Raport Badawczy

Research Report

RB/28/2001

Problemy zarządzania ryzykiem

Roman Kulikowski

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772

Pracę zgłosił: Roman Kulikowski

Warszawa 2001

PROBLEMY ZARZĄDZANIA RYZYKIEM

Roman Kulikowski

Instytut Badań Systemowzch PAN
Warszawa, ul. Newelska 6

The risk management problems are formulated using the concept of two-factors utility function, introduced in Ref. [3,4]. Using that concept in the present paper one is concerned with the decisions support related to capital allocation in the two general risky spheres (portfolios) of activity: profits (investment, innovations) and expenses (risk prevention, insurance etc). The utilities, appropriate for these spheres, can be derived using simple (two-scenarios) forecasting model.
Then the optimum decisions, concerned with capital allocation among the projects in each portfolio can be explicity derived.

1. Wstęp

Ryzyko może być zdefiniowane jako obawa przed zagrożeniem jakie może nastąpić w rezultacie przedsięwzięcia o niepewnym skutku, którym może być zarówno sukces (o prawdopodobieństwie p) jak i porażka (o prawdopodobieństwie $1-p$).

Typowym przykładem ryzykownego przedsięwzięcia jest dwuwynikowa gra, oznaczona symbolem (x, p, y), gdzie wynik x (sukces) jest osiągany z prawdopodobieństwem p, zaś wynik y (porażka) następuje z prawdopodobieństwem $1-p$. Stosując aksjomatyczne podejście do gier, zainicjowane słynną pracą Von Neumann'a i Morgensterna (1947) można oceniać grę stosując uogólnioną zasadę wartości oczekiwanej

$$u(x, p, y) = pu(x) + (1-p)u(y)$$

gdzie u jest zwana funkcją użyteczności.

Jeśli aksjomaty, które można traktować jako maksymy racjonalnego zachowania, są spełnione to istnieje funkcja u zaś $x \succeq y$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$u(x) \geq u(y)$. Funkcja u jest również tzw. „skalą interwałową (interval scale) co pozwala operować każdą inną funkcją użyteczności typu $v(x) = au(x) + b$ $(a > 0)$ gdzie a i b są danymi liczbami rzeczywistymi.

Ponieważ dla niektórych statystyków [Allais (1954)] aksjomatyka, opierająca się na obiektywnym prawdopodobieństwie p, była nieprzekonywującą Savage (1954) uogólnił teorię Von Neumanna wprowadzając pojęcie prawdopodobieństwa subiektywnego $s(p)$, które zależy od indywidualnej oceny prawdopodobieństwa wyników i zdarzeń.

Duże znaczenie w przezwyciężeniu powstałych kontrowersji miały badania prowadzone przez psychologów, w których starano się przetestować realnych decydentów w specjalnie zaprojektowanych grach hazardowych w celu identyfikacji ich funkcji użyteczności. Szczególne znaczenie miały tu prace Tverskiego (Ref. [9,2]), który przyjął funkcję użyteczności w postaci $s(p)x^{\beta}$; $(u(y) = u(0) = 0)$ dla zbioru gier w których można wygrać x z prawdopodobieństwem p oraz $y = 0$ w przeciwnym przypadku.

Badania Tverskiego wykazały, że użyteczność monetarna może być opisana funkcją potęgową x^{β} z różnymi wykładnikami β dla dodatnich i ujemnych wygranych x. Testy te potwierdzają wyrażane od 18 wieku podglądy, że funkcję użyteczności można przedstawić jako $\sqrt{x}$ dla dodatnich x, oraz $-(x)^2$ dla x ujemnych.

Mimo, że badania Tverskiego pozwoliły zidentyfikować wartości $s(p)$ i β przy ustalonym p, jawna postać funkcji $s(p)$ była nieznana.

W oparciu o koncepcję dwuczynnikowej funkcji użyteczności opisaną w pracach R. Kulikowskiego (3-7) można obecnie skonstruować formalny model $s(p)$. W ten sposób koncepcja oparta na dwuczynnikowej użyteczności jest w pewnym sensie kontynuacją nurtu aksjomatycznego (Von Neumanna – Savagea) zweryfikowanego eksperymentalnie przez Tverskiego. Stosując powyższą koncepcję udaje się wspomagać ryzykowne decyzje występujące zwłaszcza przy alokacji kapitału w następujących sferach działalnosci:

- dochodowej (problemy inwestycji innowacji itp.)
- kosztownej (wydatki z budżetu, ubezpieczenia, prewencje itp.)
- dochodowo-kosztowej (transakcje na rynku papierów wartościowych)

2. Dwuczynnikowa funkcja użyteczności

Podstawowym pojęciem w analizie finansowej inwestycji jest stopa zwrotu na zainwestowanym kapitale P:

$$\widetilde{R} = \frac{\widetilde{P}_1 - P}{P}, \tag{1}$$

Gdzie $\widetilde{P}_1$ jest to dochód w końcu okresu planistycznego. Wartość $P\widetilde{R}$, którą oznaczymy przez $\widetilde{Z}$ jest zyskiem który otrzymuje inwestor.

Ponieważ $\widetilde{R}$, a także $\widetilde{Z} = P\widetilde{R}$, są to zmienne losowe jako że dotyczą przyszłej wartości dochodu, charakteryzują się one określoną funkcją gęstości prawdopodobieństwa. Funkcja ta też jest, generalnie biorąc, nieznana a priori, chociaż w praktyce finansowej przyjmuje się często iż f.g.p. stopy zwrotu można aproksymować rozkładem normalnym z daną wartością oczekiwaną $R = E\{\widetilde{R}\}$ oraz odchyleniem standardowym $\sigma = \{E[\widetilde{R} - R]^2\}^{1/2}$.

Odchylenie standardowe, będące miarą ryzyka, wykorzystuje się w praktyce bankowej do obliczania wartości monetarnej ryzyka w oparciu o tzw. „wartość przy ryzyku" (value at risk):

$$VaR = P\kappa\sigma, \tag{2}$$

gdzie κ jest kwantylem funkcji rozkładu (normalnego) prawdopodobieństwa. Kwantyl ten jest związany z prawdopodobieństwem $\overline{p}$ wystąpnienia tzw. „najgorszego przypadku" (gdy zwrot $\widetilde{R} \leq R - \kappa\sigma$), tj.

$$\overline{p} = \Pr\{\widetilde{R} \leq R - \kappa\sigma\}. \tag{5}$$

Przy danym $\overline{p}$ wartość kwantyla $\kappa(\overline{p})$ można określić posługując się tablicami rozkladu normalnego.

Przystępując do sformułowania funkcji użyteczności w obszarze analizy finansowej wypada zauważyć iż inwestor (decydent) jest zainteresowany przede wszystkim dwoma głównymi czynnikami:

1. oczekiwaną wartością zwrotu monetarnego

   $Z = PR$,

2. bezpieczeństwem swojej inwestycji (Y), które można wyrazić jako „wartość bezpieczną", (oznaczaną VaS) będącą wartością

komplementarną do VaR, czyli

$$Y = Z - VaR = Z - P\kappa\sigma . \tag{6}$$

Wprowadzając pojęcie indeksu bezpieczeństwa:

$$S \stackrel{\Delta}{=} 1 - \frac{\kappa\sigma}{R} \tag{7}$$

można wyrazić wartość bezpieczną jako

$$Y = VaS = PRS . \tag{8}$$

Dwuczynnikowa funkcja użyteczności $U = F[Z;Y]$ winna być rosnącą funkcją obu argumentów. Ponieważ zarówno Z jak i Y są wyrażone w jednostkach monetarnych zaś zmiana jednostek (np. 1 zł na 100 gr) nie powinna wpływać na zmianę U, konieczne jest tu założenie inwariantności U na zmianę skali (λ) zmiennych Z,Y. Inaczej mówiąc

funkcja F winna być typu „constant return to scale", czyli funkcją homogeniczną, tj.

$$F(\lambda Z, \lambda Y) = \lambda F(Z,Y) .$$

Typową prostą funkcją o wymaganych własnościach jest tzw. funkcja Cob-Douglasa: $F(Z,Y) = Z^{\beta} Y^{1-\beta}$, gdzie $\beta \in [0,1]$; zaś $U = PRS^{1-\beta}$.

Drugim ważnym założeniem jest inwariantność U ze względu na podział jednostek inwestycyjnych. Przykładem może tu być tzw. „split" akcji, które początkowo były sprzedawane w cenie P za sztukę a w wyniku podziału są oferowane po $P/2$ zł/sztukę przy czym ich liczba zostaje zwiększona dwukrotnie.

Gdyby funkcja użyteczności byla przyjęta w postaci

$$F[PRN, PRS] = PRN^{\beta} S^{1-\beta}$$

byłaby ona narażona na zmiany wynikłe z podziału. Aby uniknąć tego mankamentu, w zagadnieniach gdzie jest sprawą istotną uwidocznienie wpływu rozmiaru inwestycji na użyteczność, można operować (zamiast zmiennej N) udziałem nakładu (NP) na daną akcję do wartości portfela inwestycyjnego $\overline{P}$, tj. zmienną $x = NP/\overline{P}$. Wtedy funkcja użyteczności może być zapisana w postaci

$$U = F[PRX, PRS] = PRS^{1-\beta} x^{\beta}$$

Warto zauważyć, że dla wyceny użyteczności projektu inwestycyjnego (lub akcji) konieczna jest znajomość tylko dwóch parametrów (R,σ) funkcji gęstości prawdopodobieństwa oraz subiektywnych parametrów κ, β. Jeśli mamy do czynienia z akcjami parametry R, σ estymuje się zwykle ex post z danych historycznych.

W wielu sytuacjach, np. gdy mamy do czynienia z firmami które pojawiły się niedawno na giełdzie, lub – z projektami innowacyjnymi (które nie mają jeszcze historii) wielkości R i σ nie mogą być uzyskane z danych statystycznych. W takich sytuacjach R i σ mogą być określone w oparciu o prosty, dwuscenariuszowy model predykcyjny, w którym zmienna losowa $\widetilde{R}$ osiąga stan (sukces) $R_u > 0$ z prawdopodobieństwem p oraz stan (porażki) $R_d = 0$, z prawdopodobieństwem $1 - p$.

W powyższym modelu wartość oczekiwana

$$R = pR_u + (1-p)R_d = pR_u \tag{10}$$

zaś

$$\sigma^2 = p[R_u - R]^2 + (1-p)[R_d - R]^2 = p(1-p)R_u^2 \tag{11}$$

Zwrot „najlepszego przypadku" Y może tu być określony analogicznie do (6), gdzie κ jest parametrem wyrażającym „cenę strachu" przed bankructwem jakie niosą za sobą niskie przychody Y z rozważanej inwestycji.

W rozważanym przypadku

$$S = 1 - \kappa\frac{\sigma}{R} = 1 - \kappa\frac{\sqrt{p(1-p)}}{pR_u}R_u = 1 - \kappa\sqrt{\frac{1-p}{p}} \tag{12}$$

zaś użyteczność

$$U(p) = PR[S(p)]^{1-\beta}X^{\beta} \tag{13}$$

maleje wraz z obniżaniem się prawdopodobieństwa sukcesu p.

Można przyjąć, że inwestycja przestaje się opłacać gdy $U(p)$ dla $p = \overline{p}$ obniży się do poziomu jaki gwarantują inwestycje bez ryzyka (takie jak obligacje Skarbu Państwa), które posiadają oczekiwaną stopę zwrotu R_F i $S = 1$; użyteczność

$$U_F = PR_F x^{\beta} \tag{14}$$

Z warunku $U(\overline{p})$ mamy

$$PR\{[S(\overline{p})]^{1-\beta} - R_F / R\} = 0.$$

Oznaczając $S(\bar{p}) \stackrel{\Delta}{=} S_0$ oraz uwzględniając (12) znajdujemy

$$\kappa = (1 - S_0)\sqrt{\bar{q}} \tag{15}$$

gdzie

$$S_0 = [R_P / R]^{\frac{1}{1-\beta}}; \qquad \bar{q} = \frac{\bar{p}}{1-\bar{p}}.$$

Uwzględniając (15) można wyrazić index bezpieczeństwa (12) w postaci

$$S(p) = 1 - (1 - S_0)\sqrt{\bar{q} / q}, \tag{16}$$

gdzie

$$q = \frac{p}{1-p} \geq \bar{q}.$$

Jak wynika z (13), (16) inwestor dla wyznaczenia użyteczności projektu inwestycyjnego winien określić zarówno prawdopodobieństwo sukcesu p jak i graniczne tj. minimalne dopuszczalne prawdopodobieństwo sukcesu $\bar{p}$, a także zwrot R_u odpowiadający sukcesowi oraz wielkość nakładów P.

Oznaczając

$$s(p) \stackrel{\Delta}{=} p[1 - (1 - S_0)\sqrt{\bar{q} / q}]^{1-\beta} \tag{17}$$

$$u(x) \stackrel{\Delta}{=} P R_u x^{\beta} \tag{18}$$

można wyrazić użyteczność w formie

$$s(p) \stackrel{\Delta}{=} p[1 - (1 - S_0)\sqrt{\bar{q} / q}]^{1-\beta}; \tag{19}$$

którą postulują prace Von Neumanna - Savage – Tverskiego.

Prawdopodobieństwo subiektywne $s(p)$ jest tu, ze względu na $S \leq 1$, nie większe od p. Na ten fakt wskazywały również badania eksperymentalne prowadzone przez Tverskiego [9].

W celu identyfikacji parametru β inwestor może posłużyć się użytecznością bezryzykowną (14), którą dla małych przyrostów ΔP i Δx można zapisać jako

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta P}{P} + \beta \frac{\Delta x}{x}.$$

Przyjmując, że inwestor zgadza się na kupno zwiększonego o Δx pakietu obligacji przy upuście ceny jednostkowej o ΔP możemy napisać $\Delta U / U = 0$, co prowadzi do wyznaczenia wartości numerycznej β ze wzoru

$$\beta = -\frac{\Delta P}{P} : \frac{\Delta x}{x} \tag{20}$$

Jeżeli dla przykładu inwestor zgodzi się kupić o 20% więcej obligacji przy upuście ceny o 10% oznacza to, iż jego $\beta = 0.5$.

Znając parametry κ oraz β łatwo jest skonstruować funkcję użyteczności inwestora.

Przykład liczbowy:

Rolnik ocenia prawdopodobieństwo sukcesu w swoich uprawach na $p = 0.8$ (tj. w skali dziesięcioletniej na 8 lat pomyślnych przypadają średnio 2 lata nieurodzaju wskutek powodzi, suszy, spadku cen itp.). Rolnik uważa, że przy $p = \overline{p} = 0.6$ jego gospodarstwo stanęło by na skraju bankructwa.

Przyjmując $\beta = 0.5$; $R_F = 0.1$; $R_u = 0.417$, rolnik znajduje $R_F / pR_u = 0.3$

$$S_0 = 0.3^2 = 0.09,$$

$$\kappa = (1 - 0.09)\sqrt{\frac{0.6}{0.4}} = 1{,}11,$$

$$S = 1 - 1{,}11\sqrt{\frac{0.2}{0.8}} = 0.44,$$

$$s = 0.8\sqrt{0{,}44} = 0.53,$$

$$U = 0.22\, P\sqrt{x}.$$

3. Podział nakładów w sferze dochodowej

Załóżmy, że inwestor rozpatruje celowość zainwestowania swoich kapitałów w N niezależnych projektów, które charakteryzują się oczekiwanymi zwrotami $Z_i = P_i R_i$, oraz $S_i \in [S_0, 1]$, $i = 1, \dots, N$.

Pierwszy problem przed którym staje inwestor to wybór najlepszych projektów ze zbioru N, czyli problem akceptacji. Można przyjąć iż projekt, którego użyteczność U_i nie dorównuje użyteczności projektu bez ryzyka U_F nie nadaje się do portfela inwestycyjnego.

Przyjmując jako kryterium akceptacji $U_i \geq U_F$, $\forall i$ mamy

$$P_i \geq \frac{P_F R_F}{P_i S_i^{1-\beta}}, \quad i = 1,\dots,n \leq N \tag{21}$$

Przyjmując, że n niezależnych projektów zostało zaakceptowanych do udziału w portfelu należy z kolei określić optymalne udziały (x_i) nakładów w portfelu tak by $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1$. Problem ten sprowadza się do maksymalizacji wypadkowej użyteczności. Ponieważ koncepcja użyteczności opiera się na tzw. skali interwałowej (interval scale) zgodnie z którą poszczególne oceniane elementy U_i są wyrażone w tych samych jednostkach monetarnych (podobnie jak efekt wypadkowy U), można przyjąć iż

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} U_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} P_i R_i S_i^{1-\beta} x_i^{\beta} \tag{22}$$

Oznaczając $P_i R_i S_i^{1-\beta}$ przez a_i, zaś x_i^{β} przez y_i oraz stosując nierówność Höldera przy $\beta = 1/q$ otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_i \leq \| a \|_p \| y \|_q, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1, \quad p = \frac{1}{1-\beta} \tag{23}$$

gdzie

$$\| a \|_p = \left\{ \sum_{i}^{n} a_i^p \right\}^{1/p}; \quad \| y \|_q = \left\{ \sum_{i}^{n} y_i^q \right\}^{1/q} = \left\{ \sum_{i}^{n} x_i \right\}^{\beta} = 1 .$$

Znak równości w (23) następuje gdy $y_i^q = const\ a_i^p$, $\forall i$ czyli gdy $x_i = \hat{x}_i$, gdzie

$$\hat{x}_i = \frac{a_i^p}{\sum_j a_j^p}; \quad a_i^p = [P_i R_i]^{\frac{1}{1-\beta}} S_i, \quad \forall i \tag{24}$$

Wysokość nakładów na poszczególne projekty (np. akcje w liczbie $\hat{N}_i$ o cenach P_i) znajdujemy z zależności $\hat{N}_i P_i = \hat{x}_i \overline{P}$, $\forall i$, gdzie $\overline{P}$ - dane nakłady całkowite.

Warto tu zauważyć, iż dla optymalizacji podziału nakładów decydent posługuje się metryką przestrzeni l^p (Minkowskiego) w której pojawiają się

„stymulanty" a_i^p. Decyzja traktowana jako reakcja decydenta na stymulant jest proporcjonalna (zgodnie z 24) do intensywności stymulanta (tj. wartości liczbowej $[P_i R_i]^{\frac{1}{1-\beta}} S_i$). Na fakt wykorzystywania metryki Minkowskiego przez człowieka zwracają również uwagę psycholodzy [2]. Wyjaśnia się tu też rola parametru β. Jeśli np. β dąży do jedności $S^{1-\beta} \to 1$, zaś strach przed zagrożeniem (ryzykiem) jest tu wytłumiony. Parametr β ingeruje również przy akceptacji we wzorze (21). Jeśli np. $\beta \to 0$ wpływ zagrożenia na akceptację jest największy. Rola dużego β w podziale nakładów manifestuje się zwiększeniem wagi (preferowania) projektów efektywnych. Na odwrót, gdy β maleje podział nakładów ma charakter egalitarny.

4. Podział nakładów w sferze kosztowej

W sferze dochodowej korzystaliśmy z koncepcji funkcji użyteczności w której zysk oczekiwany (Z) oraz zysk najgorszego przypadku $(Y = Z - VaR)$ były dodatnie zaś parametr $\beta \in [0,1]$.

W sferze kosztowej mamy do czynienia z ujemnymi zyskami czyli wydatkami w ramach ustalonego budżetu $\overline{C}$. Wydatki te można traktować jako koszt działań prewencyjnych, zmniejszających skutki zagrożeń. Dla przykładu wydatki na służbę zdrowia zmniejszają zachorowalność, tj. straty w gospodarce wywołane absencją chorobową. Wydatki na edukację zmniejszają bezrobocie, wydatki na wojsko, policję i służby porządkowe zwiększają bezpieczeństwo czyli zmniejszają zagrożenie utraty majątku, życia itp. Do tej samej kategorii wydatków należą ubezpieczenia, które zmniejszają zagrożenia i straty wynikłe z kradzieży, pożaru itp.

Rozpatrując koszt wywołany zagrożeniem możemy zastosować model dwuscenariuszowy zgodnie z którym

a) W przypadku sukcesu koszt ten (z prawdopodobieństwem p) jest równy $C_d = 0$,

b) W przypadku porażki (z prawdopodobieństwem $1-p$) koszt jest równy $C_u > 0$.

Oczekiwana wartość kosztu $C = (1-p)C_u$ oraz odchylenie standardowe $\sigma = \sqrt{p(1-p)}C_u$.

W rozważanym przypadku koszt najgorszego przypadku C_y jest o $\kappa_c \sigma$

większy od wartości oczekiwanej, tj.

$$C_y = C + \kappa_c \sigma = CS_c ,$$

gdzie

$$S_c = 1 + \kappa_c \sqrt{\frac{p}{1-p}} , \tag{25}$$

jest indeksem (niebezpieczeństwa) w sferze kosztowej.

W przypadku rozważanym należy też wprowadzić adekwatną, dla sytuacji, kosztową funkcję użyteczności, którą dla odróżnienia od $U(x)$ oznaczymy symbolem $DU(x)$ (disutility). W przypadku $U(x)$ problemy optymalizacyjne wymagały by $U(x)$ była funkcją wklęsłą $(\beta \in [0,1])$. W przypadku $DU(x)$ mamy do czynienia z minimalizacją strat więc $DU(x)$ musi być wypukłą $(\beta \geq 1)$.

Wynika stąd, że $DU(x)$ winna przyjąć postać następującą

$$DU(x) = F[C_x, C_y] = s(p)u(x) \tag{26}$$

gdzie

$$s(p) = (1-p)S_c^{\beta} \qquad \beta \geq 1 ,$$

$$u(x) = C_u \, x^{\beta}$$

Pozostaje jeszcze do wyjaśnienia sprawa wyboru κ_c. Można przyjąć, iż równowaga budżetowa wymaga by wydatki w najgorszym przypadku, tj. $C_y + C_k$ (gdzie C_k inne konieczne wydatki konsumpcyjne) nie przekraczały dochodów (D) inwestora, czyli $(1-p)C_u S_c(p) + C_k \leq D$. Skąd dla granicznej wartości $p = \overline{p}$ znajdujemy

$$\kappa_c = (S_m - 1)\sqrt{\overline{q}} , \tag{27}$$

gdzie

$$S_m = \frac{D - C_k}{(1-\overline{p})C_u} , \quad \overline{q} = \frac{\overline{p}}{1-\overline{p}} \leq \frac{p}{1-p} = q .$$

Można zauważyć, że im cenniejszy jest obiekt ubezpieczony w stosunku do oszczędności $(D - C_k)$ tym S_m oraz niebezpieczeństwo (S_C) jest większe a tym samym większa jest nieużyteczność $DU(x)$.

W przypadku tworzenie portfela wydatków budżetowych konieczne jest przyjęcie określonej zasady akceptacji. Zasada ta wymaga by nieużyteczność zagrożenia $DU(x)$ była nie mniejsza od nieużyteczności działalności prewencyjno-ubezpieczeniowej $DU_p(x_p)$, tj.

$$DU_p(x_p) \leq DU(x). \tag{28}$$

Jako konkretny przykład rozważmy ubezpieczenie majątku o wartości C_u od kradzieży z prawdopodobieństwem $1-p$ przy stawce ubezpieczeniowej c.

Mamy tu, przyjmując $x = C_u / \overline{C}$, gdzie $\overline{C}$ - budżet inwestora

$$DU(x) = s(p)C_u\left(\frac{C_u}{\overline{C}}\right)^{\beta}.$$

Podobnie przyjmując $x_p = \frac{c}{\overline{C}}$ mamy

$$DU_p(x_p) = c\left(\frac{c}{\overline{C}}\right)^{\beta}$$

Zaś z warunku (28):

$$c \leq C_u[s(p)]^{\frac{1}{1+\beta}} \tag{29}$$

Przykład liczbowy:

Niech osoba ubezpieczająca majątek $C_u = 10^4$ zł posiada oszczędności $D - C_k = 10^2$ zł. Prawdopodobieństwo kradzieży wynosi $1-p = 10^{-3}$, zaś $1-\overline{p} = 0.005$. Niech przykładowo $\beta = 1$.

Aby skorzystać ze wzoru (29) należy obliczyć S_c ze wzoru

$$S_c = 1 + (S_m - 1)\sqrt{\overline{q}/q},$$

gdzie $\overline{q} = \frac{0.995}{0.005} = 199$; $q = 999$; $S_m = \frac{10^2}{10^4 \cdot 0.005} = 2$ zaś $S_c = 1 + \sqrt{\frac{199}{999}} = 1.44$.

Zatem

$$c \leq 10^4[10^{-3} \cdot 1,446]^{1/2} = 382 \text{ zł}.$$

Jeśli stawka ubezpieczeniowa nie przekracza kwoty 382 zł osoba ubezpieczająca się może akceptować warunki ubezpieczeniowe.

Stosując zasadę akceptacji w stosunku do wszystkich działań prewencyjno ubezpieczeniowych możemy określić nie tylko możliwy skład portfela kosztowego, lecz również – jego koszt $C_M = \sum_i c_i$, gdzie c_i - koszty poszczególnych działań. Koszt ten może przekraczać możliwości płatnicze, tj. $C_M > \overline{C}$. W takiej sytuacji można wprowadzić ranking działań, kierując się malejącymi przyrostami $\Delta_i = DU_i - DU_{pi}$, oraz odcinając z udziału w portfelu działania o najmniejszych wskaźnikach Δ_i, aż do uzyskania warunku $C_M \leq \overline{C}$.

5. Podział nakładów w systemach dochodowo-kosztowych

W sferze działań dochodowych przyjmowaliśmy, że zysk oczekiwany (inwestora) był nieujemny w związku z czym decydent wykorzystywał swoją skalę użyteczności z $\beta \in [0,1]$. Podobnie w sferze działań kosztowych, gdzie koszty są nieujemne, decydent wykorzystywał skalę nieużyteczności z $\beta \geq 1$.

Istnieją jednak sytuacje w których decydent maksymalizuje nieujemny zysk oczekiwany lecz musi ponieść nieujemne koszty lub też minimalizując koszty musi on zarobić na sfinansowanie budżetu (powstałego z zysku).

Rozważmy dla przykładu ubezpieczyciela, który wzamian za składkę c zgadza się pokryć szkodę (C_u), jaką ponosi ubezpieczający swoje mienie, z prawdopodobieństwem wystąpienia szkody $1-p$.

Użyteczność tej działalności (dla ubezpieczyciela) jest

$$U(c) = c\left(\frac{c}{\overline{C}_1}\right)^{\beta_1}, \quad \beta_1 \in [0,1] \tag{30}$$

Nieużyteczność można wyrazić tu jako

$$DU(C_u) = s(p)\,C_u\left(\frac{C_u}{\overline{C}_1}\right)^{\beta_2}, \quad \beta_2 \geq 1 \tag{31}$$

gdzie $s_1(p) = (1-p)S_{c1}^{\beta_1}$, S_{c1} - index ubezpieczyciela.

Warunek użyteczności działań ubezpieczyciela wymaga by $U(c) \geq DU(C_u)$. Przyjmując przykładowo $\beta_1 = 0.5$; $\beta_2 = 1$ mamy

$$c \geq C_u \left(\frac{C_u}{\overline{C}_1} \right)^{1/3} [s_1(p)]^{2/3} . \qquad (32)$$

Warunek ten można zawsze spełnić jeśli zasoby kapitałowe ubezpieczyciela $\overline{C}_1$ są dostatecznie duże w stosunku do C_u.

Cena składki ubezpieczeniowej c winna być taka by spełniała warunki akceptacji zarówno dla ubezpieczyciela (32) jak i osoby ubezpieczanej (29), czyli w rozważanym przykładzie ($\beta_1 = 1/2$, $\beta_2 = 1$) :

$$C_u s_1(p)^{2/3} \left[\frac{C_u}{\overline{C}_1} \right]^{1/3} \leq c \leq C_u [s(p)]^{1/2} . \qquad (33)$$

Zależność (33) określa również ograniczenia w ramach których może być negocjowana składka ubezpieczeniowa. Pozwala ona też lepiej zrozumieć mechanizmy transakcji w których jedna strona (np. ubezpieczyciel) „kupuje ryzyko" od strony drugiej (np. osoby ubezpieczającej się). Aby takie transakcje mogły dojść do skutku, konieczne jest przekonanie obu stron, że ich użyteczności w wyniku transakcji nie zostają obniżone. Widać tu także wpływ czynników subiektywnych, które są manifestowane przez parametry κ i β funkcji użyteczności obu stron.

Jest sprawą jasną, że obszar działań dochodowo-kosztowych, w których następuje wymiana ryzyka pomiędzy różnymi kontrahentami nie ogranicza się do sfery ubezpieczeniowej. Można tu wymienić bowiem transakcje na rynku papierów wartościowych, zwłaszcza tzw. papierów pochodnych, jak opcje lub „futures", a także – gier hazardowych itp.

Wypada zauważyć, iż zarówno lepsze zrozumienie tych transakcji jak i próby wspomagania decydentów winny w większym niż to tej pory stopniu opierać się na modelach użyteczności które nawiązują do klasycznych już dzisiaj prac Von Neumanna – Savagea, a także prac psychologów zajmujących się problematyką podejmowania decyzji.

Literatura

Allais, M. (1953) *Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: Critique des postulats et axiomes de l'ecole americaine*. Econometrica, 21, 503-46.

Coombs, C.H., Dawes R.M., Tversky A. (1970) Mathematical Psychology, Prentice Hall, Inc.

Kulikowski, R. (1998) *Portfolio optimization: Two rules approach.* Control and Cybernetics, No 3.

Kulikowski, R. (1998) *Portfolio optimization:Two factors approach.* ibid.

Kulikowski, R. (2002) *URS methodology – a tool for stimulation of Economic growth by Innovations.* Bulletin of Polisch Academy of Sciences, Ser. Techn.

Kulikowski, R. (2000) *Optimum safety/return principle and applications.* Bulletin of Polisch Academy of Sciences, Ser. Techn. Vol. 48, No 2.

Kulikowski, R., Libura M., Slomiński L. (1998) Wspomaganie decyzji inwestycyjnych. IBS PAN, Warszawa.

Savage, L.J. (1954) The foundations of statistics. New York, Wiley.

Tversky, A. (1967) Utility theory and additivity analysis of risky choices. *Journal of Experimental Psychology*, 75, 27-37.

Von Neumann J., Morgenstern O. (1947) Theory of games and economic behaviour. Princenton Univ. Press.