ZASADY
GONIOMETRYI I TRYGONOMETRYI
PROSTOKREŚLNÉJ

NA PODSTAWIE

RZUTÓW ALGEBRAICZNYCH

przez

Bronisława Gustawicza.

W KRAKOWIE.
W DRUKARNI WŁ. L. ANCZYCA I SPÓŁKI,
pod zarządem Jana Gadowskiego.

NAKŁADEM FUNDUSZU NAUKOWEGO.
1886.

Wielmożnemu Panu
Drowi M. Baranieckiemu
Profesorowi Uniwersytetu
Jagiellońskiego
w dowód
głębokiej czci
ofiaruje
autor.
W Krakowie, 18. listopada 1886.–

ZASADY

GONIOMETRYI I TRYGONOMETRYI

PROSTOKREŚLNÉJ

NA PODSTAWIE

RZUTÓW ALGEBRAICZNYCH

przez

Bronisława Gustawicza.

W KRAKOWIE.
W DRUKARNI WŁ. L. ANCZYCA I SPÓŁKI,
pod zarządem Jana Gadowskiego.
NAKŁADEM FUNDUSZU NAUKOWEGO.
1886.

Osobne odbicie ze Sprawozdania Gimn. św. Anny za rok szk. 1886.

ZASADY GONIOMETRYI I TRYGONOMETRYI PROSTOKREŚLNÉJ

NA PODSTAWIE

RZUTÓW ALGEBRAICZNYCH.

PRZEZ

BRONISŁAWA GUSTAWICZA.

W niniejszéj rozprawce rozwinąłem, niezależnie od nauki o kole, główne wzory goniometryczne i trygonometryczne. Wyprowadzenie tychże wzorów, o ile tego wymaga nauka trygonometryi w szkołach średnich, oparłem na rzutach algebraicznych, które zdaniem moim w nauce szkolnéj powinny znaleść większe uwzględnienie, gdyż dostarczają one nadzwyczaj znacznego uproszczenia w dowodzeniu twierdzeń we wszystkich działach geometryi, przedewszystkim zaś w analitycznéj.

Przy układaniu téj rozprawki korzystałem z następujących dzieł:

Cagnoli. Trigonométrie rectiligne et sphérique, traduit de l'italien par Chompré. II. édition. Paris. 1808. (wyborne dzieło).

Dr. W. Matzka. Lehre von der Realität vorgeblich imaginärer Grössen. Prag. 1850.

Dr. I. Dienger. Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Stuttgart. 1867.

G. H. Niewęgłowski. Trygonometrya. Paryż. 1870.
Th. Lauda. Zum trigonometrischen Unterrichte an Mittelschulen. X. Jahresb. der Realschule in Leitmeritz. 1876.
Dr. R. Baltzer. Die Elemente der Mathematik. II. Bd. Leipzig. 1878. (znakomite dzieło matematyczne).
A. Wapienik. Bemerkungen zum trigonometrischen Unterrichte an Mittelschulen. X. Jahresb. des k. k. Gymnasiums zu Freistadt. 1880.
Dr. Wł. Zajączkowski. Wykład trygonometryi płaskiéj i kulistéj. Lwów. 1881.
Dr. M. Koch. Behandlung der Goniometrie und Trigonometrie in der Mittelschule. Programm der deutschen k. k. Staats-Realschule in Budweis. 1883.
I. Todhunter. A treatise on plane co-ordinate geometry. London. 1883. (Chapter XVII.).
— Plane trigonometry for the use of colleges and schools. London 1886.

Żałuję wszelako, iż wśród téj pracy nie mogłem korzystać z znakomitych dzieł matematycznych *Möbiusa*, gdyż biblioteki nasze krajowe takowych nie posiadają.

W Krakowie, w czerwcu 1886.

I. O rzutach algebraicznych w ogólności.

1. Jeżeli z danego punktu O wykreślimy proste linije do wszystkich punktów utworu przestrzennego i przetniemy owe proste płaszczyzną E, to zbiór wszystkich punktów przecięć zowiemy rzutem *(die projection)* utworu na płaszczyznę.

Ów dany punkt O, w którym się schodzą wszystkie owe proste, do punktów utworu przestrzennego wykreślone, zowie się środkiem rzutowym *(das projectionscentrum)*, płaszczyzna zaś E, na którą rzucamy, rzutnią *(die projectionsfläche)*; proste linije, wychodzące z środka O i przechodzące przez punkty utworu przestrzennego, zowiemy rzucającymi *(projicierende geraden)*, a w powyższy sposób otrzymany rzut środkowym *(die centrale projection)*.

Jeżeli środek rzutowy O oddali się w nieskończoność, to linije rzucające przybiorą kierunek do siebie równoległy; w ten sposób powstały rzut zowiemy równoległym *(die parallele projection)*.

Jeżeli rzucające nietylko są do siebie równoległe, lecz także stoją prostopadle do rzutni, otrzymujemy rzut ortogonalny czyli prostopadły *(die orthogonale projection)*.

Jeżeli środek rzutowy i utwory geometryczne płaskie, mające się rzucić, leżą w jednéj płaszczyźnie, to wszystkie rzucające leżą w téjżesaméj płaszczyźnie, którą rzutnia przecina w linii prostéj. W tym przypadku rzuty wszystkich punktów danego utworu płaskiego przypadają na owę prostą, którą osią rzutową *(die projectionsaxe)* zowiemy. Również i tutaj rozróżniamy rzuty środkowy i równoległy.

Jeżeli w rzucie równoległym rzucające są prostopadłe do osi, otrzymujemy rzut prostopadły czyli ortogonalny. Tylko o takim rzucie mówić będziemy w dalszym ciągu naszéj rozprawki.

2. Rzutem punktu M na oś rzutową $X'X$ jest spodek m prostopadłéj *Mm*, z tego punktu na oś wykreślonéj (fig. 1.).

3. Rzutem odcinka AB linii prostéj na oś rzutową $X'X$ jest albo linija prosta ab (fig. 2. i 3.) albo téż punkt a (fig. 4.). W ostatnim przypadku dana prosta jest prostopadłą do osi rzutowéj $X'X$.

4. Każda prosta AB ma dwa kierunki wprost sobie przeciwne. Jeden kierunek idzie od A do B, który oznaczamy przez *(AB)*; w tym razie punkt A jest początkiem danéj prostéj. Drugi zaś kierunek, przeciwny tamtemu, idzie od B do A, który wyrażamy przez *(BA)*; tutaj punkt B jest początkiem danéj prostéj.

5. Te obydwa kierunki należy przyjąć także dla osi rzutowéj.

Jeżeli kierunek rzutu danéj prostéj zgadza się z dodatnim kierunkiem osi rzutowéj, rzut téj prostéj jest dodatni; jeżeli zaś z odjemnym kierunkiem osi rzutowéj, to jest odjemny.

Rzuty, którym nadajemy kierunek zawisły od kierunku osi rzutowéj, zowiemy algebraicznymi *(algebraische projectionen)*.

6. Aby oznaczyć, czy rzut danego odcinka linii prostéj jest dodatnim, czy téż odjemnym, należy nasamprzód wyznaczyć dodatni kierunek osi rzutowéj i przyjąć jeden punkt skrajny danéj prostéj, rzucić się mającéj, za początek, drugi zaś za koniec.

Jeżeli $X'X$ (fig. 2.) jest dodatnim kierunkiem osi rzutowéj, a punkt A początkiem danéj prostéj AB, to jéj rzut ab jest dodatnim; jeżeli zaś punkt B przyjmiemy za początek prostéj BA, to jéj rzut ba jest odjemny, gdyż jest przeciwny dodatniemu kierunkowi osi rzutowéj $X'X$.

7. **Twierdzenie.** *Dwa odcinki proste, jednakowo nachylone do osi rzutowéj, są wprost proporcyonalne do swych rzutów.*

Dowód. Dane są dwa odcinki proste MN i PR (fig. 5.); punkty skrajne M i P są ich początkami; zatym ich rzuty mn i pr są dodatnie. Kąty nachylenia tych odcinków względem osi $X'X$ znajdziemy, wykreśliwszy przez początek każdego z odcinków równoległą do osi $X'X$. Ponieważ:

$$\triangle\ \mathrm{MSN} \sim \triangle\ \mathrm{PTR},$$

przeto:

$$\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{MS}} = \frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{PT}},$$

czyli:

$$\frac{MN}{mn} = \frac{PR}{pr}. \quad \text{C. b. d. o.}$$

8. Dany odcinek linii prostéj rzucić możemy na dwie osi rzutowe, do siebie prostopadłe. W takim razie otrzymujemy dwa rzuty, o których wypowiedzieć możemy następujące twierdzenie:

Rzut danego odcinka na jednę z dwu osi prostopadłych równa się różnicy rzucających na drugą oś rzutową.

Albowiem (fig. 6.):

$$a'b' = CB = Bb'' - Cb'',$$

czyli:

$$a'b' = Bb'' - Aa'';$$

podobnież:

$$a''b'' = Aa' - Bb'.$$

9. Jeżeli rzut mn (fig. 7.) danego odcinka prostego MN na oś rzutową $X'X$ rzucimy na tenże odcinek MN, lub jego przedłużenie, otrzymamy rzut $m'n'$, który zowiemy rzutem wstecznym danego odcinka *(die rückprojection)*.

10. **Twierdzenie.** *Rzut główny danego odcinka prostego jest średnią geometrycznie proporcyjonalną między danym odcinkiem prostym a jego rzutem wstecznym.*

Dowód. Wykreśliwszy (fig. 7.):

$$MS \parallel X'X$$

i

$$mT \parallel m'N,$$

otrzymujemy dwa trójkąty podobne, MNS i Tmn. Z podobieństwa tychże wynika:

$$\frac{MN}{MS} = \frac{mn}{mT},$$

czyli:

$$\frac{MN}{mn} = \frac{mn}{m'n'}.$$

Oznaczywszy odpowiednio przez a, a', a'' długości odcinków Mn, mn, $m'n'$, mieć będziemy:

$$\frac{a}{a'} = \frac{a'}{a''},$$

czyli:

$$a'^2 = a.a''. \quad \text{C. b. d. o.}$$

11. **Twierdzenie.** *Jeżeli dany odcinek prosty rzucimy na dwie osi prostopadłe, a otrzymane rzuty na dany odcinek prosty, to suma obu rzutów wstecznych równa się danemu odcinkowi.*

Dowód. Osi $X'X$ i $Y'Y$ stoją na sobie prostopadle w O (fig. 8.). Dany odcinek prosty MN rzucamy na obie osi i otrzymujemy jego rzuty mn i $m'n'$; rzuty zaś wsteczne są $m''n''$ i $m'''n'''$. Udowodnić mamy, że:

$$m''n'' + m'''n''' = MN.$$

W tym celu przenieśmy początek układu osi O do punktu M i przesuńmy nowe osi $MX_1 \| OX$ i $MY_1 \| OY$; w takim razie Mn_1 jest rzutem danego odcinka MN na oś MX_1, a Mn_1'' wstecznym jego rzutem; następnie Mn_1' jest rzutem tegoż odcinka MN na oś MY_1, a Mn_1''' jego rzutem wstecznym. Wskutek tego wielkość rzutów wcale się nie zmieni. Z figury bowiem okazuje się, że:

$$\begin{aligned} Mn_1 &= mn, \\ Mn_1' &= m'n'; \end{aligned}$$

jakoteż łatwo okazać, że:

$$Mn_1'' = m''n'',$$

i

$$Mn_1''' = m'''n''' = n_1''N,$$

wskutek tego:

$$\begin{aligned} m''n'' + m'''n''' &= Mn_1'' + Mn_1''' \\ &= Mn_1'' + n_1''N \\ &= MN. \end{aligned}$$

C. b. d. o.

12. Połóżmy:

$$MN = a,\ mn = b,\ m'n' = c,$$
$$m''n'' = b',\ m'''n''' = c',$$

gdzie a, b, c, b', c' oznaczają długości odpowiednich odcinków prostych; natenczas według ust. 10. otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a.b' &= b^2, \\ a.c' &= c^2. \end{aligned}$$

Zatym:

$$a\ (b' + c') = b^2 + c^2,$$

a że na podstawie ust. 11.:

$$b' + c' = a,$$

przeto:

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

t. zn.: *kwadrat wystawiony na danym odcinku prostym równa się sumie kwadratów wystawionych na obu jego rzutach.* Jest to znane *twierdzenie Pitagorasa.*

13. **Twierdzenie.** *Rzut wielokąta zamkniętego jest zero na wszelkiéj osi.*

Dowód. Niech będzie dany wielokąt $ABCDEF$ zamknięty jakikolwiek (fig. 9.); rzućmy go na oś $X'X$; natenczas punkty a, b, c, d, e, f są odpowiednimi rzutami wierzchołków jego A, B, C, D, E, F. Załóżmy, że kierunek dodatni osi wskazuje $(X'X)$ i że punkt ruchomy, wychodząc z A, obiega obwód w kierunku strzałek i powraca do A; natenczas rzut jego na $X'X$ opisuje rzuty wszystkich boków wielokąta. Te rzuty są dodatnie albo odjemne, według tego, czy punkt ruchomy bieży w kierunku dodatnim, czy téż odjemnym osi. Dodatnimi są: ab, bc, de; odjemnymi zaś: cd, ef, fa. Zatym suma algebraiczna wszystkich rzutów na oś $X'X$ jest zero, jakiekolwiek ma ta oś położenie.

II. Wyprowadzenie wzorów goniometrycznych i trygonometrycznych.

1. Dane są dwie, na sobie prostopadle stojące osi rzutowe $X'X$ i $Y'Y$ (fig. 10.), przecinające się w punkcie O, na które rzucamy odcinki proste. Oś $X'X$ nazywamy główną *(die hauptaxe)*, oś $Y'Y$ boczną *(die nebenaxe)*; skutkiem tego rzut na oś główną nazwiemy rzutem głównym *(die hauptprojection)*, a na oś boczną rzutem bocznym *(die nebenprojection)*.

2. Stosunek rzutów do rzuconego odcinka prostego zależy od kąta, jaki tenże odcinek prosty tworzy z osią główną. Przy wyznaczaniu kąta nachylenia danego odcinka prostego do osi głównéj, należy uwzględnić dodatni kierunek tak osi rzutowéj, jak mającego się rzucić odcinka prostego.

3. Kąt ów możemy w dwojaki sposób wyznaczyć: a) przez początek mającego się rzucić odcinka prostego kreślimy równoległą do dodatniego kierunku osi głównéj; albo b) przedłużamy dany odcinek prosty aż do spotkania się z osią rzutową.

Niech będzie dany odcinek prosty MN (fig. 10.); skrajność M jego początkiem, oś OX dodatnią, a $MP \parallel OX$; natenczas dany odcinek MN z główną osią rzutową $X'X$ tworzy kąt $P\hat{M}N$, albo $X\hat{M'}N$, obadwa równe sobie jako kąty odpowiednie.

Gdy dany jest odcinek prosty MN (fig. 11.), a punkt M jest jego początkiem, natenczas wyrysowawszy $MP \parallel OX$, jakotéż przedłużywszy MN aż do spotkania się z główną osią rzutową, otrzymamy kąt $P\hat{M}N = X\hat{O}N'$, jaki dany odcinek prosty MN tworzy z osią główną rzutową.

4. Niech będzie dany odcinek prosty *MN* (fig. 12.), odniesiony do układu osi rzutowych prostokątnych *YOX;* obierzmy na nim punkty *A*, *B*, *C*, *D*,.... i szukajmy rzutów odcinków *AB, BC, CD*.... na obydwu osiach; więc ich rzuty główne są: *ab*, *bc, cd*...., a rzuty boczne: *a'b'*, *b'c'*, *c'd'*.....

Rzut główny i boczny pozostają do rzuconego odcinka w pewnym, oznaczonym stosunku. Ten stosunek zależy tylko od wielkości kąta, który dodatni kierunek odcinka tworzy z dodatnim kierunkiem osi głównéj. Otóż te stosunki zowiemy funkcyjami goniometrycznymi lub kątowymi *(goniometrische funktionen od. winkelfunktionen)*.

Kąt, który dodatni kierunek odcinka prostego tworzy z osią rzutową, zowiemy także kątem rzutowym *(der projectionswinkel)*. Dopóki kąt ten się nie zmienia, to rzuty z odcinkiem rzuconym tworzą zawsze tensam stosunek, niezależny od wielkości odcinka rzuconego. Albowiem:

$$\frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{cd}{CD} = \ldots.,$$

jakotéż:

$$\frac{a'b'}{AB} = \frac{b'c'}{BC} = \frac{c'd'}{CD} = \ldots.$$

5. Oznaczmy rzucony odcinek *MN* (fig. 13.) przez *k*, rzut główny *mn* przez *a,* boczny *m'n'* przez *b,* a kąt, który tworzy dodatni kierunek *MN* z dodatnim kierunkiem osi rzutowéj *OX*, przez α; natenczas nazwiemy:

α) stosunek głównego rzutu *a* do odcinka rzuconego *k* dostawą kąta α, co piszemy:

$$\frac{a}{k} = \mathrm{dost}\alpha = \cos\alpha \ \textit{(cosinus)};$$

β) stosunek rzutu bocznego *b* do odcinka rzuconego *k* wstawą kąta α, co piszemy:

$$\frac{b}{k} = \mathrm{wst}\alpha = \sin\alpha \ \textit{(sinus)};$$

γ) stosunek rzutu bocznego *b* do rzutu głównego *a* danego odcinka prostego *k* styczną kąta α, co piszemy:

$$\frac{b}{a} = \mathrm{st}\alpha = \mathrm{tg}\alpha \ \textit{(tangens)}.$$

6. Odwróciwszy powyższe stosunki, otrzymamy dalsze trzy funkcyje kątowe, tj. sieczną, dosieczną i dotyczną; a więc:

α) $\frac{k}{a} = \mathrm{siecz}\alpha = \sec\alpha$ *(secans);*

β) $\frac{k}{b}$ = dosieczα = cosecα *(cosecans);*

γ) $\frac{a}{b}$ = dotyczα = ctgα *(cotangens).*

7. *Związki między funkcyjami kątowymi tegożsamego kąta.*

a) Ponieważ:

$$\sin\alpha = \frac{b}{k},$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{k},$$

przeto:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{b^2 + a^2}{k^2},$$

a że podług ust. I. 12.:

$$a^2 + b^2 = k^2,$$

więc:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (1)$$

b) Ponieważ:

$$\sec\alpha = \frac{k}{a},$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{b}{a},$$

przeto:

$$\sec^2\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{k^2 - b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1,$$

czyli:

$$\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha. \qquad (2)$$

c) Ponieważ:

$$\mathrm{cosec}\alpha = \frac{k}{b},$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{a}{b},$$

przeto:

$$\mathrm{cosec}^2\alpha - \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{k^2 - a^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2} = 1,$$

czyli:

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2\alpha. \tag{3}$$

d) Ponieważ:

$$\sin\alpha = \frac{b}{k},$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{k},$$

przeto:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{b}{k} : \frac{a}{k} = \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\alpha;$$

jakotéż:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{a}{k} : \frac{b}{k} = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg}\alpha;$$

zatym mamy:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \tag{4}$$

i

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{5}$$

e) Ponieważ:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a},$$

więc:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{a}{b};$$

a że:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b},$$

przeto:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \tag{6}$$

jakotéż:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}. \tag{7}$$

f) Ponieważ:

$$\cos\alpha = \frac{a}{k},$$

więc:

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{k}{a};$$

a że:

$$\sec\alpha = \frac{k}{a},$$

przeto:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}. \tag{8}$$

g) Ponieważ:

$$\sin\alpha = \frac{b}{k},$$

więc:

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{k}{b};$$

a że:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{k}{b},$$

przeto:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}. \tag{9}$$

Uwaga. Jeżeli jedna z funkcyj goniometrycznych danego kąta jest wiadomą, można zapomocą wzorów (1)—(9) wyznaczyć wszystkie inne.

8. *Znaki funkcyj goniometrycznych.*

a) Dostawa i sieczna są dodatnie albo odjemne, stosownie do tego, czy rzut główny jest dodatni, czy też odjemny. Zatym, jak to łatwo rysunkiem wykazać, funkcyje te są dodatnie dla kątów większych od 0^0 a mniejszych od R, i większych od $3R$ a mniejszych od $4R$. Dla kątów zaś większych od R a mniejszych od $3R$, funkcyje te są odjemne.

b) Wstawa i dosieczna są dodatnie albo odjemne, stosownie do tego, czy rzut boczny jest dodatni, czy téż odjemny. Dla wszelkich kątów większych od 0^0 a mniejszych od $2R$, są te dwie funkcyje dodatnie, a dla kątów większych od $2R$ a mniejszych od $4R$, są odjemne.

c) Styczna i dotyczna są dodatnie, gdy rzuty główny i boczny mają zgodne znaki (albo dodatnie, albo odjemne); są zasię odjemne, gdy oba te rzuty są znaków niezgodnych (tj. dodatni i odjemny, albo odjemny i dodatni). Zatym styczna i dotyczna są dodatnie dla wszelkich kątów większych od 0^0 a mniejszych od R, i większych od $2R$ a mniejszych od $3R$. Jeżeli zaś kąty są większe od R a mniejsze od $2R$, jakotéż większe od $3R$ a mniejsze od $4R$, to obiedwie funkcyje są odjemne.

9. *Graniczne wartości liczebne funkcyj goniometrycznych.*

a) Dla dostawy i wstawy.

α) Jeżeli mający się rzucić odcinek prosty MN jest równoległy do osi głównéj, a kierunki obu tych prostych są zgodne, to rzut główny równa się danemu odcinkowi, więc $k = a$.—W tym przypadku kąt, jaki tworzy dany odcinek prosty z osią główną, jest 0^0; więc:

$$\cos 0^0 = \frac{a}{k} = \frac{k}{k} = 1,$$

$$\cos 0^0 = +1. \tag{10}$$

β) Dany odcinek prosty stoi atoli prostopadle do osi bocznéj, a rzut jego boczny $b = 0$; więc w tym przypadku mamy:

$$\sin 0^0 = \frac{b}{k} = \frac{0}{k} = 0,$$

$$\sin 0^0 = 0. \tag{11}$$

γ) Jeżeli kierunek mającego się rzucić odcinka prostego, równoległego do osi głównéj, jest przeciwny kierunkowi osi głównéj, natenczas 1) $a = -k$, 2) kąt, jaki tworzy dany odcinek z osią główną, wynosi 180^0, 3) rzut boczny $b = 0$. Zatym otrzymamy:

$$\cos 180^0 = \frac{a}{k} = \frac{-k}{k} = -1,$$

$$\cos 180^0 = -1; \tag{12}$$

$$\sin 180^0 = \frac{b}{k} = \frac{0}{k} = 0,$$

$$\sin 180^0 = 0. \tag{13}$$

δ) Jeżeli mający się rzucić odcinek prosty MN stoi prostopadle do osi głównéj, to główny jego rzut $a = 0$. — W tym przypadku kąt, jaki odcinek prosty tworzy z osią główną, wynosi 90^0 albo 270^0, stosownie do tego, czy kierunki odcinka prostego i osi bocznéj są zgodne, czy téż niezgodne; rzut zaś boczny $b = +k$, albo $b = -k$. Zatym otrzymujemy:

$$\cos 90^0 = \cos 270^0 = \frac{a}{k} = \frac{0}{k} = 0,$$

$$\cos 90^0 = \cos 270^0 = 0; \tag{14}$$

$$\sin 90^0 = \frac{b}{k} = \frac{+k}{k} = +1,$$

$$\sin 90^0 = +1; \tag{15}$$

$$\sin 270^0 = \frac{b}{k} = \frac{-k}{k} = -1,$$

$$\sin 270^0 = -1. \tag{16}$$

W podobny sposób znajdziemy, że:

$$\left.\begin{array}{llll} \mathrm{tg}\ 0^0 = 0; & \mathrm{ctg}\ 0^0 = +\infty; \\ \mathrm{tg}\ 90^0 = +\infty; & \mathrm{ctg}\ 90^0 = 0; \\ \mathrm{tg}\ 180^0 = 0; & \mathrm{ctg}\ 180^0 = -\infty; \\ \mathrm{tg}\ 270^0 = -\infty; & \mathrm{ctg}\ 270^0 = 0; \end{array}\right\} \quad (17)-(18)$$

jakotéż:

$$\left.\begin{array}{ll} \sec 0^0 = +1; & \mathrm{cosec}\ 0^0 = +\infty; \\ \sec 90^0 = +\infty; & \mathrm{cosec}\ 90^0 = +1; \\ \sec 180^0 = -1; & \mathrm{cosec}\ 180^0 = -\infty; \\ \sec 270^0 = -\infty; & \mathrm{cosec}\ 270^0 = -1. \end{array}\right\} \quad (19)-(20)$$

Uwaga. Widzimy z powyższych obliczeń, że bezwzględna wartość wstawy i dostawy leży między granicami $+1$ i -1; stycznéj i dotycznéj między $-\infty$ i $+\infty$; siecznéj i dosiecznéj między $-\infty$ i -1 a między $+1$ i $+\infty$.

10. *Szczególne wartości funkcyj goniometrycznych dla kątów 30⁰, 45⁰, 60⁰.*

a) *Dla kąta 45⁰.*

Niech odcinek prosty $MN = k$ (fig. 14.) tworzy z osią $X'X$ kąt $\alpha = 45^0$; a jego rzuty niech będą $mn = a$ i $m'n' = b$; natenczas według ust. I. 12. możemy napisać:

$$k^2 = a^2 + b^2,$$

a że, jak z figury się okazuje, $a = b$, przeto:

$$k^2 = 2b^2;$$

stąd:

$$\left(\frac{b}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}, \text{ czyli: } \frac{b}{k} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

ponieważ:

$$\frac{b}{k} = \sin 45^0,$$

przeto:

$$\sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

Podobnie znajdziemy, że:

$$\left.\begin{aligned}
\cos 45^0 &= \frac{a}{k} = \frac{1}{\sqrt{2}},\\
\operatorname{tg} 45^0 &= \frac{b}{a} = 1,\\
\operatorname{ctg} 45^0 &= \frac{a}{b} = 1,\\
\sec 45^0 &= \frac{k}{a} = \sqrt{2},\\
\operatorname{cosec} 45^0 &= \frac{k}{b} = \sqrt{2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

b) *Dla kąta 60⁰.*

Niech odcinek prosty $MN = k$ (fig. 15.) tworzy z osią główną $X'X$ kąt $\alpha = 60^0$, a jego rzuty niech będą $mn = a$ i $m'n' = b$; natenczas:

$$\cos 60^0 = \frac{a}{k},$$

a że:

$$a = \frac{k}{2},$$

więc:

$$\cos 60^0 = \frac{1}{2}. \qquad (22)$$

Ponieważ:

$$k^2 = a^2 + b^2,$$

czyli:

$$k^2 - \frac{k^2}{4} = b^2,$$

czyli:

$$\frac{3\,k^2}{4} = b^2,$$

stąd:

$$\left(\frac{b}{k}\right)^2 = \frac{3}{4},$$

a że:

$$\frac{b}{k} = \sin 60^0,$$

więc:

$$\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Podobnie znajdziemy, że

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} 60^0 &= \sqrt{3}, \\ \operatorname{ctg} 60^0 &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \sec 60^0 &= 2, \\ \operatorname{cosec} 60^0 &= \frac{2}{\sqrt{3}}. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

c) *Dla kąta* 30^0.

Niech dany odcinek prosty $MN = k$ (fig. 16.), tworzy z osią główną $X'X$ kąt $\alpha = 30^0$, a jego rzuty niech będą $mn = a$, $m'n' = b$; natenczas:

$$k^2 = a^2 + b^2,$$

a że, jak to z figury się okazuje,

$$b = \frac{k}{2},$$

przeto:

$$k^2 - \frac{k^2}{4} = a^2,$$

czyli:

$$\frac{3\,k^2}{4} = a^2,$$

stąd:

$$\frac{a}{k} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

a że:

$$\frac{a}{k} = \cos 30^0,$$

przeto:

$$\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad (24)$$

Ponieważ:

$$\sin 30^0 = \frac{b}{k},$$

a że:

$$b = \frac{k}{2},$$

więc:

$$\left.\begin{array}{ll} \sin 30^0 & = \frac{1}{2}. \\ \text{Podobnie znajdziemy, że:} & \\ \operatorname{tg} 30^0 & = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{ctg} 30^0 & = \sqrt{3}, \\ \sec 30^0 & = \frac{2}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{cosec} 30^0 & = 2\ . \end{array}\right\} \tag{25}$$

11. *Odjemne kąty*. Jeżeli za dodatnie kąty uważamy takie kąty, jakie ramię ruchome $M'N$ tworzy z stałą osią rzutową $X'X$, obracając się około stałego punktu M' w lewo, to za odjemne uważać należy kąty powstające wskutek obrotu ramienia ruchomego w przeciwnym kierunku, tj. w prawo (fig. 17.).

Jeżeli kąt $X\hat{M'}N = +\alpha$, to kąt $X\hat{M'}N_1 = -\alpha$. W tym przypadku rzuty główne są sobie równe i zgodnych znaków, a rzuty boczne równe, ale znaków niezgodnych. Stąd wypływa, że, skoro:

$$\cos\alpha = \frac{a}{k},$$

$$\cos(-\alpha) = \frac{a}{k},$$

przeto:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha. \tag{26}$$

Następnie, skoro:

$$\sin\alpha = \frac{b}{k},$$

$$\sin(-\alpha) = \frac{-b}{k},$$

przeto:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha. \tag{27}$$

Podobnie znajdziemy, że:

$$\left.\begin{aligned} tg(-\alpha) &= -\ tg\alpha, \\ ctg(-\alpha) &= -\ ctg\alpha, \\ sec(-\alpha) &= sec\alpha, \\ cosec(-\alpha) &= -\ cosec\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Widzimy zatym, że dostawa i sieczna kąta odjemnego są tymisamymi, co dostawa i sieczna kąta dodatniego; wszystkie inne funkcyje goniometryczne kąta odjemnego równają się odpowiednim funkcyjom kąta dodatniego, ale są znaku odjemnego.

12. *Dopełnienia kątów.* Dwa kąty wzajem się dopełniające *(complementwinkel)* wyrażamy przez α i $90^0 - \alpha$.

Niech będą dane dwie osi $X'X$ i $Y'Y$, prostopadle w O na sobie stojące (fig. 18.); niech dany odcinek prosty $OM = k$ tworzy z osią główną $X'X$ kąt $M\hat{O}X = \alpha$; natenczas kąt $M\hat{O}Y = 90^0 - \alpha$. Rzuty danego odcinka prostego są $Om = a$ i $Om' = b$; natenczas:

$$\frac{b}{k} = \sin\alpha,$$

$$\frac{a}{k} = \cos\alpha.$$

Przyjmijmy teraz oś $Y'Y$ za oś główną, a oś $X'X$ za boczną, natenczas b stanie się rzutem głównym, a zaś rzutem bocznym danego odcinka prostego OM, którego kąt nachylenia do osi głównéj $Y'Y$ wynosi $(90^0 - \alpha)$. Więc napisać możemy, że:

$$\frac{b}{k} = \cos\,(90^0 - \alpha),$$

$$\frac{a}{k} = \sin\,(90^0 - \alpha).$$

Z porównania powyższych równań wynikają relacyje:

$$\sin\,(90^0 - \alpha) = \cos\alpha,$$
$$\cos\,(90^0 - \alpha) = \sin a.$$

Podobnie otrzymamy:

$$tg\,(90^0 - \alpha) = ctg\alpha,$$
$$ctg\,(90^0 - \alpha) = tg\alpha,$$
$$sec\,(90^0 - \alpha) = cosec\alpha,$$
$$cosec\,(90^0 - \alpha) = sec\alpha. \qquad (29)$$

13. *Spełnienia kątów.* Dwa kąty wzajem się spełniające *(supplementwinkel)* wyrażamy przez α i $180^0 - \alpha$.

Niech będą dane dwie osi $X'X$ i $Y'Y$, prostopadle w O na sobie stojące (fig. 19.); niech dany odcinek prosty $OM = k$ tworzy z dodatnią osią główną OX kąt $M\hat{O}X = \alpha$; natenczas kąt $MOX' = 180^0 - \alpha$. Rzuty danego odcinka prostego są $Om = a$ i $Om' = b$; nateczas:

$$\frac{b}{k} = \sin\alpha,$$

$$\frac{a}{k} = \cos\alpha.$$

Przyjmijmy teraz oś OX' za dodatnią; natenczas rzut główny a odcinka prostego OM będzie odjemnego znaku, tj. $Om = -a$; boczny zaś rzut jego $Om' = b$ pozostanie niezmienny. Ze względu na tę oś OX' i kąt $180^0 - \alpha$, możemy ustawić relacyje:

$$\frac{b}{k} = \sin(180^0 - \alpha),$$

$$\frac{-a}{k} = \cos(180^0 - \alpha).$$

Porównawszy powyższe zrównania, otrzymujemy:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha, \\
&\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha; \\
\text{podobnie:}\quad & \\
&\mathrm{tg}(180^0 - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha, \\
&\mathrm{ctg}(180^0 - \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha, \\
&\sec(180^0 - \alpha) = -\sec\alpha, \\
&\mathrm{cosec}(180^0 - \alpha) = \mathrm{cosec}\alpha.
\end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Widzimy zatym, że wstawa i dosieczna danego kąta są względnie tymisamymi, co wstawa i dosieczna kąta spełniającego; pozostałe zaś funkcyje goniometryczne danego kąta są równe odpowiednim funkcyjom kąta spełniającego, ale są znaku odjemnego.

14. *Dwa kąty, których różnica wynosi 90⁰.* Takie dwa kąty wyrażamy przez α i $90^0 + \alpha$.

Podstawmy we wzorach (29) $+\alpha$ za $-\alpha$ i $-\alpha$ za $+\alpha$, to bacząc na ust. 11. tego rozdziału, otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin(90^0 + \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \\
&\cos(90^0 + \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha,
\end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}(90^0+\alpha) &= \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha, \\ \operatorname{ctg}(90^0+\alpha) &= \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \\ \sec(90^0+\alpha) &= \operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha, \\ \operatorname{cosec}(90^0+\alpha) &= \sec(-\alpha) = \sec\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

15. *Dwa kąty, których różnica wynosi 180⁰.* Takie dwa kąty wyrażamy przez α i $180^0 + \alpha$. Użyjmy powyższego podstawienia we wzorach (30), a bacząc na ust. 11. tego rozdziału, otrzymamy następujące relacyje:

$$\left.\begin{aligned} \sin(180^0+\alpha) &= \sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \\ \cos(180^0+\alpha) &= -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha, \\ \operatorname{tg}(180^0+\alpha) &= -\operatorname{tg}(-\alpha) = \operatorname{tg}\alpha, \\ \operatorname{ctg}(180^0+\alpha) &= -\operatorname{ctg}(-\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha, \\ \sec(180^0+\alpha) &= -\sec(-\alpha) = -\sec\alpha, \\ \operatorname{cosec}(180^0+\alpha) &= \operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

16. Na podstawie ust. 10. i ust. 12.—15. możemy z łatwością wyznaczyć liczebne wartości funkcyj goniometrycznych dla kątów 120^0, 135^0, 150^0 i t. d. Np.:

$$\sin 120^0 = \sin(90^0 + 30^0) = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 120^0 = \cos(90^0 + 30^0) = -\sin 30^0 = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 135^0 = \operatorname{tg}(180^0 - 45^0) = -\operatorname{tg} 45^0 = -1;$$

$$\sec 150^0 = \sec(90^0 + 60^0) = -\operatorname{cosec} 60^0 = -\frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$\sin 600^0 = \sin(360^0 + 240^0) = \sin 240^0 = \sin(180^0 + 60^0) = \\ = -\sin 60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg}(-1000^0) = -\operatorname{tg} 1000^0 = -\operatorname{tg}(2.\,360^0 + 280^0) = \\ = -\operatorname{tg} 280^0 = -\operatorname{tg}(180^0 + 100^0) = -\operatorname{tg} 100^0 = \\ = -\operatorname{tg}(180^0 - 80^0) = \operatorname{tg} 80^0$$

i t. d.

17. Następująca tabliczka przedstawia wartości funkcyj goniometrycznych dla pewnych kątów, obliczone na podstawie poprzednich ustępów.

	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tangens	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cotangens	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞
secans	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	-1
cosecans	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞

18. Jeżeli MN (fig. 13.) jest danym odcinkiem prostym, odniesionym do układu osi prostokątnych, jego rzuty są $mn = a$ i $m'n' = b$, a kąt nachylenia danego odcinka do osi $X'X$ jest α, natenczas, jak wiadomo, mamy:

$$\frac{a}{k} = \cos\alpha, \quad \frac{b}{k} = \sin\alpha, \quad \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \frac{a}{b} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Z równań tych otrzymujemy relacyje:

$$\left.\begin{aligned} a &= k.\ \cos\alpha, \\ a &= b.\ \operatorname{ctg}\alpha, \\ &\text{jakoteż:} \\ b &= k.\ \sin\alpha, \\ b &= a.\ \operatorname{tg}\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

t. zn.: *a) rzut główny danego odcinka prostego równa się temuż odcinkowi pomnożonemu przez dostawę kąta rzutowego;* albo:

β) *rzut główny danego odcinka prostego równa się bocznemu jego rzutowi pomnożonemu przez dotyczną kąta rzutowego;*

γ) *rzut boczny danego odcinka prostego równa się temuż odcinkowi pomnożonemu przez wstawę kąta rzutowego;* albo:

δ) *rzut boczny danego odcinka prostego równa się głównemu jego rzutowi pomnożonemu przez styczną kąta rzutowego.*

Ponieważ przyprostokątne trójkąta prostokątnego należy uważać za rzuty główny i boczny przeciwprostokątnéj, przeto powyższe twierdzenia wysłowić możemy w sposób następujący:

α) *każda przyprostokątna równa się przeciwprostokątnéj pomnożonéj przez wstawę kąta przeciwległego lub dostawę kąta przyległego;*

β) *każda przyprostokątna równa się drugiéj przyprostokątnéj przez styczną kąta przeciwległego lub dotyczną kąta przyległego.*

Na powyższych twierdzeniach i twierdzeniu Pitagorasa, jako na twierdzeniach zasadniczych, opiera się rozwiązanie trójkątów prostokątnych.

19. *Wzory Möbiusa.* Oznaczmy proste, na których leżą boki $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ danego trójkąta (fig. 20.), przez f, g, h, a dowolną prostą w płaszczyźnie ABC przez p. Następnie przyjąwszy stale dodatni kierunek obrotu i dodatnie kierunki prostych f, g, h, p, otrzymujemy tymsamym co do znaków dokładnie wyznaczone odcinki proste i kąty danéj figury, między którymi zachodzą następujące związki:

$$\left.\begin{array}{l} a.\cos(pf) + b.\cos(pg) + c.\cos(ph) = 0, \\ a.\sin(pf) + b.\sin(pg) + c.\sin(ph) = 0, \\ a:b:c = \sin(gh):\sin(hf):\sin(fg). \end{array}\right\} \quad (34)$$

Dowód. Oznaczmy przez A_1, B_1, C_1 rzuty ortogonalne wierzchołków A, B, C na prostą p, natenczas podług ust. 18.:

$$A_1 B_1 = c.\cos(ph),$$
$$C_1 A_1 = b.\cos(pg),$$
$$B_1 C_1 = a.\cos(pf).$$

Ponieważ (ust. I. 13.):

$$B_1 C_1 + C_1 A_1 + A_1 B_1 = 0,$$

przeto otrzymamy piérwszy z powyższych wzorów:

$$a.\cos(pf) + b.\cos(pg) + c.\cos(ph) = 0.$$

Obróćmy prostą p o kąt 90^0; natenczas kąt (ph) przejdzie w $(ph - 90^0)$, a $\cos(ph)$ w $\cos(ph - 90^0) = \cos[-(90^0 - ph)] =$

$= \cos(90^0 - ph) = \sin(ph)$, i t. d. Skutkiem tego powyższy wzór przybierze postać następującą:

$$a . \sin(pf) + b . \sin(pg) + c . \sin(ph) = 0.$$

Nadajmyż prostéj p takie położenie, aby raz zeszła się z prostą f, drugi raz z prostą g; natenczas $\sin(ff) = (\sin gg) = 0$, a ostatnie równanie przejdzie w następujące:

$$b . \sin(fg) + c . \sin(fh) = 0,$$

i

$$a . \sin(gf) + c . \sin(gh) = 0;$$

stąd:

$$b . \sin(fg) = c . \sin(hf),$$

$$a . \sin(fg) = c . \sin(gh),$$

czyli:

$$\frac{a}{\sin(gh)} = \frac{b}{\sin(hf)} = \frac{c}{\sin(fg)}.$$

Oznaczywszy przez α, β, γ kąty wewnętrzne $B\hat{A}C$, $C\hat{B}A$, $A\hat{C}B$ trójkąta ABC, i zważywszy, że spełniają one kąty (gh), (hf) i (fg) do $2R$, wskutek czego:

$$\sin(gh) = \sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha,$$

$$\sin(hf) = \sin\beta,$$

$$\sin(fg) = \sin\gamma,$$

otrzymamy ostatecznie:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}, \qquad (35)$$

t. zn.: *W każdym trójkącie prostokreślnym boki są proporcyjonalne do wstaw kątów przeciwległych.*

Jestto tak zwane twierdzenie wstaw *(der sinussatz)*, będące jednym z twierdzeń głównych, służących do rozwiązania trójkątów prostokreślnych. Wzozy (35) zowią także wzorami Möbiusa.

Uwaga 1. Zapomocą powyższych wzorów można obliczyć dwa boki trójkąta, jeżeli dany jest trzeci bok z dwoma kątami.

Uwaga 2. W szczególnym przypadku, jeżeli jeden z kątów trójkąta jest prostym, np. $\alpha = R$, wzory powyższe zamieniają się na:

$$a = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{c}{\cos\beta},$$

skąd otrzymujemy zrównania:

$$b = a.\ \sin\beta \quad i \quad b = c.\ tg\beta,$$

stanowiące właśnie dwa twierdzenia trójkąta prostokątnego (ob. ust. 18.).

20. *Wzory Möbiusa* wyrażają pewną własność trójkąta prostokreślnego, tj.: *Stosunek każdego boku do wstawy kąta temu bokowi przeciwległego jest liczbą stałą* (tj. równa się średnicy koła opisanego).

Dowód. Opiszmy na jakimkolwiek trójkącie *ABC* (fig. 21.) okrąg koła, wykreślmy średnicę *AD* i połączmy *D* z *B*. Ponieważ w trójkącie *ADB* kąt $A\hat{B}D = 90^0$, a kąt $A\hat{D}B = A\hat{C}B = \gamma$, mamy:

$$AB = AD.\ \sin\gamma,$$

$$c = 2R.\ \sin\gamma,$$

czyli:

$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

gdzie *R* oznacza promień koła opisanego. A zatym:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

C. b. d. o.

21. *Suma i różnica dwu kątów.* W ustępie 19. otrzymaliśmy równanie:

$$a.\ \cos(fp) + b.\ \cos(gp) + c.\ \cos(hp) = 0. \qquad (34\,a)$$

Ponieważ podług ust. 19. i 20.:

$$\frac{a}{\sin(gh)} = \frac{b}{\sin(hf)} = \frac{c}{\sin(fg)} = 2R,$$

przeto:

$$a = 2R.\ \sin(gh),$$

$$b = 2R.\ \sin(hf),$$

$$c = 2R.\ \sin(fg),$$

co podstawiwszy w równanie (34 a), po obustronnym skróceniu przez *2R*, otrzymamy:

$$\sin(gh).\ \cos(fp) + \sin(hf).\ \cos(gp) + \sin(fg).\ \cos(hp) = 0,$$

Połóżmy kąty:

$$(fp) = \varkappa, \ (gp) = \lambda, \ (hp) = \mu;$$

ponieważ:

$$(gh) = (gp) - (hp) = \lambda - \mu, ^{*})$$

jakotéż:

$$(hf) = \mu - \varkappa,$$

i

$$(fg) = \varkappa - \lambda,$$

przeto dla trzech dowolnych kątów $\varkappa$, λ, μ otrzymujemy:

$$\sin(\lambda - \mu) . \cos\varkappa + \sin(\mu - \varkappa) . \cos\lambda + \sin(\varkappa - \lambda) . \cos\mu = 0.$$

Podstawmy teraz:

$$\varkappa = \alpha, \ \lambda = \beta, \ \mu = 0,$$

a otrzymamy:

$$\sin\beta . \cos\alpha - \sin\alpha . \cos\beta + \sin(\alpha - \beta) = 0,$$

stąd:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha . \cos\beta - \cos\alpha . \sin\beta. \tag{36}$$

---

*) Mamy dwie proste f i g; oznaczmy kąt przez nie utworzony przez (fg), uważając f za ramię początkowe, g zaś za ramię końcowe. Natenczas:

$$(fg) = -(gf),$$

czyli:

$$(fg) + (gf) = 0.$$

Dane są trzy proste f, g, h, leżące w jednéj płaszczyźnie; natenczas mamy:

$$(fg) + (gh) + (hf) = 0,$$

co także ma wtedy swą wartość, gdy owe proste nie przechodzą przez jedenże punkt.

Jeżeli przez punkt na płaszczyźnie wykreślimy proste f', g', h', po kolei równoległe i zgodnie skierowane z prostymi f, g, h, to jasną jest, że $(f'g') = (fg)$, $(g'h') = (gh)$ i $(h'f') = (hf)$; zatym:

$$(fg) + (gh) + (hf) = (f'g') + (g'h') + (h'f').$$

Z tego wynika, że:

$$(fg) + (gh) = -(hf) = (fh),$$

$$(fh) = (gh) - (gf) = (fg) - (hg)$$

i t. d.

Kładąc $+\beta$ za $-\beta$, będziemy mieli:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta. \tag{37}$$

Podstawiwszy zaś w obu tych wzorach $(90^0 - \alpha)$ za α, otrzymamy:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta, \tag{38}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta. \tag{39}$$

22. Z tych wzorów możemy bardzo łatwo otrzymać $tg(\alpha \pm \beta)$ i $ctg(\alpha \pm \beta)$ przy użyciu odpowiednich działań algebraicznych lub odpowiednich podstawień; a mianowicie:

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta}, \tag{40}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha.\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}. \tag{41}$$

Załóżmy, że w równaniach (37), (38), (40), (41) $\beta = \alpha$, wywiedziemy z nich następujące:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha, \tag{42}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \tag{43}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}, \tag{44}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}. \tag{45}$$

Zapomocą tych wzorów wynajduje się funkcyje podwójnego kąta, znając funkcyje pojedynczego, tj. położywszy w zrównaniach (42) i (43) α za 2α, zatym $\frac{\alpha}{2}$ za α, otrzymamy:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}, \tag{46}$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}. \tag{47}$$

Wiedząc, że:

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

i

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2},$$

otrzymujemy stąd, że:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \tag{48}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \tag{49}$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}. \tag{50}$$

$$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}. \tag{51}$$

Zapomocą tych wzorów obliczamy funkcyje połowy kąta, znając dostawę całego kąta.

23. *Przemiana sum i różnic funkcyj kątowych.*

Równania (37) i (38) dają:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha.\cos\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha.\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha.\cos\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha.\sin\beta.$$

Jeżeli:

$$\alpha+\beta=\varphi,\ \alpha-\beta=\psi,$$

to:

$$\alpha=\frac{\varphi+\psi}{2},\ \beta=\frac{\varphi-\psi}{2},$$

więc:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\varphi+\sin\psi &= 2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}.\cos\frac{\varphi-\psi}{2},\\
\sin\varphi-\sin\psi &= 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}.\sin\frac{\varphi-\psi}{2},\\
\cos\varphi+\cos\psi &= 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}.\cos\frac{\varphi-\psi}{2},\\
\cos\psi-\cos\varphi &= 2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}.\sin\frac{\varphi-\psi}{2}.
\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

III. Rozwiązanie trójkątów prostokreślnych.

1. *Wzór Carnot'a.* Wzory służące do rozwiązania trójkątów prostokreślnych wyprowadzamy z jednego wzoru zasadniczego, znanego pod nazwą wzoru Carnot'a.

Odnośnie do fig. 20. w ust. II. 19. otrzymaliśmy:

$$a. \cos (pf) + b. \cos (pg) + c. \cos (ph) = 0. \qquad (1)$$

Jeżeli dowolna prosta p zejdzie się po kolei z prostymi f, g, h, wzór (1) zamieni się na:

$$\left.\begin{aligned} a + b. \cos (fg) + c. \cos (hf) = 0, \\ a. \cos (fg) + b + c. \cos (gh) = 0, \\ a. \cos (hf) + b. \cos (gh) + c = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Pomnożywszy piérwszy z tych wzorów przez $-a$, drugi przez b, trzeci przez c i dodawszy do siebie, znajdziemy:

$$-a^2 + b^2 + c^2 + 2bc. \cos (gh) = 0.$$

Ponieważ:

$$\cos (gh) = -\cos B\hat{A}C = -\cos\alpha,$$

przeto otrzymamy pierwszy z trzech następujących wzorów:

$$\left.\begin{aligned} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc. \cos\alpha, \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac. \cos\beta, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab. \cos\gamma, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

znanych pod nazwą wzoru Carnot'a *(der Carnotische lehrsatz)* i będących zasadniczymi w trygonometryi prostokreślnéj.

Dwa ostatnie wzory otrzymamy, jeżeli po rozmnożeniu wzorów (2) względnie przez a, $-b$, c, lub przez a, b, $-c$, dodamy je do siebie i uwzględnimy, że:

$$\cos (hf) = -\cos\beta,$$
$$\cos (fg) = -\cos\gamma.$$

Wzory (3) wyrażają następującą własność trójkąta prostokreślnego: *Kwadrat wystawiony na jednym boku jest równy sumie kwadratów wystawionych na dwu innych bokach mniéj podwójnym prostokątem wystawionym z tych dwu boków a pomnożonym przez dostawę kąta między nimi zawartego.*

W szczególnym przypadku, jeżeli jeden kąt trójkąta np. α jest prostym, piérwszy z wzorów (3) zamienia się na:

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

co wyraża znane twierdzenie Pitagorasa (por. ust. I. 12.).

2. *Przekształcenie wzorów zasadniczych.* Z wzorów zasadniczych (3) wyznaczamy kąty trójkąta, gdy dane są jego boki. Wszelako, aby je obliczyć zapomocą logarytmów, należy namienione wzory stosownie przeinaczyć. W tym celu piérwszy z wzorów (3) daje:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Z tego równania otrzymujemy:

$$\left.\begin{aligned} 1 - \cos\alpha &= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc} = \frac{2(s-b)(s-c)}{bc}, \\ 1 + \cos\alpha &= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc} = \frac{2s.(s-a)}{bc}, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

pomnąc, że:

$$a + b + c = 2s,$$

a stąd:

$$b + c - a = 2(s - a),$$
$$a - b + c = 2(s - b),$$
$$a + b - c = 2(s - c).$$

Ponieważ według ust. II. 22. i wz. (48) i (49):

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

przeto wzory (4) przechodzą na następujące:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc},$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{s(s-a)}{bc}.$$

Wyciągnąwszy nareszcie z obu stron pierwiastek kwadratowy, otrzymamy dwa piérwsze z sześciu wzorów następujących:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$
$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}, \quad \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}, \tag{5}$$
$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}, \quad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

Z nich przez dzielenie otrzymujemy:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$
$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$
$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

Ponieważ:

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}, \tag{6}$$

gdzie *r* oznacza promień koła wpisanego w trójkąt *ABC*, trzy ostatnie wzory zamieniają się na:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a},$$
$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{s-b}, \tag{7}$$
$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c}.$$

Uwaga. Dwie ostatnie pary wzorów (5) wynajdujemy taksamo z dwu ostatnich wzorów (3), jakeśmy piérwszą parę wyznaczyli z piérwszego wzoru zasadniczego (3). We wszystkich tych wzorach należy wziąć pierwiastnik ze znakiem dodatnim, gdyż skoro żaden z kątów α, β, γ, nie przenosi *2R*, dostawy i wstawy połówek tych kątów są liczbami dodatnimi.

Zapomocą wzorów (6) i (7) wyznaczyć można kąty trójkąta, jeżeli jego boki są dane. Próbę rozwiązania stanowi wyrażenie $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$.

3. *Twierdzenie wstaw.* a) Odnośnie do fig. 20. w ust. II. 19. znaleźliśmy:

$$a. \sin (pf) + b. \sin (pg) + c. \sin (ph) = 0,$$

z którego to wyrażenia otrzymaliśmy wzory:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}, \tag{8}$$

wyrażające tak zwane twierdzenie wstaw.

b) Wzory (8) wysnuwają się łatwo z wzorów zasadniczych (3). Bacząc, że:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}. \cos\frac{\alpha}{2},$$

i mnożąc przez siebie parami wzory (5), znajdziemy:

$$\sin\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$\sin\beta = \frac{2}{ac}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

z których to równań przez dzielenie bezpośrednio otrzymujemy:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}, \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma},$$

czyli:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \tag{8}$$

Zapomocą tych wzorów można obliczyć dwa boki trójkąta, jeżeli dany jest trzeci bok z dwoma kątami (ob. ust. II. 19. uw. 1. i 2.).

4. *Twierdzenie stycznych.* Z wzorów (5) otrzymujemy przez mnożenie:

$$\sin\frac{\alpha}{2}. \cos\frac{\beta}{2} = \frac{s-b}{c}\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} = \frac{s-b}{c}. \cos\frac{\gamma}{2},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}. \sin\frac{\beta}{2} = \frac{s-a}{c}\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} = \frac{s-a}{c}. \cos\frac{\gamma}{2},$$

jakotéż:

$$\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\beta}{2}=\frac{s-c}{c}\sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)}{ab}}=\frac{s-c}{c}.\sin\frac{\gamma}{2},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\beta}{2}=\frac{s}{c}\sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)}{ab}}=\frac{s}{c}.\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Odjąwszy od siebie dwa piérwsze równania a dodawszy do siebie dwa ostatnie, znajdziemy:

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{c}.\cos\frac{\gamma}{2},$$

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a+b}{c}.\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Podzieliwszy te dwa równania przez siebie, mieć będziemy:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}.\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

Ponieważ:

$$\frac{\gamma}{2}=90^0-\frac{\alpha+\beta}{2},$$

przeto:

$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Zatym:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}.\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Taksamo znajdziemy:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{b-c}{b+c}.\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}=\frac{c-a}{c+a}.\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}. \qquad (9)$$

Wzory (9) wyrażają własność trójkąta prostokreślnego, znaną p. n. twierdzenia stycznych, tj.: *Różnica dwu boków ma się tak do sumy tychże boków, jak styczna połowy różnicy kątów namienionym bokom przeciwległych do stycznéj połowy sumy tychże kątów.*

5. Zapomocą wzorów (9) można obliczyć dwa kąty trójkąta, jeżeli dane są dwa boki tym kątom przeciwległe i kąt między tymi bokami zawarty.

Albowiem, jeżeli są dane elementy a, b, γ, natenczas, pomnąc, że $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$, czyli $tg\ \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = ctg\ \frac{\gamma}{2}$, otrzymamy z piérwszego z wzorów (9) log. $tg\ \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, a następnie $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Wiedząc zaś, że:

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = m,$$
$$\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = n,$$

znajdziemy:

$$\alpha = m + n,$$
$$\beta = m - n.$$

Bok trzeci c obliczymy przez zastosowanie twierdzenia wstaw.

6. *Powierzchnia trójkąta.* Pole trójkąta $\triangle$ wyznaczyć możemy sposobem następującym:

a) Wykreśliwszy $AD \perp BC$ (fig. 20.), mamy:

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\, BC.\, AD = \tfrac{1}{2}\, BC.\, AB.\, \sin ABC,$$

podobnie znajdziemy:

$$\left.\begin{aligned} \triangle &= \tfrac{1}{2}\, ac.\, \sin\beta, \\ \triangle &= \tfrac{1}{2}\, ab.\, \sin\gamma, \\ \triangle &= \tfrac{1}{2}\, bc.\, \sin\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

t. zn.: *Powierzchnia trójkąta prostokreślnego równa się połowie iloczynu z dwu którychkolwiek boków przez wstawę kąta między nimi zawartego.*

b) Wszelako według ust. II. 20.:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Stąd wypływa:

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R},$$
$$\sin\beta = \frac{b}{2R},$$
$$\sin\gamma = \frac{c}{2R};$$

skutkiem tego wzory (10) przeinaczają się na następujący:

$$\triangle = \frac{abc}{4R}, \tag{11}$$

t. zn.: *Powierzchnia trójkąta równa się iloczynowi z jego trzech boków podzielonemu przez poczwórny promień koła opisanego.*

c) Ponieważ:

$$\sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2} . \cos\frac{\beta}{2},$$

przeto piérwszy z wzorów (10) ze względu na drugie z wzorów (5) zamieni się na wzór:

$$\triangle = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}, \tag{12}$$

wyrażający powierzchnię trójkąta we funkcyi trzech jego boków.

d) Ponieważ:

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}},$$

przeto łącząc ten wzór z (12), otrzymamy:

$$\triangle = rs, \tag{13}$$

t. zn.: *Powierzchnia trójkąta równa się promieniowi koła wpisanego pomnożonemu przez połowę obwodu trójkąta.*

e) Ponieważ według wzoru (10):

$$\triangle = \frac{ab}{2}\sin\gamma,$$

a że podług twierdzenia wstaw:

$$b = \frac{a.\sin\beta}{\sin\alpha},$$

przeto:

$$\triangle = \frac{a^2 . \sin\beta . \sin\gamma}{2\sin\alpha}. \tag{14}$$

Powierzchnię trójkąta można wyrazić we funkcyi trzech kątów i jednego boku.

f) Ponieważ według wzoru (10.):

$$\triangle = \frac{ab}{2} \sin\gamma,$$

a według ust. II. 20.:

$$a = 2R. \sin\alpha,$$
$$b = 2R. \sin\beta,$$

przeto:

$$\triangle = 2R^2 \sin\alpha. \sin\beta. \sin\gamma. \quad (15)$$

Powierzchnię trójkąta można wyrazić we funkcyi trzech kątów i promienia koła opisanego.

7. *Zebranie.* Ażeby trójkąt prostokreślny rozwiązać, musi się między danymi elementami znajdować przynajmniéj jeden bok. Wszystkie przypadki możebne sprowadzają się do czterech następujących:

a) Jeżeli dane trzy boki a, b, c, znaleść trzy kąty α, β, γ.

b) Jeżeli dane dwa boki a, b i kąt między nimi zawarty γ, znaleść dwa pozostałe kąty α, β i bok trzeci c.

c) Jeżeli dane dwa boki a i b i kąt przeciwległy jednemu z tych boków, np. α, znaleść dwa pozostałe kąty β i γ, tudzież bok trzeci c.

4) Jeżeli dany jeden bok i dwa kąty temu bokowi np. przyległe, znaleść kąt trzeci i dwa pozostałe boki.

Wszystkie te zadania rozwiązują w zupełności wzory (6), (7), (8) i (9), jakto pokazuje następująca tablica:

Dane elementy	Szukane elementy	Powierzchnia	Wzory próbne
a, b, c	$s = \frac{a+b+c}{2}$; $r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{s-b}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c}$.	$\triangle = rs$	$\alpha+\beta+\gamma = 180^0$
a, b, γ	$\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2} = m$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$; $\frac{\alpha-\beta}{2} = n$; $\alpha = m+n$, $\beta = m-n$; $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.	$\triangle = \frac{1}{2}\, ab.\sin\gamma$	$c = a.\cos\beta + b.\cos\alpha$
a, b, α	$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$; $\gamma = 180^0 - (\alpha+\beta)$; $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.	$\triangle = \frac{1}{2}\, ab.\sin\gamma$	$c = a.\cos\beta + b.\cos\alpha$
a, β, γ	$\alpha = 180^0 - (\beta+\gamma)$; $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$, $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.	$\triangle = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$	$b = a.\cos\gamma + c.\cos\alpha$

Uwaga. W przypadku drugim należy przez a rozumieć bok większy. — W przypadku trzecim może być $a < b$ lub $a > b$. Jeżeli $a < b$, to otrzymujemy dwie wartości na β możliwe, albowiem $sin\beta$ należy do dwu kątów, z których jeden jest ostry, a drugi rozwarty. Jeżeli zaś $a > b$, to kąt β musi być ostrym, albowiem $\alpha > \beta$.

Jeżeli jeden kąt trójkąta jest prosty, np. $\alpha = 90^0$, wówczas do rozwiązania trójkąta we wszystkich możebnych przypadkach wystarczą wzory (33. w ust. II. 18.) i twierdzenie Pitagorasa. W tym więc razie daje rozwiązanie następująca tablica:

Dane elementy	Szukane elementy	Powierzchnia	Wzory próbne
a, b	$c = a.\cos\beta$, $\sin\beta = \frac{b}{a}$, $\gamma = 90^0 - \beta$.	$f = \frac{b^2}{2}.\operatorname{ctg}\beta$	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
b, c	$a = \frac{b}{\sin\beta}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c}$, $\gamma = 90^0 - \beta$.	$f = \frac{bc}{2}$	$a = \sqrt{b^2 + c^2}$.
a, β	$b = a\sin\beta$, $c = a\cos\beta$, $\gamma = 90^0 - \beta$.	$f = \frac{a^2}{4}.\sin^2\beta$	$b = c.\operatorname{tg}\beta$.
b, β	$a = \frac{b}{\sin\beta}$, $c = b\operatorname{ctg}\beta$, $\gamma = 90^0 - \beta$.	$f = \frac{b^2}{2}.\operatorname{ctg}\beta$	$c = a.\cos\beta$.

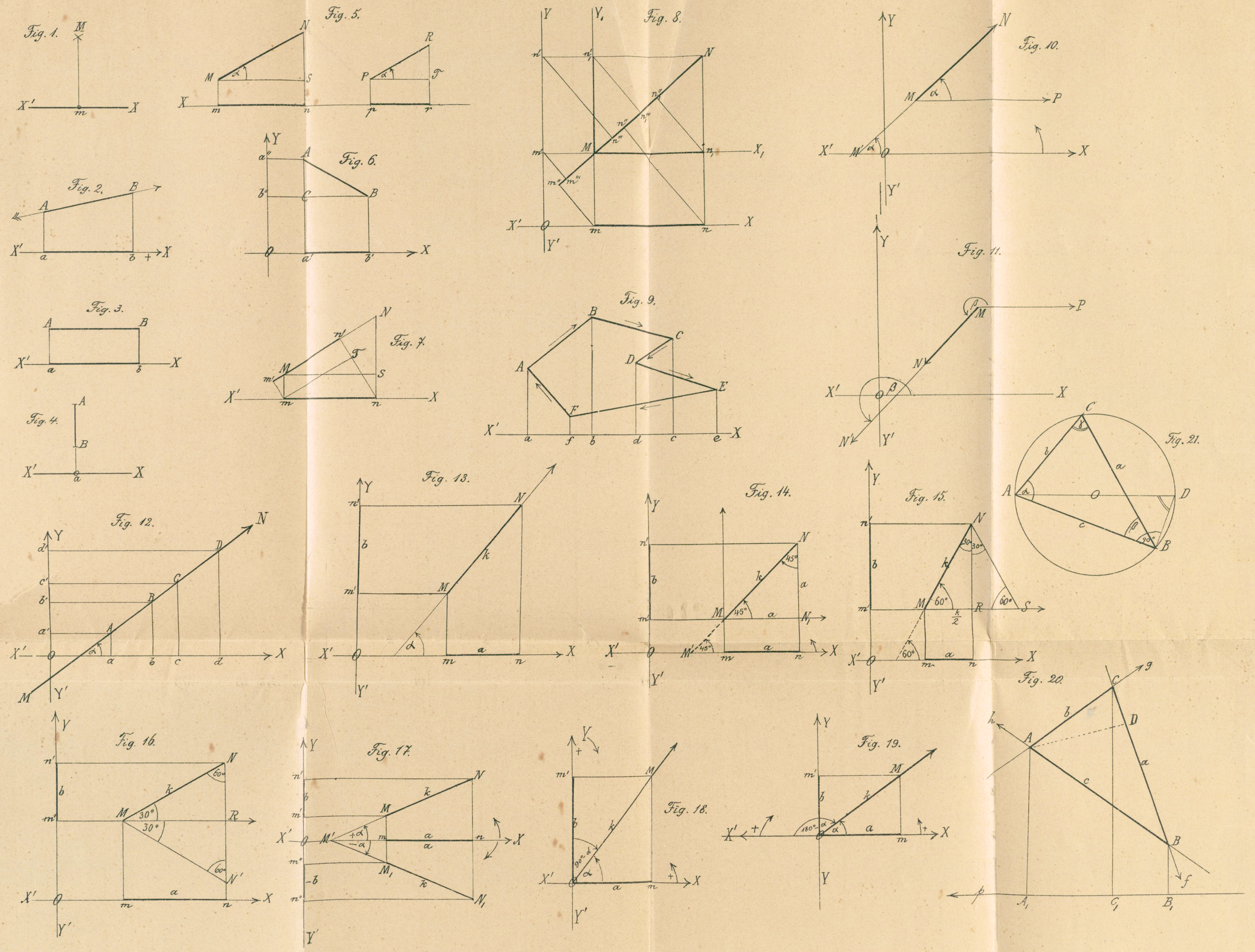

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4. Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7. Fig. 8. Fig. 9. Fig. 10. Fig. 11. Fig. 12. Fig. 13. Fig. 14. Fig. 15. Fig. 16. Fig. 17. Fig. 18. Fig. 19. Fig. 20. Fig. 21.