Archives of Mechanics • Archiwum Mechaniki Stosowanej • 27, 5-6, pp. 707–713, Warszawa 1975

Unicité et principe d'extrêmum en thermoviscoplasticité finie couplée (*)

B. HALPHEN (PARIS)

THE VARIATIONAL formulation of the rate problem is established in this paper for an elastic-viscoplastic material in finite quasi-static transformation, with thermomechanical coupling. We give also a uniqueness criterion for the solution of this problem.

W niniejszej pracy przedstawiono sformułowanie wariacyjne problemu prędkościowego dla materiału sprężysto-lepkoplastycznego przy skończonych przekształceniach quasi-statycznych i przy uwzględnieniu termomechanicznego sprzężenia. Dla rozwiązania tego problemu podano również kryterium jednoznaczności.

В настоящей работе представлена вариацонная формулировка скоростной задачи для упруговязкопластического материала, при конечных квазистатических деформациях и при учете термомеханичецкого сопряжения. Для решения этой задачи приведен тоже критерий единственности.

1. Introduction

LES FONDEMENTS de la théorie de l'élastoviscoplasticité finie sont maintenant bien établis. En particulier en précisant la nature des variables d'écrouissage et en introduisant la notion de configuration intermédiaire relâchée, différents auteurs, dont LEE [3], MANDEL [4], TEODOSIU [5] ZARKA [6], en ont mis le formalisme en accord avec les bases physiques.

Afin de pouvoir traiter numériquement les nombreux problèmes industriels concernant les matériaux élastoviscoplastiques, il était nécessaire d'étudier la formulation du problème aux limites pour un volume de matière. L'emploi de la méthode des éléments finis, la plus utilisée actuellement, impose de mettre un tel problème sous forme variationnelle. A partir de résultats dus à HILL [2], qui donne une méthode générale conduisant à la formulation variationnelle du problème aux limites en vitesse pour une certaine classe de matériaux, j'ai donc cherché à établir une telle formulation pour les matériaux élastoviscoplastiques en transformation finie avec couplage thermomécanique.

2. Cinematique et thermodynamique de la transformation élastoviscoplastique

Soit (0) la configuration de référence d'un élément de matière sous contrainte nulle, à la température T^0. Soit (a) sa configuration actuelle, où σ est le tenseur de contrainte de Cauchy et T la température absolue. Supposons qu'à partir de cette configuration (a)

(*) The paper has been presented at the *EUROMECH* 53 *COLLOQUIUM* on "*THERMOPLASTICITY*", Jabłonna, September 16–19, 1974.

on décharge instantanément l'élément de matière en le ramenant à la température T^0; on obtient ainsi une configuration ($\varkappa$) dite intermédiaire relâchée (MANDEL [4]). Cette configuration ($\varkappa$) n'est définie qu'à une rotation arbitraire près et n'est donc pas unique. Nous verrons plus loin comment fixer son orientation.

Soit F le gradient de la transformation totale qui fait passer de (0) à (a), E le gradient de la transformation élastique qui fait passer de ($\varkappa$) à (a), et P le gradient de la transformation plastique qui fait passer de (0) à ($\varkappa$). On a:

(2.1) $$F = EP.$$

De cette relation on déduit aisément l'expression du gradient de la vitesse de déplacement sous la forme:

(2.2) $$V = \dot{F}F^{-1} = \dot{E}E^{-1}+E\dot{P}P^{-1}E^{-1}.$$

Ce gradient est ainsi la somme d'une partie élastique et d'une partie plastique, dont chacune n'aura de signification intrinsèque que lorsqu'on aura fixé l'orientation de la configuration relâchée. On a:

(2.3) $$V = V^e+V^p$$

où

$$V^e = \dot{E}E^{-1}, \quad V^p = E\dot{P}P^{-1}E^{-1}.$$

Par définition un matériau élastoviscoplastique est un matériau pour lequel V^p n'est fonction que de l'état actuel du matériau. Considérant la partie symétrique des deux membres de la relation (2.3), on obtient la vitesse de déformation totale D comme somme d'une vitesse de déformation élastique D^e et d'une vitesse de déformation viscoplastique D^p:

(2.4) $$D = D^e+D^p.$$

L'état thermodynamique d'un élément de matière élastoviscoplastique est défini par les variables d'états suivantes (TEODOSIU [5], MANDEL [4]): Δ^e, tenseur de déformation de Green de la transformation élastique, $\alpha = (\alpha_k, k = 1, \ldots, n)$, famille de paramètres internes, scalaires ou tensoriels, caractérisant l'état d'écrouissage du matériau, T, température absolue.

Pour définir l'orientation de la configuration relâchée ($\varkappa$), on introduit la notion de trièdre directeur dans la configuration relâchée (MANDEL [4]), trièdre dans lequel les fonctions thermodynamiques ont une expression fixe en fonction des variables d'état. Dans la suite nous ne considérerons que des configurations relâchées isoclines, c'est-à-dire telles que le trièdre directeur y ait une orientation constante. Les fonctions thermodynamiques ont alors une expression fixe en fonction des variables d'état.

En particulier, si ϕ est l'énergie libre spécifique du matériau:

(2.5) $$\phi = \phi(\Delta^e, \alpha, T).$$

Voyons maintenant à quels résultats conduit l'application du premier et du deuxième principe de la thermodynamique.

Soit π le tenseur de contrainte de Kirchhoff relatif à la configuration relâchée ($\varkappa$):

$$\frac{\pi}{\varrho_\varkappa} = \frac{E^{-1}\sigma E^{T-1}}{\varrho} \tag{2.6}$$

où $\varrho_\varkappa$, ϱ désignent les masses volumiques dans la configuration ($\varkappa$) et dans la configuration actuelle (a).

L'inégalité de Clausius-Duhem, qui exprime le second principe de la thermodynamique, peut être écrite:

$$\left(\frac{\pi}{\varrho_\varkappa} - \frac{\partial\phi}{\partial\Delta^e}\right)\dot{\Delta}^e - \left(s + \frac{\partial\phi}{\partial T}\right)\dot{T} + \frac{\pi}{\varrho_\varkappa}E^T E\dot{P}P^{-1} - \frac{\partial\phi}{\partial\alpha}\dot{\alpha} - \frac{q}{\varrho T}\cdot \operatorname{grad} T \geqslant 0 \tag{2.7}$$

où s est l'entropie spécifique et q le vecteur flux de chaleur. Pour un matériau viscoplastique, $\dot{P}P^{-1}$ et $\dot{\alpha}$ sont donnés par l'état actuel du matériau. On peut donc donner à $\dot{\Delta}^e$ et $\dot{T}$ des valeurs arbitraires, sans que les vitesses $\dot{P}P^{-1}$ et $\dot{\alpha}$ soient modifiées. L'inégalité (2.7) conduit alors aux relations:

$$\frac{\pi}{\varrho_\varkappa} = \frac{\partial\phi}{\partial\Delta^e}, \qquad s = -\frac{\partial\phi}{\partial T}. \tag{2.8}$$

La vitesse de production d'entropie est alors donnée par:

$$T\dot{s} = \frac{\pi}{\varrho_\varkappa}E^T E\dot{P}P^{-1} - \frac{\partial\phi}{\partial\alpha}\dot{\alpha} - \frac{1}{\varrho}\operatorname{div} q \tag{2.9}$$

que l'on peut aussi écrire:

$$T\dot{s} = \frac{\sigma D^p}{\varrho} - \frac{\partial\phi}{\partial\alpha}\dot{\alpha} - \frac{1}{\varrho}\operatorname{div} q. \tag{2.10}$$

Dérivons la deuxième relation (2.8) par rapport au temps et comparons à la relation (2.10) l'expression ainsi trouvée pour la vitesse de production d'entropie; on obtient ainsi la vitesse de la température sous la forme:

$$\dot{T} = \frac{1}{c}\left[TM^0_{ij}\dot{\Delta}^e_{ij} - N_k\dot{\alpha}_k + \frac{\sigma_{ij}D^p_{ij}}{\varrho} - \frac{1}{\varrho}\operatorname{div} q\right], \tag{2.11}$$

où on a introduit les notations suivantes:

$$M^0_{ij} = \frac{\partial^2\phi}{\partial T\partial\Delta^e_{ij}}, \qquad N_k = \frac{\partial\phi}{\partial\alpha_k} - T\frac{\partial^2\phi}{\partial T\partial\alpha_k},$$

et où c désigne la chaleur spécifique à déformation constante:

$$c = -T\frac{\partial^2\phi}{\partial T^2}.$$

Notons que le terme $N_k\dot{\alpha}_k$ qui apparaît dans la relation (2.11) n'est autre que le taux d'énergie interne stockée par écrouissage.

Comme la vitesse du tenseur de Green Δ^e est liée à la vitesse de déformation élastique D^e par:

$$\dot{\Delta}^e = E^T D^e E$$

si nous définissons la matrice M des "coefficients thermoélastiques apparents" par:

$$M = EM^0E^T$$

nous pouvons transformer la relation (2.11) et obtenir la vitesse de température sous la forme:

$$\dot{T} = \frac{1}{c}\left[TM(D-D^p)-N_k\dot{\alpha}_k+\frac{\sigma D^p}{\varrho}-\frac{1}{\varrho}\operatorname{div}q\right]. \tag{2.12}$$

On a ainsi exprimé $\dot{T}$ en fonction de la vitesse de déformation totale D et de l'état actuel du matériau.

3. Les résultats de Hill

Rappelons maintenant les quelques résultats dus à HILL [2] que nous utiliserons plus loin pour établir la formulation variationnelle du problème en vitesses.

Soit θ, de composantes θ_{ij}, le tenseur de contrainte nominale, tenseur de Lagrange relatif à la configuration actuelle du matériau considéré. θ est égal au tenseur de contrainte de Cauchy σ mais sa vitesse n'est pas égale à $\dot{\sigma}$. On a en effet:

$$\dot{\theta} = \dot{\sigma}-V\sigma+\sigma\operatorname{div}v, \tag{3.1}$$

où v est le vecteur vitesse de déplacement et V son gradient. En particulier, on note que $\dot{\theta}$ est statiquement admissible, c'est-à-dire que, si $\dot{F}$ désigne la vitesse des forces de masse:

$$\frac{\partial\dot{\theta}_{ij}}{\partial x_i}+\varrho\dot{F}_j = 0. \tag{3.2}$$

On peut donc appliquer à $\dot{\theta}$ le théorème des puissances virtuelles. HILL [2] considère la classe des matériaux tels que la vitesse de contrainte nominale $\dot{\theta}$ dérive d'un potentiel en gradient de la vitesse de déplacement, c'est-à-dire tels que:

$$\dot{\theta}_{ij} = \frac{\partial U}{\partial v_{ji}}, \tag{3.3}$$

où $v_{ji} = \partial v_j/\partial x_i$.

Pour de tels matériaux le théorème des puissances virtuelles permet d'établir le principe d'extremum en vitesses suivant: soit $\mathscr{V}$ un volume de matière dont on suppose connu l'état actuel. Soit $\partial\mathscr{V}$ sa surface. Sur la partie S_v de $\partial\mathscr{V}$ on s'impose des vitesses de déplacement v^d et sur la partie complémentaire S_T de $\partial\mathscr{V}$ on s'impose des vitesses de forces nominales $\dot{T}^d$ (telles que $\dot{T}^d_j = n_i\dot{\theta}_{ij}$, n_i étant les composantes de la normale extérieure). On suppose données dans $\mathscr{V}$ les vitesses de forces de masse $\dot{F}$.

Alors le champ des vitesses réel rend extrêmale la fonctionnelle $J(v^*)$ définie par:

$$J(v^*) = \int_v U d\tau-\int_v \varrho\dot{F}\cdot v^* d\tau-\int_{s_T} \dot{T}^d\cdot v^* ds. \tag{3.4}$$

D'autre part, la théorème des puissances virtuelles permet aussi d'établir le critère d'unicité suivant: la solution du problème aux limites en vitesses est unique si, quels que soient les champs de vitesses v^1, v^2, cinématiquement admissibles:

$$\int_v (\dot{\theta}^1_{ij}-\dot{\theta}^2_{ji})(v^1_{ji}-v^2_{ji})\,d\tau > 0, \tag{3.5}$$

où $\dot{\theta}^1_{ij}$ et $\dot{\theta}^2_{ij}$ sont déduits de v^1 et v^2 par la formule (3.3). Ce critère d'unicité n'est autre qu'un critère de convexité de la fonctionnelle $J(v^*)$. Dans ces conditions, si ce critère (3.5) est vérifié, le champ des vitesses réel minimise $J(v^*)$.

4. Unicité et principe d'extremum en thermoviscoplasticité

Nous allons maintenant appliquer les résultats du paragraphe précédent aux matériaux élastoviscoplastiques. Pour cela il faut connaître l'expression de la vitesse de contrainte nominale $\dot{\theta}$ en fonction du gradient de la vitesse de déplacement et de l'état actuel du matériau.

Dérivons donc par rapport au temps la relation (2.6) qui définit π. On obtient:

$$\left(\frac{\dot{\pi}}{\varrho_\varkappa}\right) = E^{-1}\frac{\check{\sigma}}{\varrho}E^{T-1}, \tag{4.1}$$

où la dérivée $\check{\sigma}$ est définie par:

$$\check{\sigma} = \dot{\sigma}-V^e\sigma-\sigma V^{eT}+\sigma\,\mathrm{div}v. \tag{4.2}$$

D'autre part si on dérive la première relation (2.8), on obtient:

$$\left(\frac{\dot{\pi}_{ij}}{\varrho_\varkappa}\right) = K^0_{ijkl}\dot{\Delta}^e_{kl}+M^0_{ij}\dot{T}+R_{ijk}\dot{\alpha}_k, \tag{4.3}$$

où on a introduit les nouvelles notations:

$$K^0_{ijkl} = \frac{\partial^2\phi}{\partial\Delta^e_{ij}\partial\Delta^e_{kl}}, \qquad R^0_{ijk} = \frac{\partial^2\phi}{\partial\Delta^e_{ij}\partial\alpha_k}.$$

Comparons alors les relations (4.1) et (4.3). Compte tenu du lien entre $\dot{\Delta}^e$ et D^e, et définissant les tenseurs K et R par:

$$K_{mnpq} = E_{mi}E_{nj}K^0_{jikl}E_{pk}E_{ql}, \qquad R_{mnk} = E_{mi}E_{nj}R^0_{ijk},$$

on obtient l'expression de la dérivée $\check{\sigma}$ sous la forme:

$$\check{\sigma} = \varrho K(D-D^p)+\varrho M\dot{T}+\varrho R\dot{\alpha}. \tag{4.4}$$

Rapprochant l'égalité (4.2) qui définit $\check{\sigma}$ de l'égalité (3.1) qui définit $\dot{\theta}$, on note la relation suivante entre ces deux dérivées de tenseurs de contrainte:

$$\dot{\theta} = \check{\sigma}-(V^p\sigma+\sigma V^{pT})+\sigma V^T. \tag{4.5}$$

Reportons dans cette dernière équation l'expression de $\check{\sigma}$ donnée par (4.4), où l'on remplace $\dot{T}$ par son expression donnée par la relation (2.12) en fonction du gradient de la vitesse de déplacement et de l'état actuel du matériau. On obtient:

$$(4.6)\quad \dot{\theta} = \varrho(K+S)(D-D^p)+\sigma V^T-(V^p\sigma+\sigma V^{pT})+\varrho R\dot{\alpha}+\frac{M}{c}(\sigma D^p-\varrho N_k\dot{\alpha}_k-\operatorname{div} q).$$

On peut écrire cette relation sous la forme:

$$(4.7)\qquad \dot{\theta}_{ij} = \frac{\partial U}{\partial v_{ji}}$$

dans laquelle

$$(4.8)\quad U = \frac{\varrho}{2}D(K+S)D-\varrho D(K+S)D^p+\frac{1}{2}\sigma_{in}v_{jn}v_{ji}$$
$$+D\left[\frac{M}{c}(\sigma D^p-\varrho N_k\dot{\alpha}_k-\operatorname{div} q)+\varrho R\dot{\alpha}-(V^p\sigma+\sigma V^{pT})\right],$$

où la matrice S est définie par:

$$S_{mnpq} = \frac{T}{c}M_{mn}M_{pq}.$$

Les matériaux élastoviscoplastiques avec couplage thermomécanique appartiennent donc à la classe des matériaux étudiés par HILL [2].

D'après les résultats rappelés au paragraphe 3, la solution du problème aux limites en vitesses rend extrêmale la fonctionnelle $J(v^*)$ définie par (3.4), et minimale si cette fonctionnelle est convexe. Le critère (3.5) de convexité de J, qui est aussi un critère d'unicité de la solution du problème aux limites en vitesses, s'écrit ici:

$$(4.9)\qquad \int_v [\varrho\Delta D(K+S)\Delta D+\sigma_{in}\Delta v_{jn}\Delta v_{ji}]d\tau > 0$$

quels que soient les champs de vitesses cinématiquement admissibles v^1, v^2, tels que $\Delta v = v^1-v^2$.

Si on veut négliger le couplage thermomécanique, il suffit de faire $M = 0$, $S = 0$ dans les relations (4.8) et (4.9). Notons d'autre part, que le critère d'unicité (4.9) est identique à celui que l'on trouve par la même méthode en thermoélasticité finie.

5. Conclusion

Le principe d'extrêmum que nous avons établi permet de résoudre numériquement le problème aux limites en vitesses pour un matériau élastoviscoplastique en transformation quasistatique finie, avec couplage thermomécanique. Cependant il ne faut pas confondre solution du problème en vitesses et solution du problème d'évolution d'un volume de matière. En particulier l'unicité en vitesses n'est pas synonyme d'unicité de la solution du problème d'évolution, contrairement à ce que l'on suppose implicitement lorsqu'on réalise numériquement l'intégration dans le temps, même dans les algorithmes les plus élaborés comme celui utilisé par FRELAT et ZARKA [1]. Les bifurcations de l'évolution elle-même restent donc à étudier.

Références

1. J. FRELAT et J. ZARKA, *Application de l'algorithme de Treanor pour les problèmes en viscoplasticité*, Colloque Méthodes Numériques en Calcul Scientifique et Technique, Chatenay Malabry 1974.
2. R. HILL, *Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time*, J. Mech. Phys. Solids, **7**, 209–225, 1959.
3. E. H. LEE, *Elastic-plastic deformation at finite strains*, J. Applied Mech., **36**, 1–6, 1969.
4. J. MANDEL, *Plasticité classique et viscoplasticité*, Cours au CISM, Udine 1971, Springer Verlag Ed.
5. C. TEODOSIU, *A dynamic theory of dislocations and its applications to the theory of the elastic-plastic continuum* in "Fundamental aspects of dislocation theory". S. A. SIMMONS, R. de WIT, R. BULLOUGH, Eds., 1970.
6. J. ZARKA, *Etude du comportement des monocristaux métalliques. Application à la traction du monocristal C.F.C.*, J. de Mécanique., **12**, 2, 275–318, 1973.

LABORATOIRE DE MECANIQUE DES SOLIDES, ECOLE POLYTECHNIQUE
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES, PARIS.