Odkształcanie się ziemi pod ciężarem wielkich lodowców

przez

M. P. Rudzkiego.

Wniesiono na posiedzeniu dnia 10 kwietnia 1899; ref. czł. Witkowski.

Rozprawa ta składa się z następujących rozdziałów:

I. Wstęp.

W okresie lodowym niektóre miejscowości północnej Europy i Ameryki, dziś położone wysoko ponad poziomem morza, znajdowały się niżej ówczesnego poziomu. Ślady lodowego morza sięgają gdzieniegdzie nie bardzo wysoko, — ale w niektórych innych okolicach dochodzą do znacznej wysokości. O ile wiemy, ślady morskich brzegów w północnej Ameryce w Kanadzie w pobliżu Ottawy dochodzą do wysokości 450 stóp, około Nachvak pod 59° półn. szerokości do 1500 stóp, a w północnej Grenlandyi i w kraju Grinnella podobno nawet do 2000 stóp. W Europie w Wielkiej Brytanii i Irlandyi znajdujemy ślady morza lodowej epoki aż do wysokości 300 stóp, w Skandynawii nad Botnicką zatoką pod 63^0 półn. szerokości aż do wysokości 800 stóp a w środku kraju nawet jeszcze wyżej, może aż do wysokości 1000 stóp [1]).

Próbowano objaśnić te zmiany poziomu morza przez przyciąganie wielkich lodowców, które w czasie lodowej epoki pokrywały północną część lądów Ameryki i Europy, Grenlandyę i inne ziemie podbiegunowe. Hergesell [2]), Drygalski [3]) i Woodward [4]) dokładnie rozstrząsali kwestyę przyciągania wielkiego lodowca i możliwych przez te przyciąganie sprawionych zmian poziomu morza. Z badań tych okazało się, że zmiany poziomu dochodzące do paru tysięcy stóp w żaden sposób nie mogą być objaśnione przez przyciąganie lodowca; z drugiej strony w dalszym ciągu niniejszej rozprawy przekonamy się, że istnieją pewne przyczyny neutralizujące zmiany poziomu spowodowane przez przyciąganie lodowca.

Oprócz tego podnoszono myśl, że zmiany poziomu morza w okresie lodowym były spowodowane nietyle przez rzeczywiste podniesienie się tego poziomu w podbiegunowych okolicach, ile przez zniżenie się lądów. Takie zniżenie mogło po części pochodzić, jak to zauważył Drygalski [5]), z oziębienia się i skurczenia pokładów spoczywających pod lodowcem. Ale rychło przekonano się, że ta przyczyna jest nazbyt słaba, aby mogła sprawić skutki tak potężne, jak te, o których mówiliśmy przed chwilą. Rzeczywiście, załóżmy, że przed utworzeniem się lodowca temperatura powierzchni ziemi w pewnej okolicy wynosiła średnio T^0. Pod lodowcem spadła do 0^0, wskutek czego głębiej leżące warstwy musiały się oziębić. Załóżmy dalej, że oziębione i kurczące się warstwy wskutek własnego ciśnienia i ciśnienia lodowca były ciągle tak sciśnione, że nie mogły się tworzyć wielkie szczeliny i t. d. W takim razie zniżenie powierzchni lądu będzie zależne od kubicznego współczynnika rozszerzalności pokładów. Możemy obliczyć to zniżenie zapomocą pewnego prostego wzoru podanego przez Woodwarda [6]). Wzór ten [7]) wygląda tak:

---

[1]) Warren Upham. The glacial Lake Agassiz XXV Monograph. U. S. Geol. Surv. str. 505 do 511.

[2]) Beiträge zur Geophysik I tom.

[3]) Geoiddeformationen der Eiszeit. Berlin 1887.

[4]) Bulletin U. S. Geol Surv. N. 48.

[5]) Ueber Bewegungen der Kontinente zur Eiszeit. Verhandl. des VIII deutschen Geographentages zu Berlin, str. 178 i nast.

[6]) I. Monograph. U. S. Geol. Surv. Appendix. Str. 425 i 426.

[7]) Wzór ten wyprowadza się w następujący sposób. Ponieważ w danym razie można nie zważać na krzywiznę powierzchni ziemi więc można użyć wzoru Fourriera

$$(\text{zniżenie powierzchni lądu}) = 2\,T\varepsilon\sqrt{\frac{kt}{\pi}}$$

przyczem T oznacza amplitudę zniżenia temperatury powierzchni lądu, ε kubiczny współczynnik rozszerzalności, k średni termiczny współczynnik przewodnictwa pokładów, zaś t czas, który upłynął od chwili, w której temperatura powierzchni lądu spadła do temperatury lodu. Użyjemy tu następujących danych. Położymy

$T = 15^0\ F$ wedle W. Upham'a [1])

$\varepsilon = 0{,}0000213$ wedle O. Fishera [2])

$c = 400$ wedle W. Thomsona [3]), przyczem musimy zauważyć, że k jest obliczone w jednostkach — czasu — rok — a długości — stopa angielska. Wreszcie położymy:

---

określającego stan temperatury w nieskończenie wielkiem, jednostronnie płaszczyzną ograniczonem, jednorodnem ciele, gdy ta temperatura jest funkcyą odległości od tej granicznej płaszczyzny i czasu. Oznaczmy wspomnianą odległość przez x, czas przez t, amplitudę zniżenia temperatury powierzchni przez T, zaś amplitudę zniżenia temperatury na głębokości x w czasie t przez τ. Wtedy:

$$\tau = \frac{2\,T}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty} e^{-z^2}\,dz \tag{I}$$

k jest to tak zwany termometryczny współczynnik przewodnictwa. Lecz oczywiście zniżenie powierzchni, które chwilowo oznaczymy przez D, wyraża się wzorem:

$$D = \varepsilon\int\limits_{o}^{\infty}\tau\,.\,dx\,; \tag{II}$$

gdzie ε oznacza liniowy współczynnik rozszerzalności. Podstawmy we wzór II wartość na τ ze wzoru I, połóżmy:

$$\frac{x}{2\sqrt{kt}} = r$$

a otrzymamy:

$$D = \varepsilon\,T.\,\frac{4}{\sqrt{\pi}}\,.\,\sqrt{kt}\,.\int\limits_{o}^{\infty}\left(\int\limits_{r}^{\infty} e^{-z^2}\,dz\right)dr.$$

Wartość podwójnej całki jest stała i równa się $\frac{1}{2}$. Podstawiwszy tę wartość otrzymamy wzór przytoczony w tekscie.

[1]) Loc. cit. str. 491. W. Upham ocenia T na $15^0\,F$ w okolicy południowej części byłego jeziora Agassiza, w innych miejscach na mniejsze cyfry.

[2]) Physics of the Earth's Crust. II wyd. Londyn 1889, str. 103.

[3]) Tę wartość na k W. Thomson podaje w znanej swej pracy „On the Cooling of the Earth".

$$t = 1000000 \text{ lat},$$

co należy uważać raczej jako zanadto wysoką niż nizką wartość. Po podstawieniu tych danych we wzór Woodwarda znajdziemy, że zniżenie powierzchni lądu wyniesie 7,21 stopy ang. Rezultat ten jest bardzo mały [1]), a jednak można go jeszcze uważać za przeceniony, a to dla dwóch powodów: 1) bo założyliśmy, że całe kubiczne zmniejszenie objętości pokładów sprawia zniżenie powierzchni lądu, podczas gdy w rzeczywistości mogły się potworzyć jakieś szczeliny i t. p., 2) bo wzór Woodwarda był wyprowadzony w założeniu, że cała ziemia jest pokryta lodowcem. Wskutek tego, używając wzoru Woodwarda, robimy milczące założenie, że temperatura pokładów wszędzie jednocześnie ulegała zniżeniu, tymczasem w rzeczywistości tak nie było i z dalszych nie pokrytych przez lodowiec pokładów mogło bocznym prądem napływać ciepło do oziębiających się okolic. Natomiast należy wziąć na uwagę jeszcze pewną okoliczność, o której dotychczas nie mówiliśmy.

Oziębiający wpływ lodowca nie ogranicza się do działania przez przewodnictwo cieplne. W pokłady leżące pod lodowcem, może i powinna przenikać zimna woda z lodowca. Obliczyć oziębiający wpływ tej wody bardzo trudno, bo nie mamy dostatecznych danych, aby wytworzyć sobie pojęcie o cyrkulacyi zimnej wody z lodowca wewnątrz pokładów. Można tylko przybliżenie ocenić ten wpływ. Załóżmy n. p. że dzięki przesączaniu się zimnej wody temperatura zewnętrznych pokładów aż do głębokości 100000 stóp spadła o całe $10^0 F$. Będzie to z pewnością za duża wartość, mimo to przyjmując znowu, że kubiczny współczynnik rozszerzalności pokładów wynosi 0,0000213, znajdujemy, że całkowite zniżenie powierzchni lądu mogłoby co najwyżej wynieść 21,3 stopy.

Z tych rachunków widzimy, że zniżenie powierzchni lądu wskutek oziębienia spowodowanego przez lodowiec jest czynnikiem nieznacznym, który można nawet wogóle pominąć. Do tego samego wniosku przyszli też Chamberlin [2]), Gilbert [3]) i Warren Upham [4]).

Natomiast istnieje pewna hypoteza, zasługująca na dokładne zbadanie. Mówimy tu o hypotezie Jamiesona [5]), który utrzymywał, że pod ciężarem lodowców lodowej epoki lądy musiały się zapaść. Hypoteza

---

[1]) Drygalski też wskazuje na to, że ten rezult musi być mały.

[2]) VI Annual Rep. U. S. Geol. Surv. str. 302.

[3]) I Monograph. U. S. Geol. Surv. str. 377.

[4]) XXV Monograph. U. S. Geol. Surv. str. 492.

[5]) Quarterly Journ. Geol. Soc. tom XXI. str. 178.
Geol. Magaz. 2-ga serya, IX tom, str. 400—407 i 457—466.
„ „ 3-cia serya, IV tom, str. 344—348.

ta była nieraz roztrząsana, w ostatnich czasach omawiał ją Warren Upham [1]), ale, o ile wiemy, dotąd nie była badana w sposób ścisły.

Oczywistą jest rzeczą, że ciśnienie ogromnych lodowców nie mogło pozostać bez skutku, że musiało sprawić pewne odkształcenia. Chodzi tylko o to, jak wielkiemi były te odkształcenia. Ściśle mówiąc, odpowiedź na te ostatnie pytanie jest zgoła niemożliwa. Aby módz na nie odpowiedzieć, trzebaby dokładnie znać fizyczne własności nietylko powierzchownych pokładów ale i wnętrza ziemi, trzebaby dokładnie znać rozmiary lodowców, czas, w ciągu którego leżały na powierzchni ziemi, kształt i zmiany, którym podlegały, słowem trzebaby znać mnóstwo rzeczy, o których albo nic albo bardzo mało wiemy. Ale swoją drogą możemy dać odpowiedź na to pytanie w sposób uboczny, możemy rozpatrzeć pewne idealne zadanie byleby warunki tego zadania były obrane w taki sposób, aby przedstawiały dostateczną analogię z warunkami ziemskimi, aby rezultaty zadania mogły być zastosowane do ziemi. Naturalnie najlepiej jest dobierać warunki zadania w taki sposób, aby odkształcenia wypadły raczej możliwie małe niż nadto duże, bo inaczej nie będziemy mieli pewności, czyśmy nie przecenili doniosłości odkształceń ziemi. Uczynimy zadość temu żądaniu rozpatrując zamiast odkształceń ziemi odkształcenia wielkiej bardzo sztywnej kuli.

II. Odkształcenia doskonale sprężystej izotropowej kuli przy danym rozkładzie ciśnienia na jej powierzchnię.

Musimy przedewszystkiem zająć się pewnem analitycznem zadaniem, zadaniem o odkształceniu doskonale sprężystej izotropowej kuli tych co ziemia rozmiarów przy danym rozkładzie ciśnienia na jej powierzchnię. Na rezultatach tego zadania będziemy mogli oprzeć dalsze nasze wywody.

Oznaczamy ciśnienie w powierzchni kuli przez p, przyczem zakładamy, że funkcya p jest dana. Dzięki ciśnieniu p kula odkształci się w pewną sferoidę, której kształt można oznaczyć z warunku, że siły sprężyste równoważą ciśnienie p. Aby wykonać oznaczenie kształtu sferoidy, użyjemy metody, której zasady wyłożyli Thomson i Tait w swej znanej Fizyce Teoretycznej [2]).

Zatrzymując znakowania Thomsona i Taita oznaczymy:
przez n współczynnik sztywności kuli
„ k odwrotność współczynnika ściśliwości (możnaby przeto nazwać

[1]) Loc. cit. str. 490 i nast.
[2]) Treat. on Nat. Phil. II wydanie. Cambridge 1883. Część II, str. 284 i nast.

k współczynnikiem nieściśliwości). Oprócz tych dwóch współczynników będziemy jeszcze używać pomocniczego współczynnika:

$$m = k + \tfrac{1}{3} n$$

Założywszy, że środek prostokątnych współrzędnych x, y, z znajduje się w środku kuli, przez F, G, H[1]) oznaczymy składowe ciśnienia p w trzech głównych kierunkach, przez f, g, h — dostawy kierunkowe normalnej zewnętrznej do powierzchni ciała. W ten sposób mamy związki

$$F = f.p, \quad G = g.p, \quad H = h.p,$$

Dalej oznaczymy przez α, β, γ przesunięcia elementu ciała w trzech głównych kierunkach, dalej położymy:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\delta = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}$$

$$\zeta = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

wreszcie oznaczymy promień powierzchni kuli przez a.

Opuszczamy tu wywód wzorów, albowiem każdy może go sobie przejrzeć u Thomsona i Taita. Napiszemy od razu te wzory, które nam będą w następstwie potrzebne. Dla ułatwienia porównania z „Treat. on Nat. Phil.“ będziemy małemi arabskiemi cyframi w nawiasach oznaczać numer wzoru w tem dziele.

Przedewszystkiem mamy następujące wzory, ważne dla wszelkich wartości zmiennych x, y i z

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \sum_0^\infty \left(u_i - M_i r^2 \frac{\partial \psi_{i-1}}{\partial x} \right) \\ \beta &= \sum_0^\infty \left(v_i - M_i r^2 \frac{\partial \psi_{i-1}}{\partial y} \right) \\ \gamma &= \sum_0^\infty \left(w_i - M_i r^2 \frac{\partial \psi_{i-1}}{\partial z} \right) \end{aligned}\right\} \qquad \mathrm{I}\ (14)$$

gdzie:

[1]) Zmieniamy tu znakowanie Thomsona i Taita o tyle, że przez F, G, H oznaczamy składowe ciśnienia, podczas gdy u wspomnianych angielskich autorów F, G, H oznaczają ciągnienia.

$$\psi_{i-1} = \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{\partial w_i}{\partial z}$$

zaś u_i v_i i w_i są to funkcye kuliste i tego stopnia. Funkcye kuliste stopni odjemnych nie mogą figurować w tych wzorach, bo mamy tu do czynienia z pełną kulą. Dalej mamy:

II(12) $$M_i = \tfrac{1}{2}\,\frac{m}{(2i-1)\,n + (i-1)\,m}\,.$$

Oprócz wzorów I potrzebne nam będą wzory:

III (34) $$\left\{\begin{aligned} & \delta = \sum_0^\infty \delta_i \\ \text{gdzie} \quad & \delta_i = \frac{(2i+1)\,n}{(2i+1)\,n + im}\cdot\psi_i \end{aligned}\right.$$

Dalej posługując się pewnemi znanemi własnościami funkcyi kulistych, ze wzorów I otrzymujemy wzór:

$$\zeta = \alpha x + \beta y + \gamma z = \sum_0^\infty \Big[(u_i x + v_i y + w_i z) - (i-1)\,M_i r^2 \psi_{i-1}\Big],$$

który po łatwych przekształceniach przechodzi na:

IV (31) $$\zeta = -\sum_0^\infty \frac{1}{2i+1}\Big[K_{i-1} r^2\,\psi_{i-1} + \varphi_{i+1}\Big],$$

gdzie

V $$K_i = \frac{2i+1}{2}\cdot\frac{im - 2n}{(2i+1)\,n + im}$$

zaś

VI (32) $$\varphi_{i+1} = r^{2i+3}\left[\frac{\partial}{\partial x}(u_i r^{-2i-1}) + \frac{\partial}{\partial y}(v_i r^{-2i-1}) + \frac{\partial}{\partial z}(w_i r^{2i-1})\right]$$

Dotychczasowe wzory były ważne dla wszystkich wartości zmiennych x, y i z, dalsze wzory będą wyrażać warunki, którym funkcye α, β i γ muszą czynić zadość w powierzchni ciała. Są to równania następujące:

VII (27) $$\left\{\begin{aligned} & (m-n)\,\delta . x + n . \left(r\frac{\partial \alpha}{\partial r} - \alpha + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + Fr = 0 \\ & (m-n)\,\delta . y + n . \left(r\frac{\partial \beta}{\partial r} - \beta + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) + Gr = 0 \\ & (m-n)\,\delta . z + n . \left(r\frac{\partial \gamma}{\partial r} - \gamma + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) + Hr = 0 \end{aligned}\right.$$

Odkształcenia, z któremi będziemy mieli w dalszym ciągu do czynienia, są wobec ogromnych rozmiarów kuli tak małe, że możemy założyć, iż tylko co napisane warunki VII zachodzą nie w odkształconej a w nieodkształconej powierzchni kuli t. j., że zachodzą poprostu w powierzchni $r = a$. Jednocześnie zaś wskutek tego samego założenia otrzymamy pewne związki, które będą bardzo dla nas użyteczne, mianowicie możemy uważać kierunek normalnej do odkształconej powierzchni za prawie identyczny z kierunkiem normalnej do nieodkształconej powierzchni i możemy napisać

$$f = \frac{x}{r}, \qquad g = \frac{y}{r}, \qquad h = \frac{z}{r},$$

a więc ze względu na związki:

$$F = fp, \qquad G = gp, \qquad H = hp$$

mamy teraz:

$$Fr = px, \qquad Gr = py, \qquad Hr = pz,$$

Jeżeli teraz pomnożymy pierwsze równanie VII na x, drugie na y trzecie na z, a następnie dodamy do siebie wszystkie trzy równania, to ze względu na tylko co znalezione związki:

$$Fr = px \text{ etc.} \ldots,$$

oraz ze względu na to, że:

$$r\frac{\partial}{\partial r} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$$

zaś:

$$\zeta = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

otrzymamy równanie:

$$(m-n)\delta + p + \frac{2n}{r}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial r} - \frac{\zeta}{r}\right) = 0 \qquad \text{VIII (28)}$$

Dotąd właściwie, tylko przepisywaliśmy pewne wzory Thomsona i Taita, teraz zaś oprzemy na tych wzorach dalsze wywody.

Najpierw na mocy powyżej wyprowadzonych związków:

$$Fr = px \ldots \text{etc.} \ldots$$

napiszemy równania VII w kształcie:

$$\text{VII bis}\quad\left\{\begin{aligned}&[(m-n)\delta+p]\,x+n\left(r\frac{\partial\alpha}{\partial r}-\alpha+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)=0\\&[(m-n)\delta+p]\,y+n\left(r\frac{\partial\beta}{\partial r}-\beta+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)=0\\&[(m-n)\delta+p]\,z+n\left(r\frac{\partial\gamma}{\partial r}-\gamma+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)=0\end{aligned}\right.$$

(dla $r = a$)

Z tych zaś ostatnich równań i z równania VIII natychmiast otrzymamy równania:

$$\text{IX}\quad\left\{\begin{aligned}&r\frac{\partial\alpha}{\partial r}-\alpha+\frac{\partial\zeta}{\partial x}=\frac{2x}{r}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial r}-\frac{\zeta}{r}\right)\\&r\frac{\partial\beta}{\partial r}-\beta+\frac{\partial\zeta}{\partial y}=\frac{2y}{r}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial r}-\frac{\zeta}{r}\right)\\&r\frac{\partial\gamma}{\partial r}-\gamma+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=\frac{2z}{r}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial r}-\frac{\zeta}{r}\right)\end{aligned}\right.$$

(dla $r = a$)

Funkcyę p wyrażającą ciśnienie można zawsze rozwinąć w szereg funkcyi kulistych powierzchniowych, t. j. funkcyi kulistych zależnych tylko od szerokości i długości geograficznej czy też, co wszystko jedno, od biegunowych współrzędnych θ i φ. Możemy przeto napisać:

$$\text{X}\qquad p=\Sigma p_i$$

gdzie p_i oznacza powierzchniową funkcyę kulistą stopnia i. Podstawmy w równanie VIII zamiast p jego wyrażenie ze wzoru X, zamiast δ jego wyrażenie ze wzoru III, zamiast ζ jego wyrażenie ze wzoru IV, wtedy równanie VIII przekształci się na następujące:

$$\text{XI}\quad\begin{aligned}&(m-n)\sum_0^\infty\frac{(2i+1)\,n}{(2i+1)\,n+im}+\sum_0^\infty p_i-\\&-\frac{2n}{a}\cdot\sum_0^\infty\frac{1}{2i+1}\left[K_{i-1}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\psi_{i-1})+\frac{\partial\varphi_{i+1}}{\partial r}\right]+\\&+\frac{2n}{a^2}\cdot\sum_0^\infty\frac{1}{2i+1}\left[K_{i-1}\,a^2\psi_{i-1}+\varphi_{i+1}\right]=0\end{aligned}$$

dla $r = a$

Ale ponieważ ψ_i i φ_i są to także funkcye kuliste, przeto na mocy znanych własności funkcyi kulistych mamy równania:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\psi_{i-1})=(i+1)\,r\,\psi_{i-1}$$

$$\frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial r} = (i+1)\frac{1}{r}\cdot \varphi_{i+1}$$

Po podstawieniu tych ostatnich równań oraz po uporządkowaniu otrzymamy z równania XI nowe równanie:

$$\Sigma p_i + \sum_0^\infty \left[\frac{(m-n)(2i+1)n}{(2i+1)n+im} - \frac{2n}{2i+3}(i+1)K_i\right]\psi_i$$
$$-\frac{2n}{a^2}\sum_0^\infty \frac{(i-1)}{(2i-1)}\cdot\varphi_i = 0$$
$$\text{dla } r = a$$

Lecz wiadomo, że równanie takie, jak przed chwilą napisane, może być spełnione, czy to w całej, czy w pewnej skończonej części powierzchni kuli tylko wtedy, gdy każda grupa wyrazów tego samego stopnia jest oddzielnie równa zeru. Przeto nasze równanie rozpadnie się na tyle oddzielnych równań, ile jest grup funkcyi kulistych różnych stopni, t. j. rozpadnie się na równania:

$$p_i + \left[\frac{(m-n)(2i+1)n}{(2i+1)n+im} - \frac{2n}{2i+3}(i+1)K_i\right]\psi_i - \frac{2n}{a^2}\frac{i-1}{2i-1}\varphi_i = 0$$
$$\text{dla } r = a \quad i = 0, 1, 2 \ldots \text{ i t. d.}$$

Podstawmy jeszcze wartość na K_i z równania V i położmy dla krótkości

$$N_i = \frac{1}{2i+3}\cdot\frac{(2i+1)n}{(2i+1)n+im}\cdot\{[i(i-1)-3]m+n\}, \qquad \text{XII}$$

a będziemy mogli napisać nowo otrzymane równania w kształcie:

$$p_i = N_i\psi_i + \frac{2n}{a^2}\cdot\frac{i-1}{2i-1}\cdot\varphi_i \qquad \text{XIII}$$
$$\text{dla } r = a \quad i = 0, 1, 2 \ldots \text{ in inf.}$$

Ale na mocy znanych własności funkcyi kulistych, z równań w rodzaju XIII zachodzących między trzema funkcyami kulistemi p_i, ψ_i i φ_i w pewnej powierzchni $r = a$, wynikają koniecznie pewne inne równania, zachodzące już nietylko w powierzchni $r = a$ ale dla wszystkich wartości zmiennych x, y i z. Są to równania:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^i p_i = N_i\psi_i + \frac{2n}{a^2}\cdot\frac{i-1}{2i-1}\varphi_i \qquad \text{XIV}$$
$$\text{dla } i = 0, 1, 2 \ldots \text{ in inf.}$$

Teraz zaś podstawmy w równania IX α β i γ z równań I, dalej ζ z równania IV. Korzystając znowu z tożsamości:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial\psi_{i-1}}{\partial x}\right) = i\,r^2 . \frac{\partial\psi_{i-1}}{\partial x} \quad \text{i t. p.}$$

i odpowiednio porządkując, otrzymamy zamiast równań IX następujące:

$$\text{IX bis}\quad \left\{\begin{array}{l} \sum\limits_0^\infty (i-1)\left(u_i - M_i\,r^2\,\frac{\partial\psi_{i-1}}{\partial x}\right) \\ \quad - \sum\limits_0^\infty \frac{1}{2i+1}\left[K_{i-1}\left(2c\,\psi_{i-1} + r^2\frac{\partial\psi_{i-1}}{\partial x}\right) + \frac{\partial\varphi_{i+1}}{\partial x}\right] \\ \quad + 2x\sum\limits_0 \frac{i}{2i+1}\left[K_{i-1}\,\psi_{i-1} + \frac{1}{r^2}\,\varphi_{i+1}\right] = 0 \\ \sum\limits_0^\infty (i-1)\left(v_i - M_i\,r^2\,\frac{\partial\psi_{i-1}}{\partial y}\right) - \dots \\ \sum\limits_0^\infty (i-1)\left(w_i - M_i\,r^2\,\frac{\partial\psi_{i-1}}{\partial z}\right) - \dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{dla } r = a. \end{array}\right.$$

Dzięki tożsamościom:

$$\text{XV}\quad \left\{\begin{array}{l} x\psi_{i-1} = \frac{1}{2i-1}\left[r^2\,\frac{\partial\psi_{i-1}}{\partial x} - r^{2i+1}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi_{i-1}\,r^{-2i+1}\right)\right] \\ x\varphi_{i+1} = \frac{1}{2i+3}\left[r^2\,\frac{\partial\varphi_{i+1}}{\partial x} - r^{2i+5}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_{i+1}\,r^{-2i-3}\right)\right] \\ y\,\psi_{i-1} = \frac{1}{2i-1}\left[r^2\,\frac{\partial\psi_{i-1}}{\partial y} - \dots\dots\right. \end{array}\right.$$

. . . .

i t. d.

równania IX bis przechodzą na równania:

$$\begin{array}{l} \sum\limits_0^\infty (i-1)\,u_i - \sum\limits_0^\infty\left[(i-1)\,M_i + \frac{K_{i-1}}{(2i-1)\,(2i+1)}\right]a^2 \cdot \frac{\partial\psi_{i-1}}{\partial x} \\ \quad - \sum\limits_0^\infty \frac{1}{2i+1} \cdot \frac{\partial\varphi_{i+1}}{\partial x} - \sum\limits_0^\infty \frac{2\,(i-1)}{2i+1} \cdot \frac{K_{i-1}}{2i-1}\,a^{2i+1}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi_{i-1}\,r^{-2i+1}\right) \\ \quad + \frac{2}{a^2}\sum\limits_0^\infty \frac{i}{(2i+1)\,(2i+3)} \cdot \left[a^2\,\frac{\partial\varphi_{i+1}}{\partial x} - a^{2i+5} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_{i+1}\,r^{-2i-3}\right)\right] = 0 \\ \sum\limits_0^\infty (i-1)\,v_i - \;.\;.\;.\;.\;.\;\text{etc.} \\ \sum\limits_0^\infty (i-1)\,w_i - \;.\;.\;.\;.\;.\;\text{etc.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{dla } r = a. \end{array}$$

Ale tu znów zachodzi tasama okoliczność, co z równaniem utworzonem z równań XI. Mianowicie, aby te równania mogły być spełnione, trzeba, aby oddzielnie każda grupa funkcyi kulistych powierzchniowych tego samego stopnia [1]) była równą zeru. Przeto te równania rozpadną się na następujące systemy równań:

$$(i-1)\,u_i - \left[(i+1)\,M_{i+2} + \frac{1}{2i+3}\cdot\frac{1}{2i+5}\cdot K_{i+1}\right] a^2 \cdot \frac{\partial \psi_{i+1}}{\partial x}$$
$$-\frac{3}{(2i+1)\,(2i+3)}\,\frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial x} - \frac{2\,(i-2)}{(2i-1)\,(2i-3)}\,a^{2i-1}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_{i-1}\,r^{-2i+1}\right)$$
$$-\frac{2\,(i-1)}{2i+1}\cdot\frac{K_{i-1}}{2i-1}\cdot a^{2i+1}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi_{i-1}\,r^{-2i+1}\right) = 0$$
$$\text{dla } r = a \quad i = 0,\ 1, 2\ 3,\ \ldots \text{ in inf.}$$

i tak samo:

$$(i-1)\,v_i - [(i+1)\ldots$$
$$\text{dla } r = a \quad i = 0, 1, 2, 3 \ldots \text{ in inf.}$$
$$(i-1)\,w_i - [(i+1)\ldots$$
$$\text{dla } r = a \quad i = 0, 1, 2, 3 \ldots \text{ in inf.}$$

Ale zupełnie tak samo jak tam, z równań tych wynikają inne podobne do nich, ale zachodzące już nie tylko w powierzchni $r = a$, ale dla wszystkich wartości zmiennych x, y i z. Będą to równania:

$$\left.\begin{array}{l}
(i-1)\,u_i - \left[(i+1)\,M_{i+2} + \frac{1}{2i+3}\cdot\frac{1}{2i+5}\cdot K_{i+1}\right] a^2\,\frac{\partial \psi_{i+1}}{\partial x} \\
\qquad -\frac{3}{(2i+1)\,(2i+3)}\,\frac{\partial \varphi_{i+1}}{\partial x} \\
\qquad -\frac{2\,(i-2)}{(2i-1)\,(2i-3)}\cdot\frac{r^{2i+1}}{a^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_{i-1}\,r^{-2i+1}\right) \\
\qquad -\frac{2\,(i-1)}{2i+1}\cdot\frac{K_{i-1}}{2i-1}\,r^{2i+1}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi_{i-1}\,r^{-2i+1}\right) = 0 \\
(i-1)\,v_i - \ldots\ldots \text{ etc...} \\
(i-1)\,w_i - \ldots\ldots \text{ etc...} \\
\qquad \text{gdzie } i = 0,\ 1,\ 2\ \ldots\ldots \text{ in inf.}
\end{array}\right\}\ \text{XVI}$$

Jeżeli przeróżniczkujemy wszystkie trzy równania stopnia i, pierwsze z pierwszego systemu równań wedle x, drugie z drugiego systemu

[1]) W równaniach, otrzymanych z równań IX bis, figurują także funkcye kuliste (przestrzenne) stopni odjemnych. Ale pamiętajmy o tem, że funkcye kuliste przestrzenne stopnia i i stopnia $-(i+1)$ zawierają obie funkcyę powierzchniową stopnia i.

wedle y, trzecie z trzeciego systemu wedle z, a następnie dodamy je do siebie, to otrzymamy równanie, które wskutek związków:

$$\nabla^2 \psi_{i+1} = 0 \qquad \nabla^2 \varphi_{i+1} = 0 \qquad \nabla^2 (\psi_{i-1}\, r^{-2i+1}) = 0$$

$$\nabla^2 (\varphi_{i-1}\, r^{-2i+1}) = 0$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} (\psi_{i-1}\, r^{-2i+1}) = - i \psi_{i-1}\, r^{-2i+1}$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} (\varphi_{i-1}\, r^{-2i+1}) = - i \varphi_{i-1}\, r^{-2i+1}$$

oraz związku:

$$x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} = r \frac{\partial}{\partial r}$$

przybierze postać:

$$(i-1)\, \psi_i + \frac{1}{a^2} \frac{2(i-2)}{2i-3} \cdot \frac{i(2i+1)}{2i-1} \varphi_{i-1} + \frac{2i(i-1)}{2i-1} K_{i-1}\, \psi_{i-1} = 0\,.$$

Możemy napisać te równanie w kształcie:

XVII $$\psi_i = - \frac{Q_i}{a^2} \cdot \varphi_i$$

przyczem

XVIII $$Q_i = \frac{2(i-1)(i+1)(2i+3)}{(2i-1)\, i\, [(2i+1) + 2(i+1)\, K_i]}$$

Z równań XVII i XIV natychmiast wynikają równania:

XIX $$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^i p_i &= \left[\frac{2n(i-1)}{2i-1} - N_i\, Q_i\right] \frac{\varphi_i}{a^2} \\ &\text{oraz} \\ \left(\frac{r}{a}\right)^i p_i &= - \left[\frac{2n(i-1)}{2i-1} \cdot \frac{1}{Q_i} - N_i\right] \psi_i \end{aligned} \right.$$

W ten sposób wyraziliśmy funkcye kuliste ψ_i i φ_i przez p_i, p_i zaś jest znane, skoro tylko znamy p. A zatem funkcye φ_i i ψ_i są zupełnie określone i możemy już obliczyć przesunięcie w kierunku promienia. Rzeczywiście, przesunięcie w kierunku promienia Δr określa się z funkcyi ζ, albowiem:

$$\zeta = \alpha x + \beta y + \gamma z = r \Delta r$$

a z drugiej strony wedle równania IV

$$\zeta = -\sum_{o}^{\infty} \frac{1}{2i+1} [K_{i-1} r^2 \psi_{i-1} + \varphi_{i+1}]$$

a zatem:

$$\Delta r = -\frac{1}{r} \sum_{o}^{\infty} \frac{1}{2i+1} \left[K_{i-1} r^2 \psi_{i-1} + . \varphi_i\right]$$

Lecz znając przesunięcia w kierunku promienia, możemy określić kształt kuli po odkształceniu, t. j. możemy osiągnąć cel postawiony w niniejszem zadaniu.

Wyrugujmy z tylko co otrzymamego na Δr wyrażenia funkcye ψ i φ za pomocą równań XIX, a otrzymamy po uporządkowaniu:

$$r\Delta r = \frac{1}{r} \sum_{o}^{\infty} \frac{1}{2n(i-1)-(2i-1)N_i Q_i} \cdot \left[\frac{2i-1}{2i+3} K_i Q_i r^2 - a^2\right] \left(\frac{r}{a}\right)^i p_i ,$$

a specyalnie dla $r = a$ t. j. w powierzchni kuli

$$\Delta r = \sum_{o}^{\infty} \frac{1}{2n\,(i-1) - (2i-1)\,N_i\,Q_i} \cdot \left[\frac{2i-1}{2i+3} K_i\,Q_i - 1\right] a p_i .$$

Połóżmy jeszcze dla krótkości:

$$\frac{1}{2n\,(i-1) - (2i-1)\,N_i\,Q_i} \cdot \left[\frac{2i-1}{2i+1} K_i Q_i - 1\right] = T_i \,, \qquad \text{XX}$$

a będziemy mogli napisać wyrażenie na Δr dla $r = a$

$$\Delta r = a \sum_{o}^{\infty} T_i \, p_i \qquad \text{XXI}$$

dla $r = a$

Z tego wzoru widzimy, że skoro rozwinięcie funkcyi p w szereg funkcyi kulistych

$$p = \Sigma p_i$$

jest znane, to od razu możemy napisać wyrażenie na przesunięcie powierzchni kuli w kierunku promienia, t. j. od razu możemy określić odkształcenie kuli sprawione przez ciśnienie p na jej powierzchnię.

III. Hypoteza jednoczesnego zlodowacenia obu półkuli.

Całkowity zapas wody w oceanach, w lodowcach i w powietrzu był prawdopodobnie za czasów lodowej epoki prawie ściśle albo ściśle taki sam, jak obecnie. Stąd w dalszym ciągu należy wnosić, że całkowite (integralne) ciśnienie wody (pod jej trzema postaciami: wody, lodu i pary) na powierzchnię ziemi za czasów epoki lodowej musiało być prawie ściśle takie sama, jak obecnie. Co więcej, ponieważ średnie ciśnienie pary wodnej, zawartej w powietrzu za czasów epoki lodowej mogło się różnić od średniego ciśnienia pary wodnej za naszych czasów tylko o wielkości bardzo małe w porównaniu n. p. ze sumą ciśnień wody oceanicznej i lodowców, więc możemy w dalszym ciągu założyć, że suma ciśnień lodu i wody za czasów epoki lodowej i taka sama suma za naszych czasów są sobie równe. Wyrazimy to założenie przez równanie:

$$\text{I} \qquad \int p_e d\omega = \int p_g d\omega$$

W którem p_e oznacza sumę ciśnień wody i lodu za czasów lodowej epoki,

p_g taką samą sumę za naszych czasów,

$d\omega$ oznacza element powierzchni litosfery,

zaś $\int$ całkowanie po całej powierzchni litosfery.

Oznaczmy różnicę pomiędzy ciśnieniem w epoce lodowej i obecnem przez p', t. j. połóżmy:

$$p' = p_e - p_g$$

Z równania I natychmiast wynika warunkowe równanie:

$$\text{II} \qquad \int p' d\omega = 0.$$

Oczywistą jest rzeczą, że właśnie p' jest tą wielkością, którą należy badać, albowiem nie absolutne wartości ciśnień a różnice między ciśnieniami obecnemi i ciśnieniami w okresie lodowym były przyczyną odkształceń lodowej epoki w porównaniu z obecną. Faktyczne dane, które posiadamy, pozwalają skonstatować właśnie tylko skutki owych różnic p'.

Jeżeli w epoce lodowej w podbiegunowych okolicach obu półkuli znajdowały się większe lodowce niż obecnie, to natomiast oceany zawierały mniej wody. Jeżeli oznaczymy różnicę między objętością lodowców epoki lodowej i objętością obecnych lodowców przez V, to w oceanach brakła objętość wody $0,9\ V$, skoro przyjmiemy, że ciężar gatunkowy lodu wynosi $0,9$. Jednocześnie widzimy, że w okolicach pokrytych lodowcami ciśnienie p w okresie lodowym było większe niż obecne ciśnienie p_g, oraz że wręcz przeciwny stosunek mamy co do dna oceanów. Stąd wynika, że w pierwszych okolicach p' jest wielkością dodatnią, a w drugich odjemną. Jeżeli oznaczymy grubość byłego lodowca w okolicach dziś swobodnych od lodu przez h, to ciśnienie jego na kwadratowy centymetr powierzchni litosfery wynosiło $0,9\ h$ gramów, t. j. innemi słowy, w okolicach dziś swobodnych od lodu, a w czasie okresu lodowego pogrzebanych pod lodowcem mamy:

$$p' = 0,9\ h.$$

To samo rozumowanie naturalnie odnosi się także do tych okolic, które i w czasie epoki lodowej były pokryte przez lodowce i obecnie znajdują się pod lodem (taką miejscowością jest n. p. Grenlandya), tylko stosując do tych okolic poprzedni wzór należy pamiętać o tem, że h oznacza tu nie całą grubość lodowca, ale różnicę między grubością w okresie lodowym i w obecnych czasach. Objętość wody w oceanach była, jak to wyżej powiedzieliśmy, w czasie epoki lodowej o $0,9\,V$ mniejsza niż obecnie. Jeżeli oznaczymy przez α pole dna (albo, co mniej więcej na jedno wychodzi, pole powierzchni) oceanów, to głębokość oceanów musiała być w lodowej epoce o $\frac{0,9\,V}{\alpha}$ mniejszą a ciśnienie na dno p_e za czasów tej epoki było o tyleż t. j. o $\frac{0,9\ V}{\alpha}$ gramów mniejsze niż obecne ciśnienie p_0 t. j. inaczej mówiąc

$$p' = -\frac{0,9\ V}{\alpha}$$

w okolicy oceanów.

Uwzględniając ciśnienie lodowców na powierzchnię lądów uwzględniliśmy wszystko, lecz z dnem oceanów rzecz się ma trochę inaczej. Tu prócz tylko co obliczonego deficytu w ciśnieniu wody, sprawionego przez proste zmniejszenie się objętości wody oceanicznej, należałoby uwzględnić jeszcze niektóre inne czynniki. Odkształceniom ziemi musiały towarzyszyć pewne odkształcenia poziomu morza i pewne zmiany w rozkładzie wód w oceanicznych zagłębieniach. Te zmiany mogły i powinny były sprawić pewne zmiany w rozkładzie ciśnień na dno oceanów. Pomijając niektóre mniej ważne okoliczności, omówimy pokrótce tylko najważniejsze. Wskutek wzrostu lodowców w podbiegunowych okolicach, tameczne lądy musiały się pozapadać, musiały się tam pod lodowcami i dokoła nich wytworzyć pewne zagłębienia, natomiast zmniejszenie ciśnienia na dno oceanów musiało spowodować pewne podniesienie się jakby wydymanie się dna osobliwie w podrównikowych okolicach. Tym okształceniom musiało towarzyć analogiczne, choć nie tak wydatne odkształcenie powierzchni ekwipotencyalnych (naturalnie mówimy o potencyale siły ciężkości). Powierzchnie ekwipotencyalne zapadły się nieco w okolicach pokrytych przez lodowce i w pobliżu nich ale mniej niż powierzchnia lądu i sąsiednie dno morskie, natomiast podniosły się ale mniej niż dno morskie w okolicach podrównikowych. Oczywistą jest rzeczą, że w takich warunkach głębokość mórz musiała stosunkowo powiększyć się u wybrzeży zlodowaconych lądów, natomiast stosunkowo zmniejszyć w pobliżu równika. Mówimy stosunkowo, bo absolutna głębokość oceanów musiała wszędzie zmniejszyć się z powodu zmniejszenia się objętości wody oceanicznej. Ale prócz tylko co wymienionej przyczyny, był jeszcze inny czynnik również sprawiający pewne odkształcenia powierzchni ekwipotencyalnych. Mówimy tu o przyciąganiu samych lodowców, które musiało podnieść powierzchnie ekwipotencyalne w pobliżu lodowców i odwrotnie sprawiło pewne zniżenie tych powierzchni w okolicach dalekich od lodowców t. j. mniej więcej podrównikowych. I ta druga przyczyna też musiała stosunkowo zwiększyć głębokość mórz u wybrzeży zlodowaconych krajów oraz stosunkowo zmniejszyć ją w okolicach podrównikowych. Widzimy zatem, że obie przyczyny działały w podobny sposób, obie sprawiały zmniejszenie głębokości a więc i ciśnienia na dno w ekwatoryalnych morzach oraz zwiększenie głębokości a więc i ciśnienia na dno w podbiegunowych morzach. To znowu musiało sprawić pewne drugorzędne odkształcenie podobne do głównego, musiało je do pewnego stopnia powiększyć. Ale temu drugorzędnemu odkształceniu ziemi towarzyszyły znowu drugorzędne odkształcenia ekwipotencyalnych powierzchni, które też nie pozostały bez wpływu na rozkład wód w zagłębieniach oceanicznych, a zatem nie pozostały bez wpływu na rozkład ciśnienia na dno oceanów. W ten sposób widzimy, że odkształceniu ziemi towarzyszy zmiana ciśnienia na dno oceanów, ta spowodowuje nowe odkształcenie, te znowu zmianę w rozkładzie ciśnienia na dno i t. d. aż do nieskończoności. Na szczęście drugorzędne odkształcenia są o wiele mniejsze od głównych, trzeciorzędne o wiele mniejsze od drugorzędnych i t. d. Jeżeli utworzymy sumę wszystkich tych odkształceń, to okaże się, że największa znacznie nad pozostałemi przeważająca część tej sumy należy do głównego odkształcenia, tak że można zaniechać drugorzędne, trzeciorzędne i t. d. odkształcenia wobec pierwszorzędnego głównego. Z analitycznego punktu widzenia niema nic łatwiejszego, jak uwzględnić te drugorzędne i dalsze odkształcenia. We wzorach nie wystąpią one oddzielnie od pierwszorzędnego głównego odkształcenia, można od razu wprowadzić sumę odkształceń. Niestety przy przejściu do liczbowych rachunków natrafimy na wielkie trudności, wzory będą strasznie niedogodne, trzeba będzie pokonać nadzwyczajnie długie i nudne rachunki. Dlatego to zdecydowaliśmy się pozostać przy łatwiejszem i prostszem zadaniu, w którem uwzględnimy tylko główne odkształcenia. Wogóle w dalszym ciągu uwzględnimy tylko, jeżeli można się tak wyrazić, pierwszorzędne czynniki, inaczej bowiem zadanie nasze stałoby się zbyt skomplikowane.

Niema możności analitycznie przedstawić rzeczywisty rozkład lodowców i oceanów w czasie lodowej epoki. Aby wytworzyć sobie pojęcie o odkształceniach ziemi w czasie lodowej epoki, trzeba obrać jakiś dowolny rozkład lodowców i oceanów, zbadać deformacye, odpowiadające temu rozkładowi a następnie otrzymane rezultaty przystosować, o ile się da, do rzeczywistych ziemskich warunków. W niniejszej rozprawie obieramy możliwie prosty rozkład lodowców i oceanów, aby, o ile możności, ułatwić następne liczbowe rachunki.

Zakładamy, że obie półkule są okryte jednostajnymi lodowcami o stałej średniej grubości h sięgającymi od biegunów aż do 60^0 szerokości północnej i południowej. W ten sposób oba lodowce są obrotowemi figurami na około osi polarnej. Dalej zakładamy, że cała pozostała powierzchnia kuli jest pokryta jednostajnym oceanem. Ponieważ będziemy używać w dalszym ciągu współrzędnych biegunowych, przeto możemy powiedzieć, że od $\theta = 0$ do $\theta = \frac{\pi}{6}$ (60^0 szer. północnej) mamy wszędzie lodowiec o jednostajnej grubości h oraz ciśnienie:

$$p' = 0{,}9\, h$$

taki sam lodowiec i takie same ciśnienie mamy od $\theta = \frac{5\pi}{6}$ (60^0 południ. szerok.) do $\theta = \pi$. W pozostałej powierzchni kuli mamy ocean i stosownie do tego, co było wyżej powiedziane, odjemne ciśnienie:

$$p' = -\frac{0{,}9\, V}{\alpha}.$$

Średnica lodowca pokrywającego całą powierzchnię kuli od bieguna do 60^0 szerokości wynosi 6666 kilometrów, pole przezeń okryte równa się $\frac{2-\sqrt{3}}{4} A = 0{,}066\, A$, jeżeli oznaczymy przez A pole całej powierzchni kuli. Wypada stąd, że oba lodowce północny i południowy razem pokrywają pole

$$\frac{2-\sqrt{3}}{2} A = (0{,}133\ldots)\, A$$

zaś objętość ich:

$$V = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} Ah$$

Jeżeli lodowce pokrywają:

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{2} A,$$

to dla oceanu pozostaje pole:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} A,$$

t. j. $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} A$,

a zatem w okolicy oceanu, t. j. od $\theta = \frac{\pi}{6}$, aż do $\theta = \frac{5\pi}{6}$

III $$p' = - 0{,}9 \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} h = - 0{,}13923\, h.$$

Teraz należy rozwinąć nieciągłą funkcyę p' w szereg funkcyi kulistych powierzchniowych:

$$p' = \Sigma p_i$$

Dzięki poczynionym hypotezom p' oczywiście zupełnie nie zależy od geograficznej długości tylko od geograficznej szerokości albo, innemi słowy, od kąta θ, t. j. od kątowej odległości od północnego bieguna. Wskutek tego wszystkie funkcye kuliste p_i również będą niezależne od geogr. długości, będą to w danym razie tak zwane wielomiany Legendre'a (naturalnie z pewnymi stałymi współczynnikami) o argumencie: $cos\theta$. Oznaczmy taki wielomian Legendre'a stopnia i przez P_i, a możemy napisać:

$$p_i = C_i P_i,$$

gdzie C_i oznacza ów stały współczynnik. Co do P_i, to możemy je określić przez równanie:

IV $$P_i = \frac{1}{2^i} \cdot \frac{1}{1.2 \ldots i} \cdot \frac{d^i}{d\mu^i} (\mu^2 - 1)^i$$

w którem dla krótkości położyliśmy:

$$cos\theta = \mu.$$

Ze wzoru IV zaraz otrzymamy:

$$P_0 = 1$$
$$P_1 = \mu$$
$$P_2 = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$$
$$P_3 = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

i t. d. i t. d.

Współczynniki C_i określają się ze wzoru:

$$C_i = \frac{2i+1}{2} \cdot \int_{-1}^{+1} p' \,.\, P_i \, d\mu. \qquad \text{V}$$

Ale funkcya p' posiada pomiędzy $\theta = 0$ i $\theta = \frac{\pi}{6}$ oraz pomiędzy $\theta = \frac{5\pi}{6}$ i $\theta = \pi$, t. j. pomiędzy $\mu = 1$ i $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz pomiędzy $\mu = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\mu = -1$ stałą wartość $p' = 0{,}9\,h$, w pozostałej przestrzeni ma stałą wartość $-0{,}9 \,.\, \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\, h = -0{,}13923\ h$, przeto ze wzoru V zaraz otrzymamy:

$$\text{VI} \qquad \frac{2\,C_i}{2i+1} = 0{,}9 \int_{-1}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} P_i\, d\mu - 0{,}13923\ h \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{+\frac{\sqrt{3}}{2}} P_i\, d\mu + 0{,}9 \,.\, \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} P_i\, d\mu$$

Ale korzystając ze znanego związku:

$$\text{VII} \qquad \int_{-1}^{+1} P_i\, d\mu = 0$$

dla $i = 1, 2, 3 \ldots$ in inf.,

można napisać wzór VI w nieco innym kształcie, mianowicie w kształcie:

$$\text{VIII} \qquad \frac{2C_i}{2i+1} = 1{,}03923\, h \left[\int_{-1}^{+\frac{\sqrt{3}}{2}} P_i d\mu + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} P_i d\mu \right].$$

Obie całki stojące w nawiasie mają jednakowe absolutne wartości, ale znaki ich są przeciwne gdy i jest nieparzyste, jednakowe gdy i jest parzyste, przeto mamy:

$$C_i = 0, \quad \text{gdy } i \text{ nieparzyste}$$

$$C_i = (2i+1)\,.\,1{,}03923\, h \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} P_i d\mu, \quad \text{gdy } i \text{ jest parzyste.}$$

Ale

$$\text{IX} \qquad \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} P_i d\mu = \frac{1}{2i+1} \cdot \left[P_{i-1} - P_{i+1} \right]_{\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

a zatem:

$$\text{X} \qquad C_i = 1{,}03923\, h\,.\left[P_{i-1} - P_{i+1} \right]_{\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

gdy i jest parzyste.

Wzór VII nie stosuje się do P_0, przeciwnie ponieważ $P_0 = 1$ więc mamy:

$$\int_{-1}^{+1} P_0 d\mu = 2,$$

Wskutek tego wzory VII do X nie stosują się do C_0. Aby obliczyć tę stałą trzeba powrócić do wzoru VI albo jeszcze lepiej do wzoru V. Wedle tego wzoru:

$$C_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} p' d\mu,$$

bo $P_0 = 1$.

Weźmy teraz warunkowe równanie II, t. j. równanie:

$$\int p' d\omega = 0.$$

We współrzędnych biegunowych, oznaczając promień powierzchni kuli przez a, mamy:

$$d\omega = a^2 \sin\theta \, . \, d\theta \, . \, d\psi$$

przeto, pamiętając o tem, że całkowanie rozciąga się do całej powierzchni kuli, możemy napisać wzór II w kształcie:

$$\int p' d\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} p' \, . \, a^2 \, . \, \sin\theta \, . \, d\theta \, . \, d\psi = 0.$$

Wyprowadzamy a^2 jako stałą za nawias i wykonujemy całkowanie względem ψ, co jest możebne albowiem p' zależy tylko od θ. Otrzymamy:

$$2\pi a^2 \int_0^{\pi} p' \sin\theta d\theta = 0$$

Ale:

$$\cos\theta = \mu \qquad \sin\theta \, d\,\theta = - d\mu,$$

granicy $\theta = 0$ odpowiada $\mu = 1$, granicy $\theta = \pi$ odpowiada $\mu = -1$, przeto możemy napisać:

$$\int_{-1}^{+1} p' \, d\mu = 0,$$

t. j. $$C_0 = 0.$$

Ten wynik ma następujące fizyczne znaczenie. Gdyby C_0 było różne od zera, to w szeregu

$$p' = \Sigma p_i$$

i tak samo następnie w szeregu

$$\Delta r = a \, \Sigma \, T_i \, p_i$$

mielibyśmy stały wyraz. W szeregu na p' wyraz ten oznaczałby pewne stałe jednostajne ciśnienie w całej powierzchni kuli, zaś w wyrażeniu na Δr oznaczałby pewne jednostajne, stałe skrócenie promienia kuli. Wobec uczynionych tu założeń co do rozległości lodowców, jeżeli $h = 2000$ metrów, oraz jeżeli współczynniki n i m są mniej więcej takie jak dla stali, owe skrócenie średniego promienia wynosiłoby około 38 metrów, gdyby zwiększeniu ciśnienia w okolicach pokrytych przez lodowce nie towarzyszyło zmniejszenie ciśnienia na dnie oceanów. Właśnie dzięki kompensacyi ciśnień C_0 jest zerem i stały wyraz we wzorze Δr jest równy zeru. Że taka kompensacya jest konieczną, o tem mówiliśmy wyżej. Tylko w takim razie nie byłoby kompensacyi, gdyby ciśnienie lodowców było czemś nowem, t. j. gdyby owe lodowce spadły na ziemię gdzieś z międzyplanetarnych przestrzeni [1].

Połóżmy jeszcze dla krótkości:

$$\text{XI} \qquad \left[P_{i-1} - P_{i+1}\right]_{\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}} = A_i = A_{2j}$$

albowiem tylko te A_i, w których i jest parzyste, są różne od zera, a będziemy mogli napisać:

$$\text{XII} \qquad p' = \Sigma p_i = 1{,}03923\, h \,.\, \sum_{j=1}^{j=\infty} A_{2j}\, P_{2j}.$$

A teraz weźmy wzór XXII z poprzedniego 2 §. Odrazu widzimy, że można go napisać w taki sposób:

$$\text{XIII} \qquad \Delta r = a \,.\, 1{,}03923\, h \,.\, \sum_{j=1}^{j=\infty} T_{2j}\, A_{2j}\, P_{2j}$$

W tym wzorze należy jeszcze obliczyć współczynnik T_{2j}. Wedle wzoru XXI z poprzedniego 2 §.:

$$T_i = \frac{1}{2n\,(i-1) - (2i-1)\,N_i\,Q_i} \cdot \left[\frac{2i-1}{2i+3}\, N_i\, Q_i - 1\right].$$

Gdy podstawimy w ten wzór wartości na K_i, N_i i Q_i ze wzorów V, XII i XVIII z 2 §., to otrzymamy:

$$T_i = -\,\frac{1}{2n\,(i-1)} \cdot \frac{i\,(2i+1)\,m + [2\,(i+1)\,(i-1) - i]\,n}{(2i^2+4i+3)\,m - (2i+1)\,n}.$$

Widzimy stąd, że

$$T_1 = \infty$$

---

[1]) I w tym ostatnim naturalnie zupełnie idealnym przypadku mogłoby się zdarzyć, że choć w Σp_i figuruje stały wyraz, jednak w szeregu na Δr, nie byłoby stałego wyrazu. Gdyby mianowicie kula była zupełnie nieściśliwą, to mielibyśmy $m = \infty$ $T_0 = 0$ i stały wyraz w szeregu na Δr byłby równy zeru, a zatem nie byłoby żadnego skrócenia średniego promienia, a tylko zmiany kształtu.

co to znaczy, to zobaczymy później w 5 §. Tymczasem nie mamy p. czyny zajmować się tym współczynnikiem, albowiem w szeregu XIII T_1 jak i inne T_i o nieparzystych wskaźnikach wcale się nie pojawia. O T_0 przed chwilą mówiliśmy w uwadze. Napiszemy T_i pod nieco zmienionym kształtem, mianowicie napiszemy:

$$T_i = -\frac{1}{n} \cdot D_i \qquad \text{XIV}$$

przyczem:

$$D_i = \frac{1}{2(i-1)} \cdot \frac{i(2i+1)m + [2(i+1)(i-1) - i]n}{(2i^2+4i+3)m - (2i+1)n}. \qquad \text{XV}$$

Wzór zaś XIII napiszemy teraz w taki sposób:

$$\Delta r = -\frac{1{,}03923\ h \cdot a}{n} \sum_{j=1}^{j=\infty} D_{2j} A_{2j} P_{2j}. \qquad \text{XVI}$$

Oczywistą jest rzeczą, że tak D_i, jak A_i i P_i są to czyste liczby. Współczynnik przed znakiem sumowania ma wymiary długości. Współczynnik ten zawiera aż dwie długości h i a, można więc jedną z nich wyrazić w jakichkolwiek jednostkach, a tylko druga musi być wyrażona w takich samych jednostkach jak n. Dla nas dogodnie jest zostawić h jako wielkość, która ma być wyrażona w dowolnych jednostkach długości; wtedy jednak trzeba będzie a wyrazić w centymetrach, bo n bywa zwykle podawane w gramach na centymetr kwadratowy. Wedle W. Thomsona i Taita [1]) dla kutego żelaza

$n = 780 \times 10^6$ gramów na kwadr. centym.
$m = 1600 \times 10^6$ „ „ „ „

Dogodnie jest wziąć zamiast $n = 780 \times 10^6$, $n = 800 \times 10^6$, aby było:

$$m = 2n$$

w ten sposób współczynnik n będzie miał wartość pośrednią pomiędzy wartością n dla kutego żelaza (780×10^6), a wartością n dla stali, (813×10^6).

Kładąc: $n = 800 \times 10^6$ gramów na kwadr. centym.

$$a = 637 \times 10^6 \text{ centymetrów,}$$

znajdziemy jako wartość współczynnika $1{,}03923 \cdot \frac{a}{n}$,

---

[1]) Treatise on Nat. Phil. II wyd. (1883 r.), II część, str. 435.

który zresztą także jest czystą liczbą:

$$1,03923 : \frac{a}{n} = 0,8274869 \ldots .$$

XVII $$= 0,8275 \ldots \text{ przybliżenie.}$$

Jednocześnie z powodu, że:

$$m = 2n,$$

mamy ze wzoru XV

XVIII $$D_i = \frac{1}{2(i-1)} \cdot \frac{2i(2i+1) + [2(i+1)(i-1) - i]}{2(2i^2+4i+3) - (2i+1)}.$$

Wzór XVI przechodzi zaś na podstawie wzoru XVII na:

XIX $$\Delta r = -0,8275 \,.\, h \sum_{j=1}^{j=\infty} D_{2j} A_{2j} P_{2j},$$

przyczem należy podstawić współczynniki D ze wzoru XVIII, współczynniki A ze wzoru XI, zaś funkcye P ze wzoru IV. Możemy teraz przystąpić do obliczenia wartości na Δr w różnych punktach powierzchni kuli. Obliczymy Δr 1) dla środków okolic przykrytych lodowcami, t. j. dla $\theta = 0$ i dla $\theta = \pi$ albo też dla $\mu = +1$ i $\mu = -1$,

2) dla krawędzi lodowców, t. j. dla $\theta = \frac{\pi}{6}$ i $\theta = \frac{5\pi}{6}$ t. j. dla $\mu = +\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\mu = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

3) dla równika: $\theta = \frac{\pi}{2}$, t. j. $\mu = 0$.

Zresztą będziemy potrzebowali dokonać obliczenia tylko dla $\mu = 1$, $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\mu = 0$, albowiem szereg wyrażający Δr zawiera tylko funkcye P_i o wskaźnikach parzystych, a zatem zawiera tylko parzyste potęgi argumentu μ i posiada jednakową wartość dla $\mu = \mu_1$, oraz dla $\mu = -\mu_1$.

Funkcya P_0 jest stała i stale posiada wartość: j e d n o ś ć. Wszystkie funkcye P_i przy $\mu = 1$ przybierają wartość: j e d n o ś ć t. j.

$$\text{przy } \mu = 1 \quad P_i = 1 \quad \text{dla } i = 0, 1, 2 \ldots \text{ in inf.}$$

Wartości funkcyi P_i przy $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i przy $\mu = 0$ podajemy w poniższych tablicach. Obliczyliśmy je przy pomocy znanego wzoru:

$$P_i = \frac{2i-1}{i} \mu \,.\, P_{i-1} - \frac{i-1}{i} P_{i-2}.$$

I Tablica[1]).

Przy $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$P_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\qquad P_2 = \frac{5}{2^3}$

$P_3 = \frac{3}{2^4}\sqrt{3}$ $\qquad P_4 = \frac{3}{2^7}$

$P_5 = -\frac{33}{2^8}\sqrt{3}$ $\qquad P_6 = -\frac{383}{2^{10}}$

$P_7 = -\frac{485}{2^{11}}\sqrt{3}$ $\qquad P_8 = -\frac{11101}{2^{15}}$

$P_9 = -\frac{7173}{2^{16}}\sqrt{3}$ $\qquad P_{10} = -\frac{1845}{2^{18}}$

$P_{11} = \frac{48645}{2^{19}}\sqrt{3}$ $\qquad P_{12} = \frac{1145895}{2^{22}}$

$P_{13} = \frac{1485195}{2^{23}}\sqrt{3}$ $\qquad P_{14} = \frac{8673465}{2^{25}}$

$P_{15} = \frac{5679343}{2^{26}}\sqrt{3}$ $\qquad$ . . . .

. . . . $\qquad$ . . . .

etc. . . . . . $\qquad$ etc. . . . . .

II Tablica.

Przy $\mu = 0$ wszystkie P_i z nieparzystymi wskaźnikami są równe zeru, parzyste są różne od zera, mianowicie:

$$P_2 = -\frac{1}{2}$$

$$P_4 = \frac{3}{2^3}$$

$$P_6 = -\frac{5}{2^4}$$

$$P_8 = \frac{35}{2^7}$$

$$P_{10} = -\frac{63}{2^8}$$

[1]) Wszystkie wartości podane w tej tablicy i trzech następnych są zupełnie ścisłe.

$$P_{12} = \frac{231}{2^{10}}$$

$$P_{14} = -\frac{429}{2^{11}}$$

$$P_{16} = \frac{6435}{2^{15}}$$

. . . .

etc. . .

III Tablica.

[Obliczona z I tablicy za pomocą wzoru XI]

$$A_0 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$A_1 = \frac{3}{2^3}$	$A_2 = \frac{5}{2^4}\sqrt{3}$
$A_3 = \frac{77}{2^7}$	$A_4 = \frac{81}{2^8}\sqrt{3}$
$A_5 = \frac{407}{2^{10}}$	$A_6 = \frac{221}{2^{11}}\sqrt{3}$
$A_7 = -\frac{1155}{2^{15}}$	$A_8 = \frac{8347}{2^{16}}\sqrt{3}$
$A_9 = -\frac{86963}{2^{18}}$	$A_{10} = -\frac{106029}{2^{19}}\sqrt{3}$
$A_{11} = -\frac{1175415}{2^{22}}$	$A_{12} = -\frac{706875}{2^{23}}\sqrt{3}$
$A_{13} = \frac{493695}{2^{25}}$	$A_{14} = \frac{6202217}{2^{26}}\sqrt{3}$
. . . . .	. . . .
etc. . . .	etc. . . . . .

IV Tablica.

[Obliczona ze wzoru XVIII]

$D_1 = \infty$	$D_0 = \frac{1}{5}$
$D_3 = \frac{55}{236}$	$D_2 = \frac{4}{11}$
$D_5 = \frac{17}{120}$	$D_6 = \frac{22}{185}$

$D_7 = \frac{299}{2916}$ $\qquad$ $D_8 = \frac{195}{2163}$

$D_9 = \frac{493}{6128}$ $\qquad$ $D_{10} = \frac{304}{4185}$

$D_{11} = \frac{147}{2220}$ $\qquad$ $D_{12} = \frac{437}{7183}$

$D_{13} = \frac{1025}{18216}$ $\qquad$ $D_{14} = \frac{594}{11349}$

. . . . . $\qquad$ . . . . .

etc. . . . $\qquad$ etc. . . .

Na podstawie tych tablic, pamiętając o tem, że dla $\mu = 1$ wszystkie funkcye P_i są równe jedności, możemy ułożyć następującą tablicę:

V Tablica[1]).

Przy $\mu = 1$

$$
\begin{aligned}
D_2\ A_2\ P_2 &= \sqrt{3} \,.\, 0{,}11364 \ldots \\
D_4\ A_4\ P_4 &= \sqrt{3} \,.\, 0{,}05557 \ldots \\
D_6\ A_6\ P_6 &= \sqrt{3} \,.\, 0{,}01283 \ldots \\
D_8\ A_8\ P_8 &= \sqrt{3} \,.\, 0{,}01148 \ldots \\
D_{10} A_{10} P_{10} &= -\sqrt{3} \,.\, 0{,}01469 \ldots \\
D_{12} A_{12} P_{12} &= -\sqrt{3} \,.\, 0{,}00513 \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\text{etc.} &\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Podstawiwszy te wartości we wzór XIX, znajdziemy:

$$
\begin{aligned}
\Delta r &= -\,0{,}8275\, h\ [0{,}3008 + \ldots] \\
&= -\,0{,}2489\, h.
\end{aligned}
\qquad \text{XX}
$$

Założymy jeszcze, że $h = 2000$ metrów [2]), poczem otrzymamy

$$\Delta r = -\,497{,}8 \text{ metrów} \quad \text{dla } \mu = 1, \qquad \text{XX}$$

t. j. w środku okolicy pokrytej przez lodowiec.

W podobny sposób jak tablicę V, obliczymy też tablicę dla $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$

[1]) W tej tablicy i następnych wszystkie cyfry są obliczone już tylko do piewnej dziesiętnej.

[2]) Uważamy cyfrę $h = 2000$ metr. za dostatecznie wysoką, 1-mo: bo założyliśmy, że grubość lodu jest stała, 2-do: bo n. p. w krajach takich, jak Grenlandya, gdzie dotąd leży ogromny lodowiec, h oznacza tylko różnicę między grubością lodowca w epoce lodowej i obecną.

VI Tablica.

Przy $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$
\begin{aligned}
D_2\ A_2\ P_2 &= \sqrt{3}\,.\,0{,}07102\ldots \\
D_4\ A_4\ P_4 &= \sqrt{3}\,.\,0{,}00130\ldots \\
D_6\ A_6\ P_6 &= -\sqrt{3}\,.\,0{,}00479\ldots \\
D_8\ A_8\ P_8 &= -\sqrt{3}\,.\,0{,}00389\ldots \\
D_{10}\ A_{10}\ P_{10} &= \sqrt{3}\,.\,0{,}00010\ldots \\
D_{12}\ A_{12}\ P_{12} &= -\sqrt{3}\,.\,0{,}00140\ldots
\end{aligned}
$$

. . . .

etc. . . . .

Po podstawieniu tych wartości we wzór XIX otrzymamy:

XXI
$$
\begin{aligned}
\Delta r &= -\,0{,}8275\ \ h\ [0{,}1080\ldots.] \\
&= -\,0\ 08937\,h.
\end{aligned}
$$

Zatem, kładąc $h = 2000$ metrów, otrzymamy

XXI $\Delta r = -\,178{,}7$ metrów dla $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$

t. j. dla krawędzi lodowca.

Nareszcie obliczamy tablicę wyrazów szeregu w nawiasie wzoru XIX dla $\mu = 0$.

VII Tablica.

Przy $\mu = 0$

$$
\begin{aligned}
D_2\ A_2\ P_2 &= -\sqrt{3}\,.\,0{,}05682\ldots \\
D_4\ A_4\ P_4 &= \sqrt{3}\,.\,0{,}02084\ldots \\
D_6\ A_6\ P_6 &= -\sqrt{3}\,.\,0{,}00401\ldots \\
D_8\ A_8\ P_8 &= \sqrt{3}\,.\,0{,}00314\ldots \\
D_{10}\ A_{10}\ P_{10} &= \sqrt{3}\,.\,0{,}00362\ldots \\
D_{12}\ A_{12}\ P_{12} &= -\sqrt{3}\,.\,0{,}00114\ldots
\end{aligned}
$$

. . . .

etc. . . . .

Po podstawieniu tych wartości we wzór XIX, otrzymamy:

XXII
$$
\begin{aligned}
\Delta r &= -\,0{,}8275\,h.\ [\,-\,0{,}0595\ldots.] \\
&= +\,0{,}0492\,h.
\end{aligned}
$$

Zatem, kładąc $h = 2000$ metrów, otrzymamy:

$$\Delta r = + 98{,}4 \text{ metrów dla } \mu = 0,$$

t. j. na równiku.

A teraz zanim dalej pójdziemy, wypada nam powiedzieć kilka słów o ścisłości, z którą zostały obliczone te liczby. Wiadomo, że szereg XII, t. j. szereg przedstawiający funkcyę, p' jest zawsze zbieżny, ale odrazu widać, że jest to zbieżność bardzo powolna. Na szczęście mamy do czynienia nie z szeregiem XII, ale z szeregiem XIII (czy też co na jedno wychodzi z szeregiem XIX), który powstaje z szeregu XII przez pomnożenie na współczynniki D_i. Te ostatnie są zawsze dodatnie, zawsze mniejsze od jedności, zmniejszają się w miarę tego, jak wskaźnik i wzrasta, [dla wielkich wartości wskaźnika i zmniejszają się przybliżenie tak jak $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{i}$]. Dzięki obecności tych współczynników szereg XIII (czy też XIX) odznacza się o wiele szybszą zbieżnością niż szereg XII, ale tem niemniej niemożna go zaliczyć do bardzo szybko zbieżnych szeregów. My tu obliczaliśmy po 6 wyrazów, ale właściwie trzebaby obliczyć więcej, bo możliwy błąd w otrzymanych w ten sposób liczbowych wynikach, może jeszcze być dość znaczny; widać to stąd, że absolutne wartości wyrazów ubywają nie dość prędko. Ściśle obliczyć granice błędu nie można; można tylko ocenić je za pomocą pewnych przybliżonych metod. Rachunki, których szczegółów nie możemy tu przytaczać, boby nas to zadaleko zaprowadziło, przekonały nas, że błędy wedle wszelkiego prawdopodobieństwa nie przewyższają kilku metrów (najwyżej jakie 10 metrów), mianowicie zaś absolutne wartości na Δr dla $\mu = 1$, $\mu = \frac{\sqrt{3}}{3}$ i $\mu = 0$ są prawdopodobnie o kilka metrów za wielkie. Wartości na δr_1 (patrz niżej) są jeszcze trochę dokładniejsze niż Δr.

Prócz tego powinniśmy omówić jeszcze pewien możebny zarzut. Przyjęliśmy, że grubość lodowca jest wszędzie jednakowa. Ta hypoteza nie odpowiada rzeczywistości. Wnosząc z wyglądu grenlandzkiego lodowca oraz dla oczywistych teoretycznych względów możemy napewno twierdzić, że grubość wielkich lodowców lodowej epoki była mniejszą u krawędzi aniżeli w środku. Wiemy, że powierzchnia takich lodowców musiała przedstawiać pewien spad od środka ku krawędzi, z początku bardzo powolny a potem szybszy. Z tego powodu ciśnienie lodowca u krawędzi było mniejsze niż w środku i głębokość depressyi u krawędzi obliczona przy hypotezie, że grubość była wszędzie jednakową, powinna wypaść za wielką. Jednakże błąd w ten sposób popełniony nie może być tak znaczny, jakby się to komu zdawało, a to głównie dla tego, że jak to wyżej powiedzieliśmy, grubość lodowca jest wprawdzie mniejsza u krawędzi niż w środku, ale swoją drogą grubość lodu w środkowej części zmniejsza się bardzo powoli, a dopiero w pobliżu krawędzi zmniejsza się szybciej. Zresztą próbowałem dokonać obliczenia depressyi w założeniu, że grubość lodowca zmniejsza się od środka ku krawędzi. Założyłem, że grubość lodu zmniejsza się wedle prawa:

$$h = h_0 \,[1 - (2 \sin \theta)^{10}],$$

przyczem h_0 oznacza największą grubość lodu w środku lodowca. Obrane prawo daje dla $\theta = \frac{\pi}{6}$, $h = 0$, albowiem $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Dla spadu powierzchni lodu daje ono wyniki dobrze odpowiadające spostrzeżeniom nad grenlandzkim lodowcem. W wyrażeniu na Δr obliczyłem pięć pierwszych wyrazów, poczem kładąc jeszcze $h_0 = 2000$ metrów znalazłem, że głębokość depressyi lądu u krawędzi powinna wynosić 140 metrów, t j. tylko o 29 metrów mniej niż w założeniu, że grubość lodowca wszędzie była równa 2000 metrów. Przykład ten pokazuje, że omawiany błąd nie może być bardzo znaczny. Zresztą należy pamiętać o tem, że użyta tu przez nas metoda obliczania przesunięć Δr daje wogóle z a m a ł e wyniki, albowiem pomijamy odkształcenia wyższych rzędów, które, jak to wyżej powiedzieliśmy, są o wiele mniejsze od głównego odkształcenia, ale podobnego doń charakteru, tak że muszą przyczyniać się do powiększenia deformacyi.

W ten sposób znaleźliśmy, że izotropowa doskonale sprężysta kula posiadająca prawie taką samą sztywność i ściśliwość jak stal, pod ciężarem lodowców pokrywających około 0,134 jej powierzchni i tworzących u biegunów jakby dwie krągłe pokrywki o stałej grubości 2000 metrów doznaje znacznych odkształceń. Naturalnie te odkształcenia wydają się znaczne, gdy je mierzymy ludzką miarą, lecz wobec ogromnych rozmiarów kuli są one zupełnie znikome; wszak największa głębokość depressyi dochodzi zaledwie do 500 metrów, t. j. do $\frac{1}{12740}$ promienia kuli. Te deformacye nie znikłyby nawet wtedy, gdybyśmy założyli, że kula jest absolutnie nieściśliwą, t. j. że $k = \infty$, $m = \infty$, albowiem przy $m = \infty$ tylko T_0 staje się zerem, a T_0 nawet nie występuje w naszych wzorach na Δr. Wynik ten jest zupełnie zrozumiały. Jeżeli kula jest absolutnie nieściśliwą, to deformacye muszą być mniejsze, ale są możebne, bo pomimo nieściśliwości kula może zmieniać kształt, nie może tylko w żadnym razie zmienić objętości.

Natomiast, gdybyśmy założyli, że kula jest absolutnie sztywną, t. j. że $n = \infty$, to wtedy wszystkie współczynniki T_i stałyby się równe zeru i deformacye stałyby się niemożebne.

IV. Odkształcenia powierzchni ekwipotencyalnych i zmiany poziomu morza.

Jednocześnie z odkształceniem powierzchni kuli musiały się także odkształcić otaczające ją ekwipotencyalne powierzchnie. Odkształcenia tych powierzchni pochodzą z dwóch przyczyn. Jedną przyczyną jest przyciąganie lodowców, drugą dodatnie i odjemne przyciąganie wzniesień i zagłębień utworzonych przez deformacyę kuli. Odkształcenia powierzchni ekwipotencyalnych sprawione przez pierwszą przyczynę były niejednokrotnie roztrząsane, ostatnio i w sposób wyczerpujący kwestyę przez Hergesella, Drygalskiego i Woodwarda. Z tego powodu nie potrzebujemy bliżej się niemi zajmować. Możemy wprost skorzystać z wyników otrzymanych przez wspomnianych autorów.

Drugą przyczyną odkształceń powierzchni ekwipotencyalnych jest dodatnie i odjemne przyciąganie wzniesień i zagłębień, sprawionych przez odkształcenie samej kuli. Tym odkształceniom kuli towarzyszą pewne lokalne zmiany gęstości, zagęszczenia pod zagłębieniami, rozszerzenia pod wzniesieniami. Te zmiany gęstości działają na potencyał przyciągania w taki sposób, że do pewnego stopnia neutralizują wpływ zmian figury. W dalszym ciągu jednak nie będziemy brać na uwagę tych zmian gęstości, przez co deformacye ekwipotencyalnych powierzchni zależne od deformacyi samej kuli wypadną za wielkie. Wypadną one za wielkie jeszcze dla innej przyczyny, która rychło wypłynie na wierzch w toku rozumowania. Aby powetować te nadmiary, obliczymy deformacye ekwipotencyalnych powierzchni jeszcze w inny sposób.

Pomijając zmiany gęstości towarzyszące deformacyom kuli, możemy łatwo obliczyć deformacye powierzchni ekwipotencyalnych spowodowane przez samą deformacyę kuli przy pomocy pewnego twierdzenia podanego przez Thomsona i Taita [1]). Twierdzenie o którem mowa orzeka, że gdy przesunięcie powierzchni kuli Δr jest wyrażone przez szereg funkcyi kulistych:

$$\Delta r = C_1 P_1 + C_2 P_2 + C_3 P_3 + \dots + C_i P_i + \dots$$

to odpowiednie przesunięcie ekwipotencyalnej powierzchni, które nazwiemy δr_1, wyraża się wzorem:

[1]) Treat. on Nat. Phil. 2-gie wydanie, (1883 r.), str. 354, 355 i 356.

$$\delta r_1 = C_1 P_1 + \frac{3}{5} C_2 P_2 + \frac{3}{7} C_3 P_3 \ldots\ldots + \frac{3}{2i+1} C_i P_i + \ldots\ldots$$

Przytoczony tu wzór jest zupełnie wystarczającym w bardzo szerokich granicach, staje się on niedość dokładnym tylko jeżeli odkształcenia są bardzo wielkie. Zauważmy też, że ponieważ szereg na δr_1 składa się z funkcyi kulistych a nie zawiera stałego wyrazu, przeto objętość odkształconej ekwipotencyalnej powierzchni jest równa objętości nieodkształconej powierzchni.

W danym przypadku możemy odrazu napisać ze względu na wzór XIX z poprzedniego 3 §.

$$\text{I} \qquad \delta r_1 = -\ 0{,}8275\, h \left[\frac{3}{5} D_2 A_2 P_2 + \frac{3}{9} D_4 A_4 P_4 + \ldots\ldots\right]$$

Obliczymy δr_1 w środku lodowca, na krawędzi i na równiku. Obliczenie przychodzi nam bardzo łatwo, bo n. p. dość jest wziąć wartości na $D_{2j}\ A_{2j}\ P_{2j}$ z tablicy V, pomnożyć każde $D_{2j}\ A_{2j}\ P_{2j}$ na $\frac{3}{4j+1}$ i podstawić we wzór I, aby otrzymać wartość na δr_1 dla $\mu = 1$. Jeżeli weźmiemy $D_{2j}\ A_{2j}\ P_{2j}$ z VI tablicy i tak samo z niemi postąpimy, to otrzymamy wartość na δr_1 dla $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i t. d.

W ten sposób znajdziemy w środku lodowca ($\mu = 1$)

$$\delta r_1 = -\ 0{,}1275\, h,$$

a kładąc $h = 2000$ metrów,

$$\delta r_1 = -\ 255 \text{ metrów.}$$

Na krawędzi lodowca $\left(\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\delta r_1 = -\ 0{,}0589\, h,$$

a kładąc $h = 2000$ metrów,

$$\delta r_1 = -\ 117{,}8 \text{ metrów,}$$

wreszcie na równiku ($\mu = 0$)

$$\delta r_1 = +\ 0{,}0378\, h,$$

a kładąc $h = 2000$ metr.,

$$\delta r_1 = +\ 75{,}6 \text{ metr.}$$

Liczby te są zawielkie 1-mo dla tego żeśmy nieuwzględnili zmian gęstości towarzyszących deformacyi kuli, 2-do dla tego, że wzór I t. j.

wzór Thomsona i Taita właściwie odnosi się do izotropowego ciała. Ziemia zaś nasza ciałem izotropowem nie jest, przeciwnie powierzchowne jej warstwy posiadają gęstość równą zaledwie połowie średniej gęstości ziemi. Aby uwzględnić tę okoliczność a jednocześnie skompensować pierwszą przyczynę błędów, załóżmy, że deformacya ogranicza się do powierzchownych warstw o małej gęstości. Ze względu na to, że gęstość ich równa się połowie średniej gęstości ziemi, trzeba będzie we wzorze I pomnożyć wszystkie wyrazy na $\frac{1}{2}$. W ten sposób otrzymamy o połowę mniejsze wartości na δr_1 mianowicie:

W środku lodowca: $(\mu = 1)$

$$\delta r_1 = -127{,}5 \text{ metrów}$$

na krawędzi lodowca $\left(\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\delta r_1 = -58{,}9 \text{ metrów}$$

na równiku $(\mu = 0)$

$$\delta r_1 = +37{,}8 \text{ metrów.}$$

Te ostatnie liczby należy uważać za pewnego rodzaju minima, ale swoją drogą należy pamiętać, że rzeczywiste wartości na δr_1, t. j. obliczone z uwzględnieniem obu wyżej pod 1-mo i 2-do roztrząsanych okoliczności, z pewnością wypadłyby bliższe do tych ostatnich niejako minimalnych wartości na δr_1, niż do poprzednio obliczonych maximalnych wartości.

Oprócz przesunięć δr_1 mamy jeszcze wyżej wspomniane przesunięcia powierzchni ekwipotencyalnych, spowodowane przez przyciąganie lodowców. Oznaczymy te ostatnie przez δr_2. Obliczymy je za pomocą pewnych wzorów Woodwarda [1]). Jeżeli podstawimy w te wzory

[1]) Wzory Woodwarda [Bulletin U. S. Geol. Survey Nr. 48. str. 41], na które się powołujemy, wyglądają tak:

W środku lodowca

$$\delta r_2 = 3h \cdot \frac{\rho}{\rho_m}\left(\sin\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2}\right)$$

Na krawędzi lodowca

$$\delta r_2 = 3h \cdot \frac{\rho}{\rho_m}\left(\frac{\beta}{\pi} - \sin^2\frac{\beta}{2}\right)$$

W antypodach środka lodowca

$$\delta r_2 = 3h \cdot \frac{\rho}{\rho_m}\left(2\sin^2\frac{\beta}{4} - \sin^2\frac{\beta}{2}\right)$$

ρ oznacza gęstość lodu

ρ_m średnią gęstość ziemi

wartości odpowiadające naszym założeniom, to znajdziemy, że w środku lodowca jego własne przyciąganie sprawia podniesienie ekwipotencyalnej powierzchni o *188,2* metrów, ale przyciąganie lodowca znajdującego się w antypodach sprawia w tym samym punkcie zniżenie o *32,2* metrów, przeto w środku lodowca

$$\delta r_2 = 188{,}2 - 32{,}2 = + 156{,}0 \text{ metrom.}$$

Na krawędzi lodowca jego własne przyciąganie sprawia podniesienie powierzchni ekwipotencyalnej o *97,8* metrów, a przyciąganie lodowca, znajdującego się w antypodach zniżenie o *31,4* metrów, przeto na krawędzi lodowca:

$$\delta r_2 = 97{,}8 - 31{,}4 = + 66{,}4 \text{ metrom.}$$

Wreszcie na równiku przyciągania obu lodowców sumują się przyczem sprawiają zniżenie ekwipotencyalnej powierzchni o *38* metrów, przeto na równiku

$$\delta r_2 = - 38 \text{ metrów.}$$

A więc wypadkowe przesunięcia ekwipotencyalnej powierzchni są:

$$\begin{array}{lll} \text{W środku lodowca } (\mu = 1) & (\delta r_1)\,\text{min.} + \delta r_2 = + 28{,}5 & \text{metrom} \\ \text{na krawędzi } \left(\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}\right) & (\delta r_1)\,\text{min.} + \delta r_2 = - 7{,}5 & \text{"} \\ \text{na równiku } (\mu = 0) & (\delta r_1)\,\text{min.} + \delta r_2 = - 0{,}2 & \text{"} \end{array}$$

Gdybyśmy zaś wzięli zamiast (δr_1) min., t. j. zamiast minimalnych δr_1 maximalne, tobyśmy otrzymali:

$$\begin{array}{lll} \text{przy } \mu = 1 & (\delta r_1)\,\text{max.} + \delta r_2 = - 99 & \text{metrom} \\ \text{"} \quad \mu = \frac{\sqrt{3}}{2} & (\delta r_1)\,\text{max.} + \delta r_2 = - 51{,}4 & \text{"} \\ \text{"} \quad \mu = 0 & (\delta r_1)\,\text{max.} + \delta r_2 = + 37{,}6 & \text{"} \end{array}$$

Widzimy stąd przedewszystkiem, że czy tak czy inaczej, δr_1 i δr_2 mają przeciwne znaki i wzajemnie się neutralizują. Ponieważ powinniśmy uważać (δr_1) min. za bliższe prawdy, niż (δr_1) max., przeto możemy powiedzieć, że δr_2 mniejwięcej zupełnie neutralizują δr_1 — jednakże

---

β wartość współrzędnej θ dla krawędzi lodowca. W naszem zadaniu:

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

Wywód tych wzorów jest nazbyt długi, abyśmy go mogli tutaj powtórzyć. Kto się tym wywodem interesuje, niech przejrzy cytowaną pracę Woodwarda.

Wzory Woodwarda są także obliczone w taki sposób, że odkształcona powierzchnia ekwipotencyalna zawiera tę samą objętość, co nieodkształcona.

u krawędzi dodatnie wypadkowe przesunięcie otrzymane z (δr_1) min. jest tak małe (+ *7,5* metrów), a otrzymane z (δr_1) max. w porównaniu z niem tak duże (— *51,4*), że przy ścisłem obliczeniu zapewne δr_1 wzięłoby górę i otrzymalibyśmy u krawędzi bardzo wprawdzie małe ale odjemne wypadkowe przesunięcie ekwipotencyalnej powierzchni.

Teraz możemy także ocenić zmiany poziomu morza. Wedle obliczeń dokonanych w poprzednim rozdz. wytworzenie się lodowców pochłonęło objętość wody:

$$v = 0{,}9\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)Ah.$$

W poprzednim rozdz. zakładaliśmy też, że ocean pokrywa całą powierzchnię kuli oprócz zlodowaconych lądów t. j. zajmuje pole:

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A\,.$$

Stąd wynika, że grubość d warstwy wody, która została odjęta oceanom w celu wytworzenia lodowców wynosi

$$d = \frac{v}{\alpha} = 0{,}9 \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}\, h = 0{,}13923\, h,$$

a więc kładąc jak wprzódy:

$$h = 2000 \text{ metrów},$$

otrzymamy:

$$d = 278{,}5 \text{ metrów}.$$

Gdybyśmy wzięli na uwagę tę okoliczność, że przecie i za czasów lodowej epoki prócz lądów pokrytych lodowcami były jeszcze inne lądy, to okazałoby się, że objętość wody v została odjęta oceanowi, pokrywającemu nie pole α, ale mniejsze, że zatem grubość d warstwy o objętości v musi być większa niż *278,5* metrów. Załóżmy n. p., że stosunek powierzchni lądu do powierzchni morza był w czasie lodowej epoki taki sam, jak obecnie, t. j. $^{52}/_{145}$, w takim razie morze pokrywało nie $\alpha = 0{,}866\, A$ [A = pole powierzchni całej kuli], lecz tylko $0{,}736\, A$ i trzeba pomnożyć *278,5* na $\frac{866}{736}$, aby otrzymać rzeczywiste zniżenie poziomu wód. W dalszym ciągu będziemy wszędzie przyjmować: $d = \frac{866}{736}\, 278{,}5 = 327{,}7$ metrom. W ten sposób widzimy, że w czasie lodowej epoki powierzchnia wody w oceanach musiała zniżyć się o jakie *327,7* metrów (naturalnie przy tych założeniach, które tu zrobiliśmy). Podniesienie się dna w ekwatoryalnych morzach nie mogło temu przeszkodzić, albowiem jednocześnie zniżyło się dno w morzach sąsiadujących ze zlodowaconymi lądami. Opadnięcie poziomu wód o *327,7* metrów musiało wszędzie nawet na wybrzeżach zlodowaconych lądów sprawić zniżenie linii brzegowych o paręset metrów.

Jeżeli oznaczymy zmiany poziomu przez Dr, to mamy:

$$Dr = \delta r_1 + \delta r_2 - \Delta r - d.$$

Podstawimy w ten wzór na δr_1 mniejsze wartości, oznaczone przez (δr_1) min, oraz na d wartość *327,7*, a otrzymamy dla krawędzi lodowca

$$Dr = -58{,}9 + 66{,}4 - (-178{,}7) - 327{,}7 = -141{,}5 \text{ metrów,}$$

a więc bardzo znaczne względne zniżenie poziomu morza, gdybyśmy zaś wzięli zamiast (δr_1) min. (δr_1) max. tobyśmy otrzymali jeszcze większe względne zniżenie poziomu [1]). Podniesienia względnego poziomu są możebne tylko w głęboko w zlodowacony ląd sięgających kanałach lub wązkich zatokach n. p. we fjordach. Rzeczywiście, wyobraźmy sobie taki wązki fjord, sięgający od krawędzi lodowca aż do samego środka (t. j. do punktu gdzie $\theta = 0$, $\mu = 1$). Obecność takiego wązkiego kanału miałaby nieznaczny tylko wpływ na warunki zadania i deformacye pod lodowcem, rozciętym w kilku miejscach takimi wązkimi fjordami byłyby tylko bardzo mało różne od tych, które obliczyliśmy w poprzednim III rozdziale, a odkształcenia ekwipotencyalnych powierzchni byłyby także prawie takie same, jak te, które obliczyliśmy w obecnym IV rozdziale. Otóż w głębi takiego fjordu, w pobliżu środka lodowca Δr ma tak znaczne odjemne wartości, że ogólny opad powierzchni wód nie może skompensować Δr, tam zatem na Dr otrzymamy dodatne wartości. N. p., biorąc znowu (δr_1) min. i $d = 327{,}7$ metrów, otrzymamy dla środka lodowca:

$$Dr = -127{,}5 + 156{,}0 - (-497{,}8) - 327{,}7 = +198{,}6 \text{ metrów.}$$

Jest to bardzo znaczne względne wzniesienie poziomu morza. Gdyby nawet było trochę przesadzone, co ze względu na metodę rachunku nie jest niemożebne, to zawsze jeszcze nawet po odjęciu kilkunastu metrów pozostałaby pokaźna cyfra. Widzimy więc, że w takim fjordzie mogłyby jednocześnie istnieć u krawędzi odjemne względne przesunięcia morskiego poziomu a w pobliżu środka lodowca znaczne dodat-

[1]) Względne zmiany poziomu morza są właśnie tą wielkością, którą możemy skonstatować i zmierzyć w rzeczywistości. Inne wielkości jak Δr, δr_1, δr_2 i t. d., nie mogą być bezpośrednio obserwowane i mierzone.

ne przesunięcia, przyczem naturalnie po drodze od krawędzi do środka widzielibyśmy, jak odjemne Dr najpierw zbliżają się do zera, jak przechodzą w dodatne i jak te ostatnie rosną ku środkowi lodowca.

V. Hypoteza zlodowacenia tylko jednej półkuli.

Zasada zachowania masy wód [pod wszystkiemi trzema postaciami: wody, lodu i pary] naturalnie pozostaje w swej sile, wskutek czego także pozostaje w swej sile równanie warunkowe zasadnicze II z III rozdz. t. j. równanie:

$$\int p'\, d\omega = 0\,.$$

Znowu wskutek utrzymania się tego warunku szereg wyrażający przesunięcie Δr nie będzie zawierać stałego wyrazu, tj. nie będzie żadnego skrócenia średniego promienia kuli, czyli drugiemi słowy objętość kuli po odkształceniu pozostanie taką samą, jak przed odkształceniem. Tak samo i δr_1 nie będzie zawierać stałego wyrazu.

Zatrzymamy dawniejsze założenia co do rozmiarów lodowca, tylko będziemy mieli zamiast dwóch lodowców jeden. Tak samo zatrzymamy poprzednie założenia co do fizycznych własności kuli, t. j. jej ściśliwości i sztywności.

Rozkład ciśnienia p' będzie teraz inny. Od $\mu = 1$ do $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$ mamy teraz, jak i dawniej:

$$p' = 0{,}9\, h,$$

od $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$ do $\mu = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ mamy podobnie, jak dawniej:

$$p' = -\,0{,}9 \cdot \frac{V}{\alpha}\,,$$

a ponieważ objętość jednego lodowca jest dwa razy mniejsza, jak dwóch, t. j. V jest dwa razy mniejsze, przeto z równania III w III rozdz. od razu widzimy, że między $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a $\mu = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$p' = -\,0{,}06961\, h\,.$$

Co do przestrzeni między $\mu = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ a $\mu = -1$, to należy założyć, że tam wszystko pozostaje „in statu quo", że zatem od $\mu = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ do $\mu = -1$

$$p' = 0 .$$

Teraz wypada nam rozwinąć p' w szereg funkcyi kulistych:

$$p' = \sum_{i=1}^{i=\infty} C_i P_i .$$

Wyrazu $C_0 P_0$ nie piszemy, bośmy przed chwilą już wyjaśnili, że ten wyraz musi być równy zeru.

Na mocy wzoru V w III rozdz. i korzystając ze wzoru VII tegoż III rozdz. możemy od razu napisać:

$$\text{I} \qquad \frac{2C_i}{2i+1} = \left[0{,}96961\, h \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} P_i d\mu + 0{,}06961\, h \int_{-1}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} P_i d\mu \right].$$

Już wiemy, że całki

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} P_i d\mu \text{ oraz } \int_{-1}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} P_i d\mu,$$

mają zawsze jednakowe absolutne wartości, a znaki jednakowe gdy i jest parzyste, oraz przeciwne gdy i jest nieparzyste; przeto mamy, pisząc jeszcze wedle wzorów IX i XI z III rozdz.

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} P_i d\mu = \frac{A_i}{2i+1},$$

$$\text{II} \qquad C_i = \frac{1}{2} [1{,}03923]\, h \,.\, A_i ,$$

gdy i jest parzyste, oraz

$$\text{III} \qquad C_i = \frac{1}{2} [0{,}9 \,.\, h\, A_i],$$

gdy i jest nieparzyste.

Stąd zaraz wynika:

$$\left.\begin{aligned}\Delta r = & -\frac{1}{2}\cdot 1{,}03923\,.\,\frac{ah}{n}\cdot\sum_{j=1}^{j=\infty} D_{2j} A_{2j} P_{2j} - \\ & -\frac{1}{2}\,.\,0{,}9\,.\,\frac{ah}{n}\cdot\sum_{j=0}^{j=\infty} D_{2j+1}\, A_{2j-1}\, P_{2j+1}\end{aligned}\right\}\quad \text{IV}$$

Porównując te wyrażenie z wyrażeniem dla Δr w III rozdz. n. p. ze wzorem XVI od razu widzimy, że pierwsza suma jest połową sumy XVI, a tylko drugą sumę wypadnie na nowo obliczyć. Podstawiwszy jeszcze zamiast a i n ich wartości, otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned}\Delta r = & -\frac{1}{2}\,0{,}8275\,h\sum_{j=1}^{j=\infty} D_{2j} A_{2j} P_{2j} - \\ & -\frac{1}{2}\cdot 0{,}717\,.\,h\sum_{j=0}^{j=\infty} D_{2j+1}\, A_{2j+1}\, P_{2j+1}\end{aligned}\right.\quad \text{V}$$

Zaraz obliczymy tę drugą sumę dla $\mu = 1$, $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i t. d., ale wprzód musimy się zastanowić nad tem, co począć z wyrazem $D_1 A_1 P_1$, wiemy bowiem z III rozdz., że D_1 jest nieskończenie wielkie. Ale co oznacza ta nieskończoność? Aby to zbadać, weźmy ogólny wzór na Dr, t. j. wzór XV w III rozdz. Wedle tego wzoru:

$$D_i = \frac{1}{2(i-1)}\cdot\frac{i(2i+1)m + [2(i+1)(i-1) - i]\,.\,n}{(2i^2+4i+3)m - (2i+1)n}.$$

Podstawmy tu w liczniku zamiast m wartość tego współczynnika $k + \frac{1}{n}\,n$; po najelementarniejszych przekształceniach i skróceniach D_i przybierze następującą postać:

$$\left.\begin{aligned}D_i = & \frac{1}{2(i-1)}\cdot\frac{i(2i+1)k}{(2i^2+4i+3)m - (2i+1)n} + \\ & + \frac{(4i+3)n}{3[(2i^2+4i+3)m - (2i+1)n]}.\end{aligned}\right.\quad \text{VI}$$

Od razu widzimy, że z pomiędzy dwóch wyrazów na które się rozpada D_i — drugi zawsze jest skończonym, t. j. jest skończonym dla $i = 1, 2, \ldots$ i t. d., pierwszy zaś staje się koniecznie nieskończonym dla $i = 1$. Ale, gdybyśmy założyli, że kula jest absolutnie nieściśliwą, t. j., że $k = \infty$, $m = \infty$, to ów drugi wyraz w D_i zniknie i D_i przywiedzie się do:

$$D_i = \frac{1}{2\,(i-1)}\,\frac{i\,(2i+1)}{2i^2+4i+3}$$

I teraz D_i jest skończone dla $i = 2, 3$ etc.... a nieskończone dla $i = 1$, lecz dzięki założeniu, że $k = \infty$ od razu widzimy o co chodzi. W naszem zadaniu D_1 występuje jako współczynnik przy funkcyi $P_1 = \mu$, która nie wyraża nic innego jak normalną składową pewnego rozkładu ciśnienia w powierzchni kuli, przy którem wszystkie punkty jednej półkuli doznają ciśnienia zupełnie jednakowego i równoległego do osi biegunowej a wszystkie punkty drugiej półkuli doznają ciągnienia też wszędzie jednakowego i równoległego do osi biegunowej. Oczywistą jest rzeczą, że taki system ciśnień nie może odkształcić kuli absolutnie nieściśliwej a może ją tylko przesunąć jako całość. W ten sposób zjawisko wychodzi poza zakres deformacyi, a wkracza w dziedzinę ruchu ciała uważanego jako całość i dlatego to współczynnik D_1 jest nieskończony. Stąd też widzimy jakie znaczenie ma D_1 w ogólnym wypadku, gdy m i k są skończone. Nieskończenie wielka część tego współczynnika odpowiada pewnemu przesunięciu kuli jako całość które nas zresztą wcale nie obchodzi i które możemy poprostu pominąć, zaś skończona część tego współczynnika odpowiada deformacyi i tę należy uwzględnić. Ta skończona część, jak to widać ze wzoru III, dla $i = 1$ będzie: $\frac{7n}{3[9m - 3n]}$, a więc kładziemy:

$$D_1 = \frac{7n}{3[9m - 3n]}.$$

Teraz możemy, jak wszędzie zresztą, położyć: $m = 2n$, a otrzymamy:

$$D_1 = \frac{7}{45},$$

Tę wartość na D_1 należy uwzględnić w dalszych rachunkach. Przy pomocy tablic I — IV z III rozdz. oraz kładąc

$$D_1 = \frac{7}{45}$$

łatwo jest obliczyć $D_i\, A_i\, P_i$ dla nieparzystych wskaźników, mianowicie znajdziemy:

I Tablica.

Dla $\mu = 1$

$$D_1\ A_1\ P_1 = 0{,}05833\ldots$$
$$D_3\ A_3\ P_3 = 0{,}14019\ldots$$
$$D_5\ A_5\ P_5 = 0{,}05631\ldots$$
$$D_7\ A_7\ P_7 = -\,0{,}00361\ldots$$

$$D_9\ A_9\ P_9 = -\ 0{,}02669\ldots$$
$$D_{11}\ A_{11}\ P_{11} = -\ 0{,}01856\ldots$$
$$D_{13}\ A_{13}\ P_{13} = +\ 0{,}00080\ldots$$
. . . .

etc. . . . .

Podstawmy teraz te wartości we wzór V, t. j. w drugą sumę figurującą po prawej stronie tego wzoru, jednocześnie zaś weźmy ze wzorów XX w III rozdz. wartość pierwszej sumy, pamiętając o tem, że tu mamy jej połowę, a otrzymamy

$$\begin{aligned}\Delta r = &- \frac{1}{2}\,.\,0{,}8275\,h\ [0{,}3008\ldots] \\ &- \frac{1}{2}\,.\,0{,}717\,h\ [0{,}20677\ldots\end{aligned} \qquad \text{VII}$$

Kładąc $h = 2000$ otrzymamy dla środka lodowca ($\mu = 1$)

$$\Delta r = -\ [248{,}9 + 148{,}2] = -\ 397{,}1 \text{ metrów.} \qquad \text{VII}$$

Dla antypodów środka lodowca t. j. dla $\mu = -\ 1$, pierwsza suma we wzorze V ma tę samą wartość, co dla $\mu = 1$, bo wszystkie P_i o parzystym wskaźniku i mają dla $\mu = -\ 1$ tę samą wartość $+\ 1$, co dla $\mu = 1$. Co do funkcyi P_i nieparzystych, to te mają dla $\mu = 1$ wartość 1, a dla $\mu = -\ 1$ wartość $-\ 1$ tak, że druga suma we wzorze V ma tę samą absolutną wartość, ale znak przeciwny. A więc dla antypodów środka lodowca ($\mu = -\ 1$)

$$\Delta r = -\ [248{,}0 - 148{,}2] = -\ 100{,}7 \text{metrów.}$$

Następnie

II Tablica.

Dla $\mu = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$D_1\ A_1\ P_1 = \sqrt{3}\,.\,0{,}02917\ldots$$
$$D_3\ A_3\ P_3 = \sqrt{3}\,.\,0{,}02629\ldots$$
$$D_5\ A_5\ P_5 = -\sqrt{3}\,.\,0{,}00726\ldots$$
$$D_7\ A_7\ P_7 = \sqrt{3}\,.\,0{,}00086\ldots$$
$$D_9\ A_9\ P_9 = \sqrt{3}\,.\,0{,}00292\ldots$$
$$D_{11}\ A_{11}\ P_{11} = -\sqrt{3}\,.\,0{,}00172\ldots$$
$$D_{13}\ A_{13}\ P_{13} = \sqrt{3}\,.\,0{,}00014\ldots$$
. . . .

etc. . . . .

Postępując tak samo jak w poprzednim wypadku, znajdziemy:

$$\Delta r = -\frac{1}{2}\ 0{,}8275\, h\, .\, [0{,}1080\ldots]$$
$$-\frac{1}{2}\, .\, 0{,}717\, h\, .\, [0{,}0504\ \sqrt{3}\ldots],$$

kładąc:

$$h = 2000 \text{ metrów},$$

otrzymamy dla krawędzi lodowca $\left(\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

IX $\quad \Delta r = -[89{,}4 + 62{,}6] = -152{,}2$ metr.

a dla antypodów krawędzi lodowca $\left(\mu = -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

X $\quad \Delta r = -[89{,}4 - 62{,}6] = -26{,}8$ metr.,

Wreszcze dla $\mu = 0$ wszystkie nieparzyste P_i są równe zeru, przeto druga suma jest równa zeru i pozostaje tylko pierwsza. Będziemy więc mieli na równiku wedle wzoru XXII z III rozdz.

$$\Delta r = -\frac{1}{2}\ 0{,}8275\, h\, .\, [-0{,}0595\ldots],$$

t. j. przy $h = 2000$ metrów na równiku ($\mu = 0$)

XI $\quad \Delta r = 49{,}2$ metry.

Jak widzimy mamy znaczne zagłębienie pod lodowcem, ale nie tak głębokie, jak przy zlodowaceniu obu półkuli, kiedy kula była ściśnięta z obu stron, dalej mamy także zagłębienie w antypodach lodowca, ale znacznie mniejsze niż pod samym lodowcem i ekwatoryalne wzniesienie znacznie niższe niż w tamtym wypadku. Przyczyna dla czego zagłębienie pod lodowcem jest w tym wypadku o wiele mniej głębokie, niż w wypadku zlodowacenia obu półkuli polega głównie na tem, że rozkład ciśnień jest w tym wypadku mniej różny od współczesnego rozkładu ciśnień, oraz po części na tem, że jak to wyżej widzieliśmy, jednostronne ciśnienie lodowca sprawia także pewne przesunięcie kuli jako całość, więc jakoby część ciśnienia nie zużywa się na deformacyę a na owe przesunięcie [1]).

Wzór dla δr_1 możemy od razu napisać. Wzór ten będzie naturalnie składać się z dwóch sum:

---

[1]) Naturalnie rzeczywiste przesunięcie ma miejsce o tyle, że przy jednostronnem zlodowaceniu środek ciężkości zmienia swe położenie wewnątrz ciała, ale nie zmienia go w przestrzeni, ciało więc musi się przesunąć trochę.

$$\begin{aligned}\delta r_1 = & -\frac{1}{2}\,0{,}8275\,h\left[\frac{3}{5}\,D_2\,A_2\,P_2 + \ldots \frac{3}{4j+1}\,D_{2j}\,A_{2j}\,B_{2j} + \ldots\right] \\ & -\frac{1}{2}\,0{,}717\,h\left[D_1\,A_1\,P_1 + \frac{3}{7}\,D_3\,A_3\,P_3 + \ldots \frac{3}{4j+3}\,D_{2j+1}\,A_{2j+1}\,P_{2j+1}\right]\end{aligned} \qquad \text{XII}$$

Wartość pierwszych sum dla różnych wartości μ możemy wprost wziąć z IV rozdz., potrzeba je tylko podzielić na 2. Wartości drugich sum łatwo obliczymy z tablic I i II niniejszego rozdz. Otrzymamy w ten sposób:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Przy } \mu = 1 \\ \quad (\delta r_1)\,\text{max.} = -[127{,}5 + 90{,}7] = -218{,}2 \text{ metry} \\ \text{przy } \mu = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \quad (\delta r_1)\,\text{max.} = -[58{,}9 + 48{,}1] = -107{,}0 \text{ metry} \\ \text{przy } \mu = 0 \\ \quad (\delta r_1)\,\text{max.} = +37{,}8 + 0 = -37{,}8 \text{ metry} \\ \text{przy } \mu = -1 \\ \quad (\delta r_1)\,\text{max.} = -[127{,}5 - 90{,}7] = -36{,}8 \text{ metry} \\ \text{przy } \mu = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \quad (\delta r_1)\,\text{max.} = -[58{,}9 - 48{,}1] = -10{,}8 \text{ metry} \end{array}\right\} \text{XIII}$$

Minimalne wartości na δr_1 obliczymy tak samo, jak w poprzenim rozdz., mnożąc (δr_1) max. na $\frac{\rho}{\rho_e}$, t. j. na stosunek gęstości wierzchnich warstw do średniej gęstości ziemi. Wartość tego stosunku przyjęliśmy równą $\frac{1}{2}$, przeto otrzymamy;

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Dla } \mu = 1 & (\delta r_1)\,\text{min.} = -\ 109{,}1 & \text{metr.} \\ \mu = \dfrac{\sqrt{3}}{2} & (\delta r_1)\,\text{min.} = -\ 53{,}5 & \text{,,} \\ \mu = 0 & (\delta r_1)\,\text{min.} = +\ 18{,}9 & \text{,,} \\ \mu = -1 & (\delta r_1)\,\text{min.} = -\ 18{,}4 & \text{,,} \\ \mu = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & (\delta r_1)\,\text{min.} = -\ 5{,}4 & \text{,,} \end{array}\right\} \text{XIV}$$

Przesunięcia powierzchni ekwipotencyalnej spowodowane przez przyciąganie lodowca będą:

$$\text{XV} \left\{ \begin{array}{llll} \text{Dla } \mu = 1 & \delta r_2 = & 188{,}2 & \text{metr.} \\ \mu = \frac{\sqrt{3}}{2} & \delta r_2 = & 97{,}8 & \text{„} \\ \mu = 0 & \delta r_2 = - & 19 & \text{„} \\ \mu = -1 & \delta r_2 = - & 32{,}2 & \text{„} \\ \mu = -\frac{\sqrt{3}}{2} & \delta r_2 = - & 31{,}4 & \text{„} \end{array} \right.$$

Wreszcie przyjmiemy, że ogólne zniżenie poziomu wód jest równe połowie zniżenia obliczonego w poprzednim rozdz.., t. j. przyjmiemy

$$d = 163{,}8 .$$

A więc wedle wzoru:

$$Dr = \delta r_1 + \delta r_2 - \Delta r - d,$$

jeżeli jeszcze przytem przyjmiemy zamiast δr_1 jego mniejszą wartość oznaczoną przez δr_1, otrzymamy następujące względne zmiany poziomu morza (ze wzorów VII do XV oprócz XIII).

U krawędzi lodowca $\left(\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$Dr = [-53{,}5 + 97{,}8 - (-152{,}2) - 163{,}8] \text{ metr.} = +32{,}7 \text{ metr.}$$

Względna zmiana poziomu jest dodatną, a przytem o tyle znaczną, że nawet przy nieco innem obliczeniu pozostałaby dodatną. Widzimy tu dużą różnicę z wynikiem, otrzymanym w IV rozdz. Gdy zakładaliśmy, że obie półkule są zlodowacone, to znaleźliźmy w tych samych warunkach: $Dr = -141{,}5$ metrom, a więc względne przesunięcie poziomu było odjemne, a przytem o wielkiej odjemnej wartości.

Weźmy jeszcze środek lodowca ($\mu = 1$)

$$Dr = -109{,}1 + 188{,}2 - (-397{,}1) - 163{,}8 = 312{,}4 \text{ metry.}$$

A więc w wązkim fjordzie sięgającym aż do środka lodowca, mielibyśmy w samym środku potężne względne podniesienie poziomu morza o całe $312{,}4$ metry. I tu podniesienie poziomu morza jest większe, niż w wypadku, gdy mieliśmy dwa lodowce, tam bowiem mieliśmy: $Dr = +198{,}6$. Ponieważ wyniki w obu wypadkach były obliczone jednakową metodą i z jednakową ścisłością, więc wnioski wysnute z porównania z tych wyników są jeszcze o wiele pewniejsze, niż same wyniki. Możemy więc śmiało twierdzić, że pomimo tego, że przy zlodowaceniu tylko jednej półkuli zagłębienie pod lodowcami jest mniejsze niż przy zlodowaceniu obu półkuli, jednakże dzięki innym przyczynom, mianowicie dzięki temu, że przyciąganie lodowca nie jest neutralizowane przez przyciąganie drugiego lodowca znajdującego się w antypadach, oraz dzięki temu, że ogólny opad poziomu wód jest znacznie (o połowę) mniejszy, dzięki tym przyczynom mówimy, wytwarzają się warunki dogodniejsze dla znacznych względnych wzniesień poziomu morza. Różnice nie są wprawdzie bardzo wielkie, ale są. Co zaś do spadku linii brzegowych od środka lodowców do krawędzi, to ten jest w obu wypadkach prawie jednakowy. Przypatrzmy się jeszcze względnym zmianom poziomu morza w antypodach lodowca, t. j. na drugiej półkuli. Z VIII—XV (z wyjątkiem XIII) znajdujemy:

$$\text{dla } \mu = -1 \quad Dr = -18{,}4 - 32{,}2 + 100{,}7 - 163{,}8 = -113{,}7 \text{ metr.}$$

$$\text{dla } \mu = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad Dr = -\ \ 5{,}4 - 31{,}4 + \ \ 26{,}8 - 163{,}8 = -173{,}8 \text{ metr.}$$

a więc i tu i tam, t. j. i na punkcie wprost przeciwległym środkowi lodowca i w antypodach krawędzi mamy względne zniżenia poziomu, w antypodach krawędzi zresztą znacznie większe, niż antypodach środka lodowca. A zatem pozornie wyglądałoby to tak, jak gdyby ląd został znacznie podniesiony pomimo tego, że jak już wiemy, w rzeczywistości i tu utworzyło się zagłębienie. To daje nam pojęcie o tem, jak wyglądają stosunki na pewnej półkuli wtedy, gdy druga jest zlodowacona. Naturalnie badania zawarte w tym rozdz. pozwalają nam ocenić stosunki w tym wypadku, gdy zlodowacenie jest przemienne, t. j. gdy lodowce pokrywają na przemiany to jednę, to drugą półkulę. Ale jest pewien wypadek przemiennego zlodowacenie, o którym warto osobno powiedzieć parę słów.

Wyobraźmy sobie, że za czasów lodowej epoki zapas wody w oceanach był taki sam, jak obecnie, a więc, że ogólny opad powierzchni wód jest równy zeru: $d = 0$, że ciśnienie na dno oceanów było takie same, jak obecnie, a więc na dnie oceanów $p' = 0$. Jeżeli więc na którejś półkuli lodowce były większe jak obecnie, to tylko dla tego, że na drugiej półkuli były mniejsze niż obecnie, n. p. można sobie wyobrazić, że wszystkie lodowce południowej półkuli stopniały i że natomiast lodowce takiej samej objętości okryły podbiegunowe kraje północnej półkuli. Wskutek tego na południowej półkuli w okolicach podbiegunowych ciśnienie byłoby mniejsze niż obecnie, a zatem p' byłoby tam odjemne, podczas gdy na północnej byłoby naturalnie dodatne. Rachunków odnoszących się do tego wypadku nie przytaczamy, są one zupełnie podobne do rachunków dokonanych w rozdz. obecnym i poprzednich, powiemy tylko, że szeregi na Δr i δr_1 zawierają tylko wyrazy o wskaźnikach nieparzystych. Objętość wszystkich lodowców południowej półkuli oceniamy zgruba na $\frac{1}{5}$ objętości takich lodowców jak te, które tu rozpatrywaliśmy, t. j. lodowców pokrywających *0,067* powierzchni ziemi o grubości *2000* metrów. Otrzymalibyśmy wtedy następujące względne przesunięcia poziomu morza:

w środku lodowca ($\mu = 1$) $Dr = + 60{,}6$ metr.

u krawędzi $\left(\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $Dr = + 41{,}6$ metr.

w antypodach środka lodowca ($\mu = - 1$) $Dr = - 29{,}9$ metr.

VI. Streszczenie i zakończenie.

W założeniu, że ogólny zapas wody od czasów okresu lodowego aż do dni dzisiejszych nie uległ żadnej zmianie, rozpatrzyliśmy dwa wypadki: jeden jednoczesnego zlodowacenia obu półkuli, drugi zlodowacenia tylko jednej półkuli. Pomimo tego żeśmy założyli, iż współczynniki sztywności i nieściśliwości dla ziemi są prawie tak wielkie jak dla stali, okazało się, iż ciśnienie lodowców musiało sprawić odkształcenia małe wprawdzie wobec rozmiarów kuli, ale dla nas, dla ludzi, dość znaczne.

Przy jednoczesnem zlodowaceniu obu półkuli głębokość zapadlin pod środkami lodowców była większą [przy pewnych założeniach co do rozmiarów lodowców głębokość dochodziła do *500* metrów] aniżeli wtedy, gdy lodowce znajdują się tylko na jednej półkuli. Co do odkształceń powierzchni ekwipotencyalnych, to okazało się, że te są dwojakiego rodzaju, jedne, które oznaczaliśmy symbolem δr_1, zależą od dodatnego lub odjemnego przyciągania wzniesień i zapadlin wytworzonych przez deformacyę ziemi, drugie, które oznaczaliśmy symbole δr_2, zależą od przyciągania lodowców. W okolicach pokrytych przez lodowce i w sąsiednich δr_1 i δr_2 mają przeciwne znaki i wzajemnie się neutralizują. W wypadku zlodowacenia obu półkuli δr_1 są w zlodowaconych krajach większe, aniżeli wtedy, gdy zakładamy, że tylko jedna półkula jest zlodowaconą. Odwrotnie δr_2 są mniejsze w pierwszym wypadku aniżeli w drugim, albowiem przyciągania dwóch lodowców leżących w antypodach częściowo się neutralizują. Nic więc dziwnego, że w pierwszym wypadku na krawędzi lodu δr_2 są zupełnie zneutralizowane przez δr_1, a w drugim posiadają pewną przewagę. Co do względnych zmian poziomu morza, to okazało się, że tu wielką rolę odgrywa ogólny opad powierzchni wód w oceanach spowodowany przez to, że wielka ilość wody zamieniła się w lód;

okazało się, że głównie dzięki tej przyczynie w wypadku jednoczesnego zlodowacenia obu półkuli u krawędzi lodowców poziom wód wszędzie i koniecznie musiał uledz zniżeniu, że tylko we wązkich fjordach i zatokach głęboko wrzynających się w środek zlodowaconych lądów mogło nastąpić podniesienie poziomu morza. W wypadku, gdy tylko jedna półkula jest zlodowacona, u krawędzi lodowca zmiany poziomu morza są dodatne choć małe, (t. j. mamy podniesienie poziomu) większe zaś ku środkowi zlodowaconych lądów. Znaleźliśmy, że w środku krągłego lodowca o średnicy *6666* kilom., pokrywającego około *0,067* powierzchni ziemi, o grubości *2000* metrów podniesienie poziomu mogło wynosić *312,4* metrów, t. j. więcej niż wysokość najwyższych śladów lodowego morza w Skandynawii.

Niestety nie mogliśmy w naszem badaniu uwzględnić pewnych własności materyi, które mogły mieć znaczny wpływ na położenie poziomu morza w czasie lodowej epoki. Chcemy tu mówić o niedoskonałej sprężystości materyi, o zjawiskach znanych pod nazwą „elastische Nachwirkung" i t. d.... Dzięki tym własnościom materyi maximum efektu pewnych działających przyczyn może się spaźniać oraz skutek może trwać i wtedy jeszcze gdy działająca przyczyna dawno ustała. Tak n. p. wyobraźmy sobie kulę, na której tworzą się lodowce, załóżmy, że te lodowce powoli wzrastają, jednocześnie wzrasta deformacya sprawiona przez ciśnienie tych lodowców, ale deformacye mogą i będą wzrastać i wtedy, gdy lodowce już przestały wzrastać, gdy osiągnęły maximum rozwoju. Chwila, w której deformacya dochodzi do maximum rozwoju jest późniejszą niż ta, w której rozmiary lodowców doszły do maximum. Co więcej deformacya mogła trwać i bardzo powoli się zmniejszać jeszcze wtedy, gdy lodowce już w znacznej części stopniały. Gdyby n. p. lodowce topniały bardzo szybko, to mogłoby się zdarzyć, że był taki okres czasu kiedy deformacya ziemi była jeszcze prawie taką jak maximalna deformacya w czasie samej lodowej epoki, a lodowce stopniały już tak dalece, że już ogromne masy wód napowrót zostały zwrócone oceanom. Oczywistą jest rzeczą, że rezultatem takiego zbiegu okoliczności musiałby być potężny zalew podbiegunowych zapadlin. Taki wypadek mógłby mieć bardzo wydatne skutki osobliwie przy jednoczesnem zlodowaceniu obu półkuli, a to dla dwóch przyczyn 1-mo dla tego, że przy zlodowaceniu obu półkuli ilość wody zaabsorbowanej przez lodowce obu półkuli była znacznie (podwójnie) większą, a więc wzajemnie zwrot podwójnie wielkich mas wody musiał o wiele wyżej podnieść ogólny poziom morza, 2-do dla tego, że właśnie przy zlodowaceniu obu półkuli zmiany powierzchni ekwipotencyalnych δr_2 zależne od przyciągania samych lodowców są stosunkowo małe i nie mogą zneutralizować wpływu ogólnego opadu resp. podniesienia się poziomu wód.

W końcu zauważmy jeszcze, że z naszego badania w każdym razie wynika, iż hypoteza wielkiej sztywności wnętrza ziemi daje się pogodzić z hypotezą, że w czasie lodowej epoki ziemia uległa znacznym deformacyom dzięki ciśnieniu samych lodowców. Dalej zauważmy, że naturalnie odkształcenia ziemi nie ograniczały się do przesunięć Δr w kierunku promienia; prócz tych przesunięć istniały także przesunięcia w kierunkach stycznych do powierzchni kuli, ale te ostatnie nie obchodzą nas wcale i dlatego prowadziliśmy badanie w taki sposób, żeśmy je wcale nie uwzględnili.

Przy innych założeniach o naturze wnętrza ziemi otrzymalibyśmy naturalnie inne liczbowe wyniki. Gdybyśmy n. p. założyli, że ziemia jest absolutnie plastyczną, to pryzmat lodu o wysokości H musiałby pogrążyć się do głębokości $\frac{\rho}{\rho_e} H$, gdzie ρ oznacza gęstość lodu, a ρ_e średnią gęstość powierzchownych pokładów. Kładąc, n. p. $\rho = 0{,}9$, $\rho_e = 2{,}7$ znaleźlibyśmy, że $\frac{\rho}{\rho_e} H = \frac{1}{3} H$. Stąd możnaby obliczyć miejscową głębokość zapadliny pod lodowcem.

Wreszcie przypominamy czytelnikowi, że wszystkie wartości na Δr, δr_1, δr_2, d i Dr w naszej rozprawie są wprost proporcyonalne do grubości lodu h.