Raport Badawczy

Research Report

RB/74/2002

Przesłanki opłacalności organizowania centrów logistycznych

S. Piasecki

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Dr Barbara Mażbic-Kulma

Warszawa 2002

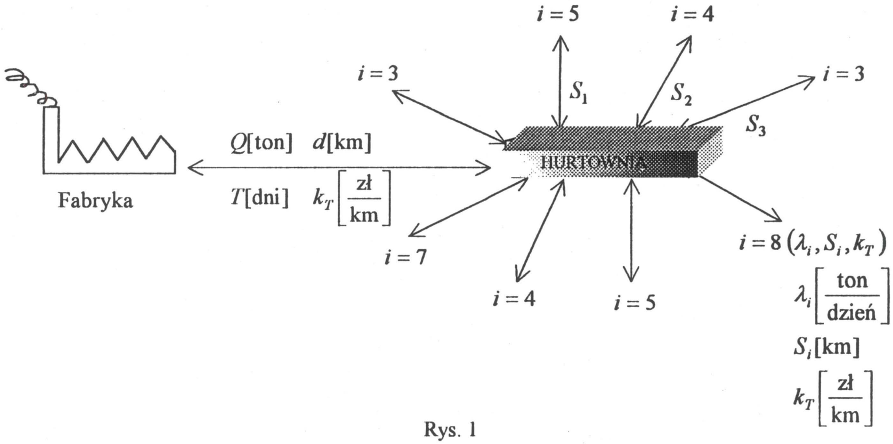
Stanisław Piasecki

PRZESŁANKI OPŁACALNOŚCI ORGANIZOWANIA CENTRÓW LOGISTYCZNYCH

Instytut Badań Systemowych PAN
Warszawa 2002

Spis treści

I. HURTOWNIE JEDNEGO RODZAJU TOWARU (jednoasortymentowe)



Rys. 1

Koszt dostaw do hurtowni w okresie T

$$C_0+\frac{1}{2\lambda}Q^2\cdot C_h+\lambda\cdot\tau\cdot C_h\cdot T+d\cdot k_T \qquad C_h=\rho C\left[\frac{\text{zł}}{\text{tona}\cdot\text{dzień}}\right]$$

Ale $T=\frac{Q}{\lambda}$ gdzie $\lambda=\sum_i \lambda_i$ więc koszt będzie równy

$$C_0+\frac{1}{2\lambda}Q^2\cdot C_h+\tau C_h Q+d\,k_T \quad [\text{zł}]$$

<u>Koszt dostaw na jednostkę czasu</u>

$$\frac{1}{T}\left(C_0+\frac{1}{2\lambda}Q^2C_h+\tau\cdot C_h\cdot Q+d\cdot k_T\right)=\lambda\frac{C_0+d\cdot k_T}{Q}+\frac{1}{2}QC_h+\lambda\tau C_h\left[\frac{\text{zł}}{\text{dzień}}\right]$$

gdyż $T=\frac{Q}{\lambda}$

<u>Minimalny koszt dostaw na jednostkę czasu</u>

$$\text{dla } Q^*=\sqrt{\frac{2\lambda(C_0+d\cdot k_T)}{C_h}} \quad [\text{ton}]$$

będzie równy po podstawieniu Q^*:

$$\sqrt{2\lambda C_h (C_0 + d \cdot k_T)} + \lambda \tau C_h = \sqrt{2\lambda C_h (C_0 + d \cdot k_T)} + \lambda \frac{d}{V} C_h$$

gdzie V szybkość przewozu od wytwórcy do hurtowni.

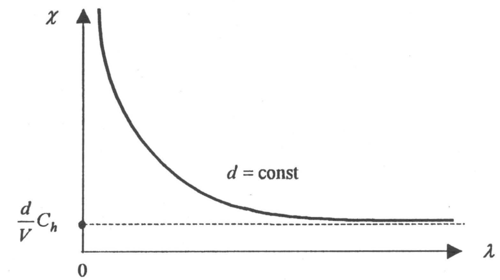
<u>Koszt minimalny dostaw na jednostkę ładunku</u>

$$\chi = \frac{1}{\lambda}\left(\sqrt{2\lambda C_h (C_0 + d \cdot k_T)} + \lambda \frac{d}{V} C_h\right) = \sqrt{\frac{2}{\lambda} \cdot C_h \cdot (C_0 + d \cdot k_T)} + \frac{d}{V} C_h \quad \left[\frac{\text{zł}}{\text{tonę}}\right]$$

Dla $d = 0$ mamy minimalny koszt:

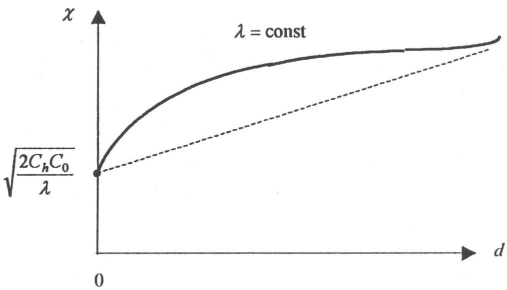
$$\sqrt{\frac{2}{\lambda} \cdot C_h C_0} \quad \left[\frac{\text{zł}}{\text{tonę}}\right]$$

Dla ustalonej odległości d mamy następującą zależność χ od λ



Rys. 2

Dla ustalonej wartości λ mamy następującą zależność χ od d



Rys. 3

<u>Koszt minimalny dostaw na jednostkę ładunku (ciąg dalszy)</u>

$$\chi = \sqrt{\frac{2 \cdot C_h \cdot C_0}{\lambda} + \frac{2 \cdot C_h \cdot k_T d}{\lambda}} + d \cdot \frac{C_h}{V} = \sqrt{\frac{A}{\lambda} + B \cdot \frac{d}{\lambda}} + d \cdot k_T'$$

gdzie $A = 2 \cdot C_h \cdot C_0$ $\quad B = 2 \cdot C_h \cdot k_T$ $\quad k_T' = \frac{C_h}{V}$

A. Bezpośrednie dostawy z fabryki do odbiorców $i = 1, 2, \dots I$

$$\chi_i^0 = \sqrt{\frac{A}{\lambda_i} + B\frac{d_i}{\lambda_i}} + d_i \cdot k_T' \qquad \text{zakładamy, że } \boxed{V_i = V}$$

$$\chi_i^0 = \sqrt{\frac{A}{\lambda_i} + B\frac{d + S_i}{\lambda_i}} + (d + S_i)k_T' \qquad \text{zakładamy, że } \boxed{d_i = d + S_i}$$

$$= \sqrt{\frac{A}{\lambda_i} + B\frac{d}{\lambda_i} + B\frac{S_i}{\lambda_i}} + d \cdot k_T' + S_i \cdot k_T'$$

$$\sum_i \chi_i^0 = \sum_i \sqrt{\frac{A}{\lambda_i} + B\frac{d + S_i}{\lambda_i}} + I \cdot d \cdot k_T' + \sum_i S_i \cdot k_T'$$

B. Pośrednie dostawy z hurtowni do odbiorców $i = 1, 2, \dots I$

$$\chi_i = \sqrt{\frac{A}{\sum_i \lambda_i} + B\frac{d}{\sum_i \lambda_i}} + \sqrt{\frac{A}{\lambda_i} + B\frac{S_i}{\lambda_i}} + d \cdot k_T' + S_i \cdot k_T'$$

$$\sum_i \chi_i = \sqrt{\frac{A}{\sum \lambda_i} + B\frac{d}{\sum \lambda_i}} + \sum_i \sqrt{\frac{A}{\lambda_i} + B\frac{S_i}{\lambda_i}} + d \cdot k_T' + \sum_i S_i\, k_T'$$

Różnica kosztów dostaw bezpośrednich i pośrednich

$$\sum_i \chi_i^0 - \sum_i \chi_i = \sum_i \sqrt{\frac{A}{\lambda_i} + B\frac{d}{\lambda_i} + B\frac{S_i}{\lambda_i}} + I \cdot d \cdot k_T' + k_T' \cdot \sum_i S_i +$$

$$- \sqrt{\frac{A}{\sum \lambda_i} + B\frac{d}{\sum \lambda_i}} - \sum_i \sqrt{\frac{A}{\lambda_i} + B\frac{S_i}{\lambda_i}} - d \cdot k_T' - k_T' \cdot \sum_i S_i$$

Oznaczając

$$\Delta\sum = \sum_i \left(\sqrt{\frac{A}{\lambda_i} + B\frac{S_i}{\lambda_i} + B\frac{d}{\lambda_i}} - \sqrt{\frac{A}{\lambda_i} + B\frac{S_i}{\lambda_i}} \right) \geq 0$$

otrzymamy

$$\sum_i \chi_i^0 - \sum_i \chi_i = (I - 1) \cdot d \cdot k_T' + \Delta\sum - \sqrt{\frac{A}{\sum \lambda_i} + B\frac{d}{\sum \lambda_i}}$$

Dostawy pośrednie opłacają się gdy

$$(I-1)\cdot d\cdot k_T' + \Delta\sum > \sqrt{\frac{A}{\sum\lambda_i} + B\frac{d}{\sum\lambda_i}}$$

Ale

$$\Delta\sum = \sum_i \sqrt{\frac{A}{\lambda_i} + B\frac{S_i}{\lambda_i} + B\frac{d}{\lambda_i}} - \sqrt{\frac{A}{\lambda_i} + B\frac{S_i}{\lambda_i}} =$$

$$= \sum_i \left(\sqrt{\alpha_i + B\frac{d}{\lambda_i}} - \sqrt{\alpha_i}\right) = \sum_i \sqrt{\alpha_i}\left(\sqrt{1 + \frac{B\frac{d}{\lambda_i}}{\alpha_i}} - 1\right) =$$

$$= \sum_i \sqrt{\alpha_i}\left(\sqrt{1+\beta_i} - 1\right)$$

gdzie

$$\alpha_i = \frac{A}{\lambda_i} + B\frac{S_i}{\lambda_i}$$

$$\beta_i = \frac{B\frac{d}{\lambda_i}}{\alpha_i} = \frac{B\frac{d}{\lambda_i}}{\frac{A}{\lambda_i} + B\frac{S_i}{\lambda_i}} = \frac{B\cdot d}{A + B\cdot S_i} = \frac{2\cdot C_h\cdot k_T\cdot d}{2\cdot C_h\cdot C_0 + 2\cdot C_h\cdot k_T\cdot S_i} = \frac{k_T\cdot d}{C_0 + k_T\cdot S_i} = \frac{\frac{d}{S_i}}{1 + \frac{C_0}{k_T\cdot S_i}} = \frac{d}{\frac{C_0}{K_T} + S_i}$$

W rezultacie mamy

$$\Delta\sum = \sum_i \sqrt{\frac{A}{\lambda_i} + B\frac{S_i}{\lambda_i}}\left(\sqrt{1 + \frac{d/S_i}{1 + C_0/k_T\cdot S_i}} - 1\right)$$

Końcową nierówność opłacalności dostaw pośrednich możemy zapisać w postaci

$$(I-1)\frac{d}{V}C_h + \sum_i \sqrt{\frac{2C_h}{\lambda_i}(C_0 + k_T S_i)}\left(\sqrt{1 + \frac{d/S_i}{1 + C_0/k_T S_i}} - 1\right) > \sqrt{\frac{2C_h}{\sum\lambda_i}(C_0 + k_T\cdot d)}$$

Jeżeli przyjmiemy oznaczenie, $\Lambda = \sum_i \lambda_i$ oraz następujące założenia

1) $\lambda_i \approx \frac{1}{I}\sum_i \lambda_i = \frac{\Lambda}{I}$ "o równomierności zapotrzebowań"

2) $S_i \approx \sum_i S_i = S$ "o równoodległości odbiorców"

3) $\frac{C_0}{k_T\cdot S} \approx 1$ koszt uruchomienia dostaw jest równy kosztowi transportu z magazyn hurtowni do odbiorcy

to otrzymamy

$$\sum_i \sqrt{\frac{2C_h \cdot I}{\wedge} 2k_T S} \left(\sqrt{1 + \frac{d/S}{2}} - 1 \right) =$$

$$= \sum_i \sqrt{\frac{4 \cdot I \cdot C_h \cdot k_T S}{\wedge}} \left(\sqrt{1 + \frac{d}{2S}} - 1 \right) =$$

$$= I \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot I \cdot C_h \cdot k_T S}{\wedge}} \left(\sqrt{1 + \frac{d}{2S}} - 1 \right) =$$

$$= 2\sqrt{\frac{I^3 \cdot C_h \cdot k_T S}{\wedge}} \left(\sqrt{1 + \frac{d}{2S}} - 1 \right) \left[\frac{\text{zł}}{\text{tonę}} \right]$$

Ostatecznie nierówność przyjmie postać:

C. Warunek opłacalności organizowania hurtowni jednoasortymentowej

$$(I-1)\frac{d}{V}C_h + 2\sqrt{I^3 \cdot \frac{C_h}{\Lambda} \cdot k_T \cdot S} \left(\sqrt{1 + \frac{d}{2S}} - 1 \right) > \sqrt{2\frac{C_h}{\Lambda}(C_0 + k_T \cdot d)}$$

ale $C_0 = k_T \cdot S$ więc

$$(I-1)\frac{d}{V}C_h + \sqrt{2 \cdot I^3} \sqrt{2\frac{C_h}{\Lambda} \cdot k_T \cdot S} \left(\sqrt{1 + \frac{d}{2S}} - 1 \right) > \sqrt{2\frac{C_h}{\Lambda} k_T (d + \overline{S})}$$

D. Charakterystyki systemu z hurtownią

Wielkość dostaw do hurtowni

$$Q^* = \sqrt{\frac{2\Lambda(C_0 + S \cdot k_T)}{C_h}}$$

Wielkość partii pobieranych z hurtowni

$$\overline{Q}_i^* = \sqrt{\frac{2\Lambda(C_0 + S \cdot k_T)}{I C_h}}$$

Średni zapas w hurtowni

$$\overline{Z} = \sqrt{\frac{\Lambda(C_0 + d \cdot k_T)}{2C_h}} = \frac{1}{2}\overset{*}{Q}$$

Średni zapas u odbiorców

$$\overline{Z}_i = \sqrt{\frac{\Lambda(C_0 + S \cdot k_T)}{2 I C_h}}$$

Suma zapasów średnich w hurtowni i u odbiorców przy dostawach pośrednich

$$Z_p = \sqrt{\frac{\Lambda}{2C_h} \cdot (C_0 + d \cdot k_T)} + I \cdot \sqrt{\frac{\Lambda(C_0 + k_T S)}{2I\,C_h}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\Lambda}{2C_h}} \left(\sqrt{(C_0 + d \cdot k_T)} + \sqrt{I\,(C_0 + k_T \cdot S)} \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{\Lambda}{2C_h}(C_0 + d \cdot k_T)} \left(1 + \frac{\sqrt{I} \cdot \sqrt{(C_0 + S \cdot k_T)}}{\sqrt{(C_0 + d \cdot k_T)}} \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{\Lambda}{2C_h}(C_0 + d \cdot k_T)} \left(1 + \sqrt{I} \cdot \sqrt{\frac{\frac{C_0}{Sk_T} + 1}{\frac{C_0}{Sk_T} + \frac{d}{S}}} \right)$$

E. Charakterystyki systemu z dostawami bezpośrednimi

Wielkość partii dostaw

$$\overline{Q}_b^* = \sqrt{\frac{2\lambda_i [C_0 + (d + S_i) \cdot k_T]}{C_h}} \cong \sqrt{\frac{2\Lambda}{I \cdot C_h}[C_0 + (d + S) \cdot k_T]}$$

Średnia wielkość zapasów

$$\overline{Z}_b = \frac{1}{2}\overline{Q}_B^* = \sqrt{\frac{\Lambda}{2 \cdot I \cdot C_h}[C_0 + (d + S) \cdot k_T]}$$

Suma zapasów u wielkich odbiorców

$$\overline{Z}_b = I \cdot \overline{Z}_b = \sqrt{\frac{I \cdot \Lambda}{2C_h}[C_0 + (d + S) \cdot k_T]} =$$

$$= \sqrt{\frac{\Lambda}{2C_h}(C_0 + d \cdot k_T)} \sqrt{I \cdot \frac{C_0 + (d + S) \cdot k_T}{(C_0 + d \cdot k_T)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\Lambda}{2C_h}(C_0 + d \cdot k_T)} \sqrt{I \cdot \left(1 + \frac{k_T \cdot S}{C_0 + d \cdot k_T} \right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{\Lambda}{2C_h}(C_0 + d \cdot k_T)} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\frac{C_0}{k_T \cdot S} + \frac{d}{S}}} \cdot \sqrt{I}$$

Różnica zapasów w systemie bezpośrednich i pośrednich dostaw

$$Z_b - Z_p = \sqrt{\frac{\Lambda}{2C_h}(C_0 + d\cdot k_T)}\left(\sqrt{I}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{\frac{C_0}{k_T\cdot S}+\frac{d}{S}}} - \sqrt{I}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{\frac{C_0}{k_T\cdot S}+\frac{d}{S}}} + \sqrt{1+\frac{\frac{C_0}{\overline{\Delta}\cdot s}}{\frac{C_0}{k_T\cdot S}+\frac{d}{S}}} - 1\right)$$

Jeżeli $k_T \cdot S = C_0$, to

$$Z_b - Z_p = \sqrt{\frac{I\Lambda}{2C_h}(C_0 + d\cdot k_T)}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{1+\frac{d}{S}}} - \sqrt{1+\frac{1}{1+\frac{d}{S}}+\frac{1}{1+\frac{d}{S}}} - \frac{1}{\sqrt{I}}\right)$$

lub

$$Z_b - Z_p = \sqrt{\frac{I\Lambda}{2C_h}\cdot\frac{(C_0 + d\cdot k_T)}{1+\frac{d}{S}}}\left(\sqrt{2+\frac{d}{S}} - \sqrt{2} - \sqrt{\frac{1+\frac{d}{S}}{I}}\right)$$

Zapasy średnie są mniejsze w systemie dostaw z hurtownią, jeżeli

$$\sqrt{2+\frac{d}{S}} - \sqrt{2} > \sqrt{\frac{1+\frac{d}{S}}{I}}$$

lub jeżeli

$$\frac{\sqrt{2+\frac{d}{S}} - \sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{d}{S}}} > \frac{1}{\sqrt{I}}$$

Np. Jeżeli $\frac{d}{S} = 2$ to $I_{\min} = 9$

$$\frac{\sqrt{2+2} - \sqrt{2}}{\sqrt{1+2}} = 0{,}337 > \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}333$$

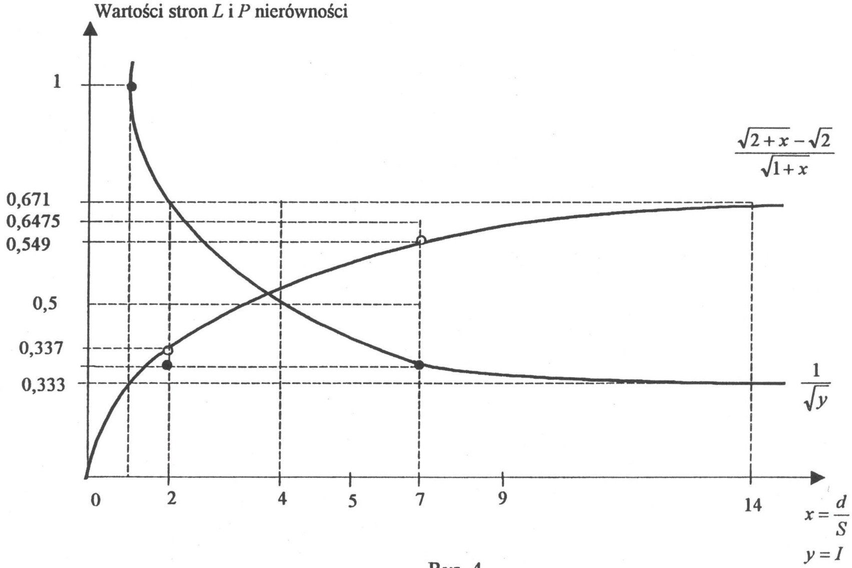
Jeżeli $\frac{d}{S} = 7$ to $I_{\min} = 4$

$$\frac{\sqrt{2+7} - \sqrt{2}}{\sqrt{1+7}} = 0{,}549 > \frac{1}{\sqrt{4}} = 0{,}5$$

Jeżeli $\frac{d}{S} = 14$ to $I_{\min} = 3$

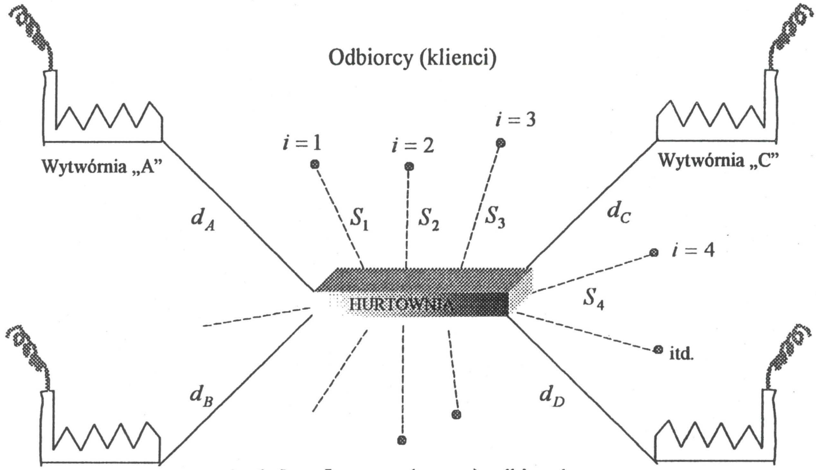
$$\frac{\sqrt{2+14} - \sqrt{2}}{\sqrt{1+14}} = 0{,}6475 > \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5714$$

Patrz wykres



Rys. 4

II. HURTOWNIE WIELU RODZAJÓW TOWARU
(wieloasortymentowe)



$i = 1, 2, \ldots I$ nr (nazwy) odbiorców

$U = A, B, C, D$ kody (nazwy) dostawców i towarów

Hurtownia zaopatruje pobliskich klientów w towary różnego rodzaju. Niech to będą cztery rodzaje towarów: A, B, C, D.

Zapotrzebowanie $i-$tego klienta, gdzie $i = 1, 2, \ldots I$ określone jest intensywnościami λ_i^U, $U = A, B, C, D$ w danym okresie czasu.

Jeżeli jednostką czasu jest tydzień, to potrzeby $i-$tego klienta (przykładowo) są określone wielkościami

$$\lambda_i^A\left[\frac{\text{szt}}{\text{tyg}}\right], \ \lambda_i^B\left[\frac{\text{kg}}{\text{tyg}}\right], \ \lambda_i^C\left[\frac{\text{m}^2}{\text{tyg}}\right] \ \text{oraz} \ \lambda_i^D\left[\frac{\text{litrów}}{\text{tyg}}\right]$$

Wykorzystując pojęcie struktury zapotrzebowań $\hat{\gamma}_i$ $i-$tego klienta możemy wektor zapotrzebowań przedstawić w innej formie:

$$\left\langle \lambda_i^A \ , \ \lambda_i^B \ , \ \lambda_i^C \ , \ \lambda_i^D \right\rangle = \lambda_i^A \left\langle \frac{\lambda_i^A}{\lambda_i^A} \ , \ \frac{\lambda_i^B}{\lambda_i^A} \ , \ \frac{\lambda_i^C}{\lambda_i^A} \ , \ \frac{\lambda_i^D}{\lambda_i^A} \right\rangle =$$

$$= \lambda_i^A \left\langle 1 \ , \ \gamma_i^B \ , \ \gamma_i^C \ , \ \gamma_i^D \right\rangle$$

gdzie $\hat{\lambda}_i = \lambda_i^A \left\langle \gamma_i^A \ , \ \gamma_i^B \ , \ \gamma_i^C \ , \ \gamma_i^D \right\rangle$ przy tym $\gamma_i^A = 1$

Oczywiście $\lambda_i^U = \lambda_i^A \cdot \gamma_i^U$ dla $U = A, B, C, D$

Wymiarami współczynników strukturalnych γ_i^U będą w naszym przykładzie odpowiednio:

$$\gamma_i^B = \frac{\lambda_i^B}{\lambda_i^A}\frac{\left[\frac{\text{kg}}{\text{tyg}}\right]}{\left[\frac{\text{szt}}{\text{tyg}}\right]} = \left[\frac{\text{kg}}{\text{szt}}\right] \quad , \quad \gamma_i^C = \frac{\lambda_i^C}{\lambda_i^A}\frac{\left[\frac{\text{m}^2}{\text{tyg}}\right]}{\left[\frac{\text{szt}}{\text{tyg}}\right]} = \left[\frac{\text{m}^2}{\text{szt}}\right], \text{ podobnie } \gamma_i^D\left[\frac{\text{litr}}{\text{tyg}}\right]$$

Podobnie możemy przedstawić zapotrzebowanie ogółu klientów. Jeżeli oznaczymy $\lambda^U = \sum_i \lambda_i^U$ dla $U = A,B,C,D$, to mamy

$$\lambda^A \cdot \left\langle \gamma^A\ ,\ \gamma^B\ ,\ \gamma^C\ ,\ \gamma^D \right\rangle = \lambda^A \left\langle \frac{\lambda^A}{\lambda^A}, \frac{\lambda^B}{\lambda^A}, \frac{\lambda^C}{\lambda^A}, \frac{\lambda^D}{\lambda^A} \right\rangle =$$

$$= \lambda^A \left\langle 1, \gamma^B, \gamma^C, \gamma^D \right\rangle = \lambda^A \cdot \hat{\gamma}$$

gdzie $\hat{\gamma} = \left\langle \gamma^A, \gamma^B, \gamma^C, \gamma^D \right\rangle$ struktura zapotrzebowań ogółu klientów przy tym $\gamma^A = 1$.

Oczywiście $\lambda^U = \lambda^A \cdot \gamma^U$, $U = A,B,C,D$. Wymiary współczynników strukturalnych pozostają takie same, jak w przypadku struktur zapotrzebowania poszczególnych klientów (chociaż oczywiście nie wartości!).

Każdy z towarów, w które zaopatrują się klienci ma określoną cenę jednostkową C^U oraz objętość ładunkową (lub magazynową) δ^U gdzie $U = A,B,C,D$.

W naszym przykładzie będą to więc wielkości:

$$C^A\left[\frac{\text{zł}}{\text{szt}}\right],\quad C^B\left[\frac{\text{zł}}{\text{kg}}\right],\quad C^C\left[\frac{\text{zł}}{\text{m}^2}\right],\quad \text{oraz}\quad C^D\left[\frac{\text{zł}}{\text{litr}}\right]$$

$$\delta^A\left[\frac{\text{m}^3}{\text{szt}}\right],\quad \delta^B\left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}\right],\quad \delta^C\left[\frac{\text{m}^3}{\text{m}^2}\right],\quad \text{oraz}\quad \delta^D\left[\frac{\text{m}^3}{\text{litr}}\right]$$

Odpowiednio możemy także określić wartość wielkości

$$C_h^U = \rho C^U\ ,\quad U = A,B,C,D$$

gdzie ρ jest oprocentowaniem kredytów obrotowych, wyrażonym wartością ułamka dziesiętnego na jednostkę czasu np. $\rho = 0{,}02\left[\frac{1}{\text{tyg}}\right]$

W naszym przykładzie więc otrzymamy

$$C_h^A\left[\frac{\text{zł}}{\text{szt}\cdot\text{tyg}}\right],\quad C_h^B\left[\frac{\text{zł}}{\text{kg}\cdot\text{tyg}}\right],\quad C_h^C\left[\frac{\text{zł}}{\text{m}^2\cdot\text{tyg}}\right],\quad C_h^D\left[\frac{\text{zł}}{\text{litr}\cdot\text{tyg}}\right]$$

Jeżeli i – temu klientowi dostarczamy partię towarów o objętości $\left\langle Q_i^A, Q_i^B, Q_i^C, Q_i^D \right\rangle$, to niezbędna pojemność środka transportowego będzie równa wartości wyrażenia

$$\sum_{U=A,B,C,D} Q_i^U \cdot \delta^U$$

Jeżeli struktura partii jest ustalona, to

$$\sum_{U=A,B,C,D} Q_i^U \cdot \delta_i^U = \sum_{U=A,B,C,D} Q_i^A \cdot \gamma_i^U \cdot \delta^U = Q_i^A \sum_{U=A,B,C,D} \gamma_i^U \cdot \delta^U = Q_i^A \cdot \delta^i$$

Wielkość δ^i jest objętością ładunkową (magazynową) jednostki specyficznego towaru rodzaju „A_i". Jednostka ta, charakterystyczna dla danego klienta jest faktycznie zestawem czterech rodzajów towarów, w skład którego wchodzą: jedna jednostka towaru $A(\lambda_i^A = 1)$, $\lambda_i^A \gamma_i^B$ jednostek towaru B, $\lambda_i^A \gamma_i^C$ jednostek towaru C oraz $\lambda_i^A \gamma_i^D$ jednostek towaru D. Tak określony nowy rodzaj towaru „A_i" – mieszanki towarów A, B, C, D posiada swój wymiar, którym jest [komplet].

Jednostkowy komplet składa się z jednej jednostki towaru A oraz pozostałych, w proporcjach γ_i^A. Jeden komplet takiej „mieszanki" „A_i" może różnić się od kompletu mieszanki „A_j" innego klienta. Wprowadzając pojęcie towaru „A_i" wyróżniliśmy tyle rodzajów towaru „A" ilu jest klientów. Przy tym, każdy klient nabywa tylko jeden, jemu właściwy towar.

Cena jednostkowa towaru „A_i" jest równa:

$$C^i\left[\frac{\text{zł}}{\text{kompl}}\right] = 1 \cdot C^A + \gamma_i^B C^B + +\gamma_i^C C^C + \gamma_i^D C^D$$

a zapotrzebowanie (w naszym przykładzie)

$$\lambda^i\left[\frac{\text{kompl}}{\text{tyg}}\right] \equiv \lambda_i^A$$

$$\text{oraz } C_h^i\left[\frac{\text{zł}}{\text{kompl} \cdot \text{tyg}}\right] = \rho C^i$$

Rozważmy sytuację gdy klienci mogą zaopatrywać się w pobliskiej hurtowni jednocześnie we wszystkie dobra A, B, C i D, zakupując je w omawianych zestawach. Mogą także zaopatrywać się bezpośrednio u oddalonych dostawców – wtedy oddzielnie zakupują poszczególne dobra. Rozstrzygnijmy, co się bardziej opłaca.

Załóżmy, że poszczególni klienci o numerach $i = 1, 2, \ldots I$ są oddaleni od hurtowni o S_i[km] a od poszczególnych wytwórni o $(d^U + S_i)$[km], $u = A, B, C, D$. Natomiast hurtownia jest oddalona od wytwórców o d^U[km]. Oczywiście zachodzi nierówność

$$\min_U d^U >> \max_i S_i$$

Zakłada się ponadto, że wytwórcy znajdują się w różnych, odległych od siebie miejscowościach.

Omówimy koszt zaopatrywania się klientów w hurtowni, zakładając optymalną wielkość jednorazowych zakupów.

$$Q_i^* = \sqrt{\frac{2\lambda^i (C_0 + S_i \cdot k_T)}{C_h^i}} \qquad \text{[kompl]}$$

gdzie C_0 jest stałym kosztem zakupu niezależnym od wielkości zakupów

k^T koszt transportu wyrażony w $\left[\frac{\text{zł}}{\text{km}}\right]$

Często można przyjąć, że $C_0 = 0$. W koszt C_0 może także wchodzić opłata za wynajęcie środka transportu, niezależnie od ilości przejechanych kilometrów.

Najmniejszy koszt zaopatrywania się w towar „A_i" przez i – tego klienta w hurtowni będzie więc równy (patrz str.)

$$\sqrt{2\lambda^i \cdot C_h^i (C_0 + S_i \cdot k_T)} + \lambda^i C_h^i \frac{S_i}{V} \qquad \left[\frac{\text{zł}}{\text{tyg}}\right]$$

Zaś koszty zaopatrywania się wszystkich klientów w hurtowni będą równe

$$\sum_i \sqrt{2\lambda^i \cdot C_h^i (C_0 + S_i \cdot k_T)} + \sum_i \lambda^i C_h^i \frac{S_i}{V}$$

Oznaczając symbolem $\overline{S}$ średnią odległość klientów od hurtowni otrzymamy koszt

$$\sqrt{2(C_0 + \overline{S} \cdot k_T)} \cdot \sum_i \sqrt{\lambda^i \cdot C_h^i} + \frac{\overline{S}}{V} \sum_i \lambda^i C_h^i$$

Niezależnie, hurtownia ponosi koszty związane z zakupem towarów u wytwórców. Wielkość optymalna partii dostaw od poszczególnych wytwórców będzie równa

$$Q^U = \sqrt{\frac{2\lambda^U (C_0 + d^U \cdot k_T)}{C_h^U}}$$

odpowiednio: [szt] dla $U = A$, [kg] dla $U = B$, $[m^2]$ dla $U = C$ oraz [litr] dla $U = D$.

Minimalny koszt dostaw poszczególnego rodzaju U towarów będzie równy

$$\sqrt{2\lambda^U \cdot C_h^U (C_0^U + d^U \cdot k_T)} + \lambda^U C_h^U \frac{d^U}{V} \qquad \left[\frac{\text{zł}}{\text{tyg}}\right]$$

Koszt dostaw do hurtowni (od wytwórców) wszystkich czterech rodzajów towarów będzie równy

$$\sum_{U=A,B,C,D} \sqrt{2\lambda^U \cdot C_h^U (C_0^U + d^U \cdot k_T)} + \sum_{U=A,B,C,D} \lambda^U C_h^U \frac{d^U}{V} \qquad \left[\frac{\text{zł}}{\text{tyg}}\right]$$

Jeżeli założymy, że $C_0^U \approx \overline{C}_0$ oraz $d^U \approx d$, to koszt ten wyrazi się wzorem

$$\sqrt{2(C_0 + d \cdot k_T)} \cdot \sum_{U=A,B,C,D} \sqrt{\lambda^U C^U} + \frac{d}{V} \sum_{U=A,B,C,D} \lambda^U C_h^U$$

gdzie $\lambda^U = \lambda^A \cdot \gamma^U$, $\gamma^U = \frac{\lambda^U}{\lambda^A} = \frac{\sum_i \lambda_i^U}{\sum \lambda_i^A}$

Ostatecznie, koszt dostaw towarów od wytwórców do hurtowni oraz od hurtowni do klientów, będzie równy

$$\chi_p = \sqrt{2(C_0 + \overline{S} \cdot k_T)} \cdot \sum_i \sqrt{\lambda^i C_h^i} + \frac{\overline{S}}{V} \sum_i \lambda^i C_h^i +$$

$$+ \sqrt{2(C_0 + d \cdot k_T)} \cdot \sum_U \sqrt{\lambda^U C_h^U} + \frac{d}{V} \sum_U \lambda^U C_h^U$$

Przeanalizujemy następnie koszt w przypadku bezpośredniego zaopatrywania się klientów u wytwórców.

Optymalna partia jednorazowych zakupów towaru A będzie wtedy równa

$$\overset{*}{Q}_i^U = \sqrt{\frac{2\lambda_i^U [C_0 + (d^U + S_i) \cdot k_T]}{C_h^U}}$$

odpowiednio: [szt] dla $U = A$, [kg] dla $U = B$, $[\mathrm{m}^2]$ dla $U = C$ oraz [litr] dla $U = D$.

Minimalny koszt zaopatrywania się klienta nr i w towar $U = A, B, C, D$ będzie więc równy

$$\sqrt{2\lambda_i^U C_h^U [C_0 + (d^U + S_i) k_T]} + \lambda_i^U C_h^U \frac{d^U + S_i}{V} \qquad \left[\frac{\text{zł}}{\text{tyg}}\right]$$

Zaś minimalny koszt zaopatrywania się we wszystkie rodzaje towarów będzie

$$\sum_{U=A,B,C,D} \sqrt{2\lambda_i^U C_h^U [C_0 + (d^U + S_i) k_T]} + \sum_{U=A,B,C,D} \lambda_i^U C_h^U \frac{d^U + S_i}{V}$$

Jeżeli założymy, jak poprzednio, że $S_i \cong \overline{S}$ $C_0^U \cong \overline{C}_0$ oraz $d^U \cong d$, to otrzymamy koszt, który określony będzie formułą

$$\sqrt{2[\overline{C}_0 + (d \cdot \overline{S}) k_T]} \cdot \sum_{U=A,B,C,D} \sqrt{\lambda_i^U C_h^U} + \frac{d + \overline{S}}{V} \sum_{U=A,B,C,D} \lambda_i^U C_h^U \qquad \left[\frac{\text{zł}}{\text{tyg}}\right]$$

Koszt zaopatrywania wszystkich klientów będzie więc równy

$$\chi_B = \sqrt{2[\overline{C}_0 + (d \cdot \overline{S}) k_T]} \cdot \sum_{i=1}^{I} \sum_{U=A,B,C,D} \sqrt{\lambda_i^U C_h^U} + \frac{d + \overline{S}}{V} \sum_{i=1}^{I} \sum_{U=A,B,C,D} \lambda_i^U C_h^U$$

Porównamy koszt zaopatrzenia klientów za pośrednictwem hurtowni χ_p z kosztem bezpośredniego zaopatrywania się χ_B, określając różnicę

$$\Delta\chi = \chi_B - \chi_p$$

Zwróćmy uwagę, że iloczyn $\lambda^U C_h^U$, we wzorze na wartość χ_p, możemy przedstawić następująco

$$\lambda^U \cdot C_h^U = \sum_i \lambda_i^U \cdot C_h^U = \rho \sum_i \lambda_i^U \cdot C^U$$

Podobnie możemy zapisać iloczyn $\lambda_i^U \cdot C_h^U$ występujący we wzorze na wartość χ_B

$$\rho \lambda_i^U \cdot C^U$$

W rezultacie składnik

$$\frac{d}{V} \sum_U \lambda^U \cdot C^U$$

występujący we wzorze χ_p, możemy porównać ze składnikiem

$$\frac{d+\bar{S}}{V} \sum_{i=1}^{I} \sum_{U=A,B,C,D} \lambda_i^U C_h^U$$

Mianowicie

$$\frac{d+\bar{S}}{V} \sum_i \sum_U \lambda_i^U C_h^U - \frac{d}{V} \sum_U \sum_i \lambda_i^U C_h^U =$$

$$= \frac{\bar{S}}{V} \sum_i \sum_U \lambda_i^U C_h^U = \rho \frac{\bar{S}}{V} \sum_U \lambda_i^U C_h^U$$

Wykorzystując ten fakt, możemy więc zapisać

$$\Delta\chi = \sqrt{2\rho[\bar{C}_0 + (d+\bar{S}) \cdot k_T]} \sum_i \sum_U \sqrt{\lambda_i^U C_h^U} + \rho \frac{\bar{S}}{V} \sum_U \lambda^U C^U +$$

$$- \sqrt{2\rho(C_0 + \bar{S}k_T)} \cdot \sum_i \sqrt{\lambda^i C^i} - \sqrt{2\rho(C_0 + d \cdot k_T)} \cdot \sum_U \sqrt{\lambda^U C^U} +$$

$$- \rho \frac{\bar{S}}{V} \sum_i \lambda^i C^i$$

Zauważmy dalej, że

$$\sum_i \lambda^i C^i = \sum_i \lambda_i^A (C^A + \gamma_i^B C^B + \gamma_i^C C^C + \gamma_i^D C^D)$$

$$= \sum_i \lambda_i^A (C^A + \lambda_i^B C^B + \lambda_i^C C^C + \lambda_i^D C^D) =$$

$$= \sum_i \sum_U \lambda_i^U C^U$$

W rezultacie mamy

$$\rho \frac{\bar{S}}{V} \sum_U \lambda^U C^U - \rho \frac{\bar{S}}{V} \sum_i \lambda^i C^i = 0$$

Wzór na wartość $\Delta\chi$ możemy więc zapisać w postaci

$$\Delta\chi = \sqrt{2\rho[\bar{C}_0 + (d \cdot \bar{S}) \cdot k_T]} \cdot \sum_i \sum_U \sqrt{\lambda_i^U C^U} +$$

$$- \sqrt{2\rho(C_0 + \bar{S}k_T)} \cdot \sum_i \sqrt{\sum_U \lambda_i^U C^U} - \sqrt{2\rho(C_0 + dk_T)} \cdot \sum_U \sqrt{\sum_i \lambda_i^U C^U} =$$

$$= \sqrt{2\rho(C_0 + dk_T)} \left[\sqrt{1 + \frac{\bar{S}k_T}{C_0 + dk_T}} \cdot \sum_i \sum_U \sqrt{\lambda_i^U C_h^U} - \sqrt{\frac{C_0}{C_0 + dk_T} + \frac{\bar{S}k_T}{C_0 + dk_T}} \cdot \sum_i \sqrt{\sum_U \lambda_i^U C^U} - \right.$$

$$\left. - \sum_U \sqrt{\sum_i \lambda_i^U C^U} \right]$$

A. Warunek opłacalności organizowania hurtowni wieloasortymentowej

Ostatecznie zaopatrywanie klientów poprzez hurtownie dysponującą różnymi towarami jest opłacalne, jeżeli spełniona jest nierówność

$$\sqrt{\frac{C_0 + dk_T + \bar{S}k_T}{C_0 + dk_T}} \cdot \sum_i \sum_U \sqrt{\lambda_i^U C^U} > \sqrt{\frac{C_0 + Sk_T}{C_0 + dk_T}} \cdot \sum_i \sqrt{\sum_U \lambda_i^U C^U} + \sum_U \sqrt{\sum_i \lambda_i^U C^U}$$

Dla $I = 1$ otrzymamy (zaopatrywanie jednego klienta w wiele asortymentów)

$$\sqrt{\frac{C_0 + dk_T + \bar{S}k_T}{C_0 + dk_T}} \cdot \sum_U \lambda^U C^U > \sqrt{\frac{C_0 + Sk_T}{C_0 + dk_T}} \cdot \sqrt{\sum_U \lambda^U C^U} + \sum_U \sqrt{\sum_i \lambda^U C^U}$$

Oznaczając

$$\frac{\sum_U \sqrt{\lambda^U C^U}}{\sqrt{\sum_U \lambda^U C^U}} = \sum_U \frac{\sqrt{\lambda^U C^U}}{\sqrt{\sum_U \lambda^U C^U}} = \sum_U \sqrt{\frac{\lambda^U C^U}{\sum_U \lambda^U C^U}} = \sum_U \sqrt{q^U}$$

gdzie $q^U = \frac{\lambda^U C^U}{\sum_U \lambda^U C}$ wartościowy udział sprzedaży asortymentu U

mamy

$$\sum_U \sqrt{q^U} \left(\sqrt{\frac{C_0 + dk_T + \bar{S}k_T}{C_0 + dk_T}} - 1 \right) > \sqrt{\frac{C_0 + Sk_T}{C_0 + dk_T}}$$

Jeżeli oznaczymy liczbę asortymentów towaru w hurtowni symbolem N, to w przypadku niewielkich różnic wartości q^U możemy przyjąć przybliżenie: $q = \frac{1}{N}$ oraz

$$\sum_U \sqrt{q^U} = \sum_U \sqrt{\frac{1}{N}} = \sum_U \sqrt{\frac{1}{\sqrt{N}}} = \frac{N}{\sqrt{N}} = \sqrt{N}$$

Stąd przybliżony warunek opłacalności możemy zapisać w postaci

$$\frac{\sqrt{C_0 + dk_T + \bar{S}k_T} - \sqrt{C_0 + dk_T}}{\sqrt{C_0 + \bar{S}k_T}} > \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Dla $N = 1$ (zaopatrywanie wielu klientów w jeden asortyment) otrzymamy

$$\sqrt{\frac{C_0 + dk_T + \bar{S}k_T}{C_0 + dk_T}} \cdot \sum_i \sqrt{\lambda_i C} > \sqrt{\frac{C_0 + Sk_T}{C_0 + dk_T}} \cdot \sum_i \sqrt{\lambda_i C} + \sqrt{\sum_i \lambda_i C}$$

Oznaczając

$$\frac{\sum_i \sqrt{\lambda_i C}}{\sqrt{\sum_i \lambda_i C}} = \sum_i \frac{\sqrt{\lambda_i C}}{\sqrt{\sum_i \lambda_i C}} = \sum_i \sqrt{\frac{\lambda_i C}{\sum_i \lambda_i C}} = \sum_i \sqrt{\frac{\lambda_i}{\sum_i \lambda_i}} = \sum_i \sqrt{q_i}$$

gdzie $q_i = \dfrac{\lambda_i}{\sum \lambda_i}$ udział i – tego klienta w obrotach hurtowni, mamy

$$\sum_i \sqrt{q_i}\left(\sqrt{\frac{C_0 + dk_T + \bar{S}k_T}{C_0 + dk_T}} - \sqrt{\frac{C_0 + Sk_T}{C_0 + dk_T}}\right) > 1$$

W przypadku niewielkich różnic wartości q^i możemy przyjąć przybliżenie: $q_i = \dfrac{1}{I}$ oraz

$$\sum_i \sqrt{q_i} = \sum_i \sqrt{\frac{1}{I}} = \sum_i \frac{1}{\sqrt{I}} = \frac{I}{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$$

Stąd w ty przypadku, przybliżony warunek opłacalności możemy zapisać w postaci

$$\frac{\sqrt{C_0 + dk_T + Sk_T} - \sqrt{C_0 + Sk_T}}{\sqrt{C_0 + dk_T}} > \frac{1}{\sqrt{I}}$$

Literatura

[1] Hanssmann F.: Operations Research in Production and Inventory Control. John, New York 1961.

[2] Lewiński P.: Metody optymalizacji zadań transportowych. WKŁ, Warszawa 1970.

[3] „Ekonometria". Optymalizacja systemu zaopatrzenia. WAT, Warszawa 1971 (współautor: Zygmunt Kaszubowski).

[4] „Ekonometria" Optymalizacja systemów transportowych. WAT, Warszawa 1971.

[5] Optymalizacja systemów przewozowych. WKŁ, Warszawa 1973. (istnieje także przekład na jęz. ros. w wydawnictwie Transport, Moskwa 1979).

[6] Wagner H.M.: Badania operacyjne. PWE, Warszawa 1980.

[7] Piasecki S.: Optymalizacja systemów zaopatrzenia. PWN, Warszawa-Łódź 1982 (współautor: Zygmunt Kaszubowski).

[8] Piasecki S.: Optymalizacja dostaw z wykorzystaniem transportu rurowego. PWN, Warszawa-Łódź 1986.

[9] Piasecki S.: Organization of Transport of Parcel Cargoes. IBS PAN, Warszawa 1996.

[10] Piasecki S.: Teoria organizacji – procedury projektowania. IBS PAN, Warszawa 1997.

[11] Lawrence J.A., Pasternack B.A.: Applied Management Science. John Wiley & Sons, Inc. New York 1998.

[12] Piasecki S.: Sieciowe modele symulacyjne do wyznaczania strategii rozwoju przedsiębiorstw. Warszawa 2000.

[13] Fijałkowski J.: Transport wewnętrzny w systemach logistycznych. Oficyna Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2000.

[14] Gadley G., Whitin T.M.: Analysis of Inventory Systems. Prentice-Hall, Inc.

[15] Nowicka-Skowron M.: Efektywność systemów logistycznych. PWE, Warszawa 2000.