102/2001

# Raport Badawczy
# Research Report

# RB/26/2001

**Wyznaczanie mediany Kemeny'ego z uwzględnieniem podejścia D.G.Saariego**

**Hanna Bury, Dariusz Wagner**

**Instytut Badań Systemowych**
**Polska Akademia Nauk**

**Systems Research Institute**
**Polish Academy of Sciences**

# POLSKA AKADEMIA NAUK

## Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 8373578

fax: (+48) (22) 8372772


Pracę zgłosiła: Hanna Bury


Warszawa 2001

# INSTYTUT BADAŃ SYSTEMOWYCH PAN

PRACOWNIA SYSTEMÓW WSPOMAGANIA DECYZJI



**PSWD/26/2001**



Hanna BURY, Dariusz WAGNER


# Wyznaczanie mediany Kemeny'ego z uwzględnieniem podejścia D.G. Saariego

*Zadanie badawcze:*

Komputerowe systemy wspomagania decyzji -

kierownik: prof.dr hab.inż. Kazimierz MAŃCZAK

*Podzadanie:*

Algorytmy heurystyczne wyznaczania decyzji grupowych

*Wykonawcy:* mgr inż. Dariusz WAGNER - kierownik

mgr inż. Hanna BURY


WARSZAWA , grudzień 2001

## WPROWADZENIE

Wyniki ekspertyzy lub, inaczej mówiąc, opinie ekspertów dotyczące oceny zbioru wybranych obiektów $O = \{O_1,...,O_n$ , dokonanej ze względu na przyjęte kryterium (lub zbiór kryteriów) podane zazwyczaj w postaci opisowej, mogą być przedstawiane w różnej postaci. Na ogół mają one postać wyników porównań obiektów parami lub postać uporządkowań obiektów. Takie podejście wywodzi się od prekursorów teorii głosowań, odpowiednio markiza de Condorcet'a i Bordy. W ostatnich latach pojawiła się, podana przez Donalda G. Saari'ego, propozycja opisu tych wyników w postaci tak zwanych profili [5,6]. Dla uproszczenia rozważań związanych z tym podejściem ograniczymy się do analizy przypadku n=3 oraz przyjmiemy, że w opiniach ekspertów nie pojawiają się równoważności. Przyjęte założenia nie ograniczają zakresu badań i mogą być bez trudu uogólnione na przypadek n-wymiarowy oraz uwzględniający występowanie równoważności – jedynie obliczenia stają się wówczas bardziej skomplikowane. W rozpatrywanym przypadku trzech obiektów może wystąpić jedynie 3!=6 uporządkowań zwanych profilami elementarnymi . Oznaczymy je odpowiednio $P_1,...,P_6$

$P_1$: $O_1, O_2, O_3$ $\quad$ $P_2$: $O_1, O_3, O_2$ $\quad$ $P_3$: $O_3, O_1, O_2$

$P_4$: $O_3, O_2, O_1$ $\quad$ $P_5$: $O_2, O_3, O_1$ $\quad$ $P_6$: $O_2, O_1, O_3$ [1) ] (1)

Profil ogólny opisujący całość wyników ekspertyzy ma postać

$$p=(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6),\ \sum_{t=1}^{6} p_t = K \qquad (2)$$

gdzie $\quad p_t$ – liczba ekspertów, których opinia ma postać uporządkowania $P_t$,

---

[1)] Zapis $O_{i_1}, O_{i_2}, O_{i_3}$ oznacza, że ze względu na przyjęte kryterium (zbiór kryteriów), obiekt $O_{i_1}$ jest lepszy niż obiekt $O_{i_2}$ oraz obiekt $O_{i_3}$, zaś obiekt $O_{i_2}$ jest lepszy niż obiekt $O_{i_3}$. Zapis ten jest uproszczeniem notacji $O_{i_1} \succ O_{i_2} \succ O_{i_3}$ .

K – liczba wszystkich ekspertów.

Przykładowo zapis p=(1, 5, 5, 3, 2, 4) oznacza, że spośród 20 ekspertów 1 ekspert podał ocenę w postaci $P_1$, 5 ekspertów - w postaci $P_2$, 5 - w postaci $P_3$, 3 - w postaci $P_4$, 2 – w postaci $P_5$ i 4 - w postaci $P_6$.

## 1. DEKOMPOZYCJA PROFILU

Analizując zagadnienie występowania tzw. paradoksów w teorii głosowania, to znaczy sytuacji, w których wynik głosowania jest niezgodny z poczuciem racjonalności [4], D.G. Saari doszedł do wniosku, że korzystne jest przedstawienie profilu p (2) w postaci

$$p = a_1B_1^3 + a_2B_2^3 + a_3B_3^3 + b_1R_1^3 + b_2R_2^3 + b_3R_3^3 + dC + eJ \tag{3}$$

gdzie $p_B^r = (B_1^3, B_2^3, B_3^3)$ - profil podstawowy będący różnicą profili,

$B_i^3$ - składowa profilu podstawowego odpowiadająca obiektowi $O_i$ (i=1, 2, 3),

$p_R^r = (R_1^3, R_2^3, R_3^3)$ - profil przeciwstawny [1)] będący różnicą profili,

$R_i^3$ - składowa profilu przeciwstawnego odpowiadająca obiektowi $O_i$ (i=1, 2, 3),

$a_i$ (i=1, 2, 3), $b_i$ (i=1, 2, 3), d, e – stałe współczynniki.

$p_C^r$ – profil Condorceta będący różnicą profili

J – profil jednostkowy, J=(1, 1, 1, 1, 1, 1).

Saari [6] pokazał, jak mając dany profil p, wyznaczyć współczynniki $a_i$, $b_i$, d oraz e.

Przy dekompozycji profilu wykorzystuje się pojęcie tzw. różnicy profili.

Definicja 1 [6]. Różnicą profili nazywamy różnicę składowych dwu profili odpowiadających tej samej liczbie ekspertów.

---

[1)] Jeżeli dane jest uporządkowanie $O_{i_1}, O_{i_2}, ..., O_{i_n}$ to uporządkowaniem przeciwstawnym jest $O_{i_n}, ..., O_{i_2}, O_{i_1}$.

Zatem szóstka liczb stanowi różnicę profili wtedy i tylko wtedy, gdy ich suma jest równa zeru.

Definicja 2 [6]. Różnica profili podstawowych określona dla obiektu $O_i$ (i=1, 2, 3) zawiera jedynkę na pozycji odpowiadającej tym typom profili, w których obiekt $O_i$ jest umieszczony na pierwszej pozycji oraz –1 na pozycji odpowiadającej tym typom profili, w których obiekt $O_i$ jest umieszczony na ostatnim miejscu.

Z analizy zależności definiujących poszczególne typy profili składowych odpowiadających określonym uporządkowaniom (1) bezpośrednio wynika, że

$$B_1^3 = (1, 1, 0, -1, -1, 0)\ ;\ B_2^3 = (0, -1, -1, 0, 1, 1)\ ;\ B_3^3 = (-1, 0, 1, 1, 0, -1) \tag{4}$$

Można łatwo wykazać, że

$$B_1^3 + B_2^3 + B_3^3 = \mathbf{0}\ ^{1)} \tag{5}$$

Definicja 3 [6]. Różnica profili przeciwstawnych określona dla obiektu $O_i$ (i=1, 2, 3) zawiera 1 na pozycji odpowiadającej tym typom profili, w których obiekt $O_i$ znajduje się na pierwszej lub ostatniej pozycji oraz –2 na pozycji odpowiadającej tym typom profili, w których obiekt $O_i$ zajmuje pozycję środkową.

Z analizy zależności definiujących poszczególne typy profili składowych odpowiadających określonym uporządkowaniom (1) bezpośrednio wynika, że

$$R_1^3 = (1, 1, -2, 1, 1, -2)\ ;\ R_2^3 = (-2, 1, 1, -2, 1, 1)\ ;\qquad R_3^3 = (1, -2, 1, 1, -2, 1) \tag{6}$$

Można łatwo wykazać, że $R_1^3 + R_2^3 + R_3^3 = \mathbf{0}$ (7)

Definicja 4 [6]. Paradoks Condorceta odpowiada sytuacji, gdy uporządkowania podane przez ekspertów mają postać

$$O_1, O_2, O_3;\qquad O_2, O_3, O_1;\qquad O_3; O_1, O_2 \tag{8}$$

lub $O_1, O_3, O_2;\qquad O_3, O_2, O_1;\qquad O_2; O_1, O_3$ (9)

---

[1] $\mathbf{O} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

przy czym liczba ekspertów, których opinię reprezentuje każde z uporządkowań jest taka sama.

W przypadku (8) profil ma postać (1, 0, 1, 0, 1, 0) a w przypadku (9) (0, 1, 0, 1, 0, 1). Profile (8) i (9) noszą nazwę profili Condorceta.

Należy podkreślić, że zarówno uporządkowanie (8), jak i (9) opisuje przypadek nieprzechodniości ocen. Odpowiada on sytuacji równoważności obiektów.

Definicja 5 [6]. Różnicą profili Condorceta nazywamy profil o postaci

$p^r_C = (1, -1, 1, -1, 1, -1)$.

Definicja 6 [6]. Profilem jednostkowym nazywamy profil o postaci $p_J = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Profil jednostkowy jest sumą profili odpowiadających uporządkowaniom $P_1 \div P_6$ i określa sytuację pełnej równoważności.

Definicja 7 [6]. Symetrią przy przeciwstawnych opiniach nazywamy sytuację, gdy przy zmianie opinii każdego eksperta na przeciwstawną opinia grupowa zmienia się również na przeciwstawną.

Z definicji różnicy profili przeciwstawnych (Definicja 3) wynika, że przy zmianie opinii każdego z ekspertów na przeciwstawną profil $p^r_R$ nie ulega zmianie.

Biorąc pod uwagę zależność (5) profil $p^r_B$ można zapisać w następujących postaciach równoważnych

$$\begin{aligned} p^r_B = a_1B^3_1 + a_2B^3_2 + a_3B^3_3 &= (a_1 - a_3)B^3_1 + (a_2 - a_3)B^3_2 + 0\cdot B^3_3 \\ &= (a_1 - a_2)B^3_1 + 0\cdot B^3_2 + (a_3 - a_2)B^3_3 \\ &= 0\cdot B^3_1 + (a_2 - a_1)B^3_2 + (a_3 - a_1)B^3_3 \end{aligned} \tag{10}$$

Z powyższej zależności jednoznacznie wynika, że posługując się formułą (10) wystarczy uwzględnić jedynie dwie składowe profilu podstawowego. Ponadto, jeżeli któryś ze współczynników jest ujemny (a jest to typowa sytuacja), zależność ta pozwala poprzez odpowiedni wybór składowych uzyskać dodatnie współczynniki.

Przyjmijmy, że $p_B^r = -\frac{5}{3}B_1^3 - \frac{5}{6}B_2^3$. Mamy wtedy

$$p_B^r = -\frac{5}{3}B_1^3 - \frac{5}{6}B_2^3 = \left(-\frac{5}{6} - \left(-\frac{5}{3}\right)\right)B_2^3 + \left(0 - \left(-\frac{5}{3}\right)\right)B_3^3 = \frac{5}{6}B_2^3 + \frac{5}{3}B_3^3 .$$

Identyczna zależność jak (10) obowiązuje również dla składowych profilu przeciwstawnego. A zatem, uwzględniając w miarę konieczności zmianę numeracji składowych, wzór (3), można przepisać w postaci

$$p = a_1B_1^3 + a_2B_2^3 + b_1R_1^3 + b_2R_2^3 + dp_C^r + eJ .$$

Biorąc pod uwagę postać składowych profilu podstawowego, profilu przeciwstawnego oraz profili Condorceta i jednostkowego nietrudno wykazać, że wartości współczynników $a_i$, $b_i$, $d$, $e$ wyznacza się jako rozwiązania następującego układu równań

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \\ d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{bmatrix} \tag{11}$$

skąd

$$a_1 = \frac{1}{6}(2p_1 + p_2 - p_3 - 2p_4 - p_5 + p_6), \qquad a_2 = \frac{1}{6}(p_1 - p_2 - 2p_3 - p_4 + p_5 + 2p_6)$$

$$b_1 = \frac{1}{6}(0 \cdot p_1 + p_2 - p_3 + 0 \cdot p_4 + p_5 - p_6) \qquad b_2 = \frac{1}{6}(-p_1 + p_2 + 0 \cdot p_3 - p_4 - p_5 + 0 \cdot p_6) \tag{12}$$

$$d = \frac{1}{6}[(p_1 + p_3 + p_5) - (p_2 + p_4 + p_6)], \qquad e = \frac{1}{6}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6)$$

Przykładowo dla profilu p = (1, 7, 0, 6, 7, 0), K = 21 mamy

$$a_1 = \frac{1}{6}(2\cdot 1 + 7 - 0 - 12 - 7 + 0) = -\frac{9}{6} \qquad a_2 = \frac{1}{6}(1 - 7 - 2\cdot 0 - 6 + 7 + 2\cdot 0) = -\frac{5}{6}$$

$$b_1 = \frac{1}{6}(0\cdot 1 + 7 - 0 + 0\cdot 6 + 7 - 0) = \frac{14}{6} \qquad b_2 = \frac{1}{6}(-1 + 7 + 0 - 6 - 7 + 0) = -\frac{7}{6} \tag{13}$$

$$d = \frac{1}{6}[(1 + 0 + 7) - (7 + 6 + 0)] = -\frac{5}{6} \qquad e = \frac{1}{6}\cdot 21 = \frac{21}{6}$$

Im większa wartość współczynnika stojącego przy danej składowej profilu podstawowego lub przeciwstawnego, tym znaczenie obiektu odpowiadającego tej składowej jest większe. Wniosek ten ma zasadnicze znaczenie przy analizie wyników dekompozycji.

## 2. ZAPIS WYNIKÓW EKSPERTYZY

We wprowadzeniu podano, że wynik ekspertyzy lub mówiąc inaczej opinie ekspertów można przedstawiać w różnych postaciach. Jedną z najczęściej wykorzystywanych jest macierz rozkładu głosów ekspertów będąca wynikiem porównań parami

| | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ |
|---|---|---|---|
| $O_1$ | - | $l_{12}$ | $l_{13}$ |
| $O_2$ | $l_{21}$ | - | $l_{23}$ |
| $O_3$ | $l_{31}$ | $l_{32}$ | - |

(14)

gdzie $l_{ij}$ (i, j = 1, 2, 3; i ≠ j) oznacza liczbę ekspertów, zdaniem których obiekt $O_i$ jest lepszy od $O_j$ czyli $(O_i, O_j)$; $l_{ji}$ oznacza liczbę ekspertów mających przeciwstawną opinię. Przy założeniu braku równoważności mamy $l_{ij}+l_{ji}=K$, gdzie K jest liczbą ekspertów.

Wskaźnik Bordy $WB_i$ jest definiowany następująco

$$WB_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{3} l_{ij} \tag{15}$$

Macierz rozkładu głosów ekspertów można zapisać w postaci

| | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ | $WB_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | - | $l_{12}$ | $l_{13}$ | $(l_{12}+l_{13})$ |
| $O_2$ | $K-l_{12}$ | - | $l_{23}$ | $K-l_{12}+l_{23}$ |
| $O_3$ | $K-l_{13}$ | $K-l_{23}$ | - | $2K-(l_{13}+l_{23})$ |

Dla profilu p=(1, 7, 0, 6, 7, 0) rozpatrywanego w poprzednim punkcie macierz rozkładu głosów ekspertów ma postać

| | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ | $WB_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | - | 8 | 8 | 16 |
| $O_2$ | 13 | - | 8 | 21 |
| $O_3$ | 13 | 13 | - | 26 |

Druga postać wyniku ekspertyzy to przedstawienie opinii każdego z ekspertów jako uporządkowania

$$O_{i_1}, O_{i_2}, O_{i_3} \qquad i_1 \neq i_2 \neq i_3,\ i_1,\ i_2,\ i_3 = (1, 2, 3) \tag{16}$$

podającego, jakie miejsce w porządku od najlepszego do najgorszego zajmuje dany obiekt. Ten zapis sprowadza się do podania profilu rozważanego w punkcie 1. Należy podkreślić, że przejście od postaci (16) do (14) jest zawsze możliwe, ponieważ zapis (16) zakłada przechodniość ocen. Przejście odwrotne jest możliwe jedynie przy przechodniości ocen.

Tradycyjnym uproszczonym sposobem tego zapisu jest podawanie wyników tzw. głosowania z uwzględnieniem większości, to znaczy określenie liczby ekspertów $l_i$, którzy postawili obiekt $O_i$ na pierwszym miejscu w uporządkowaniu. Jeszcze inny sposób zapisu wiąże się z podaniem odległości między uporządkowaniami (tak postępuje się w przypadku mediany Kemeny'ego).

Zapis w postaci profili (2) jest zapisem pełnym. Dlatego wydaje się celowe podanie zależności wiążących poszczególne wielkości charakteryzujące dany typ zapisu.

Z zależności (1) mamy

$$l_1 = p_1 + p_2\,; \qquad l_2 = p_5 + p_6\,; \qquad l_3 = p_3 + p_4\,; \qquad l_1 + l_2 + l_3 = K; \tag{17}$$

oraz

$$l_{12} = p_1 + p_2 + p_3 \quad l_{21} = K - l_{12} = p_4 + p_5 + p_6 \qquad l_{13} = p_1 + p_2 + p_6 \tag{18}$$

$$l_{31} = K - l_{13} = p_3 + p_4 + p_5 \qquad l_{23} = p_1 + p_5 + p_6 \quad l_{32} = K - l_{23} = p_2 + p_3 + p_4$$

$$\sum_{t=1}^{6} p_t = K\,.$$

Z porównania układów (17) i (18) mamy

$$p_1 = l_{23} - l_2; \qquad p_2 = l_1 + l_2 - l_{23}; \qquad p_3 = l_{12} - l_1; \tag{19}$$

$$p_4 = l_1 + l_3 - l_{12}; \qquad p_5 = l_1 + l_2 - l_{13}; \qquad p_6 = l_{13} - l_1$$

Biorąc pod uwagę, że wszystkie zmienne występujące w tym układzie równań są większe lub równe zeru oraz mniejsze od K, muszą być spełnione następujące nierówności

$$K \ge l_{23} \ge l_2; \qquad K \ge l_{12} \ge l_1; \qquad K \ge l_{13} \ge l_1 \tag{20}$$

$$K \ge l_1 + l_2 \ge l_{23}; \quad K \ge l_1 + l_3 \ge l_{12}; \quad K \ge l_1 + l_2 \ge l_{13}$$

Z nierówności (20) wynika, że może nie istnieć profil odpowiadający zadanym wielkościom $l_i$ oraz $l_{ij}$ (i, j =1, 2, 3). Znajomość samej macierzy porównań parami, to znaczy wielkości $l_{ij}$ nie umożliwia wyznaczenia wielkości $l_i$ i odwrotnie. W macierzy porównań parami (14) z sześciu występujących zmiennych tylko trzy są niezależne. Możemy również posługiwać się wskaźnikami Bordy, które spełniają warunek

$$WB_1 + WB_2 + WB_3 = 3K\,^{1)}. \tag{21}$$

A zatem dwie spośród zmiennych $l_{ij}$ można zastąpić wskaźnikami Bordy $WB_i$. Jeżeli

---

1) Dla n obiektów $\sum_{i=1}^{n} WB_i = \frac{n(n-1)}{2} K$.

przyjmiemy, że zbiór zmiennych niezależnych ma postać ($l_{12}$, $WB_1$, $WB_2$) wówczas zależności (19) przyjmą postać

$p_1 = WB_2 - K + l_{12} - l_2$ $\quad p_2 = l_1 + l_2 - WB_2 + K - l_{12}$ $\quad p_3 = l_{12} - l_1$ (22)

$p_4 = l_1 + l_3 - l_{12} = K - l_2 - l_{12}$ $\quad p_5 = l_1 + l_2 - WB_1 + l_{12}$ ; $\quad p_6 = WB_1 - l_1 - l_{12}$

Ze względu na ograniczenie $K \geq p_t \geq 0$, $t = 1, ...,6$ można wyznaczyć nierówność określającą $l_{12}$ .

Mamy bowiem

$\min[l_1 + l_2 - WB_2 + K, l_1 + l_3, WB_1 - l_1 ] \geq l_{12} \geq l_1$ (23)

Z nierówności (20) mamy dodatkowo $l_1 + l_2 \geq l_{23}$ czyli $2K - l_3 - WB_2 \geq l_{12}$

oraz $l_1 + l_2 \geq l_{13}$ czyli $l_{12} \geq WB_1 + l_3 - K$. Łatwo stwierdzić, że

$l_1 + l_2 - WB_2 + K = 2K - l_3 - WB_2$ (24)

oraz

$WB_1 - l_1 \leq WB_1 + l_3$.

A zatem nierówność (23) można zapisać w postaci

$\min[2K - l_3 - WB_2, l_1 + l_3, WB_1 - l_1] \geq l_{12} \geq \max[l_1, WB_1 + l_3 - K]$. (25)

W celu ilustracji rozpatrzymy następujący przykład.

Załóżmy, że macierz porównań parami jest jak następuje:

$WB_1 = 20$, $WB_2 = 40$, $WB_3 = 30$ a wynik głosowania większościowego ma postać (9, 8, 13).

Biorąc pod uwagę, że w rozpatrywanym przykładzie $K = 30$, nierówność (25) przyjmie postać

$\min[7, 22, 11] \geq l_{12} \geq \max[9,3]$. (26)

Zależność (26) oznacza, że nie istnieje profil spełniający przyjęte wyżej założenia.

Wzory (17) – (25) odgrywają istotną rolę przy weryfikacji możliwości występowania różnego typu paradoksów związanych z przyjęciem zadanych wartości $l_i$, $WB_i$, $l_{ij}$ (i, j = 1, 2, 3).

W przypadku, gdy oceny ekspertów mają postać uporządkowań agregacja ocen prowadząca do oceny grupowej polega na wprowadzeniu wag przypisywanych obiektom zajmującym określone pozycje w uporządkowaniu. Zazwyczaj przyjmuje się, że obiektowi stojącemu na pierwszej pozycji przypisuje się wagę 1, a ostatniemu wagę 0. W rozpatrywanym przypadku wektor wag ma postać w = (1, s, 0), gdzie $0 \leq s \leq 1$. Wykorzystując zapis (1) liczba $V_i^s$ punktów, które uzyska obiekt $O_i$, (i = 1, 2, 3) dla wektora wag w, jest równa

$$V_1^s = 1 \cdot (p_1 + p_2) + s(p_3 + p_4) + 0 \cdot (p_5 + p_6) = (p_1 + p_2) + s(p_3 + p_6)$$

$$V_2^s = 1 \cdot (p_5 + p_6) + s(p_1 + p_4) + 0 \cdot (p_2 + p_3) = (p_5 + p_6) + s(p_1 + p_4) \qquad (27)$$

$$V_3^s = 1 \cdot (p_3 + p_4) + s(p_2 + p_5) + 0 \cdot (p_1 + p_6) = (p_3 + p_4) + s(p_2 + p_5)$$

Uwzględniając zależności (22) mamy

$$V_1^s = l_1(1 - 2s) + sWB_1, \qquad V_2^s = l_2(1 - 2s) + sWB_2, \qquad V_3^s = l_3(1 - 2s) + sWB_3 \qquad (28)$$

Z powyższej zależności wynika, że

$$\text{dla } s = 0 \quad V_i^s = l_i, \qquad \text{dla } s = \frac{1}{2} \quad V_i^s = \frac{1}{2} WB_i \qquad (29)$$

Zatem zwiększając s od zera do ½ przechodzimy od oceny grupowej uwzględniającej opinię większości do oceny grupowej według Bordy.

Łatwo wykazać, że (dla n=3)

$$V_1^s + V_2^s + V_3^s = K(1 + s) \qquad (30)$$

Z zależności (28) bezpośrednio wynika możliwość zastąpienia zmiennych $WB_i$ przez $V_i^s$. Po dokonaniu tej zamiany wzory (22) przyjmą postać podaną w Tabeli 1 (przy założeniu, że $s \neq ½$).

Tabela 1.

| | $V_1^s$ | $V_2^s$ | $l_1$ | $l_2$ | $l_{12}$ | K |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_1$ | 0 | $s^{-1}$ | 0 | $-(1-s)s^{-1}$ | 1 | -1 |
| $p_2$ | 0 | $-s^{-1}$ | 1 | $(1-s)s^{-1}$ | -1 | 1 |
| $p_3$ | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| $p_4$ | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 1 |
| $p_5$ | $-s^{-1}$ | 0 | $(1-s)s^{-1}$ | 1 | 1 | 0 |
| $p_6$ | $s^{-1}$ | 0 | $-(1-s)s^{-1}$ | 0 | -1 | 0 |

Łatwo zauważyć, że suma wyrazów równa się zero w każdej kolumnie poza ostatnią, ze względu na warunek $\sum_{t=1}^{6} p_t = K$.

## 3. PARADOKSY ZWIĄZANE Z OCENĄ GRUPOWĄ

W teorii głosowania znanych jest wiele paradoksów; wśród nich należy wymienić paradoks Condorceta, o którym była mowa w punkcie 1 oraz paradoks Bordy [3,4]. Jest rzeczą oczywistą, że paradoksy te wpływają na wyniki ekspertyzy.

Typowy przykład opisujący paradoks Bordy podany jest w [4]. Załóżmy, że mamy cztery obiekty, które są oceniane przez 7 ekspertów. Oceny ekspertów są następujące:

| Eksperci | Uporządkowanie |
|---|---|
| 1-2 | $O_4, O_3, O_2, O_1$ |
| 3-4 | $O_1, O_4, O_3, O_2$ |
| 5-6 | $O_2, O_1, O_4, O_3$ |
| 7 | $O_4, O_3, O_2, O_1$ |

(31)

Macierz rozkładu głosów ekspertów ma postać

| | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ | $O_4$ | $WB_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | - | 2 | 4 | 4 | 10 |
| $O_2$ | 5 | - | 2 | 2 | 9 |
| $O_3$ | 3 | 5 | - | 0 | 8 |
| $O_4$ | 3 | 5 | 7 | - | 15 |

(32)

Zgodnie z metodą Bordy, która porządkuje obiekty według wartości $WB_i$, obiektem najlepszym jest $O_4$; uporządkowanie całego zbioru obiektów ma postać $O_4$, $O_1$, $O_2$, $O_3$.

Załóżmy teraz, że przy porównaniach parami nie będziemy brać pod uwagę obiektu $O_4$.

Macierz rozkładu głosów ekspertów jest następująca

| | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ | $WB_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | - | 2 | 4 | 6 |
| $O_2$ | 5 | - | 2 | 7 |
| $O_3$ | 3 | 5 | - | 8 |

(33)

Zgodnie z metodą Bordy porządek obiektów jest następujący: $O_3$, $O_2$, $O_1$. A zatem usunięcie jednego z obiektów z procesu porównań przy niezmienionych ocenach ekspertów powoduje zmianę porządku obiektów na przeciwstawny.

Tego typu zmiana porządku, nosząca w literaturze anglosaskiej nazwę *rank reversal*, charakteryzuje również inne metody; odgrywa m.in. zasadniczą rolę w metodzie AHP Th. Saaty'ego [1].

W przypadku wyznaczania oceny grupowej przy użyciu mediany Kemeny'ego [2] występuje inne niekorzystne zjawisko. Rozpatrzmy następujący przykład [7].

Opinie ekspertów są następujące

| Eksperci | Uporządkowanie |
|---|---|
| 1 - 400 | $O_1, O_2, O_3$ |
| 401 – 800 | $O_3, O_1, O_2$ |
| 801 – 1000 | $O_2, O_3, O_1$ |

(34)

Macierz współczynników strat R ma postać [2] $$R = \begin{bmatrix} 0 & 400 & 1200 \\ 1600 & 0 & 800 \\ 800 & 1200 & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Mediana Kemeny'ego obliczona na podstawie macierzy porównań parami jest jak następuje: $O_3, O_1, O_2$.

Załóżmy teraz, że jeden z ekspertów należących do drugiej grupy zmienił swoją opinię na reprezentowaną przez trzecią grupę ekspertów. A zatem ma miejsce następująca sytuacja

| Eksperci | Uporządkowanie |
|---|---|
| 1 – 400 | $O_1, O_2, O_3$ |
| 401 – 799 | $O_3, O_1, O_2$ |
| 800 – 1000 | $O_2, O_3, O_1$ |

(36)

Mediana ma w tym przypadku postać $O_1, O_2, O_3$. Zatem, w wyniku zmiany opinii jednego eksperta ocena grupowa zmienia się zasadniczo, bowiem obiekt $O_3$ zmienia zajmowaną pozycję z pierwszej na ostatnią. Podobna sytuacja zaistnieje również, gdy w pierwszej grupie będzie 401 ekspertów, w drugiej 399 a w trzeciej 200 lub w pierwszej grupie będzie 401 ekspertów, w drugiej 400 a w trzeciej 199. Opisany przykład pokazuje, że mediana Kemeny'ego jako ocena grupowa nie spełnia warunku monotoniczności, który opisowo można sformułować następująco: niewielka zmiana opinii ekspertów powoduje niewielką zmianę opinii grupowej.

## 4. PRZECHODNIOŚĆ ADDYTYWNA A MEDIANA KEMENY'EGO

Zgodnie z oznaczeniami przyjętymi przy opisie macierzy rozkładu głosów ekspertów zdefiniujemy następujące zmienne $x_{ij}$, i, j = 1, 2, 3; i ≠ j.

$$x_{12} = \frac{l_{12} - l_{21}}{K}; \qquad x_{23} = \frac{l_{23} - l_{32}}{K}; \qquad x_{31} = \frac{l_{31} - l_{13}}{K} \tag{37}$$

Oczywiście z sześciu zmiennych $l_{ij}$ tylko trzy są niezależne; załóżmy, że są to zmienne $l_{12}$, $l_{23}$, $l_{31}$. Mamy wówczas

$$x_{12} = 2\frac{l_{12}}{K} - 1; \qquad x_{23} = 2\frac{l_{23}}{K} - 1; \qquad x_{31} = 2\frac{l_{31}}{K} - 1 \tag{38}$$

Definicja [7]. Oceny $l_{12}$, $l_{23}$, $l_{31}$ spełniają warunek addytywnej przechodniości, jeżeli jest spełniony warunek $l_{12} + l_{23} + l_{31} = \nu$, gdzie $\nu$ - stała. (39)

Warunek (39) oznacza, że znajomość dwóch spośród zmiennych $l_{ij}$ wyznacza wartość trzeciej.

Biorąc pod uwagę zależności (38) otrzymujemy

$$(x_{12} + 1)\frac{K}{2} + (x_{23} + 1)\frac{K}{2} + (x_{31} + 1)\frac{K}{2} = \nu \tag{40}$$

skąd $x_{12} + x_{23} + x_{31} = \nu - \frac{3}{2}K$. (41)

Jeżeli przyjąć, że $\nu = 3/2\ K$, wówczas $x_{12} + x_{23} + x_{31} = 0$. (42)

Zależność (42) definiuje tak zwaną płaszczyznę przechodniości addytywnej. Z definicji (37) wynika, że $x_{ij} = -x_{ji}$ oraz $-1 \le x_{ij} \le 1$, i, j = 1, 2, 3; i ≠ j.

Jeżeli $x_{ij} = 0$, to oznacza, że obiekty $O_i$ oraz $O_j$ są równoważne.

Punkt w przestrzeni $(x_{12}, x_{23}, x_{31})$ odpowiadający danemu wynikowi ekspertyzy oznaczymy przez $q^3 = (q_1, q_2, q_3)$. Saari udowodnił [6], że zachodzi związek

$$q^3 = q_T + \alpha(1, 1, 1), \tag{43}$$

gdzie $q_T$ składnik związany z płaszczyzną przechodniości a $\alpha(1, 1, 1)$ jest wektorem ortogonalnym do płaszczyzny przechodniości; $\alpha$ jest stałą mogącą przyjmować wartości zarówno dodatnie, jak i ujemne. Ten drugi składnik jest związany z występowaniem paradoksu Condorceta dla rozpatrywanych obiektów. Zatem, jeżeli $q^3 = q_T$, to mediana Kemeny'ego i uporządkowanie uzyskane metodą Bordy pokrywają się [6].

Warto zwrócić uwagę na zależność, jaka zachodzi między elementami macierzy strat R [2], która służy do wyznaczania mediany Kemeny'ego a zmiennymi $x_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$.

Z definicji elementów macierzy R wynika [2], że w rozpatrywanym przypadku

$$r_{ij} = 2l_{ji}, \qquad r_{ij} + r_{ji} = 2K \tag{44}$$

A zatem wykorzystując zależność (37) otrzymujemy

$$r_{21} = 2l_{12} = 2\left(\frac{x_{12}+1}{2}K\right) = K(x_{12}+1)$$

$$r_{32} = 2l_{23} = 2\left(\frac{x_{23}+1}{2}K\right) = K(x_{23}+1) \tag{45}$$

$$r_{31} = 2l_{13} = 2\left(\frac{1-x_{31}}{2}K\right) = K(1-x_{31})$$

oraz

$$r_{12} = 2K - r_{21} = K(1-x_{12}); \qquad r_{23} = 2K - r_{32} = K(1-x_{23}); \qquad r_{13} = 2K - r_{31} = K(x_{31}+1). \tag{46}$$

Macierz R ma więc postać

$$R = \begin{array}{c|c|c|c} & O_1 & O_2 & O_3 \\ \hline O_1 & 0 & K(1-x_{12}) & K(x_{31}+1) \\ \hline O_2 & K(x_{12}+1) & 0 & K(1-x_{23}) \\ \hline O_3 & K(1-x_{31}) & K(x_{23}+1) & 0 \end{array} \tag{47}$$

Łatwo zauważyć, że macierz tę można zapisać w postaci

$$R = K\begin{bmatrix} 0 & -x_{12} & x_{31} \\ x_{12} & 0 & -x_{23} \\ -x_{31} & x_{23} & 0 \end{bmatrix} + K\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{48}$$

Jeżeli przyjmiemy, że zmienne $x_{12}$, $x_{23}$, $x_{31}$ spełniają warunek addytywnej przechodniości (42), to powyższą zależność można przepisać w postaci

$$R = K\begin{bmatrix} 0 & -x_{12} & -(x_{12}+x_{23}) \\ x_{12} & 0 & -x_{23} \\ (x_{12}+x_{23}) & x_{23} & 0 \end{bmatrix} + K\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Analiza odległości wyrażonej za pomocą tych zmiennych może mieć duże znaczenie przy badaniu właściwości mediany Kemeny'ego ze względu na związek ze wzorem (43). Zagadnienia te wymagają dalszych badań.

## 5. PRZYKŁADY

Przedstawione algorytmy zostały zastosowane do wyznaczenia oceny grupowej na podstawie uporządkowań podanych przez ekspertów. Wprowadzono następujące oznaczenia:

MK1 – algorytm heurystyczny wyznaczania mediany Kemeny'ego dla przypadku odległości definiowanej na podstawie macierzy porównań parami

MK2 - algorytm heurystyczny wyznaczania mediany Kemeny'ego dla przypadku odległości definiowanej na podstawie wektorów preferencji

Przykład 1. Dany jest zbiór pięciu obiektów $O=\{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5\}$ oraz uporządkowania podane przez pięciu ekspertów:

$P^1 = \{O_4, O_5, O_1, O_2, O_3\}$

$P^2 = \{O_5, O_1, O_3, O_2, O_4\}$

$P^3 = \{O_3, O_4, O_5, O_1, O_2\}$

$P^4 = \{O_4, O_5, O_2, O_3, O_1\}$

$P^5 = \{O_5, O_2, O_1, O_4, O_3\}$

Macierz Q

| | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ | $O_4$ | $O_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P^1$ | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| $P^2$ | 2 | 4 | 3 | 5 | 1 |
| $P^3$ | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 |
| $P^4$ | 5 | 3 | 4 | 1 | 2 |
| $P^5$ | 3 | 2 | 5 | 4 | 1 |
| $l_i$ | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 |

Macierz rozkładu głosów

| | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ | $O_4$ | $O_5$ | $WB_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | – | 3 | 3 | 2 | 0 | 8 |
| $O_2$ | 2 | – | 3 | 2 | 0 | 7 |
| $O_3$ | 2 | 2 | – | 2 | 1 | 7 |
| $O_4$ | 3 | 3 | 3 | – | 3 | 12 |
| $O_5$ | 5 | 5 | 4 | 2 | – | 16 |

większość głosów $= 3 > \frac{5}{2}$

Współczynniki macierzy R

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 4 | 6 | 10 |
| 6 | 0 | 4 | 6 | 10 |
| 6 | 6 | 0 | 6 | 8 |
| 4 | 4 | 4 | 0 | 4 |
| 0 | 0 | 2 | 6 | 0 |

Współczynniki macierzy ρ

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 7 | 4 | 5 | 8 |
| 13 | 8 | 5 | 4 | 7 |
| 13 | 10 | 7 | 6 | 7 |
| 8 | 7 | 8 | 9 | 12 |
| 4 | 3 | 6 | 11 | 16 |

Otrzymano następujące wyniki

| Algorytm | odległość | uporządkowanie |
|---|---|---|
| MK1 | 30 | $O_4, O_5, O_1, O_2, O_3$ |
| MK2 | 26 | $O_5, O_4, O_1, O_2, O_3$ lub $O_4, O_5, O_1, O_2, O_3$ |

Zwycięzcą w sensie Condorceta jest obiekt $O_4$.

Zwycięzcą w sensie Bordy jest obiekt $O_5$.

Przykład 2. Dany jest zbiór trzech obiektów $O=\{O_1, O_2, O_3\}$ oraz uporządkowania podane przez jedenastu ekspertów:

$P^1,\ldots, P^7 = \{O_1, O_2, O_3\}$

$P^8,\ldots,P^{11} = \{O_2, O_3, O_1\}$

Macierz Q

| | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ |
|---|---|---|---|
| $P^1$ - $P^7$ | 1 | 2 | 3 |
| $P^8$ - $P^{11}$ | 3 | 1 | 2 |
| $l_i$ | 7 | 4 | 0 |

Macierz rozkładu głosów ekspertów

| | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ | $WB_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | - | 7 | 7 | 14 |
| $O_2$ | 4 | - | 11 | 15 |
| $O_3$ | 4 | 0 | - | 4 |

większość głosów = $6 > \frac{11}{2}$

Macierz R $\begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 \\ 14 & 0 & 0 \\ 14 & 22 & 0 \end{bmatrix}$

Macierz ρ $\begin{bmatrix} 8 & 11 & 14 \\ 7 & 4 & 15 \\ 18 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

Otrzymano następujące wyniki

| Algorytm | odległość | uporządkowanie |
|---|---|---|
| MK1 | 16 | $O_1, O_2, O_3$ |
| MK2 | 26 | $O_1, O_2, O_3$ |

Zwycięzcą w sensie Condorceta jest obiekt $O_1$.

Zwycięzcą w sensie Bordy jest obiekt $O_2$.

Załóżmy, że 12 nowych osób dołączyło do zespołu ekspertów oraz, że ich opinie są następujące

$P^{12},\ldots,P^{15} = \{O_1, O_3, O_2\}$

$P^{16},\ldots,P^{19} = \{O_2, O_1, O_3\}$

$P^{20},\ldots,P^{23} = \{O_3, O_2, O_1\}$

Macierz Q

| | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ |
|---|---|---|---|
| $P^1$ - $P^7$ | 1 | 2 | 3 |
| $P^8$ - $P^{11}$ | 3 | 1 | 2 |
| $P^{12}$ - $P^{15}$ | 1 | 3 | 2 |
| $P^{16}$ - $P^{19}$ | 2 | 1 | 3 |
| $P^{20}$ – $P^{23}$ | 3 | 2 | 1 |
| $l_i$ | 11 | 8 | 4 |

Macierz rozkładu głosów ekspertów

| | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ | $WB_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | - | 11 | 15 | 26 |
| $O_2$ | 12 | - | 15 | 27 |
| $O_3$ | 8 | 8 | - | 16 |

większość głosów = $12 > \frac{23}{2}$

Macierz R $\begin{bmatrix} 0 & 24 & 16 \\ 22 & 0 & 16 \\ 30 & 30 & 0 \end{bmatrix}$

Macierz ρ $\begin{bmatrix} 20 & 19 & 26 \\ 19 & 12 & 27 \\ 30 & 15 & 16 \end{bmatrix}$

Otrzymano następujące wyniki

| Algorytm | odległość | uporządkowanie |
|---|---|---|
| MK1 | 54 | $O_2$, $O_1$, $O_3$ |
| MK2 | 48 | $O_1$, $O_2$, $O_3$ |

Zwycięzcą w sensie Condorceta oraz w sensie Bordy jest obiekt $O_2$.

Przykład 3. Dany jest zbiór czterech obiektów $O=\{O_1, O_2, O_3, O_4\}$ oraz uporządkowania podane przez siedmiu ekspertów:

| Eksperci | 1-3 | 4-5 | 6-7 |
|---|---|---|---|
| Uporządkowania | $O_4$, $O_3$, $O_2$, $O_1$ | $O_1$, $O_4$, $O_3$, $O_2$ | $O_2$, $O_1$, $O_4$, $O_3$ |

Macierz Q

| | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ | $O_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $P^1$ | 4 | 3 | 2 | 1 |
| $P^2$ | 4 | 3 | 2 | 1 |
| $P^3$ | 4 | 3 | 2 | 1 |
| $P^4$ | 1 | 4 | 3 | 2 |
| $P^5$ | 1 | 4 | 3 | 2 |
| $P^6$ | 2 | 1 | 4 | 3 |
| $P^7$ | 2 | 1 | 4 | 3 |
| $l_i$ | 2 | 2 | 0 | 3 |

Macierz rozkładu głosów ekspertów

| | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ | $O_4$ | $WB_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | - | 2 | 4 | 4 | 10 |
| $O_2$ | 5 | - | 2 | 2 | 9 |
| $O_3$ | 3 | 5 | - | 0 | 8 |
| $O_4$ | 3 | 5 | 7 | - | 15 |

większość głosów $= 4 > \frac{7}{2}$

Macierz R $\begin{bmatrix} 0 & 10 & 6 & 6 \\ 4 & 0 & 10 & 10 \\ 8 & 4 & 0 & 14 \\ 8 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Macierz ρ $\begin{bmatrix} 11 & 8 & 9 & 10 \\ 12 & 9 & 6 & 9 \\ 13 & 6 & 5 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 15 \end{bmatrix}$

Otrzymano następujące wyniki

| Algorytm | odległość | uporządkowanie |
|---|---|---|
| MK1 | 28 | $O_4$, $O_3$, $O_2$, $O_1$ |
| MK2 | 28 | $O_4$, $O_1$, $O_3$, $O_2$ |

Nie istnieje zwycięzca w sensie Condorceta.

Zwycięzcą w sensie Bordy jest obiekt $O_4$.

Załóżmy teraz, że obiekt $O_4$ zostaje usunięty z uporządkowań ekspertów.

Macierz Q ma teraz postać

| | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ |
|---|---|---|---|
| $P^1$ | 3 | 2 | 1 |
| $P^2$ | 3 | 2 | 1 |
| $P^3$ | 3 | 2 | 1 |
| $P^4$ | 1 | 3 | 2 |
| $P^5$ | 1 | 3 | 2 |
| $P^6$ | 2 | 1 | 3 |
| $P^7$ | 2 | 1 | 3 |
| $l_i$ | 2 | 2 | 3 |

Macierz rozkładu głosów ekspertów

| | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ | $WB_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | - | 2 | 4 | 6 |
| $O_2$ | 5 | - | 2 | 7 |
| $O_3$ | 3 | 5 | - | 8 |

większość głosów $= 4 > \frac{7}{2}$

Macierz R $\begin{bmatrix} 0 & 10 & 6 \\ 4 & 0 & 10 \\ 8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

Macierz ρ $\begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

Otrzymano następujące wyniki

| Algorytm | odległość | uporządkowanie |
|---|---|---|
| MK1 | 16 | $O_3$, $O_2$, $O_1$ |
| MK2 | 16 | $O_3$, $O_2$, $O_1$ |

Nie istnieje zwycięzca w sensie Condorceta, zwycięzcą w sensie Bordy jest obiekt $O_3$.

**PODSUMOWANIE**

Podejście zaproponowane przez D.G. Saari'ego, polegające na dekompozycji profili pozwala wyjaśnić niektóre z omówionych paradoksów. I tak za paradoksy występujące w przypadku tworzenia oceny grupowej na podstawie ocen ekspertów podawanych w postaci porównań parami odpowiada składowa Condorceta, zaś za paradoksy związane z oceną grupową tworzoną na podstawie analizy miejsca zajmowanego przez dany obiekt w uporządkowaniu podanym przez eksperta odpowiada składowa przeciwstawna. Nie spełnia ona bowiem warunku symetrii.

Dla profilu podstawowego oceny grupowe uzyskane na podstawie porównań parami oraz na podstawie analizy miejsca obiektu w uporządkowaniu pokrywają się. Wyznaczając współczynniki stojące przy odpowiednich składowych (im większa wartość danego współczynnika, tym większe znaczenie danej składowej) można dla danego profilu określić, jakie będą zależności między oceną grupową wyznaczoną na podstawie porównań obiektów parami oraz oceną grupową wyznaczoną na podstawie analizy obiektu w uporządkowaniu.

## LITERATURA


1. Bury H., Petriczek G., Wagner D.: Methods of determining group opinion using pairwise comparisons. Analysis of properties and application aspects. Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences, vol.48, no. 2, 2000
2. Bury H., Petriczek G., Wagner D.: Wyznaczanie oceny grupowej metodą mediany Kemeny'ego, w: Modelowanie preferencji a ryzyko '99, red. T.Trzaskalik, Katowice 1999
3. Nurmi H.: Some techniques of preference profile analysis. Paper presented at NPO meeting on "Power and Fairness", Bad Segeberg, September 3-6, 2000
4. Nurmi H.: Decision making in committees: an introductory review, private communications, 2000
5. Saari D.G.: Basic Geometry of Voting. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1995
6. Saari D.G.: Explaining positional voting paradoxes. I. The simple case. Northwestern University discussion paper no 1187, April 1997
7. Saari D.G., Merlin V.R. A geometric examination of Kemeny's rule. Social Choice and Welfare, vol. 17, 2000