41/2001

Raport Badawczy
Research Report

RB/71/2001

Ocena niezawodności systemów wielostanowych

J. Karpiński

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Pracę zgłosił: prof. dr hab. inż. Olgierd Hryniewicz

Warszawa 2001

INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH PAN

Ocena niezawodności systemów wielostanowych

Kierownik zadania i wykonawca: prof. dr hab. inż. Janusz Karpiński

Warszawa, grudzień 2001

1. Wstęp

W rozważaniach dotyczących niezawodnosci obiektów najczęściej zakłada się, ze zarówno elementy obiektu, jak i sam obiekt (traktowany jako pewna całość) mogą znajdować się w jednym z dwu stanów: w stanie niezdatności (pełnego uszkodzenia) lub w stanie zdatności. Przy takim podejściu nie rozpatruje się stanów pośrednich, tzn. stanów tzw. częściowej zdatności, kiedy to obiekt może jeszcze wykonywać swoje zadanie, ale z mniejsza efektywnością lub nieco gorzej niz. gdyby był w stanie całkowitej zdatności. Stwierdzenie, ze takie podejście do zagadnienia nie zawsze jest zadowalające z praktycznego punktu widzenia, nie wymaga uzasadnienia.

Jeżeli zarówno obiekt, jak również jego elementy chcemy traktować jako dwustanowe, to do przeprowadzenia poprawnej analizy takiego obiektu złożonego (systemu) niezbędne jest określenie jego tzw. struktury niezawodnościowej, tzn. wzajemnego powiązania miedzy elementami oraz wpływ niezawodnosci poszczególnych elementów na niezawodność systemu. Poza szczególnymi przypadkami (struktury: szeregowa i równoległa) określenie rzeczywistej struktury systemu oraz wyznaczenie rozkładu czasu poprawnej pracy systemu bywa niekiedy dość kłopotliwe. Bardzo często daje się uniknąć problemów związanych ze struktura niezawodnościowa poprzez wprowadzenie wielostanowości obiektu. W takim przypadku stwierdzenie, ze obiekt znajduje się w jakimś stanie *k* zastępuje bardziej złożony opis tego stanu za pomocą struktury niezawodnościowej. Nie oznacza to jednak, ze analiza obiektów wielostanowych jest prostsza, lecz – jak się wydaje – jest bardziej zrozumiała. W wielu przypadkach traktowanie obiektu i jego elementów jako wielostanowe człony jest niezbędne, gdyż opis w kategoriach jedynie zdatności i niezdatności jest z różnych powodów niewystarczający.

Niniejsza praca dotyczy zagadnień niezawodnosci i eksploatacji obiektów wielostanowych. Przedstawiono w niej opis niezawodnościowy obiektów wielostanowych, przy czym dokładne wzory podano dla przypadku stałych w czasie intensywności przejść ze stanu do stanu. Przedstawiono trzy różne podejścia do zagadnienia optymalizacji obsług wielostanowego obiektu technicznego. Podano w nich różne kryteria optymalizacji, z których jednak każde ma praktyczny sens i może być przydatne w jakimś konkretnym zastosowaniu.

2. Dyskretny opis niezawodnościowy obiektów wielostanowych

Rozpatrzmy n-stanowy obiekt. Symbolami Δt (i,k = 1,2, ...,n) oznaczmy intensywności przejść ze stanu i do stanu k. Stan 1 oznacza stan całkowitej zdatności obiektu, stan n oznacza stan uszkodzenia, natomiast stany i = 2,3,...,n-1 oznaczają stany częściowej zdatności. Z powyższych oznaczeń wynika, ze obiekt jest lepszy w sensie niezawodnosci, jeżeli znajduje się w niższym stanie. Przyjmiemy ponadto, ze obiekt może przechodzić samoistnie jedynie ze stanu lepszego do stanu gorszego, tzn. $\lambda_{ik} > 0$ dla i ≤ k, natomiast $\lambda_{ik} = 0$ dla i > k (obiekt nie może się sam naprawić).

Oznaczmy symbolem $P_k(t)$ prawdopodobieństwo tego, ze w chwili t obiekt będzie się znajdował w stanie k. Otrzymamy wtedy

$$P_k(t+\Delta t) = P_1(t)[\lambda_{1k}\Delta t + o(\Delta t)] + P_2(t)[\lambda_{2k}\Delta t + o(\Delta t)] + \dots + P\ (t)[1 - \lambda_{kk}(t)\Delta t + o(\Delta t) \tag{2.1}$$

gdzie $$\lambda_{kk} = \sum_{i=k+1} \lambda_{ki}$$

Istotnie, obiekt w chwili t+Δt może być w stanie k, jeżeli w chwili t był w stanie lepszym (niższym) niz. k i w przedziale czasu (t,t+Δt) przeszedł z tego stanu do stanu k, albo tez w chwili t był w stanie k i pozostał w tym stanie przez czas Δt. Z równania (2.1) otrzymujemy równanie różniczkowe:

$$P_k'(t) + \lambda_{kk} P_{kk} = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{ik} P_i(t) \tag{2.2}$$

Rozwiązanie równania różniczkowego (2.2) ma postać:

$$P_k(t) = \exp(-\lambda_{kk} t)\left[\int_0^t \left(\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{ik} P_i(x)\right) e^{\lambda_{kk} x}\, dx + C\right] \tag{2.3}$$

gdzie C jest pewna stała, której wartość zależy od warunków początkowych.

Zauważmy, ze równanie (2.3) można zapisać w postaci:

$$P_k(t) = \exp(-\lambda_{kk}t)\ (\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{ik} \int_0^t P_i(x)\ e^{\lambda_{kk}x} dx + C\ ) \qquad (2.4)$$

Zwróćmy uwagę na to, ze przy danych warunkach początkowych można rekurencyjnie wyznaczyć prawdopodobieństwa $P_i(t)$, i=1,2,...,k. Wyznaczmy rozwiązania równania (2.4) dla systemu 4-stanowego.

Przyjmijmy, ze $P_1(0)=1$, $P_1(1)=0$ dla $i \neq 1$. Oznacza to, ze w chwili początkowej obiekt był w stanie 1, a zatem prawdopodobieństwo $P_k(t)$ można interpretować jako prawdopodobieństwo przejścia obiektu za stanu 1 do stanu k w przedziale czasu (0,t), tzn.

$$P_k(t) = P_{1k}(t), \quad gdy\ P_1(0) = 1 \qquad (2.5)$$

Ze wzoru (2.5) wynika, ze symbolem $P_{1k}(t)$ oznaczymy prawdopodobieństwo przejścia obiektu ze stanu 1 do stanu k w przedziale czasu (0,t). W takim razie równanie (2.4) możemy teraz zapisać w postaci:

$$P_{1k}(t) = \exp(-\lambda_{kk}t)\ (\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{ik} \int_0^t P_{1i}(x)\ e^{\lambda_{kk}x} dx + C\ ) \qquad (2.6)$$

Z (2.6) mamy

$$P_{11}(t) = Ce^{-\lambda_{11}t} \qquad (2.7)$$

Z tego, ze $P_1(0) = P_{11}(0) = 1$, otrzymujemy C = 1. Zatem

$$P_{11}(t) = e^{-\lambda_{11}t} \qquad (2.8)$$

gdzie

$$\lambda_{11} = \lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14} \tag{2.9}$$

Znając $P_{11}(t)$ obliczymy prawdopodobieństwa przejścia w przedziale czasu (0,t) ze stanu 1 do stanu 2. Z równania (2,4) otrzymujemy:

$$P_{12}(t) = e^{-\lambda_{22}t}(\lambda_{12}\int_0^t e^{-\lambda_{11}x}e^{\lambda_{22}x}dx + C) = e^{-\lambda_{22}t}(\lambda_{12}\int_0^t e^{(\lambda_{22}-\lambda_{11})x}dx + C) =$$

$$= \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{22}-\lambda_{11}}\; e^{-\lambda_{22}t}(e^{(\lambda_{22}-\lambda_{11})x}\Big|_0^t) = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{22}-\lambda_{11}}\; e^{-_{11}t} - e^{-\lambda_{22}t} + Ce^{-\lambda_{22}t} \tag{2.10}$$

W związku z tym, ze $P_2(0) = P_{12}(0) = 0$, wiec C = 0. Ostatecznie więc otrzymujemy:

$$P_{12}(t) = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{22}-\lambda_{11}}\; e^{-_{11}t} - e^{-\lambda_{22}t} \tag{2.11}$$

gdzie

$$\lambda_{22} = \lambda_{23} + \lambda_{24} \tag{2.12}$$

Z kolei, dla $P_{13}(t)$ otrzymujemy z (2.6):

$$P_{13}(t) = e^{-\lambda_{33}t}\left[\int_0^t(\lambda_{13}P_{11}(t) + \lambda_{23}P_{12}(t))e^{\lambda_{33}x}dx + C\right] = Ce^{-\lambda_{33}t} + e^{-\lambda_{33}t}\int_0^t\left[(\lambda_{13}e^{-\lambda_{11}x} + \lambda_{23}\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{22}-\lambda_{11}}e^{-\lambda_{11}x} -\right.$$

$$\left. -\lambda_{23}\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{22}-\lambda_{11}}e^{-\lambda_{22}x})\right]e^{\lambda_{33}x}dx = Ce^{-\lambda_{33}t} + \int_0^t(\lambda_{13}e^{(\lambda_{33}-\lambda_{11})x} + \lambda_{23}\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{22}-\lambda_{11}}e^{(\lambda_{33}-\lambda_{11})x} -$$

$$-\lambda_{23}\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{22}-\lambda_{11}}e^{(\lambda_{33}-\lambda_{22})x})dx \tag{2.13}$$

Po obliczeniu całki otrzymujemy:

$$P_{13}(t) = Ce^{-\lambda_{33}t} + \left(\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{33} - \lambda_{11}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{(\lambda_{22} - \lambda_{11})(\lambda_{33} - \lambda_{11})}\right)(e^{-\lambda_{11}t} - e^{-\lambda_{33}t}) -$$

$$- \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{(\lambda_{22} - \lambda_{11})(\lambda_{33} - \lambda_{22})})(e^{-\lambda_{22}t} - e^{-\lambda_{33}t}) \tag{2.14}$$

Z tego, że $P_3(0) = P_{13}(0) = 0$ wynika, iż C-0. Ostatecznie otrzymujemy:

$$P_{13}(t) = \left(\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{33} - \lambda_{11}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{(\lambda_{22} - \lambda_{11})(\lambda_{33} - \lambda_{11})}\right)(e^{-\lambda_{11}t} - e^{-\lambda_{33}t}) -$$

$$- \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{(\lambda_{22} - \lambda_{11})(\lambda_{33} - \lambda_{22})})(e^{-\lambda_{22}t} - e^{-\lambda_{33}t}) \tag{2.15}$$

gdzie

$$\lambda_{33} = \lambda_{34} \tag{2.16}$$

Postępując analogicznie jak poprzednio otrzymujemy

$$P_{14}(t) = \left(\frac{\lambda_{14}}{\lambda_{44} - \lambda_{11}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{24}}{(\lambda_{22} - \lambda_{11})(\lambda_{44} - \lambda_{11})} + \frac{\lambda_{13}\lambda_{34}}{(\lambda_{33} - \lambda_{11})(\lambda_{44} - \lambda_{11})} +\right.$$

$$+ \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{34}}{(\lambda_{22} - \lambda_{11})(\lambda_{33} - \lambda_{11})(\lambda_{44} - \lambda_{11})}\Big)\,(e^{-\lambda_{11}t} - e^{-\lambda_{44}t}) - \left(\frac{\lambda_{12}\lambda_{24}}{(\lambda_{22} - \lambda_{11})(\lambda_{44} - \lambda_{22})} +\right.$$

$$+ \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{34}}{(\lambda_{22} - \lambda_{11})(\lambda_{33} - \lambda_{22})(\lambda_{44} - \lambda_{22})}\Big)\,(e^{-\lambda_{22}t} - e^{-\lambda_{44}t}) -$$

$$-(\frac{\lambda_{13}\lambda_{34}}{(\lambda_{33}-\lambda_{11})(\lambda_{44}-\lambda_{33})}+$$

$$\frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{34}}{(\lambda_{22}-\lambda_{11})(\lambda_{33}-\lambda_{11})(\lambda_{44}-\lambda_{33})}-\frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{34}}{(\lambda_{22}-\lambda_{11})(\lambda_{33}-\lambda_{22})(\lambda_{44}-\lambda_{33})})\bullet(e^{-\lambda 33t}-e^{-\lambda_{44}t}) \tag{2.17}$$

Przyjmijmy teraz, ze $P_2(0)=1, \quad P_i(0)=0 \quad dla \quad i \neq 2$. Oznacza to, ze w chwili początkowej obiekt był w stanie 2. Jak pamiętamy, przyjęliśmy założenie, ze obiekt nie może naprawić się sam, tzn. nie może przejść ze stanu gorszego (wyższego) do lepszego (niższego). Wynika z tego, ze $P_1(t)=0$, jako ze obiekt znajdujący się w chwili początkowej w stanie 2 w żadnej następnej chwili nie może przejść do stanu 1. Wobec tego, dla $k \geq 2$ wzór (2.4) przyjmuje postać

$$P_k(t)=\exp(-\lambda_{kk}t)\,(\sum_{i=2}^{k-1}\lambda_{ik}\int_0^t P_i(x)\,e^{\lambda_{kk}x}dx+C) \tag{2.18}$$

Przy założeniu, że $P_2(0)=1$ prawdopodobieństwa $P_k(t)$ $(k \geq 2)$ można interpretować jako prawdopodobieństwa przejścia obiektu ze stanu 2 do stanu k w przedziale czasu (0,t), a więc we wzorze (2.18) prawdopodobieństwa $P_k(t)$ można zastąpić prawdopodobieństwami $P_{2k}(t)$. A zatem równanie (2.18) przyjmuje postać:

$$P_{2k}(t)=\exp(-\lambda_{kk}t)\,(\sum_{i=2}^{k-1}\lambda_{ik}\int_0^t P_{2i}(x)\,e^{\lambda_{kk}x}dx+C) \tag{2.19}$$

Ze wzoru (2.19) otrzymujemy

$$P_{22}(t)=Ce^{-\lambda_{22}t} \tag{2.20}$$

gdzie

$$\lambda_{22}=\lambda_{23}+\lambda_{24} \tag{2.21}$$

Jednakże $P_2(0)=P_{22}(0)=1$ i wobec tego C=1. A zatem

$$P_{22}(t)=e^{-\lambda_{22}t} \tag{2.22}$$

Wyznaczmy teraz – znając $P_{22}(t)$ - prawdopodobieństwo przejścia obiektu w przedziale czasu (0,t) ze stanu 2 do stanu 3. Z równania (2.19) otrzymujemy:

$$P_{23}(t) = e^{-\lambda_{33}t}(\lambda_{23}\int_0^t e^{-\lambda_{22}x}e^{-\lambda_{33}x}dx + C) = e^{-\lambda_{33}t}(\lambda_{23}\int_0^t e^{-(\lambda_{22}-\lambda_{22})x}dx + C) =$$

$$= Ce^{-\lambda_{33}t} + \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{33}-\lambda_{22}}(e^{-\lambda_{22}t} - e^{-\lambda_{33}t)}) \qquad (2.23)$$

Z tego, że $P_3(0) = P_{23}(0) = 0$, mamy C=0. A więc

$$P_{23}(t) = \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{33}-\lambda_{22}}(e^{-\lambda_{22}t} - e^{-\lambda_{33}t)}) \qquad (2.24)$$

W analogiczny sposób jak poprzednio można wykazać, że

$$P_{24}(t) = (\frac{\lambda_{24}}{\lambda_{44}-\lambda_{22}} + \frac{\lambda_{23}\lambda_{34}}{(\lambda_{33}-\lambda_{22})(\lambda_{44}-\lambda_{22})})(e^{-\lambda_{22}t} - e^{-\lambda_{44}t}) - \frac{\lambda_{23}\lambda_{34}}{(\lambda_{33}-\lambda_{22})(\lambda_{44}-\lambda_{33})})(e^{-\lambda_{33}t} - e^{-\lambda_{44}t})$$

$$(2.25)$$

Przyjmijmy, że $P_3)0) = 1, P_i(0) = 0 \quad dla \quad i \neq 3$ .Oznacza to, że w chwili początkowej obiekt był w stanie 3. Wynika z tego, że $P_1(t) = P_2(t) = 0$, ponieważ obiekt znajdujący się w chwili początkowej w stanie 3 nie noże przejść do stanu 1 lub stanu 2. A zatem, dla k$\neq$3 wzór (2.4) przyjmuje postać:

$$P_k(t) = \exp(-\lambda_{kk}t)\,(\sum_{i=3}^{k-1}\lambda_{ik}\int_0^t P_i(x)\,e^{\lambda_{kk}x}dx + C\,) \qquad (2.26)$$

Przy założeniu, że $P_3(0) = 1$ otrzymujemy z (2.26)

$$P_{3k}(t) = \exp(-\lambda_{kk}t)\,(\sum_{i=3}^{k-1}\lambda_{ik}\int_0^t P_{3i}(x)\,e^{\lambda_{kk}x}dx + C\,) \qquad (2.27)$$

Z (2.27) otrzymujemy:

$$P_{33}(t) - e^{-\lambda_{33}t}, \tag{2.28}$$

a ponadto

$$P_{34}(t) = \frac{\lambda_{34}}{\lambda_{44} - \lambda_{33}}(e^{-\lambda_{33}t} - e^{-\lambda_{44}t}) \tag{2.29}$$

Niech teraz $P_4(0) = 1$, $P_i(0) = 0$ *dla* $i = 1, 2, 3$. Oznacza to, że w chwili początkowej obiekt był w stanie 4, a zatem $P_1(t) = P_2(t) = P_3(t) = 0$. Obiekt ze stanu 4 samoistnie nie może przejść do żadnego innego stanu. Może z niego wyjść jedynie po przeprowadzeniu naprawy i wobec tego intensywności λ_{4i} można traktować jako intensywności naprawy. Z (2.4) wynika, że prawdopodobieństwo przebywania obiektu w stanie 4 wyraża się wzorem

$$P_{44}(t) = e^{-\lambda_{44}t}. \tag{2.30}$$

Wyznaczone prawdopodobieństwa przejść $P_{ik}(t)$ w pełni opisują zachowanie się obiektu. Przeprowadzone w niniejszym rozdziale rozważania i wyprowadzenia będą pomocne w następnych rozdziałach.

3. Optymalizacja obsług obiektu trójstanowego poddawanego okresowym przeglądom

3.1 Uwagi ogólne

Większość rozważanych modeli niezawodnościowych obiektów technicznych dotyczy obiektów dwustanowych, przy czym jeden z wyróżnionych stanów odpowiada zdatności obiektu, a drugi – jego niezdatności. Takie podejście nie odpowiada – w wielu przypadkach – potrzebom praktyki, dlatego też coraz częściej pojawiają się publikacje dotyczące obiektów wielostanowych.

W niniejszym rozdziale zostaną przedstawione modele dotyczące obiektu wielostanowego poddawanego okresowym przeglądom. Przeglądy te są podstawą podejmowania decyzji q naprawianiu bądź też dalszym kontynuowaniu użytkowania obiektu. Podano metodę wyznaczania optymalnego okresu przeglądów. Przedstawiono też przykład ilustrujący omawiane zagadnienie.

Poniżej kolejno przedstawiono trzy zagadnienia dotyczące optymalizacji obsług obiektu wielostanowego, zawarte w trzech podpunktach. Zaprezentowano w nich obsługi w przypadku idealnych napraw, w przypadku niedoskonałych napraw oraz w przypadku ciągłego stanu częściowej zdatności..

3.2 Optymalizacja obsług w przypadku idealnych napraw

Rozpatrzmy trójstanowy obiekt spełniający założenia przyjęte w rozdziale 2. Przyjmijmy, że stan 1 jest stanem pełnej zdatności obiektu, stan 2 jest stanem częściowej zdatności, tzn. obiekt dalej może pracować, ale osiągane w tym stanie efekty są mniejsze niż efekty uzyskane w stanie 1, stan zaś 3 jest stanem niezdatności (uszkodzenia). Zakładamy, że uszkodzenie obiektu (tzn, jego przejście do stanu 3) jest natychmiast wykrywane w trakcie eksploatacji obiektu, natomiast stany 1 i 2 nie są bezpośrednio obserwowalne. Stwierdzenie, czy obiekt jest w stanie 1 lub 2 wymaga przeprowadzenia specjalnego przeglądu. Przeglądy te są wykonywane periodycznie co okres x, a czas ich trwania jest pomijalnie mały w porównaniu z x.

Przyjmiemy następującą strategię obsługi:

a) jeżeli obiekt przeszedł do stanu 3, to jest on natychmiast naprawiany (naprawa I) z intensywnością μ, a w wyniku tej naprawy obiekt przechodzi do stanu 1;

b) jeżeli po przeprowadzeniu przeglądu stwierdzono, że obiekt jest w stanie 2, to jest on naprawiany)naprawa II) z intensywnością ν, a naprawa ta powoduje przejście obiektu do stanu 1.

Intensywności napraw μ *i* ν przeważnie różnią się i na ogół jest $\nu > \mu$. Będziemy zakładać, że naprawy I i II są *naprawami idealnymi* , tzn. po ich zakończeniu obiekt z prawdopodobieństwem 1 znajduje się w stanie 1. Jest zrozumiałe, że jeśli obiekt uszkodził się (przeszedł do stanu 3), to w nim pozostaje aż do chwili zakończenia naprawy I, kiedy to przechodzi do stanu 1. Z punktu widzenia efektów osiąganych podczas eksploatacji obiektu nieco inaczej należy traktować stan 2 po przeprowadzonym przeglądzie, tzn, wtedy, kiedy wiadomo już, że obiekt nie jest w pełni zdatny i powinien być naprawiony (zgodnie z wymogami naprawy II), co umożliwi jego przejście do stanu 1. Taka naprawa z punktu widzenia osiąganych efektów nie jest równoznaczna z przebywaniem obiektu w stanie 2, gdyż teraz zamiast korzyści (co prawda mniejszych niż korzyści związanych z pracą obiektu w stanie 1) ponosimy straty (koszt naprawy II, przestój obiektu). Z tego powodu rozpatrując system „obiekt – obsługi – koszty" celowym jest wyróżnienie dodatkowego stanu 4. Przyjmijmy, że system przechodzi do stanu 4 natychmiast po stwierdzeniu w wyniku przeglądu, że obiekt jest w stanie 2 i przebywa w stanie 4 aż do chwili ukończenia naprawy II. Po zakończeniu tej naprawy system przechodzi do stanu 1. Jeżeli przegląd wykazał, e obiekt jest w stanie 1, to nie wykonuje się żadnej obsługi i przechodzi się do dalszej, normalnej eksploatacji obiektu.

Zadanie polega na wyznaczeniu prawdopodobieństw $P_i(t)$ przebywania systemu w stanie i w chwili t oraz – znając odpowiednie efekty i straty – na wyznaczeniu optymalnej chwili przeprowadzenia przeglądu.

Matematyczny opis modelu

Niech – jak już wyżej wspomniano - $P_i(t)$ oznacza prawdopodobieństwo całkowite przebywania systemu w stanie i w chwili t (i = 1, 2, 3, 4; $0 \le t \le x$). Dla przypadku stacjonarnego – najbardziej interesującego z punktu widzenia praktyki – otrzymujemy:

$$P_1(t+\Delta t) = P_1(t)[1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})\Delta t + o(\Delta t)] + P_3(t)[\mu\Delta t + o(\Delta t)] + P_4(t)\nu\Delta t + o(\Delta t) \qquad (3.1)$$

Istotnie, prawdopodobieństwo $P_1(t+\Delta t)$ tego, że w chwili $t+\Delta t$ obiekt będzie w stanie 1 jest sumą prawdopodobieństw:

a) prawdopodobieństwa, że w chwili t obiekt był w stanie 1 i przez czas Δt nie wyszedł z tego stanu,

b) prawdopodobieństwa, że w chwili t obiekt był w stanie 3 i w przedziale czasu długości Δt przeszedł do stanu 1 w wyniku przeprowadzenia naprawy I,

c) prawdopodobieństwa, że w chwili t obiekt był w stanie 4 i że w przedziale Δt naprawa II spowodowała jego przejście do stanu 1.

Z kolei,

$$P_2(t+\Delta t) = P_1(t)[\lambda_{12}\Delta t + o(\Delta t)] + P_2(t)[1 - \lambda_{23}\Delta t + o(\Delta t)] \qquad (3.2)$$

Zauważmy, że prawdopodobieństwo $P_2(t+\Delta t)$ tego, ze w chwili t+Δt obiekt będzie się znajdować w stanie 2 jest suma prawdopodobieństw:

a) prawdopodobieństwa, że w chwili t obiekt znajdował się w stanie 1 i w przedziale czasu długości Δt przeszedł do stanu 2,

b) prawdopodobieństwa, ze w chwili t obiekt znajdował się w stanie 2 i przez czas Δt pozostał w tym stanie.

Dalej mamy:

$$P_3(t+\Delta t) = P_1(t)[\lambda_{13}\Delta t + o(\Delta t)] + P_2(t)[\lambda_{23}\Delta t + o(\Delta t)] + P_3(t)[1 - \mu\Delta t + o(\Delta t)] \qquad (3.3)$$

Zależność (3.3) stwierdza, ze prawdopodobieństwo $P_3(t+\Delta t)$ tego, ze w chwili $t+\Delta t$ obiekt będzie w stanie 3 jest suma następujących prawdopodobieństw:

a) prawdopodobieństwa, ze w chwili t obiekt był w stanie 1 i w przedziale czasu Δt przeszedł do stanu 3,

b) prawdopodobieństwa, ze w chwili t obiekt znajdował się w stanie 2 i w przedziale czasu Δt przeszedł do stanu 3,

c) prawdopodobieństwa, ze w chwili t obiekt był w stanie 3 i przez czas Δt pozostał w tym stanie.

Z kolei,

$$P_4(t+\Delta \mathrm{t}) = P_4(t)[1 - \nu\Delta t + o(\Delta t)] \qquad (3.4)$$

Wzór (3.4) oznacza, ze prawdopodobieństwo $P_4(t+\Delta \mathrm{t})$ tego, ze w chwili $t+\Delta t$ obiekt będzie w stanie 4 jest równe prawdopodobieństwu tego, ze w chwili t obiekt był w stanie 4 i w przedziale czasu Δt nie został naprawiony.

Z równania (3.4) otrzymujemy (przy $\Delta t \to 0$) rozwiązanie dla $P_4(t)$:

$$P_4(t) = P_4(0)e^{-\nu t} \qquad (3.5)$$

Przy $\Delta t \to 0$ z równań (3.1), (3.2) i (3.3) otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} dP_1(t)/dt = -(\lambda_{12}+\lambda_{13})P_1(t) + \mu P_3(t) + \nu P_4(0)e^{-\sigma t} \\ dP_2(t)/dt = \lambda_{12}P_1(t) - \lambda_{23}P_2(t) \\ dP_3(t)/dt = \lambda_{13}P_1(t) + \lambda_{23}P_2(t) - \mu P_3(t) \end{cases} \tag{3.6}$$

Nietrudno zauważyć, że warunki brzegowe rozpatrywanego zagadnienia są następujące:

$$\begin{aligned} &P_1(0) = P_1(x), \\ &P_2(0) = 0, \\ &P_3(0) = P_3(x), \\ &P_4(0) = P_2(x-0), \\ &\sum_{i=1}^{4} P_i(t) = 1, \quad (0 \le t \le x) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Po zastosowaniu transformacji Laplace'a do układu równań (3.6) i po dokonaniu prostych przekształceń algebraicznych otrzymujemy:

$$P_1^*(s) = \frac{P_1(0)(s+\mu)(s+\lambda_{23})}{s(s+s_1)(s+s_2)} + \frac{\mu P_3(0)(s+\lambda_{23})}{s(s+s_1)(s+s_2)} + \frac{\nu P_4(0)(s+\lambda_{23})(s+\mu)}{s(s+\nu)(s+s_1)(s+s_s)} \tag{3.8}$$

$$P_2^*(s) = \frac{P_1(0)\lambda_{12}(s+\mu)}{s(s+s_1)(s+s_2)} + \frac{P_3(0)\mu\lambda_{12}}{s(s+s_1)(s+s_2)} + \frac{P_4(0)\nu\lambda_{12}(s+\mu)}{s(s+\nu)(s+s_1)(s+s_2)}, \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} P_3^*(s) = {} & \frac{P_1(0)\lambda_{13}(s+\lambda_{23})}{s(s+s_1)(s+s_2)} + \frac{P_1(0)\lambda_{12}\lambda_{23}}{s(s+s_1)(s+s_2)} + \frac{P_3(0)}{\mu+s} + \frac{P_3(0)\mu\lambda_{13}(s+\lambda_{23})}{s(s+\mu)(s+s_1)(s+s_2)} + \\ & \frac{P_3(0)\mu\lambda_{12}\lambda_{23}}{s(s+\mu)(s+s_1)(s+s_2)} + \frac{P_4(0)\lambda_{12}\lambda_{23}}{s(s+\nu)(s+s_1)(s+s_2)} + \frac{P_4(0)\nu\lambda_{13}(s+\lambda_{23})}{s(s+\mu)(s+s_1)(s+s_2)} \end{aligned} \tag{3.10}$$

gdzie:

$P_i^*(s)$ - transformata Laplace'a funkcji $P_i(t)$, $i = 1, 2, 3;$

$$s_1, s_2 = \frac{1}{2}(\mu + \lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{13}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\mu + \lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{23})^2 - 4(\mu\lambda_{23} + \lambda_{12}\lambda_{23} + \lambda_{13}\lambda_{23} + \mu\lambda_{12})} \tag{3.11}$$

Celem uzyskania dużej zwięzłości zapisu wprowadzimy następujące dodatkowe oznaczenia:

$$B_1^*(s) = \frac{(s+\mu)(s+\lambda_{23})}{s(s+s_1)(s+s_2)}, \qquad B_2^*(s) = \frac{(s+\lambda_{23})}{s(s+s_1)(s+s_2)}$$

$$B_3^*(s) = \frac{(s+\lambda_{23})(s+\mu)}{s(s+\nu)(s+s_1)(s+s_2)}, \qquad D_1^*(s) = \frac{(s+\mu)}{s(s+s_1)(s+s_2)},$$

$$D_2^*(s) = \frac{1}{s(s+s_1)(s+s_2)}, \qquad D_3^*(s) = \frac{s+\mu}{s(s+\nu)(s+s_1)(s+s_2)},$$

$$G_1^*(s) = \frac{s+\lambda_{23}}{s(s+s_1)(s+s_2)}, \qquad G_2^*(s) = \frac{1}{s(s+s_1)(s+s_2)}.$$

$$g_3^*(s) = \frac{1}{\mu+s}, \qquad G_4^*(s) = \frac{s+\lambda_{23}}{s(s+\mu)(s+s_1)(s+s_2)},$$

$$G_5^*(s) = \frac{1}{s(s+\mu)(s+s_1)(s+s_2} \qquad G_6^*(s) = \frac{1}{s(s+\nu)(s+s_1)(s+s_2)}$$

$$G_7^*(s) = \frac{s+\lambda_{23}}{s(s+\nu)(s+s_1)(s+s_2)}$$

Korzystając z wyżej wprowadzonych oznaczeń możemy zapisać równania (3.8), (3.9), i (3.10) w postaci:

$$P_1^*(s) = P_1(0)B_1^*(s) + \mu P_3(0)B_2^*(s) + \nu P_4(0)B_3^*(s) \tag{3.12}$$

$$P_2^*(s) = \lambda_{12}P_1(0)D_1^*(s) + \mu\lambda_{12}P_3(0)D_2^*(s) + \nu\lambda_{12}P_4(0)D_3^*(s) \tag{3.13}$$

$$p_3^*(s) = \lambda_{13}P_1(0)G_1^*(s) + \lambda_{12}\lambda_{13}P_1(0)G_2^*(s) + P_3(0)G_3^*(s) + \mu\lambda_{13}P_3(0)G_4^*(s) +$$
$$\mu\lambda_{12}\lambda_{23}P_3(0)G_5^*(s) + \nu\lambda_{12}\lambda_{23}P_4(0)G_6^*(s) + \nu\lambda_{13}P_4(0)G_7^*(s) \tag{3.14}$$

Po rozłożeniu funkcji $B_i^*(s)$, D_i^* *oraz* $G_i^*(s)$ na ułamki proste i po znalezieniu dla nich transformat odwrotnych otrzymujemy:

$$B_1(t) = \frac{\mu\lambda_{23}}{s_1 s_2} + \frac{(\mu - s_1)(\lambda_{23} - s_1)}{s_1(s_1 - s_2)}e^{-s_1 t} + \frac{(\mu - s_2)(\lambda_{23} - s_2)}{s_2(s_2 - s_1)}e^{-s_2 t} \tag{3.15}$$

$$B_2(t) = \frac{\lambda_{23}}{s_1 s_2} + \frac{\lambda_{23} - s_1}{s_1(s_1 - s_2)}e^{-s_1 t} + \frac{\lambda_{23} - s_2}{s_2(s_2 - s_1)}e^{-s_2 t} \tag{3.16}$$

$$B_3(t) = \frac{\mu\lambda_{23}}{s_1 s_2} + \frac{(\mu - \nu)(\lambda_{23} - \nu)}{\nu(\nu - s_1)(s_2 - \nu)}e^{-\nu t} + \frac{(\mu - s_1)(\lambda_{23} - s_1)}{s_1(s_1 - \nu)(s_2 s_1)}e^{-s_1 t} + \frac{(\mu - s_2)(\lambda_{23} - s_2)}{s_2(s_2 - s_1)(\nu - s_2)}e^{-s_2 t} \tag{3.17}$$

$$D_1(t) = \frac{\mu}{s_1 s_2} + \frac{\mu - s_1}{s_1(s_1 - s_2)}e^{-s_1 t} + \frac{\mu - s_2}{s_2(s_2 - s_1)}e^{-s_2 t} \tag{3.18}$$

$$D_2(t) = \frac{2}{s_1 s_2} + \frac{1}{s_1(s_1 - s_2)}e^{-s_1 t} + \frac{1}{s_2(s_2 - s_1)}e^{-s_2 t} \tag{3.19}$$

$$D_3(t) = \frac{\mu}{\nu s_1 s_2} + \frac{\mu - \nu}{\nu(\nu - s_1)(s_2 - \nu)} e^{-\nu t} + \frac{\mu - s_1}{s_1(\nu - s_1)(s_1 - s_2)} e^{-s_1 t} + \frac{\mu - s_2}{s_2(s_2 - s_2)(\nu - s_2)} e^{-s_2 t} \quad (3.20)$$

$$G_1(t) = \frac{\lambda_{23}}{s_1 s_2} + \frac{\lambda_{23} - s_1}{s_1(s_1 - s_2)} e^{-s_1 t} + \frac{\lambda_{23} - s_2}{s_2(s_2 - s_1)} e^{-s_2 t} \quad (3.21)$$

$$G_2(t) = \frac{1}{s_1 s_2} + \frac{1}{s_1(s_1 - s_2)} e^{-s_1 t} + \frac{1}{s_2(s_2 - s_1)} e^{-s_2 t} \quad (3.22)$$

$$G_3(t) = e^{-\mu t} \quad (3.23)$$

$$G_4(t) = \frac{\lambda_{23}}{\mu s_1 s_2} + \frac{\lambda_{23} - \mu}{\mu(\mu - s_1)(s_2 - \mu)} e^{-\mu t} + \frac{\lambda_{23} - s_1}{s_1(s_1 - s_2)(\mu - s_1)} e^{-s_1 t} + \frac{\lambda_{23} - s_2}{s_2(s_2 s_1)(\mu - s_2)} e^{-s_2 t} \quad (3.24)$$

$$G_5(t) = \frac{1}{\mu s_1 s_2} + \frac{1}{\mu(\mu - s_1)(s_2 - \mu)} e^{-\mu t} + \frac{1}{s_1(s_1 - s_2)(\mu - s_1)} e^{-s_1 t} + \frac{1}{s_2(s_2 s_1)(\mu - s_2)} e^{-s_2 t} \quad (3.25)$$

$$G_6(t) = \frac{1}{\nu s_1 s_2} + \frac{1}{\nu(\nu - s_1)(s_2 - \nu)} e^{-\nu t} + \frac{1}{s_1(s_1 - s_2)(\nu - s_1)} e^{-s_1 t} + \frac{1}{s_2(s_2 s_1)(\nu - s_2)} e^{-s_2 t} \quad (3.26)$$

$$G_7(t) = \frac{\lambda_{23}}{\nu s_1 s_2} + \frac{\lambda_{23} - \nu}{\nu(\nu - s_1)(s_2 - \nu)} e^{-\nu t} + \frac{\lambda_{23} - s_1}{s_1(s_1 - s_2)(\nu - s_1)} e^{-s_1 t} + \frac{\lambda_{23} - s_2}{s_2(s_2 - s_1)(\nu - s\ )} e^{-s_2 t} \quad (3.27)$$

Do pełnego określenia wzorów (3,12) – (3.14) potrzebna jest jeszcze znajomość wartości $P_1(0), P_3(0)\ oraz\ P_4(0)$ (ze wzoru (3.7) wynika, że $P_2(0) = 0$). Wyznaczymy je korzystając z warunków brzegowych (3.7) oraz równań (3.8) i (3.9). Otrzymamy układ dwu równań liniowych z dwiema niewiadomymi $P_1(0) oraz P_3(0)$:

$$P_1(0)(B_1(x) - \nu B_3(x) - 1) + P_3(0)(\mu B_2(x) - \nu B_3(x)) = -\nu B_3(x) \tag{3.28a}$$

$$P_1(0)(\lambda_{12} D_1(x) - \nu\lambda_{12} D_3(x) + 1) + P_3(0)(\mu\lambda_{12} D_2(x) - \nu\lambda_{12} D_3(x) + 1) = 1 - \nu\lambda_{12} D_3(x) \tag{3.28b}$$

Z układu równań (3.28a) oraz (3.28b) można bezpośrednio wyznaczyć poszukiwane wartości początkowe:

$$P_1(0) = \{\nu B_3(x)[\nu\lambda_{12} D_3(x) - \mu\lambda_{12} D_2(x) - 1] - [1 - \nu\lambda_{12} D_3(x)][\mu B_2(x)]\} / H(x) \tag{3.29}$$

$$P_3(0) = \{[1 - \nu\lambda_{12} D_3(x)][B_1(x) - \nu B_3(x) - 1] + \nu B_3(x)[\lambda_{12} D_1(x) - \nu\lambda_{12} D_3(x) + 1]\} / H(x), \tag{3.30}$$

gdzie

$$\begin{aligned} H(x) = {} & [B_1(x) - \nu B_3(x) - 1][\mu\lambda_{12} D_2(x) - \nu\lambda_{12} D_3(x) + 1] - [\lambda_{12} D_1(x) - \nu\lambda_{12} D_3(x) + 1] \bullet \\ & [\mu B_2(x) - \nu B_3(x)] \end{aligned} \tag{3.31}$$

Natomiast

$$P_4(0) = 1 - P_1(0) - P_3(0)$$

Korzystając ze wzorów (3.12), (3.13) i (3.14) oraz wyżej wprowadzonych oznaczeń możemy napisać ostateczne wzory opisujące prawdopodobieństwa $P_i(t)$:

$$P_1(t) = P_1(0)B_1(t) + \mu P_3(0)B_2(t) + \nu P_4(0)B_3(t) \tag{3.32}$$

$$P_2(t) = \lambda_{12} P_1(0)D_1(t) + \mu\lambda_{12} P_3(0)D_2(t) + \nu\lambda_{12} P_4(0)D_3(t) \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned} P_3(t) = {} & \lambda_{13} P_1(0)G_1(t) + \lambda_{12}\lambda_{23} P_1(0)G_2(t) + P_3(0)G_3(t) + \mu\lambda_{13} P3(0)G_4(t) + \\ & \mu\lambda_{12}\lambda_{23} P_3(0)G_5(t) + \lambda_{12}\lambda_{13} P_4(0)G_6(t) + \nu\lambda_{13} P_4(0)G_7(t) \end{aligned} \tag{3.34}$$

Optymalizacja okresu przeglądów

Celem analizy przeprowadzonej w niniejszym rozdziale jest zapewnienie osiągnięcia maksymalnych efektów uzyskiwanych podczas eksploatacji obiektu przy założeniu, że jest stosowana strategia przedstawiona na wstępie. Zgodnie z tą strategią, obiekt poddawany jest przeglądom, przeprowadzanym co okres x, a na podstawie wyników wykonanego przeglądu podejmowana jest decyzja o odpowiedniej naprawie albo też obiekt - jeśli jest nadal w stanie 1 – jest dalej użytkowany bez przeprowadzenia naprawy. Jest zrozumiałe, że długość (wartość) x okresu przeglądów ma wpływ na wielkość osiąganych efektów ekonomicznych związanych z eksploatacją obiektu, gdyż - jak nietrudno zauważyć analizując wyprowadzone wyżej wzory – wartości prawdopodobieństw $P_i(t)$ zależą między innymi od x. Z powyższego wynika, że dobierając odpowiedni okres przeglądów $x = x^*$ można uzyskać maksymalizację efektów przy danych kosztach związanych z wykonywaniem napraw, ze stratami na skutek uszkodzenia obiektu z jednostkowymi efektami powiązanymi z przebywaniem obiektu w poszczególnych stanach itp.

Do wyznaczenia takiego optymalnego okresu przeglądów potrzebna jest odpowiednio skonstruowana funkcja celu, prawidłowo wyrażająca efekty uzyskiwane z eksploatacji systemu. W rozpatrywanym przypadku najlepszą funkcją celu wydaje się oczekiwany efekt ekonomiczny w jednostce czasu wynikający z eksploatacji systemu, jako funkcja okresu przeglądów x. Zadanie polega na wyznaczeniu takiej wartości okresu przeglądów, dla której funkcja celu osiąga maksimum. Zauważmy, że

$$q_i = \frac{1}{x}\int_0^x P_i(t)dt \qquad (3.35)$$

jest średnim (w przedziale czasu długości x) prawdopodobieństwem przebywania obiektu w stanie i.

Niech c_i (i=1, 2, 3, 4) oznacza zysk (lub stratę) w jednostce czasu związany z przeprowadzeniem przeglądu. Jeśli zatem symbolem K(x) oznaczymy oczekiwany zysk w jednostce czasu wynikający z eksploatacji systemu według przedstawionej poprzednio strategii, przy założeniu, że okres przeglądów jest x, to otrzymamy:

$$K(x)=\frac{1}{x}\left\{c_1\int_0^x P_1(t)dt+c_2\int_0^x P_2(t)dt-c_3\int_0^x P_3(t)dt-c_4\int_0^x P_4(t)dt-d\right. \tag{3.36}$$

Optymalizacja przedstawionej wyżej strategii przeglądów polega na takim doborze okresu przeglądów x^* , by $K(x^*) = \max K(x)$.

3.3 Optymalizacja obsług w przypadku niedoskonałych napraw

Przedstawione rozważania dotyczyły obiektu, który był poddawany doskonałym (bezbłędnym) obsługom, tzn. po przeprowadzeniu naprawy I lub II obiekt z prawdopodobieństwem 1 przechodził do stanu 1. W praktyce jednakże bardzo często zdarza się, że obsługa nie jest prawidłowo wykonana i po jej zakończeniu obiekt nie osiąga docelowego stanu. W naszym przypadku oznacza to, że po naprawie I, która jest przeprowadzana z intensywnością [illegible]+

Wtedy, kiedy obiekt przeszedł do stanu 3, obiekt z pewnym prawdopodobieństwem pozostanie w stanie 3, pomimo zakończenia naprawy. Zakładać będziemy, że jeśli obiekt nie został naprawiony za pierwszym razem, to po wykryciu błędu naprawy jest on ponownie naprawiany aż do skutku. Analogicznie będziemy rozumieć wykonywanie naprawy II. Poniżej rozpatrzymy zagadnienie obsług naszego obiektu wielostanowego przy założeniu, że obsługi (naprawy) nie są doskonałe.

Przyjmijmy następujące dodatkowe oznaczenia:

r – prawdopodobieństwo wadliwego wykonania naprawy I,

q - prawdopodobieństwo wadliwego wykonania naprawy II.

Pozostałe oznaczenia pozostają bez zmian.

Przyjmijmy poprzednio przedstawioną strategię z modyfikacjami wynikającymi z niedoskonałości napraw, tzn. naprawy są przeprowadzane aż do skutku, a więc aż do chwili osiągnięcia zamierzonego efektu. Możemy zatem zapisać:

$$P_1(t+\Delta t) = P_1(t)[1-(\lambda_{12}+\lambda_{13})\Delta t + o(\Delta t)] + P_3(t)[\mu\Delta t(1-r) + o(\Delta t)] +$$
$$P_4(t)[v\Delta t(1-q) + o(\Delta t)] \tag{3.37}$$

Istotnie, prawdopodobieństwo $P_1(t+\Delta t)$ tego, że w chwili $t+\Delta t$ obiekt będzie w stanie 1 jest sumą prawdopodobieństw::

- prawdopodobieństwa, że w chwili t obiekt był w stanie 1 i przez czas Δt nie wyszedł z tego stanu,
- prawdopodobieństwa, że w chwili t obiekt był w stanie 3 i że w przedziale czasu Δt naprawa I z prawdopodobieństwem (1-r) umożliwiła przejście obiektu do stanu 1.
- Prawdopodobieństwa, że w chwili t obiekt był w stanie 4 i że w przedziale czasu Δt naprawa II z prawdopodobieństwem (1-q) umożliwiła przejście obiektu do stanu 1.

Z kolei,

$$P_2(t+\Delta t) = P_1(t)[\lambda_{12}\Delta t + o(\Delta t)] + P_2(t)[1-\lambda_{23}\Delta t + o(\Delta t)] \tag{3.38}$$

Interpretacja wzoru (3.38) jest taka sama jak wzoru (3.2). Zauważmy też, że

$$P_3(t+\Delta t) = P_1(t)[\lambda_{13}\Delta t + o(\Delta t)] + P_2(t)[\lambda_{23}\Delta t + o(\Delta t)] + P_3(t)[1-\mu\Delta t + o(\Delta t)] +$$
$$+ P_3(t)[\mu\Delta tr + o(\Delta t)] \tag{3.39}$$

Wzór (3.39) wyraża, że prawdopodobieństwo $P_3(t+\Delta t)$ tego, że w chwili $t+\Delta t$ obiekt będzie w stanie 3 jest sumą następujących prawdopodobieństw:

- prawdopodobieństwa, że w chwili t obiekt był w stanie 1 i w przedziale czasu Δt przeszedł do stanu 3,
- prawdopodobieństwa, że w chwili t obiekt był w stanie 2 i w przedziale Δt przeszedł do stanu 3,
- prawdopodobieństwa, że w chwili t obiekt był w stanie 3 i pomimo podjęcia naprawy pozostał w stanie 3,
- prawdopodobieństwa, że w chwili t obiekt był w stanie 3, a naprawa była wadliwie wykonana.

Następnie:

$$P_4(t+\Delta t) = P_4(t)[1-v\Delta t + o(\Delta t)] + P_4(t)[v\Delta tq + o(\Delta t)] \tag{3.40}$$

Wzór (3.40) oznacza, że prawdopodobieństwo $P_4(t+\Delta t)$ tego, ze w chwili $t+\Delta t$ obiekt będzie w stanie 4 jest suma prawdopodobieństw:

- prawdopodobieństwa, ze w chwili t obiekt był w stanie 4 i w przedziale czasu Δt nie został naprawiony,
- prawdopodobieństwa, że w chwili t był w stanie 4, a naprawa została wadliwie wykonana.

Z równania (3.40) otrzymujemy (przy $\Delta t \to 0$) następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{d}{dt}P_4(t) = -\nu(1-q)P_4(t), \tag{3.41}$$

z którego bezpośrednio uzyskujemy rozwiązanie:

$$P_4(t) = P_4(0)e^{-\nu(1-q)t} \tag{3.42}$$

Korzystając z równań (3.37), (3.38), (3.39) 0raz (3.42) otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych:

$$\frac{d}{dt}P_1(t) = -(\lambda_{12}+\lambda_{13})P_1(t) + \mu(1-r)P_3(t) + \mu(1-q)P_4(0)e^{-\nu(1-q)t}$$

$$\frac{d}{dt}P_2(t) = \lambda_{12}P_1(t) - \lambda_{23}P_2(t) \tag{3.43}$$

$$\frac{d}{dt}P_3(t) = \lambda_{13}P_1(t) + \lambda_{23}P_2(t) - \mu(1-r)P_3(t)$$

Warunki brzegowe dla układu równań (3.43) są identyczne jak warunki brzegowe dla układu równń (3.6). Zauważmy ponadto, że otrzymany układ równań (3.43) jest podobny do układu równań (3.6), z tym, że zamiast wyrażeń μ i ν występujących w układzie równań (3.6) mamy obecnie wyrażenia – odpowiednio - μ(1-r) oraz ν(1-q). Oznacza to, że również rozwiązanie układu równań (3.43) jest podobne do rozwiązania układu równań (3.6) i można z nich bezpośrednio skorzystać kładąc w odpowiednich wzorach z punktu 3.2 w miejsce μ i ν - odpowiednio - $\mu(1\text{-r})$ oraz $\nu(1\text{-q})$.

W przypadku gdy naprawy I i II są idealne, tzn. gdy r = q = 0, otrzymujemy rozwiązania identyczne jak dla zagadnienia rozpatrywanego w poprzednim punkcie.

3.4. Optymalizacja obsług w przypadku ciągłego stanu częściowej zdatności

W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy, że wszystkie stany obiektu są definitywnie określone i zajmowaliśmy się opisem niezawodnościowym i zachowaniem się takiego obiektu podczas jego eksploatacji, Jest zrozumiałe, że stany obiektu określane są wartościami jego pewnych istotnych parametrów technicznych i fizycznych. Jeśli przynajmniej jeden z tych parametrów zmienił swoją wartość liczbową tak znacznie, że wychodzi ona poza przedział wartości przypisanych danemu stanowi, to oznacza to, że obiekt przeszedł do innego stanu, właściwego nowym wartościom parametrów. Jeśli rozważamy obiekt trójstanowy w sensie niezawodności, tzn. obiekt, w którym wyróżniamy stany: pełnej zdatności, częściowej zdatności i całkowitej niezdatności, to przeważnie a priori możemy określić stan całkowitej niezdatności, tj. określić takie graniczne wartości istotnych parametrów obiektu, że ich przekroczenie oznacza – w danych warunkach – niemożność wykonania przez obiekt postawionego przed nim zadania. O wiele trudniejsze jest ustalenie granicznych wartości parametrów obiektu rozdzielających stany pełnej i częściowej zdatności. Na ustalenie tej granicy mają wpływ zarówno wymagania jakościowe stawiane wykonywanemu przez obiekt zadaniu, jak również – w przypadku poddawania obiektu obsługom zgodnie z pewną strategią – również globalne efekty ekonomiczne uzyskiwane z eksploatowanego obiekt.

Zauważmy, że jeśli przyjmiemy „wąski" przedział parametrów określających stan pełnej zdatności i odpowiednio „szeroki" przedział parametrów określających stan częściowej zdatności, to w przypadku stosowania strategii obsług opisanej w punkcie 3.2, bardzo często planowy przegląd wykrywałby znajdowanie się obiektu w stanie 2, a w związku z tym często należałoby obiekt naprawiać. Z kolei, przyjęcie „szerokiego" przedziału parametrów określających stan pełnej zdatności zmniejszy częstotliwość napraw planowych (naprawa II), jednakże ze względu na „wąski" przedział parametrów określających stan częściowej zdatności, częściej może nastąpić całkowite uszkodzenie obiektu. Z powyższej krótkiej analizy wynika, że nie zawsze ustalenie przedziałów parametrów określających poszczególne stany obiektu jest zagadnieniem prostym i możliwym do wykonania jedynie na podstawie intuicji i posiadanego doświadczenia.

W niniejszym punkcie przedstawimy jedną z możliwych metod optymalizacji granicznych wartości parametrów obiektu, rozdzielających stany pełnej i częściowej zdatności.

Przyjmijmy, że obiekt jest poddawany obsługom zgodnie ze strategią przedstawioną w punktach 3.2 i 3.3. Wprowadzimy nowe oznaczenia. Niech wektor $P_2(t)=(\frac{\lambda_{24}}{\lambda_{44}-\lambda_{22}}+\frac{\lambda_{23}\lambda_{34}}{(\lambda_{33}-\lambda_{22})(\lambda_{44}-\lambda_{22})})(e^{\lambda_{22}t}-e^{\lambda_{44}t})-\frac{\lambda_{23}\lambda_{34}}{(\lambda_{33}-\lambda_{22})(\lambda_{44}-\lambda_{33})}(e^{\lambda_{33}t}-e^{\lambda_{44}t})$ oznacza aktualne graniczne wartości technicznych parametrów obiektu, rozdzielających stany pełnej i częściowej zdatności (k – liczba istotnych parametrów obiektu). Ponadto niech λ_{ij}^{z} oznacza średnią intensywność przejścia obiektu ze stanu i do stanu j przy założeniu, że przyjęto graniczne wartości parametrów obiektu rozdzielających stany pełnej i częściowej zdatności wyrażone wektorem z. Podobnie symbolem $P_i^z(t)$ oznaczymy prawdopodobieństwo przebywania obiektu w stanie i w chwili t (i = 1, 2, 3, 4: $0 \le t \le x$) przy podziale stanów obiektu zdeterminowanych wektorem z.

Załóżmy też, że – podobnie jak w punkcie 3,3 – naprawy I i II są niedoskonałe, a r oraz q niech oznaczają prawdopodobieństwa wadliwego wykonania napraw – odpowiednio – I i II. Pozostałe założenia i oznaczenia pozostawimy bez zmian.

W sposób analogiczny jak w punkcie 3.3 otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt}P_1^z(t) = -(\lambda_{12}^z + \lambda_{13}^z)P_1^z(t) + \mu(1-r)P_3^z(t) + \nu(1-q)P_4^z(0)e^{-\nu(1-q)t}$$

$$\frac{d}{dt}P_2^z(t) = \lambda_{12}^z P_1^z(t) - \lambda_{23}^z P_2^z(t) \qquad (3.45)$$

$$\frac{d}{dt}P_3^z(t) = \lambda_{13}^z P_1^z(t) + \lambda_{23}^z P_2^z(t) - \mu(1-r)P_3^z(t)$$

przy czym

$$P_4^z(t) = P_4^z(0)e^{-\nu(1-q)t} = P_4(t) \qquad (3.46)$$

zaś warunki brzegowe dla układu równań (3.45) – (3.46) są – podobnie jak poprzednio – następujące:

$$P_1^z(0) = P_1^z(x)$$

$$P_2^z(0) = 0$$

$$P_3^z(0) = P_3^z(x) \tag{3.47}$$

$$P_4^z(0) = P_2^z(x-0)$$

$$\sum_{i=1}^{4} P_i^z(t) = 1, \qquad (0 \le t \le x)$$

Ogólną postać rozwiązań układu równań (3.45) i (3.46) przy warunkach brzegowych (3,47) już znamy (patrz wzory (3.32), (3.33) i (3.34)). Jednakże w obecnym przypadku wartości liczbowe prawdopodobieństw $P_i^z(t)$ zależą również od wartości parametru z rozdzielającego stany 1 i 2, gdyż od z zależą intensywności przejść λ_{ij}^z .

Oznaczmy symbolem K(z,x) oczekiwany zysk w jednostce czasu uzyskiwany podczas eksploatacji systemu zgodnie z przedstawioną poprzednio strategią, przy założeniu, że z jest wektorem granicznych wartości parametrów obiektu, rozdzielających stany pełnej i częściowej zdatności oraz że x jest okresem przeglądów. Niech ponadto $c_i(z)$ (i=1, 2) oznacza średni zysk w jednostce czasu wynikający z przebywania systemu w stanie i, c_j (j=3, 4) – średnią stratę w jednostce czasu wynikającą z przebywania systemu w stanie j, d – koszt przeglądu. Zauważmy, że przez analogię do wzoru (3.36) otrzymamy:

$$K9z,x) = \frac{1}{x}\left\{ c_1(z)\int_0^x P_1^z(t)dt + c_2(z)\int_0^x P_2^z(t)dt - c_3\int_0^x P_3^z(t)dt - c_4\int_0^x P_4^z(t)dt - d \right\} \tag{3.48}$$

Naszym celem jest takie dobranie parametrów strategii, by osiągnąć maksymalizację oczekiwanego zysku. Oznacza to, że należy dobrać taką parę $\{z^*,x^*\}$, by w punkcie $\{z^*,x^*\}$ funkcja K9z,x) osiągała maksimum.

4. Strategia kontroli i napraw obiektu wielostanowego

Zagadnienie rozpatrywane w niniejszym rozdziale jest podobne do zagadnienia przedstawionego wcześniej w rozdziale 3. Jednakże różnice między nimi są istotne, m. In. W kilku założeniach, a przede wszystkim w metodzie rozwiązania postawionego problemu.

Przyjmijmy, że liczba stanów rozpatrywanego obiektu wynosi k i dla wygody oznaczmy te stany kolejnymi liczbami naturalnymi 1, 2, ...,k. Naturalne jest założenie, że stany te są uporządkowane od najlepszego do najgorszego (z punktu widzenia niezawodności). Stan „1" jest stanem pełnej zdatności obiektu. Wśród stanów wyróżniamy pewien stan e_a, nazywany stanem awarii. Obiekt, który znalazł się w stanie awarii, bądź w którymkolwiek ze stanów o numerze większym od e_a, nie jest w stanie wykonywać swoich zadań. W ten sposób stany obiektu podzielone zostały na trzy grupy: pełnej zdatności, częściowej zdatności i niezdatności. Stan rozpatrywanego obiektu w dowolnej chwili t jest zmienną losową, którą będziemy oznaczać symbolem X(). Przyjmiemy również, że stan obiektu nie może się z czasem sam poprawić.

Specyfika działania wielu obiektów technicznych polega na tym, że ich czas pracy jest podzielony na odcinki czasu, odpowiadające czasom trwania zadania, przeplatane przestojami. Załóżmy, że w czasie wykonywania zadań każdy obiekt poddawany jest kontroli i – stosownie do jej wyników – poddawany (lub nie) naprawie. Mając to na uwadze rozpatrzmy pewien model działania obiektu wielostanowego wraz z odpowiednią strategią kontroli i napraw.

Zakładamy, że działanie obiektu podzielone jest na cykle o stałej długości t_o. Po zakończeniu każdego cyklu (a więc po czasie t_o) obiekt poddawany jest kontroli. Wśród stanów obiektu wyróżniamy pewien stan, zwany stanem krytycznym (e_k). Jeśli kontrola wykaże, że obiekt osiągnął lub przekroczył stan e_k , to obiekt jest poddawany naprawie, doprowadzającej go z powrotem do mstanu „1".. Jeśli natomiast stan obiektu nie osiągnął jeszcze e_k, to obiekt zostaje uznany za wystarczająco sprawny, a dycezja odnośnie przeprowadzenia naprawy – przesunięta do chwili zakończenia kolejnego cyklu. Parametrami, które można optymalizować w tak opisanym zagadnieniu są:

- stan krytyczny e_k,
- częstotliwość wykonywania kontroli (tzn. długość cyklu t_o).

Celem optymalizacji jest zminimalizowanie kosztów eksploatacji obiektu. Trzeba jednak pamiętać, że musimy jednocześnie uniknąć sytuacji, w której obiekt ulegnie awarii w okresie między kontrolami (w szczególnym przypadku oznacza to katastrofę). Można tego dokonać nakładając ograniczenia na prawdopodobieństwo zajścia takiego zdarzenia.

Niech N będzie numerem cyklu, w którym stan obiektu osiągnie poziom krytyczny e_k. N jest zmienną losową, określoną przez zależność

$$N = \inf\{n : K(nt_o) \geq e_k\}$$

Łatwo zauważyć, że awarię obiektu w okresie między kontrolami można zapisać w postaci następującego zdarzenia

$$\{X(Nt_o) \geq e_a$$

A zatem, jeśli chcemy, by prawdopodobieństwo awarii było mniejsze od α (α jest liczbą bliską zera), to warunek ten można zapisać w postaci

$$P(X(Nt_o) \geq e_a) < \alpha$$

Pokażemy teraz, w jaki sposób można obliczać to prawdopodobieństwo. Zauważmy, że zachodzi równość zdarzeń

$$\{X(Nt_o) \geq e_a\} = \{\forall n \; X((n-1)t_o) < e_k \; i \; X(nt_o) \geq e_a\}$$

Wobec tego

$$P(X(Nt_o) \geq e_a) = P(\forall n\{X((n-1)t_o) < e_k \; i \; X(nt_o) \geq e_a\} =$$

$$= P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X((n-1)t_o) < e_k \; i \; X(nt_o) \geq e_a\})$$

Zdarzenia występujące w nawiasie klamrowym są rozłączne, a zatem

$$P(X(Nt_o) \geq e_a) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X((n-1)t_o) < e_k \,,\, X(nt_o) \geq e_a)$$

Wprowadźmy oznaczenie:

$$P_{ij}(t) = P(X(\tau + t) = jIX(\tau) = i) \quad \text{dla dowolnego } \tau.$$

$P_{ij}(t)$ jest prawdopodobieństwem przejścia obiektu ze stanu i do stanu j w czasie t. Poprzednio przedstawiono sposób wyznaczania prawdopodobieństw $P_{ij}(t)$ przy założeniu, że intensywności przejść obiektu ze stanu do stanu są stałe w czasie.

Przyjmijmy, że w chwili zerowej obiekt znajdował się w stanie 1. Łatwo zauważyć, że

$$P(X(Nt_o) \geq e_a) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{e_k - 1} \sum_{j=e_a}^{k} P(X((n-1)t_o) = i, X(nt_o) = j) \tag{4.2}$$

Ostatecznie nierówność (4.2) można zapisać w postaci:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{e_k - 1} \sum_{j=e_a}^{k} P_{ij}(t_o) P_{1i}((n-1)t_o) < \alpha \tag{4.3}$$

Przystąpimy teraz do określenia kosztów eksploatacji obiektu. Oznaczmy koszty eksploatacji obiektu w przedziale (0,t] symbolem $\Psi(t)$. Jako funkcje celu przyjmiemy oczekiwany koszt eksploatacji w jednostce czasu. W celu jej wyznaczenia załóżmy, ze po każdej awarii obiekt zastępujemy obiektem nowym. W ten sposób otrzymujemy proces X(t), określony dla wszystkich $t \geq 0$. Możemy zatem napisać funkcje celu w postaci

$$v(e_k, t_o) = \lim_{t \to \infty} E\Psi(t) / t$$

Łatwo zauważyć, że skonstruowany w ten sposób proces losowy jest procesem odnowy. Korzystając z twierdzenia odnowy można napisać związek

$$V(e_k, t_o) = \frac{E\Psi(Nt_o)}{t\, EN},$$

jeśli tylko $EN < \infty$. W celu obliczenia tej wartości oczekiwanej zauważmy, że

$$P(N=n)=P(X((n-1)t_o)<e_k, X(nt_o)\geq e_k)=\sum_{i=1}^{e_k-1}\sum_{j=e_k}^{k}P(X((n-1)t_o=i, X(nt_o)=j)=$$

$$=\sum_{i=1}^{e_k-1}\sum_{j=e_k}^{k}P_{ij}(t_o)P_{1i}((n-1)t_o)$$

Wobec tego

$$EN=\sum_{n=1}^{\infty}nP(N=n)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{e_k-1}\sum_{j=e_a}^{k}nP_{ij}(t_o)P_{1i}((n-1)t_o) \tag{4.4}$$

W okresie między kolejnymi naprawami mogą zostać poniesione następujące rodzaje kosztów:

A – koszt awarii (jeśli obiekt ulegnie awarii przed poddaniem go naprawie).

N•B – koszt kontroli,

C(j) – koszt naprawy obiektu (zależny od stanu j, w którym znajduje się obiekt w chwili podjęcia decyzji o naprawie).

Zatem, zależnie od stanu obiektu w chwili Nt_o będą równe

$$\Psi(Nt_o)=\begin{cases}(N-1)B+A & jeśeśl\ (Nt_o)\geq e_a\\ B+C(j) & jeśeśl\ (Nt_o)=j, e_k\leq j\leq e_a\end{cases}$$

Wykonując proste przekształcenia wzorów otrzymamy ostatecznie:

$$V(e_k,t_o)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{e_k-1}[B\sum_{j=e_k}nP_{ij}(t_o)P_{1i}((n-1)t_o)+(A-B)\sum_{j=e_a}^{k}P_{ij}(t_o)P_{1i}((n-1)t_o)+$$
$$\sum_{j=e_k}^{e_a-1}C(j)P_{ij}(t_o)P_{1i}((n-1)t_o)]/t_o\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{e_k-1}\sum_{j=e_k}^{k}nP_{ij}(t_o)P_{1i}((n-1)t_o) \tag{4.5}$$

W ten sposób wybór optymalnej strategii kontroli i napraw rozpatrywanego obiektu wielostanowego został sprowadzony do zadania programowania matematycznego znalezienia minimum funkcji $v(e_k,t_o)$, określonej wzorem (4.5), przy ograniczeniu (4.3).