188/2002

Raport Badawczy

Research Report

RB/50/2002

Mediana Litvaka.
Analiza właściwości

H. Bury, D. Wagner

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr hab. inż. Kazimierz Mańczak

Warszawa 2002

W pracy [3] przedstawiono nową definicję mediany określoną dla uporządkowań, omówiono też wybrane właściwości tak zdefiniowanej mediany. Zagadnienia związane z wyznaczeniem tej mediany przedyskutowano w pracach [1, 2]; zaproponowano również algorytmy heurystyczne mogące uprościć jej wyznaczanie.

W żadnej z wymienionych prac nie dokonano jednak pełnej analizy właściwości omawianej mediany, zwanej dalej medianą Litvaka. Podstawę definicji mediany Litvaka stanowi pojęcie wektorów preferencji określonych, jak następuje.

Załóżmy, że dany jest zbiór uporządkowań $P=\{P^1, ..., P^K\}$ zbioru obiektów $\mathcal{O}=\{O_1, ... O_n\}$. Dla uporządkowania P^k (k=1, ...,K) tworzymy wektor preferencji $\pi^k = \{\pi_i^k\}$ (i=1,...,n), gdzie π_i^k - liczba obiektów poprzedzających obiekt O_i w uporządkowaniu P^k. Oczywiście

$$0 \le \pi_i^k \le n-1. \tag{1}$$

W uporządkowaniach P^k (podanych przez ekspertów) mogą występować obiekty równoważne.

Przykład 1.

Dane jest uporządkowanie 6 obiektów $P = \{O_2, O_3, (O_1, O_6), O_4, O_5\}$[1)], wektor preferencji ma dla tego uporządkowania postać $\pi = (2, 0, 1, 4, 5, 2)$.

Przyjmiemy teraz, że jest dane uporządkowanie P (traktowane jako odniesienie), w którym obiekt O_i zajmuje pozycję j. Zakładamy, że w uporządkowaniu P nie występują równoważności. Liczba obiektów poprzedzających ten obiekt w uporządkowaniu P (oznaczymy ją przez $\pi_i^{(j)}$) jest więc równa j-1. Załóżmy, że dane jest uporządkowanie P^k o postaci

$$O_{i_1}, (O_{i_2}, O_{i_3}), ..., (O_{i_j}, O_{i_{j+1}}, ... O_{i_n}), ... \tag{2}$$

zawierające grupy obiektów równoważnych, gdzie f – liczba obiektów w grupie, f=1,...,n oraz v_f liczba grup o liczności f.

W przypadku, gdy nie ma obiektów równoważnych f=1, v_1=n. Wektor preferencji ma w tym przypadku postać

$$\pi = (\pi_1, ..., \pi_n) \tag{3}$$

przy czym

---

1) W nawiasach ujęto obiekty równoważne

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = \frac{0+(n-1)}{2} n = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{4}$$

Jeżeli występują grupy równoważne, to

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i < \frac{n(n-1)}{2}, \tag{5}$$

przy czym zachodzi związek

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i + \sum_{f=2}^{n} \frac{f(f-1)}{2} v_f = \frac{n(n-1)}{2}, \tag{6}$$

skąd

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{f=2}^{n} \frac{f(f-1)}{2} v_f. \tag{7}$$

Przykład 2.

Wektor preferencji ma postać

$$\pi = (0, 2, 0, 3, 3, 5), \sum_{i=1}^{6} \pi_i = 13. \tag{8}$$

Mamy dwie dwuelementowe grupy obiektów równoważnych, czyli

$$\sum_{f=2}^{6} \frac{f(f-1)}{2} v_f = 2 \frac{2(2-1)}{2} = 2 \tag{9}$$

skąd

$$\sum_{i=1}^{6} \pi_i + 2 = 13 + 2 = 15 = \frac{6(6-1)}{2}. \tag{10}$$

Przykład 3.

Wektor preferencji ma postać $\pi = (5, 1, 1, 1, 0, 1), \sum_{i=1}^{6} \pi_i = 9.$ (11)

Występuje jedna czteroelementowa grupa obiektów równoważnych, czyli

$$\sum_{i=1}^{6} \pi_i + \sum_{f=2}^{6} \frac{f(f-1)}{2} v_f = 9 + 1 \cdot \frac{4 \cdot (4-1)}{2} = 15. \tag{12}$$

W pracy [1] wykazano, że przy wyznaczaniu mediany Litvaka podstawową rolę odgrywają współczynniki $\rho_i^{k(j)}$ definiowane, jak następuje

$$\rho_i^{k(j)} = \left| \pi_i^{(j)} - \pi_i^k \right|. \tag{13}$$

Współczynniki te określają różnicę między danym uporządkowaniem P (nazywanym uporządkowaniem referencyjnym) a uporządkowaniem P^k, k=1,..., K, rozpatrywaną z punktu widzenia obiektu O_i, i=1,..., n, przy założeniu, że w uporządkowaniu P obiekt O_i zajmuje pozycję j (j=1,..., n).

Współczynniki $\rho_i^{k(j)}$ dla danego i (i=1,...,n) tworzą więc macierz $[\rho_i^{k(j)}]$ o wymiarach K × n; macierzy takich jest n.

Należy podkreślić, że przy takiej definicji współczynników $\rho_i^{k(j)}$ zakłada się, że w uporządkowaniu referencyjnym P nie występują obiekty równoważne; stąd j=1,..., n.

Jeżeli zsumujemy współczynniki $\rho_i^{k(j)}$ względem k, otrzymamy n^2 współczynników $\rho_i^{(j)}$, tworzących jedną macierz o wymiarach n × n

$$[\rho_i^{(j)}] = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} j=1 & \ldots & n \end{array} \\ \begin{array}{c} i=1 \\ \vdots \\ i=n \end{array} & \begin{bmatrix} \rho_1^{(1)} & \ldots & \rho_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \rho_n^{(1)} & \ldots & \rho_n^{(n)} \end{bmatrix} \end{array}, \text{ gdzie } \rho_i^{(j)} = \sum_{k=1}^{K} \rho_i^{k(j)}. \tag{14}$$

Jeżeli ustalimy wartości $\rho_{i_j^*}^{(j)}$ takie, że $$\rho_{i_j^*}^{(j)} = \min_i \rho_i^{(j)}, \tag{15}$$

to macierz $[\rho_i^{(j)}]$ można zastąpić macierzą $[\delta_i^{(j)}]$ o wymiarach n × n

$$[\delta_i^{(j)}] = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} j=1 & \ldots & n \end{array} \\ \begin{array}{c} i=1 \\ \vdots \\ i=n \end{array} & \begin{bmatrix} \delta_1^{(1)} & \ldots & \delta_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_n^{(1)} & \ldots & \delta_n^{(n)} \end{bmatrix} \end{array}, \text{ gdzie } \delta_i^{(j)} = \rho_i^{(j)} - \rho_{i_j^*}^{(j)}. \tag{16}$$

Należy podkreślić, że definicje współczynników $\rho_i^{k(j)}$ (13) oraz $\rho_i^{(j)}$ (14) wskazują na ich specyficzny charakter.

Wprowadzimy do rozważań dwie macierze T i L, gdzie

$$T = [t_{js}] = \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \ldots & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 1 \quad \text{pozycja } j=1 \\ 2 \quad \text{pozycja } j=2 \\ \qquad\quad \vdots \\ n\text{-ta pozycja } j=n \end{array} \end{array} \tag{17}$$

$$L = [l_{si}] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} O_1 & O_2 & \ldots & O_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \ldots & l_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & & l_{nn} \end{bmatrix} \end{array}, \tag{18}$$

gdzie l_{ji} – liczba ekspertów, których zdaniem obiekt O_i jest poprzedzany przez (j-1) obiektów.

W przypadku uporządkowań, w których nie występują obiekty równoważne, l_{ji} oznacza liczbę uporządkowań, w których obiekt O_i zajmuje pozycję j.

Oczywiście

$$l_{ji} = \sum_{k=1}^{K} z_{ji}^k \quad \text{gdzie} \quad z_{ji}^k = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli} \quad \pi_i^k = j-1 \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases} \qquad \text{oraz} \sum_{j=1}^{n} l_{ji} = K \text{ [1]}. \tag{19}$$

Łatwo zauważyć, że

$$[\rho_i^{(j)}] = [t_{js}][l_{si}] \tag{20}$$

$$\text{czyli} \quad \rho_i^{(j)} = \sum_{s=1}^{n} t_{js} l_{si}, \ i, j=1,\ldots, n. \tag{21}$$

Poniżej zostanie podany przykład wyznaczania powyższych wielkości przy założeniu, że n=6 oraz K=10.

Przykład 4.

Załóżmy, że jest dany zbiór uporządkowań podanych przez 10 ekspertów, $P=\{P^1, \ldots, P^{10}\}$. Zadaniem ekspertów było uporządkowanie zbioru 6 obiektów $\mathcal{O}= \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6\}$. Uporządkowania podane przez ekspertów są jak następuje:

$$\begin{array}{ll}
P^1 = \{(O_2, O_6), (O_1, O_3, O_4, O_5)\} & \pi^1 = (2, 0, 2, 2, 2, 0) \\
P^2 = \{O_6, (O_3, O_4), O_1, (O_2, O_5)\} & \pi^2 = (3, 4, 1, 1, 4, 0) \\
P^3 = \{O_2, O_1, O_6, (O_3, O_4, O_5)\} & \pi^3 = (1, 0, 3, 3, 3, 2) \\
P^4 = \{O_2, O_3, (O_1, O_5), (O_4, O_6)\} & \pi^4 = (2, 0, 1, 4, 2, 4) \\
P^5 = \{O_5, O_4, (O_1, O_6), O_3, O_2\} & \pi^5 = (2, 5, 4, 1, 0, 2) \\
P^6 = \{O_1, O_6, (O_2, O_3, O_5), O_4\} & \pi^6 = (0, 2, 2, 5, 2, 1) \\
P^7 = \{(O_2, O_3, O_4, O_5), O_6, O_1\} & \pi^7 = (5, 0, 0, 0, 0, 4) \\
P^8 = \{O_1, (O_2, O_5), (O_3, O_4, O_6)\} & \pi^8 = (0, 1, 3, 3, 1, 3) \\
P^9 = \{O_2, O_3, O_4, O_5, (O_1, O_6)\} & \pi^9 = (4, 0, 1, 2, 3, 4) \\
P^{10}=\{O_1, (O_2, O_3, O_4, O_5), O_6\} & \pi^{10} = (0, 1, 1, 1, 1, 5)
\end{array} \tag{22}$$

[1] Suma elementów w każdej kolumnie macierzy L wynosi K, suma w wierszach nie jest stała. W Dodatku 1 podano wzory określające te sumy.

Macierz L ma postać

$$L = \begin{array}{cccccccc} O_1 & O_2 & O_3 & O_4 & O_5 & O_6 & & \sum_{i=1}^{n} l_{si} \\ \left[\begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} s=1 \\ s=2 \\ s=3 \\ s=4 \\ s=5 \\ s=6 \end{array} & \begin{array}{c} 14 \\ 13 \\ 13 \\ 8 \\ 8 \\ 4 \end{array} \end{array} \tag{23}$$

Macierz $[\rho_i^{(j)}]$ wyznaczona zgodnie z wzorami (13), (14) jest, jak następuje

$$[\rho_i^{(j)}] = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 19 & 15 & 13 & 17 & 23 & 31 \\ \mathbf{13} & 13 & 17 & 23 & 29 & 37 \\ 18 & \mathbf{10} & \mathbf{10} & \mathbf{14} & 22 & 32 \\ 22 & 14 & 12 & \mathbf{14} & 20 & 28 \\ 18 & 12 & \mathbf{10} & \mathbf{14} & 22 & 32 \\ 25 & 19 & 15 & 15 & \mathbf{17} & \mathbf{25} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 118 \\ 132 \\ 106 \\ 110\,. \\ 108 \\ 116 \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} 115 & 83 & 77 & 97 & 133 & 185 \end{array} & \mathbf{690} \end{array} \tag{24}$$

Minimalne elementy w kolumnach macierzy $[\rho_i^{(j)}]$ wyróżniono pogrubieniem. Z prawej strony macierzy $[\rho_i^{(j)}]$ podano sumy elementów w poszczególnych wierszach, a poniżej macierzy $[\rho_i^{(j)}]$ są podane sumy elementów w poszczególnych kolumnach.

Macierz $[\delta_i^{(j)}]$ (16) jest więc, jak następuje

$$[\delta_i^{(j)}] = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 & 3 & 6 & 6 \\ \mathbf{0} & 3 & 7 & 9 & 12 & 12 \\ 5 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 5 & 7 \\ 9 & 4 & 2 & \mathbf{0} & 3 & 3 \\ 5 & 2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 5 & 7 \\ 12 & 9 & 5 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Analizując postać macierzy T (17) łatwo stwierdzić, że

$$\sum_{j=1}^{n} t_{j1} = \frac{0+(n-1)}{2} n = \frac{n(n-1)}{2} \tag{26}$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_{j2} = \frac{0+(n-2)}{2}(n-1)+1 = \frac{n^2-3n+4}{2} \tag{27}$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_{j3} = \frac{0+(n-3)}{2}(n-2)+3 = \frac{n^2-5n+12}{2} \tag{28}$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ja} = \frac{0+(n-a)}{2}(n-a+1) + \frac{0+(a-1)}{2}a = \frac{n^2 - n(2a-1) + 2a(a-1)}{2} \tag{29}$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_{j1} - \sum_{j=1}^{n} t_{ja} = (n-a)(a-1). \tag{30}$$

Stąd wynika, że dla a=b+1

$$\sum_{j=1}^{n} t_{j1} - \sum_{j=1}^{n} t_{j(b+1)} = b(n-b-1), \qquad b \le \frac{n}{2} \tag{31}$$

oraz dla a=n-b

$$\sum_{j=1}^{n} t_{j1} - \sum_{j=1}^{n} t_{j(n-b)} = b(n-b-1), \qquad b \le \frac{n}{2}. \tag{32}$$

Z przytoczonych zależności bezpośrednio wynika, że wartości sum $\sum_{j=1}^{n} t_{js}$ zależą wyłącznie od n oraz s.

Na podstawie wzoru (21) mamy

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_i^{(j)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} t_{js} l_{si} = \sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} t_{js}\right) l_{si}. \tag{33}$$

Dla danego n wyrażenie (33) zależy więc wyłącznie od l_{si} (s=1,..., n).

Przykład 5.

Dla n=6 mamy

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{6} t_{j1} = \frac{6(6-1)}{2} = 15; \quad \sum_{j=1}^{6} t_{j2} = 15-4 = 11; \quad \sum_{j=1}^{6} t_{j3} = 15-6 = 9 \\ &\sum_{j=1}^{6} t_{j4} = 15-6 = 9; \quad \sum_{j=1}^{6} t_{j5} = 15-4 = 11; \quad \sum_{j=1}^{6} t_{j3} = 15-0 = 15 \end{aligned} \tag{34}$$

A zatem

$$\sum_{j=1}^{6} \rho_i^{(j)} = 15 \cdot l_{1i} + 11 \cdot l_{2i} + 9 \cdot l_{3i} + 9 \cdot l_{4i} + 11 \cdot l_{5i} + 15 \cdot l_{6i}. \tag{35}$$

Przykład 6.

Macierz L z przykładu 4 ma postać

$$L = \begin{array}{cccccc|c} O_1 & O_2 & O_3 & O_4 & O_5 & O_6 & \\ \end{array}$$

$$L = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} O_1 & O_2 & O_3 & O_4 & O_5 & O_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} 10 & 10 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{array} \end{array}\begin{array}{c} \\ 14 \\ 13 \\ 13 \\ 8 \\ 8 \\ 4 \\ 60 \end{array} \tag{36}$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{6} \rho_1^{(j)} = 15\cdot 3 + 11\cdot 1 + 9\cdot 3 + 9\cdot 1 + 11\cdot 1 + 15\cdot 1 = 118 \\ &\sum_{j=1}^{6} \rho_2^{(j)} = 15\cdot 5 + 11\cdot 2 + 9\cdot 1 + 9\cdot 0 + 11\cdot 1 + 15\cdot 1 = 132 \\ &\sum_{j=1}^{6} \rho_3^{(j)} = 15\cdot 1 + 11\cdot 4 + 9\cdot 2 + 9\cdot 2 + 11\cdot 1 + 15\cdot 0 = 106 \\ &\sum_{j=1}^{6} \rho_4^{(j)} = 15\cdot 1 + 11\cdot 3 + 9\cdot 2 + 9\cdot 2 + 11\cdot 1 + 15\cdot 1 = 110 \\ &\sum_{j=1}^{6} \rho_5^{(j)} = 15\cdot 2 + 11\cdot 2 + 9\cdot 3 + 9\cdot 2 + 11\cdot 1 + 15\cdot 0 = 108 \\ &\sum_{j=1}^{6} \rho_6^{(j)} = 15\cdot 2 + 11\cdot 1 + 9\cdot 2 + 9\cdot 1 + 11\cdot 3 + 15\cdot 1 = 116 \end{aligned} \tag{37}$$

co potwierdzają sumy w wierszach macierzy (24).

Z zależności (21) wynika również, że

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i^{(j)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} t_{js} l_{si} = \sum_{s=1}^{n} t_{js}\left(\sum_{i=1}^{n} l_{si}\right). \tag{38}$$

Przykład 7.

Dla macierzy L (23) z przykładu 4 mamy

$$\sum_{i=1}^{6} l_{1i} = 14; \quad \sum_{i=1}^{6} l_{2i} = 13; \quad \sum_{i=1}^{6} l_{3i} = 13; \quad \sum_{i=1}^{6} l_{4i} = 8; \quad \sum_{i=1}^{6} l_{5i} = 8; \quad \sum_{i=1}^{6} l_{6i} = 4, \tag{39}$$

skąd

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{6}\rho_i^{(1)} = 0\cdot 14+1\cdot 13+2\cdot 13+3\cdot 8+4\cdot 8+5\cdot 4=115\\
&\sum_{i=1}^{6}\rho_i^{(2)} = 1\cdot 14+0\cdot 13+1\cdot 13+2\cdot 8+3\cdot 8+4\cdot 4=83\\
&\sum_{i=1}^{6}\rho_i^{(3)} = 2\cdot 14+1\cdot 13+0\cdot 13+1\cdot 8+2\cdot 8+3\cdot 4=77\\
&\sum_{i=1}^{6}\rho_i^{(4)} = 3\cdot 14+2\cdot 13+1\cdot 13+0\cdot 8+1\cdot 8+2\cdot 4=97\\
&\sum_{i=1}^{6}\rho_i^{(5)} = 4\cdot 14+3\cdot 13+2\cdot 13+1\cdot 8+0\cdot 8+1\cdot 4=133\\
&\sum_{i=1}^{6}\rho_i^{(6)} = 5\cdot 14+4\cdot 13+3\cdot 13+2\cdot 8+1\cdot 8+0\cdot 4=185
\end{aligned} \tag{40}$$

co potwierdzają sumy w kolumnach macierzy (24).

Na podstawie wzoru (30) mamy

$$\sum_{j=1}^{n} t_{js} = \sum_{j=1}^{n} t_{j1} - (n-s)(s-1), \tag{41}$$

skąd biorąc pod uwagę zależność (26) i (33) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\rho_i^{(j)} &= \sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} t_{js}\right)l_{si} = \sum_{s=1}^{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} t_{j1}\right)-(n-s)(s-1)\right]l_{si} = \sum_{s=1}^{n}\left[\frac{n(n-1)}{2}-(n-s)(s-1)\right]l_{si}\\
&= \sum_{s=1}^{n}\frac{n(n-1)}{2}l_{si} - \sum_{s=1}^{n}(n-s)(s-1)l_{si} = \frac{n(n-1)}{2}\sum_{s=1}^{n}l_{si} - \sum_{s=1}^{n}(n-s)(s-1)l_{si}\\
&= \frac{n(n-1)}{2}K - \sum_{s=1}^{n}(n-s)(s-1)l_{si}
\end{aligned} \tag{42}$$

Przykładowo dla n=6 mamy

$$\sum_{j=1}^{6}\rho_i^{(j)} = 15K - 4l_{2i} - 6l_{3i} - 6l_{4i} - 4l_{5i} = 15K - 4(l_{2i}+l_{5i}) - 6(l_{3i}+l_{4i}). \tag{43}$$

Jeżeli n jest parzyste, to najmniejszą wartość współczynników przy l_{si} uzyskujemy dla $s=\frac{n}{2}$.

Mamy wtedy z wzorów (29) i (42)

$$\frac{n(n-1)}{2} - \left(n-\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}-1\right) = \frac{2n(n-1)-n(n-2)}{4} = \frac{n^2}{4}. \tag{44}$$

Przykładowo, dla n=6 mamy $\frac{6^2}{4}=9$.

Jeżeli n jest nieparzyste, wówczas najmniejszą wartość współczynników przy l_{si} uzyskujemy dla $s=\frac{n+1}{2}$. Mamy wtedy

$$\frac{n(n-1)}{2}-\left(n-\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}-1\right)=\frac{2n(n-1)-(n-1)^2}{4}=\frac{(n-1)(n+1)}{4}. \quad (45)$$

Dla n=5 wartość tego współczynnika wynosi $\frac{(5-1)(5+1)}{4}=6$.

Przy n – parzystym wyrażenie $\sum_{j=1}^{n}\rho_i^{(j)}$ można zapisać w postaci (po wyodrębnieniu z każdego współczynnika składnika $\frac{n^2}{4}$):

$$\sum_{j=1}^{n}\rho_i^{(j)}=\frac{n^2}{4}\sum_{s=1}^{n}l_{si}+\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{n(n-2)}{4}-(n-s)(s-1)\right]l_{si}=\frac{n^2}{4}\cdot K+\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{n(n-2)}{4}-(n-s)(s-1)\right]l_{si}. \quad (46)$$

Przykładowo, dla n=6 mamy

$$\sum_{j=1}^{6}\rho_i^{(j)}=9K+6l_{1i}+2l_{2i}+2l_{5i}+6l_{6i}=9K+6(l_{1i}+l_{6i})+2(l_{2i}+l_{5i}). \quad (47)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\rho_i^{(j)}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n(n-1)}{2}K-\sum_{s=1}^{n}(n-s)(s-1)l_{si}\right]=\frac{n^2(n-1)}{2}K-\sum_{s=1}^{n}(n-s)(s-1)\sum_{i=1}^{n}l_{si}. \quad (48)$$

Dla rozpatrywanego przykładu n=6 mamy

$$\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\rho_i^{(j)}=15\cdot 6\cdot K-4\sum_{i=1}^{6}(l_{2i}+l_{5i})-6\sum_{i=1}^{6}(l_{3i}+l_{4i}). \quad (49)$$

Dla danych z przykładu 4 mamy

$$\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\rho_i^{(j)}=15\cdot 6\cdot 10-4\cdot(13+8)-6\cdot(13+8)=900-84-126=690, \quad (50)$$

co potwierdza suma wierszy lub kolumn macierzy (24).

Z definicji (20) bezpośrednio wynika, że

$$\rho_i^{(j)}=(j-1)l_{1i}+(j-2)l_{2i}+\ldots+1\cdot l_{(j-1)i}+0\cdot l_{ji}+1\cdot l_{(j+1)i}+\ldots+(n-j)l_{ni}. \quad (51)$$

Łatwo zatem wykazać, że

$$\rho_i^{(1)}+\rho_i^{(j)}=(j-1)K+2\sum_{s=1+j}^{n}(s-j)l_{si}. \quad (52)$$

Mamy zatem dla j=n

$$\rho_i^{(1)}+\rho_i^{(n)}=(n-1)K. \quad (53)$$

A zatem

suma pierwszego i ostatniego elementu jest dla każdego wiersza macierzy $[\rho_i^{(j)}]$ taka sama i wynosi (n-1)K.

Przykład 8.

Dla danych z przykładu 4 mamy

$$\rho_i^{(1)} + \rho_i^{(6)} = (6-1)\cdot 10 = 50 \tag{54}$$

$$\rho_3^{(1)} + \rho_3^{(5)} = (5-1)\cdot 10 + 2\sum_{s=6}^{6}(s-5)l_{s3} = 40 + 2l_{63} = 40 + 2\cdot 1\cdot 0 = 40 \tag{55}$$

$$\rho_3^{(1)} + \rho_3^{(4)} = (4-1)\cdot 10 + 2\sum_{s=5}^{6}(s-4)l_{s3} = 30 + 2l_{53} + 2\cdot 2l_{63} = 30 + 2\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 0 = 32 \tag{56}$$

Wykorzystując definicje (17) i (20) możemy określić postać $\rho_i^{(n-j+1)}$.

$$\rho_i^{(n-j+1)} = (n-j)l_{1i} + (n-j-1)l_{2i} + \ldots + 1\cdot l_{(n-j)i} + 0\cdot l_{(n-j+1)i} + 1\cdot l_{(n-j+2)i} + \ldots + (j-1)l_{ni}\,. \tag{57}$$

Wzory (51) oraz (52) pozwalają określić sumę współczynników $\rho_i^{(j)}$ oraz $\rho_i^{(n-j+1)}$ odpowiadających przeciwległym pozycjom [(1; n), (2; n-1)...]. Mamy

$$\begin{aligned}\rho_i^{(j)} + \rho_i^{(n-j+1)} &= \sum_{s=1}^{j}(n-2s+1)l_{si} + \sum_{s=j+1}^{n-j+1}(n-2j+1)l_{si} + \sum_{s=n-j+2}^{n}(2s-n-1)l_{si} \\ &= \sum_{s=1}^{j}(n-2s+1)l_{si} - \sum_{s=n-j+2}^{n}(n-2s+1)l_{si} + (n-2j+1)\sum_{s=j+1}^{n-j+1}l_{si}\end{aligned} \tag{58}$$

Przykład 9.

Dla danych z przykładu 4 mamy

j = 2, n-j+1 = 6-2+1=5, K = 10

$$\begin{aligned}\rho_i^{(2)} + \rho_i^{(5)} &= \sum_{s=1}^{6}(6-2s+1)l_{si} - \sum_{s=6}^{6}(6-2s+1)l_{si} + (6-4+1)\sum_{s=3}^{5}l_{si} \\ &= (7-2)l_{1i} + (7-4)l_{2i} + 5l_{6i} + 3\sum_{s=3}^{5}l_{si} = 5l_{1i} + 3l_{2i} + 5l_{6i} + 3\sum_{s=3}^{5}l_{si}\end{aligned} \tag{59}$$

Dla i=4 mamy $l_{14} = 1$, $l_{24} = 3$, $l_{34} = 2$, $l_{44} = 2$, $l_{54} = 1$, $l_{64} = 1$, skąd

$$\rho_4^{(2)} + \rho_4^{(5)} = 5\cdot 1 + 3\cdot 3 + 5\cdot 1 + 3(2+2+1) = 5+9+5+15 = 34\,. \tag{60}$$

Na podstawie macierzy (24) mamy $\rho_4^{(2)} = 14$, $\rho_4^{(5)} = 20$ czyli $\rho_4^{(2)} + \rho_4^{(5)} = 34$.

Dla j = 3, n-j+1 = 4, K=10 oraz i = 2 ($l_{12} = 5$, $l_{22} = 2$, $l_{32} = 1$, $l_{42} = 0$, $l_{52} = 1$, $l_{62} = 1$)

$$\begin{aligned}&\rho_2^{(3)} + \rho_2^{(4)} = (7-2)\cdot 5 + (7-4)\cdot 2 + 1\cdot 1 - (7-10)\cdot 1 - (7-12)\cdot 1 + 1\cdot(0) = \\ &\qquad 25+6+1+3+5 = 40\end{aligned} \tag{61}$$

Na podstawie macierzy (24) mamy $\rho_2^{(3)} = 17$, $\rho_2^{(4)} = 23$ czyli $\rho_2^{(3)} + \rho_2^{(4)} = 40$.

Istotna jest również suma dwu kolejnych współczynników $\rho_i^{(j)}$. Na podstawie wzoru (51) mamy

$$\begin{aligned}\rho_i^{(j)}+\rho_i^{(j+1)} &= \sum_{s=1}^{j}[2(j-s)+1]l_{si}+\sum_{s=j+1}^{n}[2(s-j)-1]l_{si} = \\ & 2\sum_{s=1}^{j}(j-s)l_{si}+2\sum_{s=j+1}^{n}(s-j)l_{si}+\sum_{s=1}^{j}l_{si}-\sum_{s=j+1}^{n}l_{si} = \\ & 2\left[\sum_{s=1}^{j}(j-s)l_{si}+\sum_{s=j+1}^{n}(s-j)l_{si}\right]+2\sum_{s=1}^{j}l_{si}-K\end{aligned} \tag{62}$$

Przykład 10.

Dla danych z przykładu 4 przy założeniu, że $j = 3$; $i = 5$ ($l_{15} = 2$, $l_{25} = 2$, $l_{35} = 3$, $l_{45} = 2$, $l_{55} = 1$, $l_{65} = 0$) mamy

$$\begin{aligned}\rho_5^{(3)}+\rho_5^{(4)} &= 2[(3-1)l_{15}+(3-2)l_{25}+(4-3)l_{45}+(5-3)l_{55}+(6-3)l_{65}]+2(l_{15}+l_{25}+l_{35})-10= \\ & 2(2\cdot 2+1\cdot 2+1\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot 0)+2(2+2+3)-10=2\cdot 10+2\cdot 7-10=24\end{aligned} \tag{63}$$

Z danych macierzy (24) wynika, że $\rho_5^{(3)}=10$, $\rho_5^{(4)}=14$.

Podobnie dla $j = 5$, $i = 2$ ($l_{12} = 5$, $l_{22} = 2$, $l_{32} = 1$, $l_{42} = 0$, $l_{52} = 1$, $l_{62} = 1$) mamy

$$\begin{aligned}\rho_2^{(5)}+\rho_2^{(6)} &= 2[(5-1)l_{12}+(5-2)l_{22}+(5-3)l_{32}+(5-4)l_{42}+(6-5)l_{42}]+ \\ & 2(l_{12}+l_{22}+l_{32}+l_{42}+l_{52})-10= \\ & 2(4\cdot 5+3\cdot 2+2\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot 1)+2(5+2+1+0+1)-10=2\cdot 29+2\cdot 9-10=66\end{aligned} \tag{64}$$

Z danych macierzy (24) wynika, że $\rho_2^{(5)}=29$, $\rho_2^{(6)}=37$.

Zależności (42), (46), (52), (57), (58), (62) pozwalają wyznaczać wszelkie interesujące sumy współczynników $\rho_i^{(j)}$ ($j = 1,\ldots, n$) dla danego i ($i = 1,\ldots, n$).

Podobnie można określić różnice tych współczynników. Przyjmijmy, że $j_1 < j_2$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned}\rho_i^{(j_1)}-\rho_i^{(j_2)} &= -(j_2-j_1)K+2\left[\sum_{s=1+j_1}^{j_2}(s-j_1)l_{si}+\sum_{s=1+j_2}^{n}(j_2-j_1)l_{si}\right]= \\ & -(j_2-j_1)K+2\sum_{s=1+j_1}^{j_2}(s-j_1)l_{si}+2(j_2-j_1)\sum_{s=1+j_2}^{n}l_{si} = \\ & (j_2-j_1)\left(2\sum_{s=1+j_2}^{n}l_{si}-K\right)+2\sum_{s=1+j_1}^{j_2}(s-j_1)l_{si}\end{aligned} \tag{65}$$

Przykład 11.

Dla danych z przykładu 4 przy założeniu, że $j_1 = 2$, $j_2 = 5$, $i = 4$, ($l_{14} = 1$, $l_{24} = 3$, $l_{34} = 2$, $l_{44} = 2$, $l_{54} = 1$, $l_{64} = 1$) mamy

$$\begin{aligned}\rho_4^{(2)} - \rho_4^{(5)} &= (5-2)(2\cdot l_{64} - 10) + 2[(3-2)l_{34} + (4-2)l_{44} + (5-2)l_{54}] = \\ &3(2\cdot 1 - 10) + 2(1\cdot 2 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1) = -24 + 18 = -6\end{aligned} \tag{66}$$

Z danych macierzy (24) mamy $\rho_4^{(2)} = 14$, $\rho_4^{(5)} = 20$.

Podobnie dla $j_1 = 3$, $j_2 = 6$, $i = 6$, ($l_{16} = 2$, $l_{26} = 1$, $l_{36} = 2$, $l_{46} = 1$, $l_{56} = 3$, $l_{66} = 1$) mamy

$$\begin{aligned}\rho_6^{(3)} - \rho_6^{(6)} &= (6-3)(-10) + 2[(4-3)l_{46} + (5-3)l_{56} + (6-3)l_{66}] = \\ &-30 + 2(1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 1) = -30 + 2\cdot 10 = -10\end{aligned} \tag{67}$$

Z danych macierzy (24) mamy $\rho_6^{(3)} = 15$, $\rho_6^{(6)} = 25$.

Dla $j_2 = j_1 + 1$ na podstawie wzoru (65) otrzymujemy

$$\rho_i^{(j)} - \rho_i^{(j+1)} = 2\sum_{s=2+j}^{n} l_{si} - K + 2l_{(1+j)i} = -K + 2\sum_{s=1+j}^{n} l_{si} = K - 2\sum_{s=1}^{j} l_{si}\,. \tag{68}$$

Przykład 12.

Dla danych z przykładu 4 przy założeniu, że $j = 4$, $i = 1$ ($l_{11} = 3$, $l_{21} = 1$, $l_{31} = 3$, $l_{41} = 1$, $l_{51} = 1$, $l_{61} = 1$) mamy

$$\rho_1^{(4)} - \rho_1^{(5)} = -10 + 2(l_{51} + l_{61}) = -10 + 2(1+1) = -6\,. \tag{69}$$

Z danych macierzy (24) mamy $\rho_1^{(4)} = 17$, $\rho_1^{(5)} = 23$.

Dla $j_1 = 1$ oraz $j_2 = n$ na podstawie wzoru (65) otrzymujemy

$$\rho_i^{(1)} - \rho_i^{(n)} = -(n-1)K + 2\sum_{s=2}^{n} sl_{si} - 2\sum_{s=2}^{n} l_{si} = -(n+1)K + 2\sum_{s=2}^{n} sl_{si} + 2l_{1i} = -(n+1)K + 2\sum_{s=1}^{n} sl_{si}\,. \tag{70}$$

Przykład 13.

Dla danych z przykładu 4 przy założeniu, że $i = 4$ ($l_{14} = 1$, $l_{24} = 3$, $l_{34} = 2$, $l_{44} = 2$, $l_{54} = 1$, $l_{64} = 1$) mamy

$$\rho_4^{(1)} - \rho_4^{(6)} = -(6+1)\cdot 10 + 2(1\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 2 + 5\cdot 1 + 6\cdot 1) = -70 + 2\cdot 32 = -6\,. \tag{71}$$

Z danych macierzy (24) mamy $\rho_4^{(1)} = 22$, $\rho_4^{(6)} = 28$.

Na podstawie wzoru (65) można również obliczyć dla danego i różnicę współczynników $\rho_i^{(j)}$ stojących na przeciwległych pozycjach, to znaczy różnicę $\rho_i^{(j)} - \rho_i^{(n-j+1)}$. Mamy bowiem

$$\rho_i^{(j)} - \rho_i^{(n-j+1)} = (n-2j+1)\left(2\sum_{s=n-j+2}^{n} l_{si} - K\right) + 2\sum_{s=j+1}^{n-j+1}(s-j)l_{si}\,. \tag{72}$$

Ze wzoru (72) bezpośrednio wynika, że (zakładając n-2j+1 > 0) różnica (72) jest dodatnia jeżeli

$$(n-2j+1)K < 2\left[(n-2j+1)\sum_{s=n-j+2}^{n} l_{si} + \sum_{s=j+1}^{n-j+1}(s-j)l_{si}\right]. \tag{73}$$

Przykład 14.

Dla danych z przykładu 4 przy założeniu, że $j = 2$, $i = 3$ ($l_{13} = 1$, $l_{23} = 4$, $l_{33} = 2$, $l_{43} = 2$, $l_{53} = 1$, $l_{63} = 0$) mamy

$$\begin{aligned}\rho_3^{(2)} - \rho_3^{(5)} &= (6-4+1)(2l_{63}-10) + 2[(3-2)\cdot 2 + (4-2)\cdot 2 + (5-2)\cdot 1] = \\ &3(2\cdot 0 - 10) + 2(1\cdot 2 + 2\cdot 2 + 3\cdot 1) = -30 + 2\cdot 9 = -12\end{aligned} \tag{74}$$

Z danych macierzy (24) mamy $\rho_3^{(2)} = 10$, $\rho_3^{(5)} = 22$.

Warto zwrócić uwagę, że wyrażenie (51) można zapisać w postaci

$$\begin{aligned}\rho_i^{(j)} &= \sum_{s=1}^{j}(j-s)l_{si} + \sum_{s=j+1}^{n}(s-j)l_{si} = \sum_{s=1}^{j}(j-s)l_{si} + \sum_{s=j+1}^{n-1}(s-j)l_{si} + (n-j)l_{ni} = \\ &\sum_{s=1}^{j}(j-s)l_{si} + \sum_{s=j+1}^{n-1}(s-j)l_{si} + (n-j)\left(K - \sum_{s=1}^{n-1} l_{si}\right) = \\ &\sum_{s=1}^{j}[(j-s)-(n-j)]l_{si} + \sum_{s=j+1}^{n-1}[(s-j)-(n-j)]l_{si} + (n-j)K = \\ &-\sum_{s=1}^{j}(n-2j+s)l_{si} - \sum_{s=j+1}^{n-1}(n-s)l_{si} + (n-j)K\end{aligned} \tag{75}$$

Pierwsze dwa składniki wyrażenia (75) są ujemne, a zatem $\rho_i^{(j)} \le (n-j)K$. (76)

Przykładowo więc

$$\rho_i^{(1)} \le (n-1)K; \qquad \rho_i^{(2)} \le (n-2)K. \tag{77}$$

Przykład 15.

Dla danych z przykładu 4 przy założeniu, że j=2, i=3 mamy

$$\begin{aligned}\rho_3^{(2)} &= -\sum_{s=1}^{2}(6-4+s)l_{s3} - \sum_{s=3}^{5}(6-s)l_{s3} + (6-2)10 = \\ &-(2+1)l_{13} - (2+2)l_{23} - (6-3)l_{33} - (6-4)l_{43} - (6-5)l_{53} + 4\cdot 10 = \\ &-3\cdot 1 - 4\cdot 4 - 3\cdot 2 - 2\cdot 2 - 1\cdot 1 + 40 = -30 + 40 = 10\end{aligned} \tag{78}$$

Z danych macierzy (24) wynika, że $\rho_3^{(2)} = 10$.

Rozpatrzymy teraz różnicę sum współczynników $\rho_i^{(j)}$ znajdujących się na sąsiednich przeciwległych pozycjach. Będziemy więc rozważać sumy współczynników $\rho_i^{(j)}+\rho_i^{(n-j+1)}$ oraz $\rho_i^{(j+1)}+\rho_i^{(n-j)}$. Pierwszą sumę określa wyrażenie (53). Mamy zatem

$$(\rho_i^{(j)}+\rho_i^{(n-j+1)})-(\rho_i^{(j+1)}+\rho_i^{(n-j)})=(\rho_i^{(j)}-\rho_i^{(j+1)})+(\rho_i^{(n-j+1)}-\rho_i^{(n-j)}). \tag{79}$$

Wykorzystując wzór (68) mamy

$$\begin{aligned}(\rho_i^{(j)}+\rho_i^{(n-j+1)})-(\rho_i^{(j+1)}+\rho_i^{(n-j)})&=K-2\sum_{s=1}^{j}l_{si}-\left(K-2\sum_{s=1}^{n-j}l_{si}\right)=\\ &-2\sum_{s=1}^{j}l_{si}+2\sum_{s=1}^{n-j}l_{si}=2\sum_{s=j+1}^{n-j}l_{si}\end{aligned} \tag{80}$$

Wiadomo, że

$$\sum_{s=1}^{j}l_{si}+\sum_{s=j+1}^{n-j}l_{si}+\sum_{s=n-j+1}^{n}l_{si}=K, \tag{81}$$

skąd

$$0\le(\rho_i^{(j)}+\rho_i^{(n-j+1)})-(\rho_i^{(j+1)}+\rho_i^{(n-j)})=2\left(K-\sum_{s=1}^{j}l_{si}-\sum_{s=n-j+1}^{n}l_{si}\right)\le 2K. \tag{82}$$

A zatem różnica (79) jest zawsze dodatnia lub równa zeru.

Przykład 16.

Dla danych z przykładu 4 przy założeniu , że j=2, i=3 mamy

$$(\rho_3^{(2)}+\rho_3^{(5)})-(\rho_3^{(3)}+\rho_3^{(4)})=2(l_{33}+l_{43})=2(2+2)=8. \tag{83}$$

Z danych macierzy (24) wynika, że $\rho_3^{(2)}=10$; $\rho_3^{(5)}=22$; $\rho_3^{(3)}=10$; $\rho_3^{(4)}=14$.

Oczywiście fakt, że różnica (79) jest nieujemna nie oznacza, że różnica $\rho_i^{(j)}-\rho_i^{(j+1)}$ musi być też nieujemna. Ze wzoru (68) mamy

$$\rho_i^{(j)}-\rho_i^{(j+1)}=K-2\sum_{s=1}^{j}l_{si}=2\left(\frac{K}{2}-\sum_{s=1}^{j}l_{si}\right). \tag{84}$$

Jeżeli więc

$$\sum_{s=1}^{j}l_{si}\le\frac{K}{2},\text{ to }\rho_i^{(j)}-\rho_i^{(j+1)}\ge 0. \tag{85}$$

$$\sum_{s=1}^{j}l_{si}\ge\frac{K}{2},\text{ to }\rho_i^{(j)}-\rho_i^{(j+1)}\le 0. \tag{86}$$

Przykład 17.

Na podstawie analizy macierzy L (23) z przykładu 4 mamy:

$$\sum_{s=1}^{2} l_{s2} = 7 > \frac{10}{2} \text{ oraz } \sum_{s=1}^{3} l_{s5} = 7 > \frac{10}{2}. \tag{87}$$

Zgodnie z wzorem (86) $\rho_2^{(2)} - \rho_2^{(3)} \le 0$ oraz $\rho_5^{(3)} - \rho_5^{(4)} \le 0$. (88)

Z danych macierzy (24) wynika, że

$$\rho_2^{(2)} - \rho_2^{(3)} = 13 - 17 = -4 \text{ oraz } \rho_5^{(3)} - \rho_5^{(4)} = 10 - 14 = -4. \tag{89}$$

Podobnie mamy

$$\sum_{s=1}^{2} l_{s1} = 4 < \frac{10}{2} \text{ oraz } \sum_{s=1}^{3} l_{s6} = 5 = \frac{10}{2}. \tag{90}$$

Zgodnie z wzorem (85) $\rho_1^{(2)} - \rho_1^{(3)} \ge 0$ oraz $\rho_6^{(3)} - \rho_6^{(4)} = 0$. (91)

Z danych macierzy (24) wynika, że

$$\rho_1^{(2)} - \rho_1^{(3)} = 15 - 13 = 2 \text{ oraz } \rho_6^{(3)} - \rho_6^{(4)} = 15 - 15 = 0. \tag{92}$$

Zgodnie z wzorem (16) mamy $\delta_i^{(j)} = \rho_i^{(j)} - \rho_{i_j^*}^{(j)}$. Wykorzystując zależność (62) można wyznaczyć różnicę $\delta_{i_{j+1}^*}^{(j)} - \delta_{i_j^*}^{(j+1)}$. Mamy bowiem

$$\begin{aligned}\delta_{i_{j+1}^*}^{(j)} - \delta_{i_j^*}^{(j+1)} &= \left(\rho_{i_{j+1}^*}^{(j)} - \rho_{i_j^*}^{(j)}\right) - \left(\rho_{i_j^*}^{(j+1)} - \rho_{i_{j+1}^*}^{(j+1)}\right) = \left(\rho_{i_{j+1}^*}^{(j)} + \rho_{i_{j+1}^*}^{(j+1)}\right) - \left(\rho_{i_j^*}^{(j)} + \rho_{i_j^*}^{(j+1)}\right) = \\ & 2\left[\sum_{s=1}^{j} (j-s)\left(l_{si_{j+1}^*} - l_{si_j^*}\right) + \sum_{s=j+1}^{n} (j-s)\left(l_{si_{j+1}^*} - l_{si_j^*}\right)\right] + 2\sum_{s=1}^{n}\left(l_{si_{j+1}^*} - l_{si_j^*}\right)\end{aligned} \tag{93}$$

Z zależności (93) bezpośrednio wynika, że o wartości różnicy $\delta_{i_{j+1}^*}^{(j)} - \delta_{i_j^*}^{(j+1)}$ decydują składowe $l_{si_{j+1}^*} - l_{si_j^*}$ $(s = 1, \ldots, n)$.

Przykład 18.

Dla danych z przykładu 4 oraz j=1 mamy $i_j^* = i_1^* = 2$, $i_{j+1}^* = i_2^* = 3$. Ponadto

$l_{12} = 5$, $l_{22} = 2$, $l_{32} = 1$, $l_{42} = 0$, $l_{52} = 1$, $l_{62} = 1$; $l_{13} = 1$, $l_{23} = 4$, $l_{33} = 2$, $l_{43} = 2$, $l_{53} = 1$, $l_{63} = 0$, skąd $l_{13} - l_{12} = -4$; $l_{23} - l_{22} = 2$; $l_{33} - l_{32} = 1$; $l_{43} - l_{42} = 2$; $l_{53} - l_{52} = 0$; $l_{63} - l_{62} = -1$. (94)

Mamy zatem

$$\begin{aligned}\delta_3^{(1)} - \delta_2^{(2)} &= 2\sum_{s=2}^{6} (s-1)(l_{s3} - l_{s2}) + 2(l_{13} - l_{12}) = \\ & 2[1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 0 + 5\cdot(-1)] + 2\cdot(-4) = 10 - 8 = 2\end{aligned} \tag{95}$$

Z danych macierzy (25) wynika, że $\delta_3^{(1)} = 5$, $\delta_2^{(2)} = 3$.

Wyrażenie (75) można wykorzystać do wyznaczenia różnic współczynników $\rho_i^{(j)}$ dla różnych i. Mamy bowiem

$$\rho_{i_1}^{(j)} - \rho_{i_2}^{(j)} = \sum_{s=1}^{j}(n-2j+s)(l_{si_2} - l_{si_1}) + \sum_{s=j+1}^{n}(n-s)(l_{si_2} - l_{si_1}) \qquad (96)$$

Przykład 19.

Dla danych z przykładu 4 przy założeniu, że j = 3, $i_1 = 4$, $i_2 = 5$ mamy ($l_{14} - l_{15} = 1\text{-}2 = -1$; $l_{24} - l_{25} = 3\text{-}2 = 1$; $l_{34} - l_{35} = 2\text{-}5 = -1$; $l_{44} - l_{45} = 2\text{-}2 = 0$;$l_{54} - l_{55} = 1\text{-}1 = 0$; $l_{64} - l_{65} = 1\text{-}0 = 1$)

$$\begin{aligned}\rho_4^{(3)} - \rho_5^{(3)} &= \sum_{s=1}^{3}(6-6+s)(l_{s5} - l_{s4}) + \sum_{s=4}^{6}(6-s)(l_{s5} - l_{s4}) = \\ &(l_{15} - l_{14}) + 2(l_{25} - l_{24}) + 3(l_{35} - l_{34}) + 2(l_{45} - l_{44}) + (l_{55} - l_{54}) = \\ &1 + 2(-1) + 3\cdot 1 + 2\cdot 0 + 0 = 2\end{aligned} \qquad (97)$$

Z danych macierzy (24) wynika, że $\rho_4^{(3)} = 12$ $\rho_5^{(3)} = 10$.

Wnioski końcowe

Wyprowadzone zależności mogą być pomocne przy wyznaczaniu mediany Litvaka przy użyciu algorytmów heurystycznych opisanych w pracach [1], [2]. Mogą one być szczególnie użyteczne przy analizie pozycji i wyznaczaniu kolejności obiektów, dla których współczynniki $\delta_i^{(j)}$ mają te same wartości.

Literatura

1. Bury H., Wagner D.: Teoretyczne i praktyczne aspekty zastosowania mediany Kemeny'ego w zagadnieniach tworzenia ocen grupowych. W: praca zbiorowa pod red.T.Trzaskalika (Red.): Modelowanie preferencji a ryzyko '01. Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Katowicach, Katowice 2002, ss. 45-60, 7 poz. bibl.
2. Bury H., Wagner D.: Wybór metody tworzenia oceny grupowej. Propozycje rozwiązań. W: Bubnicki Z., Hryniewicz O., Kulikowski R. (Red.): Badania operacyjne i systemowe wobec wyzwań XXI wieku. Metody i techniki analizy informacji i wspomagania decyzji. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2002, ss. III-1-III-14, 25 poz. bibl.
3. Litvak B.G.: Informacje przekazywane przez ekspertów.Metody ich uzyskiwania i analizy (w jęz. rosyjskim). Moskwa, Radio i Swjaź, 1982.

Dodatek

W zależnościach wykorzystywanych przy obliczaniu mediany Litvaka często pojawia się wyrażenie $\sum_{i=1}^{n} l_{si}$. Poniżej zostanie podany sposób obliczania tej sumy.

Oznaczymy przez t_k^v liczbę obiektów równoważnych stojących na pozycji v w uporządkowaniu podanym przez eksperta o numerze k.

Oznaczymy przez $\{\bar{k}_s\}$ zbiór numerów uporządkowań podanych przez ekspertów takich, że

$$\sum_{v=1}^{v_k^s} t_k^v = s-1, \tag{D1}$$

gdzie $v_k^s \le s-1$. (D2)

Liczbę ekspertów, według których opinii dany obiekt O_i poprzedza (s-1) obiektów, oznaczymy przez l_{si}. Mamy

$$\sum_{i=1}^{n} l_{si} = \mathrm{card}\{\bar{k}_s\} + \sum_{\bar{k}_s}(t_k^{v_k^s+1} - 1) + \sum_{\bar{k}_s}(t_k^s - 1) \tag{D3}$$

$$\sum_{\bar{k}_s} t_k^{v_k^s+1} + \sum_{\bar{k}_s} t_k^s = \sum_{\bar{k}_s}(t_k^{v_k^s+1} + t_k^s) \tag{D4}$$

Przykład D1.

Dla przykładu 4 utworzono tablicę D1, będącą zapisem omawianych zależności

Tablica D1.

	1	2	3	4	5	6		O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	$\sum_{i=1}^{n} \pi_i^k$
P^1	O_2	O_6	O_1	O_3	O_4	O_5	π^1	2	0	2	2	2	0	8
P^2	O_6	O_3	O_4	O_1	O_2	O_5	π^2	3	4	1	1	4	0	13
P^3	O_2	O_1	O_6	O_3	O_4	O_5	π^3	1	0	3	3	3	2	12
P^4	O_2	O_3	O_1	O_5	O_4	O_6	π^4	2	0	1	4	2	4	13
P^5	O_5	O_4	O_1	O_6	O_3	O_2	π^5	2	5	4	1	0	2	14
P^6	O_1	O_6	O_2	O_3	O_5	O_4	π^6	0	2	2	5	2	1	12
P^7	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_1	π^7	5	0	0	0	0	4	9
P^8	O_1	O_2	O_5	O_3	O_4	O_6	π^8	0	1	3	3	1	3	11
P^9	O_2	O_3	O_4	O_5	O_1	O_6	π^9	4	0	1	2	3	4	14
P^{10}	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	π^{10}	0	1	1	1	1	5	9

Σ=115

Dla s = 3 mamy

$$\{\overline{k}_3\} = \{P^1, P^3, P^4, P^5, P^6, P^9\} \qquad \mathrm{card}\{\overline{k}_3\} = 6 \tag{D5}$$

$$t_1^1 = 2;\ t_1^2 = 4;\ t_3^1 + t_3^2 = 2;\ t_3^3 = 1;\ t_4^1 + t_4^2 = 2;\ t_4^3 = 2;$$

$$t_5^1 + t_5^2 = 2;\ t_5^3 = 2;\ t_6^1 + t_6^2 = 2;\ t_6^3 = 3;\ t_9^1 + t_9^2 = 2;\ t_9^3 = 1. \tag{D6}$$

A zatem

$$\sum_{i=1}^{6} l_{3i} = 6 + (4-1) + (1-1) + (2-1) + (2-1) + (3-1) + (1-1) = 6 + 3 + 1 + 1 + 2 = 13. \tag{D7}$$

Dla s = 4 mamy

$$\{\overline{k}_4\} = \{P^2, P^3, P^8, P^9\}, \qquad \mathrm{card}\{\overline{k}_4\} = 4 \tag{D8}$$

$$t_2^1 + t_2^2 = 3;\ t_2^3 = 1;\ t_3^1 + t_3^2 + t_3^3 = 3;\ t_3^4 = 3;\ t_8^1 + t_8^2 = 3;\ t_8^3 = 3;\ t_9^1 + t_9^2 + t_9^3 = 3;\ t_9^4 = 1. \tag{D9}$$

$$\sum_{i=1}^{6} l_{4i} = 4 + (1-1) + (3-1) + (3-1) + (1-1) = 4 + 2 + 2 = 8. \tag{D10}$$

Dla s = 1 mamy

$$\{\overline{k}_1\} = \{P^1, P^2, P^3, P^4, P^5, P^6, P^7, P^8, P^9, P^{10}\}, \qquad \mathrm{card}\{\overline{k}_1\} = 10 \tag{D11}$$

$$t_1^1 = 2;\ t_2^1 = t_3^1 = t_4^1 = t_5^1 = t_6^1 = 1;\ t_7^1 = 4;\ t_8^1 = t_9^1 = t_{10}^1 = 1. \tag{D12}$$

$$\sum_{i=1}^{6} l_{1i} = 2 + 8 + 4 = 14. \tag{D13}$$

Zgodnie z wzorem (7)

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i^k = \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{f=2}^{n} \frac{f(f-1)}{2} v_f^k. \tag{D14}$$

A zatem

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{n} \pi_i^k = K \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{f=2}^{n} \frac{f(f-1)}{2} \sum_{k=1}^{K} v_f^k. \tag{D15}$$

Przykład D2.

W rozpatrywanym przykładzie D1 K=10, mamy zatem

$$\sum_{k=1}^{10} v_2^k = 8;\ \sum_{k=1}^{10} v_3^k = 3;\ \sum_{k=1}^{10} v_4^k = 3,$$

skąd

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{n} \pi_i^k = \sum_{k=1}^{10} \sum_{i=1}^{6} \pi_i^k = 10 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} - 8 \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} - 3 \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} - 3 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 150 - 8 - 9 - 18 = 115$$

co potwierdza tablica D1.