

40/2001

Raport Badawczy

RB/42/2001

Research Report

**Modification of bisection
method for finding roots
of any continuous function**

M. Piasecki

**Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk**

**Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences**



POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Pracę zgłosił: prof. dr hab. Olgierd Hryniewicz.....

Warszawa 2001

Modification of bisection methods for finding roots of any continuous function.

by
Marek Piasecki

Streszczenie.

W pracy skupiamy uwagę na sytuacji jak znaleźć pierwiastek dla funkcji ciągłej f na przedziale $[a, b]$ zadaną dokładnością. O funkcji f będziemy zakładali najczęściej, że jej wykres ma skończoną długość. Na przykład prawie każda trajektoria ruchu Browna jest ciągła na przedziale ale ma nieskończoną długość na tym przedziale. Dla funkcji, których wykres ma nieskończoną długość przedstawiana metoda może nie znaleźć w skończonym czasie wszystkich pierwiastków. Innym przykładem funkcji, która jest ciągła na przedziale ale nie jest różniczkowalna w żadnym punkcie tego przedziału może być jednostajna granica ciągu łamanych. (Czy ona ma nieskończoną długość) Na przykład znaleźć wszystkie pierwiastki ruchu Browna. Ruch Browna to proces Gaussowski o przyrostach niezależnych (jest też martyngalem), dla którego funkcja kowariancji $c(t, s) = t \wedge s$ i wartość oczekiwana jest zero. Istnienie takiego procesu gwarantuje twierdzenie Kołmogorowa. Jak podać wzór (model) na funkcję $Z(t, \omega)$ aby była ruchem Browna?

Jak działa na przykład metoda Newtona szukania pierwiastków dla funkcji kawałkami liniowej np. dla funkcji "zębatej". Metoda Newtona jeśli wystartuje z punktu, który nie jest pierwiastkiem ale nie jest też punktem maksymalnym, to w następnej iteracji już jest w punkcie bez pochodnej (zbiór punktów, w których nie ma pochodnej jest skończony, zatem miary zero). Jak działa metoda, gdy w punkcie nie ma pochodnej? Powinna sprawdzić, $f(x_i)$ i jeśli nie jest zero, to zbadać pochodne kierunkowe.

Wprowadzenie.

Szukamy na przedziale $[a, b]$ wszystkich pierwiastków funkcji ciągłej f określonej na zbiorze zawierającym ten przedział. Przez $d(x)$ będziemy oznaczali długość wykresu funkcji na przedziale $[a, x]$. Jeśli f ma pochodną f' poza zbiorem miary Lebesgue'a zero, to $d(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$. Podstawowa koncepcja metody jest następująca. Dzielimy przedział $[a, b]$ na przedziały równej długości ε , gdzie $\varepsilon \in (0, b - a)$ jest ustaloną dokładnością. Ostatni przedział może być krótszy.

Zakładamy, że mamy możliwość policzenia wartości funkcji f w dowolnym punkcie x_i (lub tylko w punktach podziału dwójkowego) (nie znaczy to, że

mamy np. wzór tej funkcji) oraz mamy możliwość policzenia wartości $d(x_i)$. (z zadawalającą dokładnością).

Sprawdzamy wartości funkcji f we wszystkich punktach $x_i = a + i\epsilon$ dla $i = 0, \dots$ (ostatni punkt podziału to b). Jeśli znajdujemy dwa punkty takie, że $f(x_i)f(x_{i+1}) < 0$, to na pewno w przedziale (x_i, x_{i+1}) mamy pierwiastek. (Możemy najpierw sprawdzić dla $x_i = a, x_{i+1} = b$). Oczywiście, jeśli $f(x_i)f(x_{i+1}) = 0$, to mamy pierwiastek w $\{x_i, x_{i+1}\}$. Natomiast, jeśli $f(x_i)f(x_{i+1}) > 0$, to sprawdzamy czy $d(x_{i+1}) - d(x_i) < \sqrt{\left[\frac{x_{i+1}-x_i f(x_i)}{f(x_i)+f(x_{i+1})}\right]^2 + [f(x_i)]^2} + \sqrt{\left[\frac{x_{i+1}-x_i f(x_{i+1})}{f(x_i)+f(x_{i+1})}\right]^2 + [f(x_{i+1})]^2}$. Jeśli tak, to twierdzimy, że na pewno w przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ nie ma pierwiastka. W przeciwnym przypadku w przedziale (x_i, x_{i+1}) może być pierwiastek (może nawet kilka). Wtedy dokonujemy podziału tego przedziału na dwie równe części i stosujemy te same zasady do przedziałów $[x_i, \frac{x_i+x_{i+1}}{2}]$ oraz $[\frac{x_i+x_{i+1}}{2}, x_{i+1}]$. Po pierwszym kroku mamy znalezione przedziały o długości równej ϵ (ostatni może krótszy) w których na pewno są pierwiastki i takie w których na pewno nie ma pierwiastków. Pozostałe przedziały mogą mieć pierwiastki lub nie. Do tych przedziałów można znowu zastosować opisaną metodę. Jeśli jest tylko skończenie wiele pierwiastków w przedziale $[a, b]$, to procedura odseparuje wszystkie pierwiastki.

Uwaga. Sprawdzanie wartości w punktach x_i można zacząć od najbardziej skrajnych punktów.

Po rozbiciu punktów podziału (na przykład na $+++$, $---$, $++$, $--$, $++$) na grupy punktów dodatnich i ujemnych liczymy długości wykresów dla skrajnych punktów w grupach. To znaczy wiemy, że w trzecim, piątym, ósmym i dziewiątym przedziale są pierwiastki. Sprawdzamy długość wykresu dla przedziałów pierwszego i drugiego. Jeśli łączna długość jest za krótka, to w tych przedziałach nie ma pierwiastków. Jeśli jest odpowiednio długa, to liczymy długość dla pierwszego przedziału (dla drugiego też mamy jako różnicę).

Główne wyniki.

Lemat. Funkcja $f_e(x) = \begin{cases} A \frac{e-x}{e-a}, & \text{dla } x \in [a, e] \\ B \frac{e-x}{e-b}, & \text{dla } x \in (e, b] \end{cases}$, gdzie $e = a + \frac{(b-a)|A|}{|A|+|B|}$, $A, B \in R$, ma wykres o najmniejszej długości wśród wszystkich funkcji ciągłych f takich, że $f(a) = A, f(b) = B$ oraz $f(x_0) = 0$ dla pewnego $x_0 \in (a, b)$. Długość wykresu tej funkcji jest równa $d = \sqrt{\left[\frac{(b-a)|A|}{|A|+|B|}\right]^2 + A^2} + \sqrt{\left[\frac{(b-a)|B|}{|A|+|B|}\right]^2 + B^2} \geq \sqrt{A^2 + (b-a)^2}$

Dowód. Oczywisty z elementarnej geometrii na płaszczyźnie. Odbijając

symetrycznie punkt $(b, f(b))$ względem osi odciętych i łącząc ten punkt z punktem $(a, f(a))$ otrzymujemy na odcinku $[a, b] \times \{0\}$ punkt $E = (e, 0)$, który realizuje minimum sumy odległości punktów $(a, f(a))$ oraz $(b, f(b))$ od dowolnego punktu $F \in [a, b] \times \{0\}$. Funkcja f_e ma wykres składający się z odcinków $(a, f(a))E$ oraz $E(b, f(b))$. Pozostałe własności są oczywiste z przedstawionej interpretacji geometrycznej. Patrz rysunek. Oczywiście funkcja f_e ma pierwiastek w e . Oczywiście dowolna funkcja ciągła mająca pierwiastek w przedziale (a, b) taka, że $f(a) = A, f(b) = B$ ma wykres o większej długości niż f_e .

Właściwości metody.

1. Jeśli w przedziale jest pierwiastek, to metoda go zawsze będzie twierdziła, że w tym przedziale może być pierwiastek.

2. Jeśli funkcja na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ jest liniowa, to metoda stwierdzi, że albo w tym przedziale jest pierwiastek lub na pewno go nie ma. (ponieważ bok trapezu jest krótszy od przekątnej)

3. Jeśli funkcja na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ jest kawałkami liniowa, to metoda stwierdzi, że albo w tym przedziale jest pierwiastek lub na pewno go nie ma. (ponieważ łamana obejmująca inną łamaną i mająca ten sam początek i koniec jest dłuższa) Rysunek. funkcja kawałkami liniowa.

4. Jeśli funkcja jest kawałkami wypukła i kawałkami wklęsła, to tak samo jak w punktach poprzednich.

5. Jeśli w przedziale długość nie jest za krótka, to dzieląc na połowy przedziału dojdziemy w skończonej liczbie kroków do wyłapania wszystkich przedziałów w których długość jest za krótka. Jedyne w tych przedziałach w których są pierwiastki zawsze długość nie jest za krótka. Zatem jeśli w przedziale jest pierwiastek to możemy go znaleźć z dowolną dokładnością.

Uwaga: Jeśli długość wykresu w przedziale $[a, b]$ jest d i podzieliliśmy przedział na k przedziałów, to w którymś przedziale jest długość nieostro mniejsza niż $\frac{d}{k}$ i w którymś jest nieostro większa niż $\frac{d}{k}$. Natomiast w każdym przedziale jest nie większa niż $d - \frac{k-1}{k}(b-a)$. Każde posiadanie pierwiastka w przedziale wymaga aby długość w tym przedziale była co najmniej $\sqrt{\left[\frac{(x_{i+1}-x_i)f(x_i)}{f(x_i)+f(x_{i+1})}\right]^2 + [f(x_i)]^2} + \sqrt{\left[\frac{(x_{i+1}-x_i)f(x_{i+1})}{f(x_i)+f(x_{i+1})}\right]^2 + [f(x_{i+1})]^2}$. Jeśli w przedziale (a, b) jest k różnych pierwiastków $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_k$, to długość wykresu w tym przedziale jest co najmniej równa

$(\xi_k - \xi_1) + \sqrt{[\xi_1 - a]^2 + [f(a)]^2} + \sqrt{[b - \xi_k]^2 + [f(b)]^2}$. Ta wartość będzie najmniejsza, gdy pierwiastki skupią się wokół punktu E . Jeśli jeden pierwiastek został zlokalizowany, to

Przykłady i zastosowania. Szukanie pierwszego (lub ostatniego) pierwiastka.

Najpierw znajdujemy pierwszy i ostatni pierwiastek i wtedy szukamy pomiędzy tymi pierwiastkami następnymi pierwiastków metodą opisaną powyżej. Ustalamy punkt x_i i przeszukujemy na prawo i na lewo od tego punktu.

Metoda szukania pierwiastków dla funkcji o nieskończonej długości. (to znaczy rozpatrujemy teraz przypadek, gdy w jakimś małym przedziale może być pierwiastek ale długość wykresu jest nieskończona (lub bardzo duża) w tym przedziale)

Ustalamy dokładność $\varepsilon > 0$. startujemy z punktu a . Niech x_i będzie punktem w którym aktualnie jest algorytm.

Założmy, że potrafimy znaleźć punkt x_{i+1} spełniający warunek $d(x_{i+1}) - d(x_i) = |f(x_i)| + \varepsilon$. (Musimy znaleźć x_{i+1}). Niech M oznacza maksimum funkcji ciągłej f na przedziale $[a, b]$.

Z lematu mamy, że

$$\sqrt{\left[\frac{(x_{i+1}-x_i)f(x_i)}{f(x_i)+f(x_{i+1})}\right]^2 + [f(x_i)]^2} + \sqrt{\left[\frac{(x_{i+1}-x_i)f(x_{i+1})}{f(x_i)+f(x_{i+1})}\right]^2 + [f(x_{i+1})]^2} \geq \max(\sqrt{[f(x_i)]^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}, |f(x_{i+1})|).$$

Sprawdzamy warunek $\sqrt{\left[\frac{(x_{i+1}-x_i)f(x_i)}{f(x_i)+f(x_{i+1})}\right]^2 + [f(x_i)]^2} + \sqrt{\left[\frac{(x_{i+1}-x_i)f(x_{i+1})}{f(x_i)+f(x_{i+1})}\right]^2 + [f(x_{i+1})]^2} > |f(x_i)| + \varepsilon$. Jeśli jest spełniony, to w przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ nie ma pierwiastków. Warunek będzie spełniony na pewno, kiedy $(x_{i+1} - x_i) > \sqrt{\varepsilon(\varepsilon + 2f(x_i))}$, gdyż wtedy $(x_{i+1} - x_i)^2 > \varepsilon(\varepsilon + 2|f(x_i)|)$.

Czyli $\sqrt{[f(x_i)]^2 + (x_{i+1} - x_i)^2} > \sqrt{[f(x_i)]^2 + \varepsilon(\varepsilon + 2|f(x_i)|)} = |f(x_i)| + \varepsilon$. Ponadto warunek będzie spełniony, gdy $|f(x_{i+1})| \geq \varepsilon$. Zatem jeśli nie jesteśmy pewni czy w przedziale jest pierwiastek, to punkt $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ należy do prostokąta $[x_i, x_i + \sqrt{\varepsilon(\varepsilon + 2f(x_i))}] \times [0, \varepsilon] \subset [x_i, x_i + \sqrt{\varepsilon(\varepsilon + 2M)}] \times [0, \varepsilon]$. ($\varepsilon < \sqrt{\varepsilon(\varepsilon + 2M)} \rightarrow 0$ gdy ε dąży do zera. Zatem jeśli wartość $|f(x_i)| + \varepsilon$ jest duża i nie jest spełniony warunek, to szybko poruszamy się po wykresie. Natomiast jeśli warunek nie jest spełniony a wartość $|f(x_i)| + \varepsilon$ jest mała, to przesuwamy się co najmniej o ε w pierwszym kroku. Jeśli wartość rośnie to coraz szybciej przesuwamy się po wykresie. Jeśli maleje to kroczy my z krokiem co najmniej ε w stronę osi poziomej. Zatem mamy punkt, który ma wartość bliską zeru. Jeśli w przedziale nie ma pierwiastka to w końcu się stamtąd wydosłaniemy. Jeśli nie możemy się wydostać, to znaczy, że długość krzywej do pierwszego pierwiastka jest nieskończona. Jeśli długość do pierwszego pierwiastka jest skończona, to będziemy zbliżali się szybko do

tego pierwiastka.

Jak działa opisana metoda dla funkcji kawałkami liniowych lub wklęsło wypukłych kawałkami, mających k pierwiastków w przedziale $[a, b]$.

Uwagi. Jeśli mamy podaną pochodną $f'(x)$ poza być może zbiorem miary zero, to $d(x_{i+1}) - d(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.

Przykład. Niech X_1, \dots, X_n będzie próbą prostą z rozkładu Cauchy'ego $C(\theta), \theta \in R$. Wtedy

$f(\theta, x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\pi^n} \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{1+(x_i-\theta)^2} \right)$, Szukamy maksimum po θ przy usta-

lonych wartościach x_i . Mamy $\ln f(\theta, x_1, \dots, x_n) = -n \ln \pi + \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{1}{1+(x_i-\theta)^2} \right)$,

Niech $g_i(\theta) = -\ln \left(\frac{1}{1+(x_i-\theta)^2} \right) = \ln(1 + (x_i - \theta)^2)$. Wtedy $g_i'(\theta) = \frac{-2(x_i - \theta)}{1+(x_i - \theta)^2}$.

Zatem funkcje g_i mają jedno minimum w punkcie x_i i są ściśle monotoniczne po obu stronach x_i . Szukamy minimum funkcji $g(\theta) = \sum_{i=1}^n g_i(\theta)$. Minimum istnieje ponieważ poza przedziałem $[x_{1:n}, x_{n:n}]$ funkcja g przyjmuje większe wartości (tam mamy sumy funkcji malejących i rosnących) i jest ciągła.

Wykres wewnątrz przedziału. Wszystkie funkcje g_i są przesunięciami funkcji $g_0(\theta) = \ln(1 + \theta^2)$.

Marek Piasecki
Institute of Applied Mathematics
Warsaw University
Banacha 2
02-097 Warszawa, Poland
E-mail:mpia@mimuw.edu.pl

and

System Research Institute, Polish Academy of Sciences,
ul.Newelska 6,01-447 Warsaw, Poland



