelson J., Schaefer S. (1983): The Dynamics of the Term Structure and Alternative Portfolio Immunization Strategies. W: *Innovations in Bond Portfolio Management*, Bierwag G., Kaufman G., Toevs (Eds.), Greenwich, Conn., JAI Press.

Smith S.D., Spudeck R.E. (1993): *Interest Rates - Principles and Applications*. The Dryden Press, Fort Worth.

Wood J.H. (1993): Do yield curves normally slope up? W: S.D. Smith, R.E. Spudeck - *Interest Rates*, The Dryden Press, Fort Worth, pp. 143-153.

Zaremba L.S. (1995): *Solution of immunization problem in case of proportional spot rate shifts*. WP-3-1995, Systems Research Institute, Polish Academy of Sciences, Warsaw.

Zenios S.A., Ed. (1993): *Financial Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge.