

# INTEGRATOR.

(Rozprawy Akad. Umiejęt. Wydz. mat.-przyrodn. t. VII, r. 1880).

NAPISAŁ

BRUNO ABAKANOWICZ.





1. Przyrząd, który poniżej opisuję, ma za zadanie rysowanie tak zw. krzywej całkowej. Wykonywa on sumowanie  $ydx$ , co czynią także różnego rodzaju planimetry. Lecz obok tego przyrząd mój daje przebieg całego sumowania przedstawiając je wykreslnie.

2. Dajmy na to, że równaniem krzywej  $MNP$  (fig. 1) jest

$$y = f(x) \dots \dots \dots (1).$$

Wykreślmy inną krzywą  $MRS$ , posiadającą tę własność, że każda rzędna tej krzywej, np.  $RQ$ , przedstawia nam w pewnej podziale powierzchni po lewej stronie tej rzędnej (na figurze kropkowaną), zamkniętą pomiędzy krzywą  $y = f(x)$  a osią odciętych.  $RQ$  np., mierzona użytą do wykreślenia jednostką, daje nam ilość takich kwadratowych jednostek w kropkowanej powierzchni.

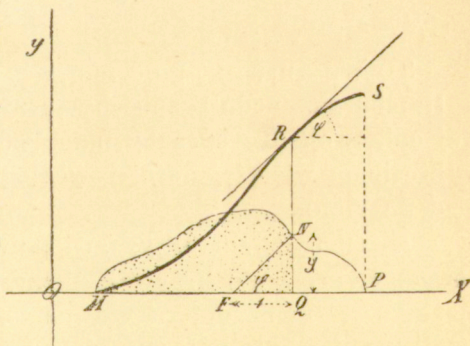


Fig. 1.

Krzywa  $MRS$  nazywa się k r z y w ą c a ł k o w ą <sup>1)</sup>.

Jeśli rzędne tej krzywej oznaczymy przez  $Y$ , to jej równaniem będzie:

<sup>1)</sup> Pierwszą zmianę o tej krzywej i jej wykreślanu znalazłem w „Wykładzie Matematyki“ W. Żmurki. Lwów, 1864.

$$Y = \int f(x) dx + C \dots \dots \dots (2)$$

Na fig. 1 ilość stała odpada oczywiście, gdyż krzywą całkową zaczęliśmy tam kreślić w punkcie  $M$ .

Jeśli zróżniczkujemy równanie (2), to otrzymamy pochodną:

$$\frac{dY}{dx} = f(x) = y = \operatorname{tg} \varphi \dots \dots \dots (3)$$

$\varphi$  oznacza kąt nachylenia stycznej do krzywej całkowej w danym punkcie.

Równanie (3) powiada, że rzędna  $y$  krzywej  $f(x)$ , którą zwać będziemy krzywą różniczkową w stosunku do krzywej całkowej, przedstawia wielkość stycznej trygonometrycznej kąta  $\varphi$ , pod którym styczna geometryczna do krzywej całkowej nachylną jest do osi  $X$ .

Stąd wyprowadzamy wniosek, że jeśli od podstawy  $Q$  rzędnej  $y$  odetniemy na osi  $X$  jednostkę  $QF$ , i połączymy wierzchołek tej rzędnej  $N$  z  $F$ , to prosta  $NF$  będzie równoległą do stycznej w punkcie  $R$ ; albowiem styczna trygonometryczna kąta  $NFQ = \frac{NQ}{QF} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1} = y$ , a więc [z równ. (3)] kąt  $NFQ = \varphi$ .

3. W. Żmurko, po nim Šolin w Pradze i Nehls w Hamburgu, podali sposoby przybliżonego kreślenia krzywej całkowej. Te sposoby mają jednak tę wadę, iż wymagają kreślenia wielkiej ilości równoległych, wskutek czego łatwo błęd popełnić.

4. Obmyśliłem przyrząd, usuwający te braki, dając do kładne wykreślenie krzywej. Przyrząd ten, który nazwałem Integratorem, opiera się na nowej cynematycznej zasadzie. Trzeba było połączyć dwa ruchome punkty  $A$  i  $B$  także gdy punkt  $A$  posuwa się po danej krzywej różniczkowej, punkt  $B$  opisywać ma krzywą całkową. Gdy punkt  $A$  i związany z nim mechanicznie punkt  $B$  posuwać się będzie w kierunku osi  $X$ , wtedy punkt  $B$  ma się jednocześnie przesuwac w kierunku osi  $Y$  z szybkością proporcjonalną do wielkości stycznej trygonometrycznej czyli do wielkości rzędnej  $y$ . Rzut oka na figurę potwierdza nam to.



Jeśli mam śrubę i obracam ją z szybkością jednostajną w mutrze stale umocowanej, to szybkość posuwania się śruby w tył lub naprzód jest proporcjonalna do stycznej trygonometrycznej nachylenia gwintów tej śruby. Im wyższy jest krok śruby, tem szybsze jej wysuwanie się przy obrocie, i odwrotnie. Gdybym więc mógł wynaleść śrubę o zmiennych gwintach, których nachylenie mógłbym dowolnie regulować i ustawiać je w każdej chwili równoległe do  $NF$  (fig. 1), to zadanie zbudowania integratora byłoby rozwiązaniem; gdyż wtedy każdy punkt osi śruby, przy obrocie jednostajnym i jednocześnie jednostajnym przesuwaniu wzdłuż osi  $X$ , opisywałby odpowiednią krzywą całkową.

5. Zamiast śruby o zwykłych gwintach, używam śruby o gwintach nieskończenie niskich, czyli poprostu walca, a jako mutry używam dwóch krawędzi prostolinijnych, leżących w płaszczyznach do gwintów równoległych, które ściskają między sobą z pewną siłą ów walec.

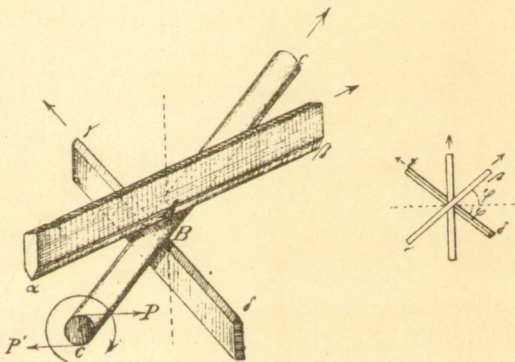


Fig. 2.

Walec  $c$  (fig. 2) umieszczony jest między dwiema krawędziami  $\alpha\beta$  i  $\gamma\delta$ . Obie te krawędzie dają się łatwo przesuwac w kierunku swej długości i obracać około osi pionowej, przechodzącej przez punkty  $A$  i  $B$  ich zetknięcia z walcem. Linijki  $\alpha\beta$  i  $\gamma\delta$  są z sobą mechanicznie tak złączone, że gdy jedna z nich obraca się około stałej osi  $AB$  o kąt  $\varphi$ , to druga obraca się o ten sam kąt, lecz w przeciwnym kierunku.

Gdy w takich warunkach złączą obracać walec w kie-

runku strzałką wskazanym, wtedy obie linijki, posiadające swobodę ruchu w kierunku swej długości, przesuwać się będą w kierunku strzałek na figurze, a walec  $c$  pójdzie w górę z szybkością proporcjonalną do  $\operatorname{tg} \varphi$ .

Możemy przyjąć, że para sił  $P, P'$ , służąca do obrotu walca, przenosi się do punktów zetknięcia walca z krawędziami, do punktów  $A$  i  $B$ .

Weźmy pod uwagę tylko punkt  $A$ , bo z punktem  $B$  rzecz się będzie miała zupełnie tak samo. W punkcie tym  $A$  (fig. 3) siła  $P$  rozkłada się na dwie składowe  $R$  i  $S$ , z których jedna,  $R$ , działa w kierunku krawędzi  $\alpha\beta$ , a druga  $S$  w kierunku osi walca. Ponieważ krawędź  $\alpha\beta$  jest ruchomą w kierunku swej długości, przeto krawędź ta posunie się, pod działaniem siły  $R$ , w kierunku, strzałką wskazanym. Pozostała druga składowa  $S$  dąży do posunięcia krawędzi na dół; lecz ponieważ nie może się ona ruszyć w tym kierunku, więc przez oddziaływanie walec pójdzie

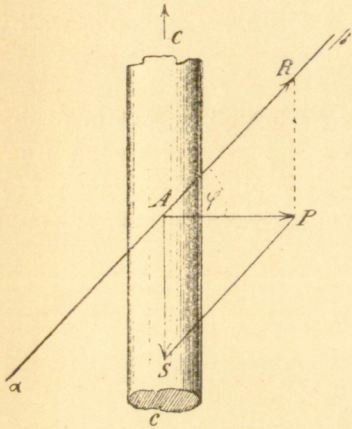


Fig. 3.

w kierunku przeciwnym, strzałką u góry wskazanym.

Z punktem  $B$  rzecz się ma zupełnie tak samo, i oba działania sumują się razem.

Że w każdym momencie czasu poruszanie się walca w górę następuje z szybkością proporcjonalną do  $\operatorname{tg} \varphi$ , tego dowodzić nie potrzebuję.

6. Wywody powyższe będą słuszne, jeśli w punkcie  $A$  i  $B$  opór tarcia posuwistego pomiędzy krawędziami a powierzchnią walca nie zostanie przewyżczony i nie nastąpi ześlizgnięcie. Gdyby tak było, to mimo, że zasada przyrządu jest ścisła, w praktycznym zastosowaniu nie byłby przydatny.

Jest rzeczą pewną, że w przyrządach tego rodzaju, jak w planimetrach i t. p. należy unikać tarcia posuwistego, a nżywać przy zamianie ruchów jedynie tylko tarcia potoczystego. Tylko w tym ostatnim przypadku otrzymuje się



przy dokładnej formie geometrycznej składowych części przyrządu, ściśle rezultaty.

7. Warunki możliwości zbudowania integratora na powyższej zasadzie są następujące:

- a) Krawędź  $\alpha\beta$  powinna mieć tak swobodny ruch w kierunku swej długości, aby opór tarcia w punkcie  $A$  był większy aniżeli opór, który ta krawędź swemu przesunięciu w kierunku  $\alpha\beta$  stawia. Praktycznie to się daje łatwo przeprowadzić, umieściwszy linijkę z krawędzią  $\alpha\beta$  na kółkach frykcyjnych i przycisnąwszy ją dostatecznie do walca. Wtedy ma się tylko tarcie potoczyste w kółkach, które jest bardzo małe, do przewyciężenia. To samo stosuje się do krawędzi  $\gamma\delta$ .
- b) Walec  $c$  powinien mieć tak swobodny ruch, żeby opór tarcia w punkcie  $A$  był większy, niż opór, jaki walec przesunięciu się w kierunku swej osi stawia. I w tym przypadku walec umieszcza się na kółkach frykcyjnych, tak, że snadniej przewyciężone będzie tarcie w tych kółkach, oraz opór ołówka przy rysowaniu, niż tarcie posuwiste w punkcie  $A$ .

W punkcie  $B$  mamy zupełnie to samo.

Przyrząd przezemie zbudowany dał wypadki dość zadawalające.

Nota: Jeden z przyrządów przezemie zrobionych zamiast prostoliniowych krawędzi, ma dwa kółka, których płaszczyzny ustawiają się równolegle do  $NF$  (fig. 1). W tym przypadku konstrukcyja jest w pewnych częściach nieco prostsza. Zob. fig. 4.

8. Figura 5 daje systematyczny obraz całego przyrządu. Walec i krawędzie  $\alpha\beta$ ,  $\gamma\delta$  umieszczone są na tabliczce  $K$ , która ma dwie prostopadłe krawędzie  $FG$  i  $GL$ . Gdy chcę rysować dla danej krzywej, jej całkową, wtedy przykładam krawędź  $FG$  do stałej linijki  $Q$ . Ostrze  $P$ , umieszczone na pochewce łatwo przesuwalnej po krawędzi  $\alpha\beta$ , ustawiam w osi  $X$ , na początku krzywej różniczkowej. Potem sunę tabliczkę  $K$ , wzdłuż linijki  $Q$  i jednocześnie prowadzę ostrze  $P$  po krzywej różniczkowej, trzymając to ostrze zawsze przy krawędzi  $GL$ . Ołówek

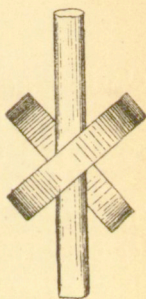


Fig 4.

$D$ , umieszczony w przedłużeniu  $GL$  na saneczkach posuwających walcem, rysuje odpowiednią krzywą całkową, bo sunąc tabliczkę po powierzchni, na której odbywa się wykreślenie, obracam przez tarcie koło  $R$ , które swój obrót oddaje po-

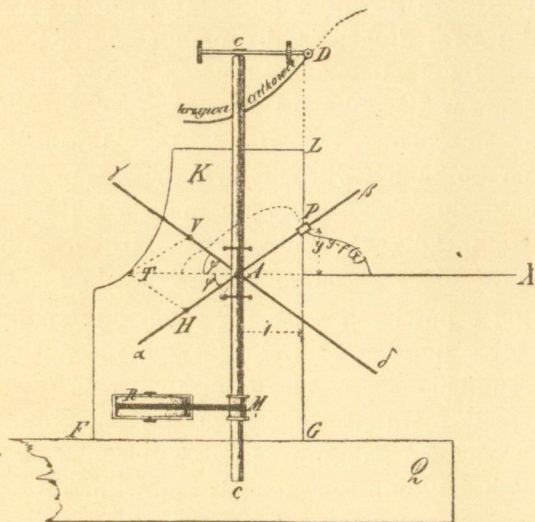


Fig. 5.

chwie  $M$ , a ta znowu walcowi  $c$ , mogącemu obok tego posuwać się na kółkach frykcyjnych, umieszczonych wewnątrz pochwy, tam i napowrót.

Aby obie krawędzie  $\alpha\beta$  i  $\gamma\delta$  tworzyły zawsze jednocześnie równe kąty  $\varphi$  z osią  $X$ , są one połączone ze sobą równoległobokiem  $AVTH$ . Obie te krawędzie mają oś obrotu w  $A$ .