Raport Badawczy
Research Report

RB/47/2001

Wycena obligacji katastroficznych w ujęciu teorii dwuczynnikowej funkcji użyteczności

A. Jakubowski

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Pracę zgłosił: prof. dr inż. Roman Kulikowski

Warszawa 2001

Andrzej Jakubowski

Instytut Badań Systemowych PAN

Warszawa

WYCENA OBLIGACJI KATASTROFICZNYCH W UJĘCIU TEORII DWUCZYNNIKOWEJ FUNKCJI UŻYTECZNOŚCI

WSTĘP

Przedmiotem pracy będzie analiza modelu wyceny obligacji katastroficznych, w którym wykorzystuje się dwuczynnikową funkcję użyteczności inwestora. Obligacje katastroficzne (*catastrophe bonds*) rozpatruje się jako pewną klasę instrumentów dłużnych obarczonych ryzykiem nieopłacalności eminenta.

Są to obligacje komunalne, emitowane przez władze regionu narażonego na duże ryzyko wystąpienia klęsk żywiołowych takich, jak powódź, trzęsienie ziemi, pożary lasów, susza itp. W prospekcie emisyjnym takiej obligacji zakłada się, że w przypadku wystąpienia katastrofy prowadzącej do z góry zdefiniowanych strat finansowych, emitent obligacji jest zwolniony z obowiązku dalszej spłaty odsetek i/lub zwrotu wartości nominalnej obligacji. Natomiast w przypadku niewystąpienia katastrofy inwestor otrzymuje wszystkie płatności odsetkowe oraz na końcu okresu inwestycyjnego - wartość nominalną.

Stopa zwrotu z tak zdefiniowanej obligacji powinna oczywiście uwzględniać określoną premię za ryzyko inwestycyjne, wiążące się z określonym prawdopodobieństwem wystąpienia katastrofy w analizowanym regionie. Innymi słowy, obligacja ta powinna być sprzedawana z określonym dyskontem w stosunku do ceny obligacji wolnej od ryzyka, o tych samych strumieniach finansowych; por. *Doherty* [7], *Litzenberger, Beaglehole* [23].

W zaproponowanym podejściu wykorzystuje się koncepcję dwuczynnikowej funkcji użyteczności inwestora, w której czynnik pierwszy jest wyrażony przez wartość oczekiwaną stopy zwrotu z inwestycji, natomiast czynnik drugi – jest określony przez stopę zwrotu „w najgorszym przypadku". Odpowiednio zdefiniowana stopa zwrotu najgorszego przypadku determinuje tzw. poziom bezpieczeństwa papieru wartościowego będący pewną miarą ryzyka

W: T. Trzaskalik (red.): "Modelowanie Preferencji a Ryzyko". Akademia Ekonomiczna, Katowice 2001 (w druku).

inwestycyjnego. Ryzyko to jest ściśle powiązane z zadanym (z założenia) prawdopodobieństwem wystąpienia katastrofy w regionie, zarządzanym przez emitenta obligacji.

Podstawowym problemem rozpatrywanym w pracy jest sposób wyceny obligacji katastroficznej, tj. określenie premii za ryzyko inwestycyjne (*default risk*). W tym celu wykorzystano pewne nowe kategorie dotyczące „poziomu bezpieczeństwa" papieru wartościowego, „wskaźnika bezpieczeństwa" oraz zaproponowano dwuetapowy model decyzyjny wyceny, wiążący się z zastosowaniem tzw. zasady akceptacji oraz zasady preferencji.

Założono, że *zasada akceptacji* jest dla danego papieru wartościowego spełniona, o ile poziom bezpieczeństwa określony dla tego instrumentu jest wyższy od zera. Natomiast *zasada preferencji* wynika z porównania wartości funkcji użyteczności wyznaczonej dla obligacji katastroficznej, z wartością tej funkcji określoną dla obligacji wolnej od ryzyka, o tych samych strumieniach finansowych.

Zaproponowano również pewną subiektywną skalę ilościowej oceny stosunku inwestora do ryzyka, uwzględniającą awersję do ryzyka (*risk-aversion*), tolerancję ryzyka (*risk-tolerance*) oraz skłonność do ryzyka (*risk-seeking*). W analizowanym podejściu uwzględniono więc podział ryzyka inwestycyjnego na czynniki subiektywne oraz czynniki obiektywne zdeterminowane poprzez losowość otoczenia, w jakim podejmowane są decyzje finansowe. Rozpatrywaną w pracy metodologię zilustrowano przykładem obliczeniowym. Przedstawione wyniki stanowią kontynuację wcześniejszych prac autora prowadzonych w tym kierunku; por. *Kulikowski*, *Jakubowski* [19, 20].

Należy podkreślić, że rozpatrywany model wyceny obligacji katastroficznych stanowi pewno nowe rozwiązanie w tym zakresie. Obligacje tego typu – nazywane CAT *bonds* – są stosunkowo nowymi instrumentami finansowymi. Pierwsze z nich pojawiły się w USA w 1996 r.; emitentem był Zarząd Stanu Kaliforni ds. Zagrożeń Trzęsieniami Ziemi (*California Earthquake Authority*), wartość emisji – 1,5 mld USD, por. *Stripple* [25].

Brak jest, jak dotąd, wyczerpującej literatury przedmiotu dotyczącej analizy obligacji katastroficznych. Dotychczasowe publikacje na ten temat dostępne są na ogół w formie wewnętrznych raportów badawczych o ograniczonym zasięgu. Raporty te są publikowane przez duże banki inwestycyjne (Goldman, Sachs & Co., Merrill Lynch) oraz działające w skali światowej firmy reasekuracyjne (Munich Re, Swiss Re, General Re); por. *Canabarro*, *Finkemeier* (et al.) [4], *Cholnoky*, *Zief* (et al.) [6], *Lane* [22], *Litzenberger*, *Beaglehole* (et al.) [23], *Canter*, Cole [5], *Baryshnikov*, *Mayo* [2].

Ostatnio przedmiotem dużego zainteresowania stały się również katastroficzne instrumenty pochodne (CAT–*options*, CAT-*swaps*); pewien przegląd tej tematyki zawiera praca *Lizaka* [24].

Pomimo tego, że idea emisji obligacji katastroficznych czy też szerzej – ubezpieczeniowych papierów wartościowych i ich pochodnych (*insured-linked securities*) – cieszy się ostatnio coraz większym powodzeniem, rynek wtórny transakcji tymi walorami praktycznie jeszcze nie istnieje. Pierwsze próby w tym zakresie prowadzone są przez Bermuda Stock Exchange, Chicago Board of Trade czy też na rynku OTC, z czynnym udziałem największych banków inwestycyjnych.

Trudności związane z obrotem na rynku wtórnym obligacjami katastroficznymi wynikają m. in. stąd, że są one na ogół sprzedawane dla wąskiego grona nabywców instytucjonalnych, w ramach tzw. ofert niepublicznych. Dodatkowe przeszkody wynikają również w tym przypadku z pewnych niedociągnięć organizacyjno-prawnych. W związku z tym, zaproponowany w tej pracy teoretyczny model wyceny może być szczególnie użyteczny dla inwestorów, kupujących obligacje katastroficzne bezpośrednio od emitenta, bądź też dokonujących tych transakcji na niedojrzałym jeszcze rynku wtórnym, na którym odpowiednio wiarygodna rynkowa wycena tych walorów nie jest możliwa.

1. STOPA ZWROTU ORAZ RYZYKO OBLIGACJI KATASTROFICZNEJ

Pod pojęciem obligacji katastroficznej będziemy rozumieli ogólnie obligację komunalną, charakteryzującą się oszacowanym w określony sposób ryzykiem niewypłacalności zobowiązań ze strony emitenta takiej obligacji. W charakterze emitenta, rozpatrywać będziemy władze danego regionu (np. województwa, powiatu, itp.). Zakładamy, że zależnie od tego czy określonego rodzaju klęska żywiołowa (tj. *katastrofa*) nie wystąpi w danym regionie w zadanym horyzoncie czasowym, bądź też wystąpi - wszystkie zobowiązania finansowe emitenta będą przez niego wypełnione, bądź też - w przypadku katastrofy - emitent zawiesza obsługę takiej obligacji.

Innymi słowy, inwestor, który dokonał zakupu rozpatrywanej obligacji będzie otrzymywał odsetki od tej obligacji w kolejnych okresach (np. co rok) zadanego horyzontu inwestycyjnego, aż do momentu wystąpienia ściśle zdefiniowanej katastrofy w skali regionu. Natomiast w przypadku, gdy katastrofa taka w ogóle nie wystąpi w okresie istnienia obligacji (*term to maturity*), wszystkie zobowiązania ze strony emitenta zostaną spełnione; tj. inwestor otrzyma wszystkie płatności kuponowe, jak również - na końcu okresu inwestycyjnego - zwrot wartości nominalnej obligacji. Oczywiście, aby uniknąć możliwych wzajemnych nieporozumień - sam termin „katastrofa regionalna", jak również wielkość wynikających stąd strat ekonomicznych - muszą być ściśle zdefiniowane w prospekcie emisyjnym analizowanej obligacji.

Z powyższego opisu bezpośrednio wynika, że aby dana obligacja katastroficzna znajdowała w ogóle nabywców, oczekiwana stopa zwrotu z inwestycji w taką obligację powinna dostatecznie „atrakcyjna" w porównaniu ze stopą zwrotu z istniejących na rynku obligacji wolnych od ryzyka, o tych samych strumieniach finansowych (np. obligacji skarbowych). Oczywiście, odpowiedź na pytanie o jaką wartość wymagana stopa zwrotu z obligacji katastroficznej powinna być wyższa od stopy zwrotu wolnej od ryzyka (*risk-free rate*) jest dosyć złożonym problemem. Ogólnie można powiedzieć, że owa „premia za ryzyko" (*risk premium*), mierzona różnicą pomiędzy oczekiwaną (czy też wymaganą) stopą zwrotu z obligacji katastroficznej a stopą zwrotu z „analogicznej" obligacji skarbowej, powinna zależeć od szacowanego ryzyka wystąpienia określonej katastrofy w rozpatrywanym regionie, wielkości spodziewanych strat jak i od wielu innych czynników; *Stripple* [25]. Podstawowym czynnikiem wyceny obligacji katastroficznej przez inwestora, tj. wyznaczenia określonego dyskonta cenowego tej obligacji w stosunku do obligacji wolnej od ryzyka, jest możliwość dostępu inwestora do oszacowań prawdopodobieństwa wystąpienia katastrofy w analizowanym regionie.

W pracy, jako przykład katastrofy regionalnej, rozpatrywać będziemy możliwość wystąpienia w danym regionie powodzi o charakterze klęski żywiołowej. Założymy, że zdarzenia wystąpienia bądź też niewystąpienia w kolejnych latach powodzi w analizowanym regionie, są zdarzeniami losowymi statystycznie niezależnymi, z zadanymi prawdopodobieństwami szacowanymi w skali roku. Dane takie są dla zagrożonych regionów dostarczane przez odpowiednie służby meteorologiczne.

Oznaczając przez α - prawdopodobieństwo wystąpienia powodzi w danym roku, mamy: $\alpha = 0.002$ (p.a.) - dla „wody 500-letniej"; $\alpha = 0.01$ (p.a.) - dla wody „100-letniej", $\alpha = 0.05$ - dla „wody 20-letniej", $\alpha = 0.10$ - dla „wody 10-letniej"; itp.

Dla ilustracji zagadnienia wyceny obligacji katastroficznej, założymy, że jest to obligacja 3-letnia z płatnym co 1 rok kuponem odsetkowym. Tak więc przyjmując, że zdarzenia losowe dotyczące możliwości wystąpienia powodzi w kolejnych latach analizowanego okresu $T = 3$ lata - są zdarzeniami niezależnymi, mamy:

$p_1 = \alpha$ - prawdopodobieństwo wystąpienia powodzi w 1-szym roku,

$p_2 = (1-\alpha)\alpha$ - prawdopodobieństwo wystąpienia powodzi w 2-gim roku oraz niewystąpienia powodzi w 1-szym roku,

$p_3 = (1-\alpha)^2\alpha$ - prawdopodobieństwo wystąpienia powodzi w 3-cim roku oraz niewystąpienia powodzi w pierwszych dwóch latach,

$p_4 = (1-\alpha)^3$ - prawdopodobieństwo niewystąpienia powodzi w pierwszych trzech latach.

Jak można łatwo wykazać, zachodzi

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \alpha + (1-\alpha)\alpha + (1-\alpha)^2\alpha + (1-\alpha)^3 = 1.$$

Na przykład, dla $\alpha = 0.10$ (tj. „woda 10-letnia") mamy

$$p_1 = 0.1000, \quad p_2 = 0.0900, \quad p_3 = 0.0810, \quad p_4 = 0.7290.$$

A zatem, rozpatrywane powyżej cztery zdarzenia losowe dotyczące wystąpienia (bądź nie) powodzi w kolejnych latach $t = 1,2,3$ analizowanego horyzontu inwestycyjnego wypełniają całą przestrzeń zdarzeń.

Dla rozpatrywanej obligacji katastroficznej wprowadzimy następujące oznaczenia: C - odsetki roczne, N - wartość nominalna, P_* - cena obligacji w chwili $t = 0$. Wprowadzimy również następujące założenia upraszczające co do analizowanego rynku finansowego:

(i) Struktura terminowa stóp procentowych jest scharakteryzowana przez płaską krzywą dochodowości (*flat yield curve*), tj.
$r_{o1} = \ldots = r_{ot} = \ldots = r_{on} = r_f$; r_{ot} - stopa procentowa *spot* dla lat $t = 1,\ldots,n$; r_f - stopa procentowa wolna od ryzyka, określona na podstawie rentowności do wykupu (*YTM*) rocznych bonów skarbowych.

(ii) W pracy, jako jedyne ryzyko inwestycyjne, rozpatrujemy ryzyko niewypłacalności emitenta obligacji (*default risk*). Natomiast nie bierzemy pod uwagę ryzyka stopy procentowej r_f. Zakładamy, że wartość r_f jest dana i pozostaje niezmienna przez okres $T = 3$ lata. W przypadku nieoczekiwanej zmiany stopy r_f, całą prezentowaną poniżej procedurę wyceny obligacji należy powtórzyć od nowa.

(iii) Analizowany rynek obligacji jest w stanie równowagi, tj. cena rynkowa P_o każdej wolnej od ryzyka n-kuponowej obligacji jest równa jej wartości bieżącej PV (*present value*), tj.

$$P_o = PV = \frac{C}{(1+r_f)} + \frac{C}{(1+r_f)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+r_f)^{n-1}} + \frac{C+N}{(1+r_f)^n}. \qquad (1)$$

Z powyższego opisu wynika, że cena P_* obligacji katastroficznej powinna być istotnie niższa od wartości bieżącej P_o obligacji wolnej od ryzyka, mającej te same strumienie finansowe; tj. $P_* < P_o$. Innymi słowy, obligacja katastroficzna powinna być wyceniana z dyskontem

$$D_* = \frac{P_* - P_o}{P_o} \times 100 \ [\%], \qquad (D_* < 0)$$

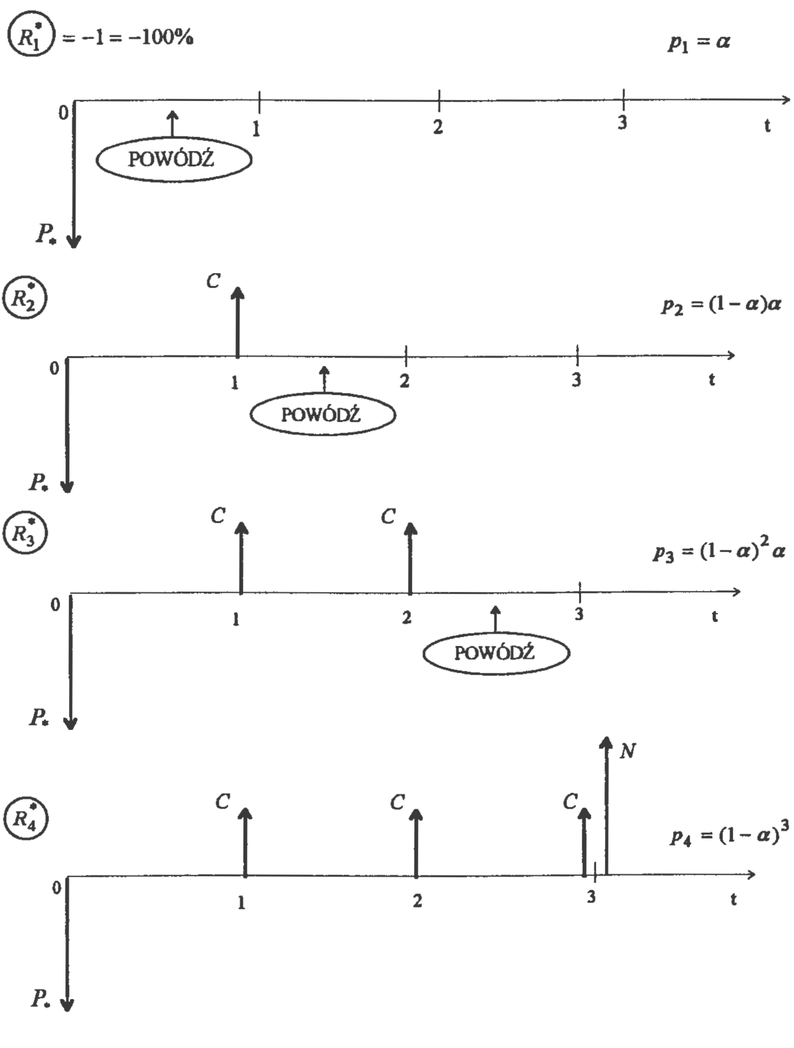
tak, aby nastąpiła określona kompensacja ryzyka niewypłacalności, będącego cechą charakterystyczną tej obligacji.

Wartość dyskonta D_* powinna oczywiście zależeć od prawdopodobieństwa α wystąpienia powodzi (czy też ogólniej - katastrofy) w danym roku, w analizowanym regionie. Zagadnienie określenia ceny P_* obligacji katastroficznej, a tym samym i dyskonta D_* (zauważmy, że wartość P_o jest w myśl przyjętych przez nas założeń - dana), stanowić będzie zasadniczy przedmiot rozważań prowadzonych w dalszej części pracy.

Zauważmy, że w ogólnym przypadku, obligację katastroficzną można traktować jako obligację o „niekompletnej" strukturze strumieni finansowych, w porównaniu z obligacją wolną od ryzyka, o tym samym kuponie C oraz wartości nominalnej N. Fakt ten zilustrowano na rysunku 1.

Wprowadźmy oznaczenie: R^* - stopa zwrotu (za cały okres 3-ch lat) z inwestycji w obligację katastroficzną. Ze struktury strumieni finansowych tej obligacji, przedstawionej na rysunku 1, wynika, że stopa zwrotu R^* jest dyskretną zmienną losową, przybierającą z prawdopodobieństwami $p_1,\ldots,p_4$ - wartości $R_1^*,\ldots,R_4^*$, wyrażone następującym wzorem:

$$R^* = \begin{cases} R_1^* = -1 = -100\% & ;\ p_1 = \alpha \\ R_2^* = \dfrac{C(1+r_f)^2 - P_*}{P_*} & ;\ p_2 = (1-\alpha)\alpha \\ R_3^* = \dfrac{C(1+r_f)^2 + C(1+r_f) - P_*}{P_*} & ;\ p_3 = (1-\alpha)^2\alpha \\ R_4^* = \dfrac{C(1+r_f)^2 + C(1+r_f) + C + N - P_*}{P_*} & ;\ p_4 = (1-\alpha)^3 \end{cases} \qquad (2)$$



Rys. 1. Strumienie finansowe obligacji katastroficznej uwarunkowane wystąpieniem bądź niewystąpieniem powodzi w kolejnych latach; α - prawdopodobieństwo powodzi (p.a.); p_1, p_2, p_3 - prawdopodobieństwa warunkowe wystąpienia powodzi w latach $t = 1,2,3$; p_4 - prawdopodobieństwo niewystąpienia powodzi w całym okresie 3 lat.

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$x = \frac{N}{P_*}, \quad i = \frac{C}{N} \text{ – oprocentowanie nominalne obligacji;}$$

$$R_1 = r_f, \; R_2 = (1+r_f)^2 - 1, \; R_3 = (1+r_f)^3 - 1,$$

- stopy zwrotu wolne od ryzyka za okres 1 roku, 2 lat, 3 lat; oraz

$$\Re_2 = (1+R_1)\, i, \; \Re_3 = (1+R_1)\, i + (1+R_2) i, \Re_4 = (1+R_1)\, i + (1+R_2) i + (1+i).$$

Zakładamy, że wszystkie podane powyżej wartości są dane - za wyjątkiem ceny P_*, a tym samym i zmiennej $x = N / P_*$. Ze wzoru (2), po przekształceniach, otrzymamy

$$R^* = \begin{cases} R_1^* = -1 & ; \quad p_1 = \alpha \\ R_2^* = \Re_2 x - 1 & ; \quad p_2 = (1-\alpha)\alpha \\ R_3^* = \Re_3 x - 1 & ; \quad p_3 = (1-\alpha)^2 \alpha \\ R_4^* = \Re_4 x - 1 & ; \quad p_4 = (1-\alpha)^3 \end{cases} \tag{3}$$

Oznaczmy: R_e - wartość oczekiwana stopy zwrotu R^*, σ - odchylenie standardowe stopy zwrotu R^*. Wprowadzając dodatkowo oznaczenie

$$a \stackrel{\Delta}{=} p_2 \Re_2 + p_3 \Re_3 + p_4 \Re_4, \tag{4}$$

$$b \stackrel{\Delta}{=} [p_1 a^2 + p_2(\Re_2 - a)^2 + p_3(\Re_3 - a)^2 + p_4(\Re_4 - a)^2]^{1/2}, \tag{5}$$

ze wzoru (3), po przekształceniach, otrzymamy

$$R_e \stackrel{\Delta}{=} \sum_{i=1}^{4} p_i R_i^* = [p_2 \Re_2 + p_3 \Re_3 + p_4 (\Re_4] x - 1 = ax - 1, \tag{6}$$

$$\sigma \stackrel{\Delta}{=} \left[\sum_{i=1}^{4} p_i (R_i^* - R_e)^2 \right]^{1/2} =$$

$$= \left[p_1 a^2 + p_2(\Re_2 - a)^2 + p_3(\Re_3 - a)^2 + p_4(\Re_4 - a)^2 \right]^{1/2} x = bx. \tag{7}$$

Tak więc wartość oczekiwana R_e stopy zwrotu z inwestycji w obligację katastroficzną, jak również odchylenie standardowe σ tej stopy zwrotu - zostały wyrażone jako liniowe funkcje zmiennej $x = N / P_*$. Należy podkreślić, że wartości występujących we wzorach (4) - (7) współczynników a i b są znane z założenia. Równania (6), (7) są więc parametrycznymi równaniami zależności liniowej pomiędzy wartościami σ i R_e; z (6) mamy bowiem

$$x = \frac{1}{a}(R_e + 1) \tag{8}$$

oraz z (7) i (8) otrzymamy

$$\mathbb{L}_{\mathrm{CAT}}: \quad \sigma = \frac{a}{b}(R_e + 1), \tag{9}$$

gdzie przez $\mathbb{L}_{\mathrm{CAT}}$ oznaczono symbolicznie linię obligacji katastroficznej rozpatrywaną na płaszczyźnie $(0, R_e, \sigma)$.

Uogólnienie wyprowadzonych powyżej zależności (2) – (9) na przypadek obligacji n – kuponowej można znaleźć w pracy autora (*et al.*) [19].

Podobnie jak w klasycznej teorii portfela [8], odchylenie standardowe σ możemy traktować jako pewną miarę ryzyka obligacji katastroficznej. W następnym punkcie, przedstawimy nieco inne podejście do oceny tego ryzyka.

2. POZIOM BEZPIECZEŃSTWA PAPIERU WARTOŚCIOWEGO JAKO MIARA RYZYKA INWESTYCYJNEGO

W nowoczesnej teorii zarządzania portfelowego definiuje się wiele miar ryzyka inwestycyjnego, tj. odchylenie standardowe stopy zwrotu, semiodchylenie standardowe, współczynnik zmienności σ / R_e (dla dodatnich R_e), współczynnik skośności rozkładu stopu zwrotu, prawdopodobieństwo osiągnięcia określonego poziomu aspiracji i inne. Poniżej, wprowadzimy koncepcję tzw. *poziomu bezpieczeństwa* papieru wartościowego (lub portfela). Idea ta została po raz pierwszy sformułowana przez *Kataoka*, por. [8, 12], a następnie zmodyfikowana przez *Kulikowskiego* [16-18,21], w ramach modelu optymalizacji portfela inwestycyjnego z wykorzystaniem dwuczynnikowej funkcji użyteczności.

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

R_K - poziom bezpieczeństwa papieru wartościowego (*the safety level*), tj. stopa zwrotu z inwestycji osiągana w „najgorszym przypadku";

p_K - założone z góry prawdopodobieństwo „najgorszego przypadku"; tj. zadana (przez inwestora) mała liczba dodatnia, np. $p_K = 0.05$.

Formalna definicja poziomu bezpieczeństwa R_K jest następująca:

$$P(R^* \le R_K) \stackrel{\Delta}{=} p_K, \tag{10}$$

gdzie $P(\cdot)$ - prawdopodobieństwo, R^* - stopa zwrotu z inwestycji (zmienna losowa o zadanym rozkładzie prawdopodobieństwa).

Tak więc dla małej wartości p_κ, poziom bezpieczeństwa R_κ papieru wartościowego może interpretować jako stopę zwrotu z inwestycji, która „prawie nigdy" nie zostanie przekroczona w dół. Na przykład, dla $p_\kappa = 0.05$ może się to zdarzyć tylko jeden raz na dwadzieścia możliwych przypadków. Z powyższego wynika, że im wyższy jest poziom bezpieczeństwa R_κ danego papieru wartościowego, tym mniejsze jest ryzyko inwestycyjne w analizowanym przypadku.

Przedstawioną powyżej koncepcję, zmodyfikujemy w następujący sposób. Oznaczymy:

κ - współczynnik liczbowy będący pewną subiektywną miarą stopnia „awersji do ryzyka", charakteryzującego danego inwestora; $\kappa \geq 0$, np. $\kappa = 0.5,\ 1.0,\ 1.5$.

Poziom bezpieczeństwa R_κ papieru wartościowego możemy teraz zdefiniować jako

$$R_\kappa \overset{\Delta}{=} R_e - \kappa\sigma, \tag{11}$$

gdzie R_e - wartość oczekiwana oraz σ - odchylenie standardowe rzeczywistej (losowej) stopy zwrotu R^* z inwestycji.

Zauważmy, że im wyższy jest stopień κ awersji do ryzyka danego inwestora, tym niższy jest - z punktu widzenia tego inwestora - poziom bezpieczeństwa R_κ analizowanego papieru wartościowego. Wprowadzenie definicji (11) poziomu bezpieczeństwa R_κ, umożliwia wydzielenie z ogólnej kategorii ryzyka inwestycyjnego „części obiektywnej", której miarą jest odchylenie standardowe σ losowej stopy zwrotu R^* oraz „części subiektywnej", mierzonej za pomocą współczynnika κ, charakteryzującego danego inwestora. Z powyższego wynika, że ten sam papier wartościowy, tj. walor o ustalonych parametrach R_e, σ, może być postrzegany jako papier mniej lub bardziej ryzykowny, w zależności od stopnia κ awersji danego inwestora do ryzyka. Parametr κ będziemy dalej skrótowo nazywali *współczynnikiem ryzyka* inwestora.

Ze wzorów (10) i (11) otrzymamy

$$P(R^* \leq R_\kappa) = P(R^* \leq R_e - \kappa\sigma) = p_\kappa . \tag{12}$$

Załóżmy, że wszystkie analizowane papiery wartościowe, charakteryzują się tym samym rozkładem gęstości prawdopodobieństwa stóp zwrotu R^*; np. dla uproszczenia, niech to będzie rozkład normalny. Wówczas, z zależności (12) wynika, że współczynnik ryzyka inwestora κ jest ściśle zdeterminowany przez zadaną wartość prawdopodobieństwa p_κ „najgorszego przypadku". Oznaczając $X=(R^*-R_e)/\sigma$ - standaryzowana wartość zmiennej losowej R^*, czyli $R^*=R_e+\sigma X$, z (12) otrzymamy bowiem

$$P(R^*\le R_e-\kappa\sigma)=P(R_e+\sigma X\le R_e-\kappa\sigma)=P(X\le-\kappa)=F(-\kappa)=p_\kappa, \quad (13)$$

gdzie $F(\cdot)$ - dystrybuanta zmiennej losowej.

Mając na uwadze, że dystrybuanta rozkładu $F(\cdot)$ jest z założenia funkcją ściśle rosnącą, otrzymaliśmy następujący wynik. Im niższa jest wartość przypisana przez danego inwestora do prawdopodobieństwa p_κ „najgorszego przypadku", tym wyższy jest współczynnik ryzyka κ charakteryzujący tego inwestora. W szczególności, posługując się tablicami statystycznymi dla rozkładu normalnego, możemy wyróżnić pewne charakterystyczne wartości prawdopodobieństw p_κ i odpowiadających im współczynników κ. A mianowicie,

$$p_\kappa=0.309\approx 1/3,\quad \kappa=0.5 \quad \text{(skłonność do ryzyka - \textit{risk seeking})} \quad (14)$$

$$p_\kappa=0.159\approx 1/6,\quad \kappa=1.0 \quad \text{(tolerancja ryzyka - \textit{risk tolerance})} \quad (15)$$

$$p_\kappa=0.067\approx 1/15,\quad \kappa=1.5 \quad \text{(awersja do ryzyka - \textit{risk aversion})} \quad (16)$$

Przyjęta powyżej skala, przypisująca określonym cechom inwestora konkretne wartości liczbowe prawdopodobieństw p_κ (a tym samym i wartości współczynników κ) ma w dużym stopniu charakter arbitralny. Po prostu przyjęliśmy, że inwestor charakteryzujący się „awersją do ryzyka", wyraża zgodę na to, że rzeczywista stopa zwrotu R^* z podejmowanych przez niego inwestycji będzie niższa od poziomu bezpieczeństwa R_κ tylko w jednym na piętnaście możliwych przypadków (dla dziennych stóp zwrotu - w przybliżeniu 1 raz w okresie trzech tygodni). Natomiast dla inwestora o skłonności do ryzyka, przypadek taki może zachodzić jeden raz na każde trzy możliwości (dla dziennych stóp zwrotu - jeden raz na każde trzy sesje giełdowe).

Należy podkreślić, że założenie co do normalności rozkładu stóp zwrotu R^* nie jest niezbędne; wzory (12), (13) obowiązują bowiem w przypadku dowolnego rozkładu stóp zwrotu R^*, o znanej dystrybuancie $F(\cdot)$. W zależności od analizowanego (innego niż normalny) rozkładu R^*, wartości liczbowe parametru κ odpowiadające tym samym wartościom prawdopodobieństw p_κ, będą oczywiście różne od wartości podanych we wzorach (14) – (16). W szczególności, dla ogólnej klasy ciągłych rozkładów symetrycznych, z nierówności Czebyszewa można wykazać [16], że na przykład dla $p_\kappa=1/6$, musimy nałożyć bardziej restrykcyjny (niż dla rozkładu normalnego) warunek na parametr κ; tj. $\kappa = 1.155$.

W ogólnym przypadku, zagadnienie identyfikacji współczynników κ dla poszczególnych grup inwestorów jest zagadnieniem złożonym. Współczynniki te zależą bowiem od szeregu różnych czynników, takich jak poziom bogactwa inwestora, czy też dokładniej - zależą one od proporcji jego ogólnych zasobów, jakie są inwestowane w danym okresie w walory obarczone ryzykiem (np. w akcje). Mogą one również zależeć od horyzontu inwestycyjnego inwestora, a także – od jego wieku. Z powyższego bezpośrednio wynika, że współczynniki κ mogą się charakteryzować określoną niestabilnością wraz z upływem czasu bieżącego. Zagadnienia te są szerzej omówione w pracach [16, 17].

2.1. Reguła akceptacji

Wprowadzimy teraz pojęcie *reguły akceptacji* dla analizowanego zagadnienia inwestycyjnego. A mianowicie, zakładamy, że inwestor akceptuje dany papier wartościowy dla swych celów inwestycyjnych tylko wówczas, gdy poziom bezpieczeństwa R_κ tego waloru jest nieujemny; tj. gdy

$$R_\kappa = R_e - \kappa\sigma \geq 0; \quad \text{gdzie} \quad \kappa \geq 0. \tag{17}$$

Z reguły akceptacji (17) otrzymamy $\dfrac{\sigma}{R_e} \leq \dfrac{1}{\kappa}$. (18)

Tak więc, dla zadanej wartości parametru κ inwestora, reguła akceptacji jest dla danego papieru wartościowego spełniona, gdy *współczynnik zmienności* stopy zwrotu R^* z tego papieru, tj. σ / R_e - jest ograniczony od góry przez $(1/\kappa)$. Zauważmy ponadto, że dla przypadku $\kappa = 1.0$, reguła akceptacji (17) sprowadza się do prostego warunku: $R_e \geq \sigma$.

Interpretacja geometryczna:

Z reguły akceptacji (17) mamy

$$\Omega_a : \sigma \leq \sigma_g = \frac{1}{\kappa} R_e. \tag{19}$$

Tak więc na płaszczyźnie $(0, R_e, \sigma)$ zdefiniowany mamy pewien obszar Ω_a parametrów R_e, σ papieru wartościowego, dla którego spełniona jest reguła akceptacji. Obszar ten ograniczony jest przez linię akceptacji $\mathbb{L}_{ACC}$ o równaniu

$$\mathbb{L}_{ACC}: \sigma_g = \frac{1}{\kappa} R_e; \; R_e \geq 0. \tag{20}$$

Zauważmy teraz, że o ile dla obligacji katastroficznej reprezentowanej w układzie współrzędnych $(0,R,\sigma)$ przez linię $\mathbb{L}_{CAT}$ o równaniu (9), reguła akceptacji ma być spełniona – linia $\mathbb{L}_{CAT}$ musi przecinać linię $\mathbb{L}_{ACC}$, będącą brzegiem obszaru akceptacji Ω_a. A zatem, współczynnik kierunkowy linii $\mathbb{L}_{CAT}$ musi mieć niższą wartość niż współczynnik kierunkowy linii $\mathbb{L}_{ACC}$.

Tak więc z równań (9) i (20) mamy $\frac{a}{b} < \frac{1}{\kappa}$, a stąd

$$0 \leq \kappa < \kappa_{max} = \frac{a}{b}. \tag{21}$$

Nierówność (21) określa *warunek konieczny* reguły akceptacji, sformułowany dla rozpatrywanego zagadnienia wyceny obligacji katastroficznej. Oznacza to, że w przypadku $\kappa \geq \kappa_{max}$, poziom bezpieczeństwa R_κ analizowanej obligacji jest ujemny (tj. $R_\kappa < 0$) ; inwestycję w taką obligację z założenia odrzucamy.

2.2. Wskaźnik bezpieczeństwa papieru wartościowego

Zakładając, że dla danego papieru wartościowego spełniona jest reguła akceptacji, tj. że $R_\kappa = R_e - \kappa\sigma \geq 0$, możemy zdefiniować następujący (nieujemny) wskaźnik bezpieczeństwa S tego waloru; tj.

$$S \stackrel{\Delta}{=} \frac{R_\kappa}{R_e} = 1 - \kappa\frac{\sigma}{R_e}; \quad \text{przy czym} \quad S \in [0,1]. \tag{22}$$

Wskaźnik bezpieczeństwa S papieru wartościowego (*the safety index*) osiąga wartość zerową „na granicy spełnienia" reguły akceptacji, tj. dla $R_e = \kappa\sigma$. Natomiast maksymalna wartość tego wskaźnika jest równa 1, co zachodzi dla waloru wolnego od ryzyka; tj. dla $\sigma = 0$. Zauważmy również, że wartość wskaźnika bezpieczeństwa S analizowanego papieru wartościowego maleje, przy wzroście współczynnika zmienności σ / R_e, jak również przy wzroście współczynnika ryzyka κ, charakteryzującego danego inwestora.

3. DWUCZYNNIKOWA FUNKCJA UŻYTECZNOŚCI INWESTORA

Koncepcja dwuczynnikowej funkcji użyteczności w odniesieniu do zagadnień inwestycyjnych została wprowadzona w ciągu ostatnich kilku lat w pracach *Kulikowskiego* [16-18, 21]. Podstawą tego podejścia jest przekonanie autora, że aby we właściwy sposób opisać zachowanie inwestorów funkcjonujących na analizowanym rynku finansowym, należy uwzględnić co najmniej dwa czynniki: oczekiwaną stopę zwrotu R_e z inwestycji oraz stopę zwrotu „w najgorszym przypadku” R_κ. Co więcej, oba te czynniki powinny być uwzględnione bezpośrednio w funkcji użyteczności charakteryzującej określone preferencje inwestora.

Załóżmy, że dla analizowanego papieru wartościowego spełniona jest *reguła akceptacji* (17), a tym samym zachodzi $R_\kappa \geq 0$ oraz $S \geq 0$. Dla celów dalszych rozważań założymy ponadto, że funkcję użyteczności inwestora $U(R_e, R_\kappa)$ można aproksymować następującą funkcją o postaci *Cobba-Douglasa*:

$$U = U(R_e, R_\kappa) = \gamma R_e^{1-\beta} R_\kappa^{\beta}, \tag{23}$$

gdzie $\gamma > 0$, $\beta \in [0,1]$ - zadane stałe, oraz $R_\kappa = R_e - \kappa\sigma$ *poziom bezpieczeństwa* papieru wartościowego.

Dwuczynnikowa funkcja użyteczności $U(R_e, R_\kappa)$ może być łatwo przekształcona do postaci $U = U(R_e, S)$, gdzie *wskaźnik bezpieczeństwa* papieru wartościowego S jest określony wzorem (22). A mianowicie, z (23) mamy

$$U = \gamma R_e^{1-\beta} R_\kappa^{\beta} = \gamma R_e \left(\frac{R_\kappa}{R_e}\right)^{\beta} \qquad \text{oraz z (22)}$$

$$U = U(R_e, S) = \gamma R_e S^{\beta}, \qquad \gamma > 0,\ \beta \in [0,1]. \tag{24}$$

Jak można łatwo sprawdzić, współczynnik β będący współczynnikiem elastyczności użyteczności U inwestora, ze względu na zmianę czynnika R_κ, jest również analogicznym współczynnikiem elastyczności ε_S ze względu na zmianę czynnika S. Biorąc pod uwagę (24), mamy bowiem $\dfrac{\partial U}{\partial S} = \gamma \beta R_e S^{\beta-1}$; a stąd, po przekształceniach, otrzymamy

$$\varepsilon_S \stackrel{\Delta}{=} \frac{dU}{U} / \frac{dS}{S} = \frac{\partial U}{\partial S} \frac{S}{U} = \beta.$$

Tak więc z powyższego równania wynika, że współczynnik β określa procentowy wzrost użyteczności inwestora spowodowany wzrostem wskaźnika bezpieczeństwa S papieru wartościowego o 1%. Możemy więc przyjąć, że parametr β określa wrażliwość inwestora na wzrost (lub spadek) wskaźnika bezpieczeństwa S. A zatem, podobnie jak wcześniej wprowadzony parametr κ, wartość liczbowa współczynnika β określa w pewien sposób stosunek inwestora do ryzyka inwestycyjnego i jest ona immanentną cechą tego inwestora.

Zauważmy, że wzrost wartości współczynnika β oznacza wzrost stopnia awersji do ryzyka charakteryzującej danego inwestora. W granicznym przypadku $\beta = 1$, ze wzorów (24) i (22) mamy

$$U = U(R_e, S) = \gamma R_e, S = \gamma R_\kappa . \qquad (25)$$

Oznacza to, że dla $\beta = 1$ inwestor w swych decyzjach bierze pod uwagę wyłącznie ryzyko inwestycyjne wyrażone przez poziom bezpieczeństwa R_κ papieru wartościowego (lub portfela).

Natomiast dla $\beta = 0$ mamy sytuację przeciwną; zerowa wartość tego współczynnika oznacza, że inwestor w ogóle nie bierze pod uwagę ryzyka inwestycyjnego, reprezentowanego w naszym modelu przez wskaźnik bezpieczeństwa S; mamy wówczas

$$U = U(R_e, S) = \gamma R_e S^0 = \gamma R_e \qquad (26)$$

Z powyższych rozważań wynika, że parametry β i κ charakteryzujące stosunek danego inwestora do ryzyka powinny być w pewien sposób w naszym modelu powiązane. Wynika to bezpośrednio stąd, że jednoczesny wzrost tych parametrów oznacza wzrost stopnia awersji inwestora do ryzyka.

Biorąc pod uwagę pewne charakterystyczne wartości parametru $\kappa = 0.5$, 1.0, 1.5 analizowane w punkcie 2 (por. wzory 14-16) oraz uwzględniając dodatkowo, że parametr β może zmieniać się w przedziale [0,1], można zaproponować następującą relację pomiędzy tymi parametrami:

$$\kappa = 0.5 + \beta . \qquad (27)$$

Posługując się wzorem (27), dla pewnych zadanych wartości β z przedziału [0,1], otrzymamy następującą - w pewnym stopniu „subiektywną" - skalę obrazującą stosunek danego inwestora do ryzyka. A mianowicie,

$$\beta = \begin{cases} 0.00; & \kappa = 0.50 \quad - \text{skłonność do ryzyka} & (p_\kappa \approx 1/3) \\ 0.25; & \kappa = 0.75 \quad - \text{umiarkowana skłonność do ryzyka} & \\ 0.50; & \kappa = 1.00 \quad - \text{tolerancja ryzyka} & (p_\kappa \approx 1/6) \\ 0.75; & \kappa = 1.25 \quad - \text{umiarkowana awersja do ryzyka} & \\ 1.00; & \kappa = 1.50 \quad - \text{awersja do ryzyka} & (p_\kappa \approx 1/15) \end{cases}$$

4. REGUŁA PREFERENCJI

Załóżmy, że reguła akceptacji (17) jest dla analizowanego papieru wartościowego spełniona; tj. $R_\kappa \geq 0$. Przyjmując, że dla zadanych egzogenicznie parametrów κ i β, funkcja użyteczności o postaci (24) stanowi odpowiednio adekwatny do rzeczywistości opis zachowań rynkowych inwestora, sformułujemy teraz tzw. *regułę preferencji*.

A mianowicie, w przypadku wyceny obligacji katastroficznej, proponowana procedura postępowania jest następująca. Rozważmy możliwość inwestycji w dwa alternatywne papiery wartościowe:

(i) wolną od ryzyka obligację skarbową o stopie zwrotu R_f (za cały horyzont inwestycyjny) oraz o odchyleniu standardowym $\sigma = 0$; zachodzi wówczas $S = 1$ oraz - biorąc pod uwagę (24) - $U_f = U(R_f, 1) = \gamma R_f$;

(ii) obligację katastroficzną o oczekiwanej stopie zwrotu R_e oraz odchyleniu standardowym σ wyrażonymi wzorami (6) i (7); czyli - w tym przypadku mamy

$$S = 1 - \kappa \frac{\sigma}{R_e}; \quad \text{oraz} \quad U = U(R_e,) = \gamma R_e S^\beta .$$

Zakładamy, że inwestycja (ii) w obligację katastroficzną jest bardziej preferowana przez inwestora w porównaniu z inwestycją (i) w obligację skarbową, gdy zachodzi :

$$U \geq U_f, \quad \text{tj.} \quad \gamma R_e S^\beta \geq \gamma R_f; \quad \text{a tym samym}$$

$$R_e \geq \frac{R_f}{S^\beta}. \tag{28}$$

Z nierówności (28) bezpośrednio wynika, że w przypadku, gdy wskaźnik bezpieczeństwa S obligacji katastroficznej maleje, to - aby reguła preferencji była spełniona - spadek ten powinien być kompensowany odpowiednio dużym wzrostem oczekiwanej stopy zwrotu R_e.

Zauważmy również, że biorąc pod uwagę (28) oraz fakt, że $S^\beta \leq 1$, mamy

$$R_e \geq R_f. \tag{29}$$

Tak więc warunek (29) jest warunkiem koniecznym na to, aby reguła preferencji była spełniona. Biorą dodatkowo pod uwagę wprowadzoną wcześniej regułę akceptacji (17), *warunkiem koniecznym* reguły preferencji jest, aby

$$R_e \geq \max \{\kappa\sigma; R_f\}. \tag{30}$$

W przypadku, gdy dla danego inwestora zachodzi $\beta = 0$ (cecha *risk seeking*) z (26) mamy $U(R_e, S) = \gamma R_e$; a zatem, warunek (30) jest równocześnie *warunkiem dostatecznym* reguły preferencji.

Podsumowując przedstawione powyżej rozważania dotyczące teorii dwuczynnikowej funkcji użyteczności oraz reguły preferencji, podamy teraz podstawowe wzory obowiązujące dla pewnych wyróżnionych parametrów (β, κ), charakteryzujących stosunek danego inwestora do ryzyka. A mianowicie:

Dla $\beta = 0$, $\kappa = 0.5$ (*risk seeking*)

$$S = 1 - 05\frac{\sigma}{R_e}, \quad U = \gamma R_e S^{\beta} = \gamma R_e \quad \text{oraz} \quad R_e \geq \frac{R_f}{S^0} = R_f .$$

Dla $\beta = 0.5$, $\kappa = 1.0$ (*risk tolerance*)

$$S = 1 - \frac{\sigma}{R_e}, \quad U = \gamma R_e \sqrt{S} \quad \text{oraz} \quad R_e \geq \frac{R_f}{\sqrt{S}} .$$

Dla $\beta = 1.0$, $\kappa = 1.5$ (*risk aversion*)

$$S = 1 - 15\frac{\sigma}{R_e}, \quad U = \gamma R_e S = \gamma R_\kappa \quad \text{oraz} \quad R_e \geq \frac{R_f}{S}; \quad \text{czyli} \quad R_\kappa \geq R_f .$$

Zauważmy, że w ostatnim z wymienionych przypadków (tj. dla $\beta = 1.0$), poziom bezpieczeństwa R_κ papieru wartościowego powinien być wyższy od stopy zwrotu R_f wolnej od ryzyka. Jest to w istocie dosyć silne wymaganie; przypadek ten utożsamiliśmy z *awersją do ryzyka*.

5. RÓWNANIE WYCENY OBLIGACJI

Przedstawimy teraz pojęcie linii rozdzielającej na płaszczyźnie „zysk-ryzyko" $(0, R_e, \sigma)$, umożliwiające określoną interpretację geometryczną reguły preferencji oraz wyprowadzimy równanie umożliwiające wycenę obligacji katastroficznej, tj. określenie wartości $x = N / P_*$, a tym samym i ceny P_* tej obligacji.

5.1. Linia rozdzielająca

Wprowadzimy oznaczenie: Ω_p - obszar parametrów (σ, R_e) obligacji katastroficznej, dla których reguła preferencji (28) jest spełniona; $\mathbb{L}_{PREF}$ – linia rozdzielająca, będąca brzegiem obszaru preferencji Ω_p.

Dla $\beta = 0$ (cecha *„risk seeking"*): obszar preferencji Ω_p rozpatrywany na płaszczyźnie $(0, R_e, \sigma)$ jest dany nierównością (30). Biorąc pod uwagę przypadek graniczny, dla którego reguła preferencji (30) jest spełniona, określony przez minimalną dopuszczalną wartość oczekiwanej stopy zwrotu R_e^*, otrzymamy

$R_e^* = \max\{\kappa\sigma, R_f\}$, czyli

$\mathbb{L}_{\mathrm{PREF}}$:

$$R_e^* = \begin{cases} R_f & ; \quad \sigma < \dfrac{1}{\kappa} R_f \\ \kappa\sigma & ; \quad \sigma \geq \dfrac{1}{\kappa} R_f \end{cases} \tag{31}$$

Linia preferencji $\mathbb{L}_{\mathrm{PREF}}$ w układzie współrzędnych $(0, R_e, \sigma)$ składa się więc z pionowego odcinka $R_e = R_f$ (dla $\sigma < \dfrac{1}{\kappa} R_f$) oraz z części linii $\sigma = \dfrac{1}{\kappa} R_e$ (dla $\sigma \geq \dfrac{1}{\kappa} R_f$) będącej fragmentem linii akceptacji $\mathbb{L}_{\mathrm{ACC}}$; por. (20). Punkt graniczny tych dwóch fragmentów linii rozdzielającej $\mathbb{L}_{\mathrm{PREF}}$ ma współrzędne

$$R_e = R_f \quad , \quad \sigma = \frac{1}{\kappa} R_f \tag{32}$$

Wynika to bezpośrednio z podstawiania wartości granicznej $\sigma = R_f / \kappa$ do dolnej części równania (31). Podstawiając te współrzędne do równania (9) linii $\mathbb{L}_{\mathrm{CAT}}$ obligacji katastroficznej, wyznaczamy pewną graniczną wartość parametru $\kappa = \kappa_{gr}$, dla której linia $\mathbb{L}_{\mathrm{CAT}}$ przecina linię $\mathbb{L}_{\mathrm{PREF}}$ we wspomnianym punkcie granicznym. Z (9) i (32) mamy zatem

$$\frac{1}{\kappa} R_f = \frac{a}{b}(R_f + 1) \quad , \text{ a stąd}$$

$$\kappa_{gr} = \frac{R_f}{1 + R_f} \frac{a}{b} = \frac{R_f}{1 + R_f} \kappa_{\max}, \quad \text{gdzie} \quad \kappa_{\max} = a / b. \tag{33}$$

Z (31), (33) otrzymamy więc warunek, jaki muszą spełniać współrzędne (R_e^*, σ^*) punktu przecięcia linii $\mathbb{L}_{\mathrm{PREF}}$ przez linię $\mathbb{L}_{\mathrm{CAT}}$,w przypadku dowolnej wartości parametru $\kappa \in [0, \kappa_{\max})$:

$$R^* = \begin{cases} R_f & ; \quad \kappa \in \left[0, \dfrac{R_f}{1 + R_f} \kappa_{\max}\right] \\ \kappa\sigma^* & ; \quad \kappa \in [0, \dfrac{R_f}{1 + R_f} \kappa_{\max}) \end{cases} \tag{34}$$

Rozwiązując teraz układ równań (9), (34) dla ustalonego $\kappa \in [0, \kappa_{\max})$ otrzymamy wartości liczbowe współrzędnych (R_e^*, σ^*) analizowanego punktu przecięcia. Uwzględniając następnie wzory (6), (7), wyznaczamy wartości x_* oraz $P_* = N / x_*$, stanowiące rozwiązanie zagadnienia wyceny dla przypadku $\beta = 0$.

Dla $\beta \in (0, 1]$: równanie linii preferencji $\mathbb{L}_{PREF}$ wyznaczamy z warunku (28).

Wyrażając nierówność (28) reprezentującą *regułę preferencji* w postaci równości, możemy określić pewien warunek graniczny, przy którym inwestycje w obligację katastroficzną oraz w obligację wolną od ryzyka - są równoważne. A mianowicie, z (28) otrzymamy

$$R_e = R_f S^{-\beta}; \qquad \text{gdzie } S = 1 - \kappa \frac{\sigma}{R_e}, \text{ a stąd}$$

$$R_e = R_f \left(1 - \kappa \frac{\sigma}{R_e}\right)^{-\beta} . \tag{35}$$

Rozwiązując równanie (35) ze względu na σ, oraz oznaczając otrzymaną wartość przez σ^* mamy

$\mathbb{L}_{PREF}$:

$$\sigma^* = \sigma^*(R_e) = \frac{R_e}{\kappa}\left[1 - \left(\frac{R_f}{R_e}\right)^{1/\beta}\right], \tag{36}$$

gdzie $R_e \geq R_f$ (por. warunek konieczny (29)) oraz σ^* - wartość progowa odchylenia standardowego σ, jako funkcja oczekiwanej stopy zwrotu R_e .

Równanie (36) definiuje *linię rozdzielającą* $\mathbb{L}_{PREF}$ na płaszczyźnie $(0, R_e, \sigma)$ o następującej interpretacji:

- Dla każdej wartości R_e oraz $\sigma < \sigma^*(R_e)$, inwestycja w obligację katastroficzną powinna być bardziej preferowana od inwestycji w obligację wolną od ryzyka; mamy wówczas $(R_e, \sigma) \in \Omega_p$.
- Dla każdej wartości R_e oraz $\sigma > \sigma^*(R_e)$ zachodzi przypadek przeciwny; tj. inwestycja w obligację wolną od ryzyka powinna być bardziej preferowana; mamy wówczas $(R_e, \sigma) \notin \Omega_p$.
- Dla każdej wartości R_e oraz $\sigma = \sigma^*(R_e)$ - obie inwestycje są równoważne z punktu widzenia przyjętej funkcji użyteczności inwestora.

Obszerną ilustrację graficzną analizowanych powyżej obszarów preferencji Ω_p oraz linii rozdzielających $\mathbb{L}_{PREF}$, dla wartości parametru $\beta = 0,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1$, zawiera praca autora [13].

5.2. Równanie wyceny

Biorąc pod uwagę warunek graniczny (36) i podstawiając wartości $R_e = ax - 1$ oraz $\sigma = bx$ zdefiniowane dla obligacji katastroficznej wzorami (6) i (7), możemy rozwiązać tak przekształcone równanie (36) ze względu na zmienną $x = N / P_*$. Otrzymamy w ten sposób pewną wartość progową ceny P_* analizowanej obligacji, mającą tę cechę, że - dla każdej ceny $P < P_*$, inwestycja w obligację katastroficzną powinna być bardziej preferowana od inwestycji w obligację wolną od ryzyka. Innymi słowy, wartość progowa P_* stanowi rozwiązanie rozpatrywanego zagadnienia wyceny.

Wcześniej, musimy jednak sformułować warunki określające *regułę akceptacji* dla analizowanego zagadnienia oraz zdefiniować warunek konieczny dla spełnienia *reguły preferencji*. A mianowicie, biorąc pod uwagę $R_e = ax - 1$ oraz $\sigma = bx$, z warunku (17) otrzymamy

$$(a - \kappa b)x - 1 \geq 0. \tag{37}$$

Warunkiem koniecznym spełnienia reguły akceptacji wyrażonej (dla zmiennej x) przez nierówność (37) jest, aby

$$a - \kappa b > 0 \quad , \quad \text{czyli} \quad \kappa < \kappa_{\max} = \frac{a}{b}. \tag{38}$$

Zauważmy, że warunek konieczny (38) jest tożsamy z wyprowadzonym wcześniej warunkiem (21).

Dla $\kappa \in [0, \kappa_{\max})$, z (37) otrzymamy zatem:

Reguła akceptacji

$$x \geq \frac{1}{a - \kappa b}. \tag{39}$$

Ponadto, z warunku koniecznego (30), uwzględniając (39) – po przekształceniach, otrzymamy (*Jakubowski* [13]) :

$$x \geq \max\left\{\frac{1}{a - \kappa b}\ ;\ \frac{1 + R_f}{a}\right\}. \tag{40}$$

Biorąc pod uwagę, że nierówność

$$\frac{1}{a-\kappa b} \leq \frac{1+R_f}{a} \quad \text{zachodzi dla} \quad 0 \leq \kappa \leq \frac{a}{b}\frac{R_f}{1+R_f} = \frac{R_f}{1+R_f}\kappa_{\max}, \tag{41}$$

z (40), (41) mamy

$$x \geq x^* = \begin{cases} \dfrac{1+R_f}{a} & ; \quad \kappa \in [0, \dfrac{R_f}{1+R_f}\kappa_{\max}] \\ \dfrac{1}{a-\kappa b} & ; \quad \kappa \in (\dfrac{R_f}{1+R_f}\kappa_{\max}, \kappa_{\max}) \end{cases} \tag{42}$$

Warunek (42) jest *warunkiem koniecznym* dla spełnienia reguły preferencji dla analizowanego problemu. Warunek ten (wyrażony dla zmiennej x) jest równoważny warunkowi (30), rozpatrywanemu dla parametrów R_e, σ obligacji. Przy założeniu, że warunek ten jest spełniony, równanie wyceny obligacji katastroficznej ma następującą postać:

Przypadek $\beta = 0$: Jak to wykazaliśmy w punkcie 4, warunek konieczny (30) reguły preferencji jest, dla $\beta = 0$, jednocześnie warunkiem dostatecznym. A zatem, wartość graniczna x^* dana wzorem (42), odpowiadająca punktowi przecięcia linii obligacji katastroficznej $\mathbb{L}_{\text{CAT}}$ z linią rozdzielającą $\mathbb{L}_{\text{PREF}}$ określoną dla $\beta = 0$ równaniem (31) – jest jednocześnie rozwiązaniem analizowanego zagadnienia wyceny.

Biorąc pod uwagę, że $x_* = \dfrac{N}{P_*}$, z (42) otrzymamy

$$P_* = \begin{cases} \dfrac{a}{1+R_f}N & ; \quad \kappa \in [0, \dfrac{R_f}{1+R_f}\kappa_{\max}] \\ (a-\kappa b)N & ; \quad \kappa \in (\dfrac{R_f}{1+R_f}\kappa_{\max}, \kappa_{\max}) \end{cases} \tag{43}$$

Wartość progową ceny P_* możemy również wyznaczyć bezpośrednio ze wzoru (34), podstawiając do tego wzoru równania parametryczne (6), (7) linii $\mathbb{L}_{\text{CAT}}$, tj. $R_e = ax - 1$ oraz $\sigma = bx$, a następnie – rozwiązując otrzymane równanie ze względu na x.

Przypadek $\beta \in (0,1]$:

W tym przypadku uwzględniając $R_e = ax - 1$ oraz $\sigma = bx$, z równania (36), po przekształceniach, otrzymamy

$$(ax-1)^{1-\beta}\left[(a-\kappa b)x-1\right]^{\beta}=R_f, \tag{44}$$

Równanie to można również bezpośrednio wyprowadzić z zależności:

$$U(R_e,R_\kappa)=\gamma\, R_e^{1-\beta}\, R_\kappa{}^{\beta}=\gamma\, R_e^{1-\beta}(R_e-\kappa\sigma)^{\beta}, \tag{45}$$

$$U_f=U(R_f,R_f)=\gamma\, R_f \;,\; \text{oraz} \tag{46}$$

$$U(R_e,R_\kappa)=U_f \;\;;\;\; \text{tj.}\;\; R_e^{1-\beta}(R_e-\kappa\sigma)^{\beta}=R_f. \tag{47}$$

Równanie wyceny (44) jest ogólnym przypadku równaniem nieliniowym ze względu na zmienną x. W wyniku numerycznego rozwiązania tego równania w obszarze określonym przez warunek konieczny (42), otrzymujemy poszukiwaną wartość progową zmiennej x_*, w tym samym – wartość progową ceny $P_*=\dfrac{N}{x_*}$ obligacji katastroficznej.

Dla parametrów $\beta=1/2$ oraz $\beta=1$, równanie (44) można rozwiązać analitycznie; mamy wówczas

$$\boldsymbol{\beta}=0.5: \;\; \text{z (44) otrzymamy} \;\; (ax-1)[(a-\kappa b)x-1]=R_f^2. \tag{48}$$

Rozwiązując powyższe równanie kwadratowe oraz odrzucając rozwiązanie nie spełniające warunku (42), mamy

$$x_*=\frac{(2a-\kappa b)+[(\kappa b)^2+4a(a-\kappa b)R_f^2]^{1/2}}{2a(a-\kappa b)} \quad \text{oraz} \quad P_*=N/x_*. \tag{49}$$

$$\boldsymbol{\beta}=1.0: \;\; \text{z (44) otrzymamy} \;\; x_*=\frac{1+R_f}{a-\kappa\sigma}, \tag{50}$$

$$\text{a zatem} \;\; P_*=\frac{N}{x_*}=\frac{a-\kappa\sigma}{1+R_f}N. \tag{51}$$

6. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Załóżmy, że stosunek do ryzyka jest dla danego inwestora określony parametrami $\beta=0.5$, $\kappa=1.0$ (cecha „*risk tolerance*"). Inwestor ten analizuje opłacalność inwestycji w 3-letnią obligację katastroficzną o kuponie $C=10$ zł (p.a.) oraz o wartości nominalnej $N=100$ zł; por. rysunek 1.

Oprocentowanie nominalne odsetek od obligacji wynosi więc $i=C/N=10\%$. Założymy, że oprocentowanie to jest równe rynkowej stopie procentowej r_f (wolnej od ryzyka), tj. $r_f=i=10\%$.

Z równania (1), można łatwo wykazać, że w tym szczególnym przypadku (tj. dla $i = C / N = r_f$) zachodzi $P_0 = N = 100$ zł, tj. wartość bieżąca $P_0 = PV$ obligacji bez ryzyka jest równa jej wartości nominalnej N; por. [10].
Uwzględniając oznaczenia wprowadzone w punkcie 1, mamy:

$$R_1 = r_f = 0.1000;\; R_2 = (1 + r_f)^2 - 1 = 0.2100;\; R_3 = (1 + r_f)^3 - 1 = 0.3310;$$

Stopa zwrotu wolna od ryzyka R_f za okres 3 lat wynosi więc

$$R_f \overset{\Delta}{=} R_3 = 0.3310 = 33.10\% .$$

Ponadto, mamy

$$\Re_2 = (1 + R_1)i = 0.1100;\quad \Re_3 = (1 + R_1)i + (1 + R_2)i = 0.2310;$$

$$\Re_4 = (1 + R_1)i + (1 + R_2)i + (1 + i) = 1.3310.$$

Założymy, że obligacja katastroficzna jest emitowana przez władze regionu, w którym zagrożenie powodziowe jest szacowane jako prawdopodobieństwo „wody 20-letniej", tj. $\alpha = 0.05$ (p.a.). Mamy zatem

$$p_1 = \alpha = 0.0500,\quad p_2 = (1 - \alpha)\alpha = 0.0475,$$

$$p_3 = (1 - \alpha)^2 \alpha = 0.0451,\quad p_4 = (1 - \alpha)^3 = 0.8574.$$

Uwzględniając powyższe dane, ze wzorów (4) i (5) wyznaczamy wartości współczynników a i b, tj. $a = 1.1568$, $b = 0.4285$.
Ze wzorów (6) i (7) otrzymamy zatem

$$R_e = ax - 1 = 1.1568\,x - 1;\quad \sigma = bx = 0.4285\,x, \tag{52}$$

gdzie $x = N / P_* = 100 / P_*$.
Warunek (38), będący warunkiem koniecznym *reguły akceptacji* (39), ma dla analizowanego przykładu postać:

$$\kappa < \kappa_{\max} = \frac{a}{b} = \frac{1.1568}{0.4285} = 2.6996. \tag{53}$$

Warunek ten jest - wobec założonej wartości $\kappa = 1.0$ - spełniony.

Natomiast warunek konieczny (42) *reguły preferencji* jest w naszym przypadku następujący:

Mamy $\kappa_{gr} = \dfrac{R_f}{1 + R_f}\kappa_{\max} = \dfrac{0.331}{1.331} \text{ x } 2.6996 = 0.6714.$

W naszym przypadku $\kappa = 1.0$, tak więc zachodzi

$$\kappa \in (\kappa_{gr}, \kappa_{\max}) = \left(\frac{R_f}{1+R_f} \kappa_{\max}, \kappa_{\max} \right) = (0.6714,\ 2.6996). \tag{54}$$

Z (54) oraz (42) mamy:

$$x \geq x^* = \frac{1}{a - \kappa b} = 1.3737, \quad \text{oraz}$$

$$P_* = \frac{N}{x^*} = 72.83 \text{ zł}. \tag{55}$$

Wartość graniczna $P_* = 72.83$ zł jest jednocześnie rozwiązaniem naszego zagadnienia wyceny, rozpatrywanym dla parametru $\beta = 0$; por. wzory (42), (43).

Warunek dostateczny *reguły preferencji* jest określony dla $(\beta = 0.5)$ przez zależność (49), przy podstawieniu $a = 1.1568$, $b = 0.4285$, $\kappa = 1.0$ oraz $R_f = 0.3310$; mamy zatem

$$x = 1.5600 \quad \text{oraz} \quad P_* = \frac{N}{x_*} = \frac{100}{1.5600} = 64.10 \text{ zł}. \tag{56}$$

Tak więc otrzymana wartość progowa ceny $P_* = 64.10$ zł jest rozwiązaniem analizowanego zagadnienia wyceny obligacji katastroficznej. Ponadto, z (52) i (56) mamy:

$$R_e = ax - 1 = 0.8046 = 80.46\% \quad \text{(oczekiwana stopa zwrotu za 3 lata)}, \tag{57}$$

$$\sigma = bx = 0.6685 = 66.85\% \quad \text{(odchylenie standardowe)}. \tag{58}$$

Poziom bezpieczeństwa R_κ obligacji jest równy:

$$R_\kappa = R_e - \kappa\sigma = 80.46\% - 1.0 \times 66.85\% = 13.61\%; \tag{59}$$

oraz *wskaźnik bezpieczeństwa* S:

$$S = \frac{R_\kappa}{R_e} = 1 - \kappa \frac{\sigma}{R_e} = 1 - 1.0 \times \frac{66.85}{80.46} = 0.1692. \tag{60}$$

Dyskonto cenowe rozpatrywanej obligacji w stosunku do ceny obligacji wolnej od ryzyka wynosi:

$$D_* = \frac{P_* - P_0}{P_0} \times 100 = \frac{64.10 - 100.00}{100.00} \times 100 = -35.90\%. \tag{61}$$

Oczekiwana *premia za ryzyko* jest natomiast równa:

$$\Pi \stackrel{\Delta}{=} R_e - R_f = 80.46\% - 33.10\% = 47.36\% \quad \text{(za 3 lata).} \tag{62}$$

Mając wyznaczoną cenę progową $P_* = 64.10$ zł odpowiadającą wartości $x = 1.5600$, ze wzoru (3) możemy również określić scenariusz możliwych (tj. z zadanymi prawdopodobieństwami $p_1, \ldots, p_4$) wyników inwestycji w rozpatrywaną obligację katastroficzną. Scenariusz ten określony jest przez realizacje $R_1^*, \ldots, R_4^*$, losowej stopy zwrotu R^* z inwestycji. Z (3) mamy zatem

$$R^* = \begin{cases} R_1^* = -1 \\ R_2^* = \Re_2 x - 1 \\ R_3^* = \Re_3 x - 1 \\ R_4^* = \Re_4 x - 1 \end{cases} = \begin{cases} -100.0\% \; ; & p_1 = 0.0500 \\ -82.8\% \; ; & p_2 = 0.0475 \\ -64.0\% \; ; & p_3 = 0.0451 \\ +107.6\% \; ; & p_4 = 0.8574 \end{cases} \tag{63}$$

Otrzymany wynik inwestycji w obligację katastroficzną jest równoważny - w sensie przyjętej funkcji użyteczności $U = U(R_e, S)$ - inwestycji w obligację wolną od ryzyka o stopie zwrotu $R_f = 33.1\%$ (za okres 3 lat).

Stosunkowo duże *dyskonto cenowe* $D_* = -35.90\%$ oraz duża oczekiwana przez inwestora *premia za ryzyko* $\Pi = 47.36\%$ (za 3 lata), jakie otrzymaliśmy w wyniku powyższych obliczeń - jest rezultatem założenia dość dużego prawdopodobieństwa powodzi, tj. $\alpha = 0.05$ (p.a.).

Zgodnie ze wzorem (63), rozkład rzeczywistej stopy zwrotu R^* z obligacji katastroficznej jest lewostronnie skośnym, czteropunktowym rozkładem dyskretnym. Musimy zatem sprawdzić, czy zachodzi jeszcze jeden warunek. A mianowicie, ze wzoru (15) wynika, że dla przyjętego powyżej parametru $\kappa = 1.0$, prawdopodobieństwo najgorszego przypadku $p_\kappa = 0.159 \approx 1/6$. Wartość tę wyznaczyliśmy przy założeniu, że rozklad stopy zwrotu R^* jest rozkładem normalnym. Należy zatem sprawdzić, czy prawdopodobieństwo p_κ^* wyliczone dla rozkładu dyskretnego (63) nie przekracza wartości prawdopodobieństwa p_κ, tj. czy zachodzi

$$P\{R^* \le R_\kappa\} = p_\kappa^* \le p_\kappa = 0.159\,. \tag{64}$$

W naszym przykładzie mamy $R_\kappa = 13.61\%$ (por. 59), a zatem z rozkładu prawdopodobieństwa (63), otrzymamy

$$p_\kappa^* = P\{R^* \le 13.61\%\} = p_1 + p_2 + p_3 = 0.0500 + 0.0475 + 0.0451 = 0.143\,. \tag{65}$$

Tak więc warunek (64) jest spełniony, co oznacza, że reguła preferencji (28) prowadząca w analizowanym przykładzie do wartości $x_* = 1.5600$, dominuje w powyższym sensie nad tym warunkiem.

W przypadku przeciwnym, gdyby nierówność (64) nie była spełniona, musielibyśmy powiększać wartość $x = N / P_*$ tak długo, aż osiągniemy $p_\kappa^* \le p_\kappa = 0.159$. Geometrycznie, równoważne jest to przesuwaniu się wzdłuż linii $\mathbb{L}_{CAT}$ obligacji katastroficznej w prawo, tj. poruszaniu się od punktu przecięcia tej linii z linią rozdzielającą $\mathbb{L}_{PREF}$ w kierunku - w głąb obszaru preferencji Ω_p. W tym przypadku otrzymalibyśmy $x_* > 1.5600$, co oznaczałoby, że warunek (64) dominuje nad regułą preferencji (28). Dla wyceny obligacji, przyjęlibyśmy wówczas otrzymaną w powyższy sposób wartość x_*; a tym samym $P_* = N / x_*$. Oczywiście, określona w ten sposób wartość ceny progowej P_* obligacji byłaby niższa od wartości $P_* = 64.10$ zł, wyznaczonej w analizowanym powyżej przykładzie.

W pewnych przypadkach, dla odpowiednio wysokiego prawdopodobieństwa katastrofy α (p.a.), a tym samym dla wysokich prawdopodobieństw p_1, p_2, p_3 - może się zdarzyć, że dla danej wartości $\kappa \in (0, \kappa_{max})$ spełnienie warunku (64) w ogóle nie jest możliwe. Wówczas, zgodnie z przyjętym modelem decyzyjnym wyceny, inwestycję w taką obligację odrzucamy; bowiem ryzyko inwestycyjne byłoby w analizowanym przypadku zbyt duże. Inwestycja taka mogłaby być atrakcyjna dla inwestora charakteryzującego się większym stopniem akceptacji ryzyka, tj. mającego niższą wartość parametru κ. Oczywiście w tym przypadku, całą proponowaną procedurę wyceny, należałoby powtórzyć od nowa.

Bardziej obszerną analizę wyników numerycznych dotyczących analizowanego przykładu, otrzymanych dla parametrów $\alpha = 0.01$, 0.05, 0.10 oraz $\kappa =$ 0.5, 1.0, 1.5 - można znaleźć w pracy autora (*et al.*) [19]. W pracy tej, dokonano również istotnego uogólnienia rozpatrywanego modelu wyceny obligacji katastroficznych na przypadek, w którym dwuczynnikowa funkcja użyteczności inwestora ma postać funkcji CES (*constant elasticity of substitution*). Jak wiadomo, analizowana w niniejszej pracy funkcja użyteczności $U(R_e, R_\kappa)$ typu *Cobba-Douglasa* jest przypadkiem szczególnym funkcji typu CES, mającej charakter zależności multiplikatywno-addytywnej; por. *Arrow, Chenery et al.* [1].

LITERATURA

1. Arrow W., Chenery W., Minhas B., Solow R.M. (1961). Capital-Labour Substitition and Economic Efficiency. Review of Economics and Statistics.

2. Baryshnikov Yu., Mayo A., Taylor D.R. (1998). Pricing of CAT bonds. Maszynopis.

3. Burnecki K., Kukla G. (2000). Reasekuracja ryzyk ubezpieczeniowych na rynku kapitałowym. Rynek Terminowy, Vol. 10, Nr 4/00, Listopad, s. 128-134.

4. Canabarro E., Finkemeier M., *et al.* (1998). Analyzing Insurance-Linked Securities. Goldman, Sachs & Co., Fixed-Income Research, October.

5. Canter M.S., Cole J.B. (1997). The Foundation and Evolution of the Catastrophe Bond Market. Global Reinsurance.

6. Cholnoky T.V., Zief J.H., *et al.* (1998). Securitization of Insurance Risks. Goldman Sachs Investment Research, Report No 980428.

7. Doherty N. (1997). Financial Innovations in the Management of Catastrophe Risk. Journal of Applied Corporate Finance.

8. Elton M.J., Gruber M.J. (1995). Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. J.Wiley & Sons, New York, 5-th ed.

9. Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T. (1997). Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, Springer, New York.

10. Fabozzi F.J. (2000). Bond Markets - Analysis and Strategies. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 4-th ed.

11. Insurance Series Office, Inc. (1999). Financing Catastrophe Risk – Capital Market Solutions. Insurance Issues Series, January.

12. Jajuga K., Jajuga T. (1996). Inwestycje - instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa. PWN, Warszawa.

13. Jakubowski A. (2002). Wycena obligacji katastroficznych dla różnych postaci funkcji użyteczności inwestora. Raport Badawczy IBS PAN, Warszawa (w przygotowaniu).

14. Krawczak M., Miklewski A., Jakubowski A., Konieczny P. (2000). Zarządzanie ryzykiem inwestycyjnym. IBS PAN, Ser. Badania Systemowe, Warszawa.

15. Kulikowski R. (1977). Analiza systemowa i jej zastosowania. PWN, Warszawa, s. 36.

16. Kulikowski R. (1998). Two Factors Utility Approach. Control and Cybernetics, Vol. 27, No 3, s. 417-428.

17. Kulikowski R. (1998). Portfolio Optimization - Two Rules Approach. Control and Cybernetics, Vol. 27, No 3, s. 429-446.

18. Kulikowski R. (2000). Wspomaganie decyzji inwestora w warunkach ryzyka. Rynek Terminowy. Vol. 8, Nr 2/00, Maj, s. 129-133.

19. Kulikowski R., Jakubowski A. (2000). Valuation of Catastrophe Bonds. Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Ser. Technical Sciences, Vol. 48, No 2, s. 181-211.

20. Kulikowski R., Jakubowski A. (1999). Wycena obligacji w warunkach ryzyka niewypłacalności emitenta. W: T. Trzaskalik (red.), Modelowanie preferencji a ryzyko, Akademia Ekonomiczna, Katowice, s. 187-207.

21. Kulikowski R., Libura M., Słomiński L. (1998). Wspomaganie decyzji inwestycyjnych. IBS PAN, Ser. Badania Systemowe, Warszawa.

22. Lane M. (1998). Price, Risk and Ratings for Insurance-Linked Notes. Sedgwick Lane Financial L.L.C, Trade Notes, May 5.

23. Litzenberger R.H., Beaglehole D.R., *et al.* (1996). Assessing Catastrophe-Reinsurance-Linked Securities as a New Asset Class. Goldman, Sachs & Co., Fixed Income Research, July.

24. Lizak K. (2000). Ryzyko katastrof. Rynek Terminowy, Vol. 7, Nr 1/00, Luty, s.65-73.

25. Stripple J. (1998). Securitizing the Risks of Climate Change - Institutional Innovations in the Insurance of Catastrophic Risk. IIASA Interim Report IR-98-098, December.