XI.

Zur Theorie der Maxima und Minima.

[Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 1860, S. 84—88.]

In den Elementen der Differentialrechnung wird folgender Satz bewiesen:

„Sind innerhalb eines gewissen Wertengebietes der unabhängigen Variabeln $x, y, z, \ldots$ die partiellen Derivierten erster Ordnung

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{dy}, \quad \frac{du}{dz}, \quad \ldots$$

einer Funktion u dieser Variabeln überall endlich und stetig, so kann ein Maximum oder Minimum von u nur da eintreten, wo diese Derivierten sämtlich verschwinden."

Hat nämlich z. B. $\frac{du}{dx}$ einen von Null verschiedenen Wert, so erleidet u, wenn man der Variabeln x zwei beliebig kleine Änderungen von entgegengesetzten Vorzeichen gibt, ebenfalls Änderungen von entgegengesetzten Vorzeichen, so daß der entsprechende Wert von u weder ein Maximum noch ein Minimum sein kann.

Man bedient sich dieses Satzes, um die Stellen $x, y, z, \ldots$ aufzusuchen, wo die Funktion ein Maximum oder Minimum wird; aber dies kann auch an solchen Stellen eintreten, wo die partiellen Derivierten unstetig werden, und zwar bietet sich dieser Fall häufig in ganz einfachen Aufgaben dar, wofür das folgende Beispiel einen Beleg geben mag, bei welchem diese Erscheinung bis jetzt unbeachtet geblieben ist.

Aufgabe: Es sind drei Punkte m_1, m_2, m_3 gegeben; es soll ein vierter Punkt m gefunden werden, für welchen die Summe der absoluten Distanzen mm_1, mm_2, mm_3 so klein wie möglich ausfällt.

Auflösung. Man nehme willkürlich im Raume ein rechtwinkliges Koordinatensystem, nenne x, y, z die Koordinaten des gesuchten

Punktes m, und r_1, r_2, r_3 die absoluten Werte seiner Distanzen von den drei gegebenen Punkten m_1, m_2, m_3, so daß

$$u = r_1 + r_2 + r_3$$

die Funktion von x, y, z ist, deren Minimumwert bestimmt werden soll. Verfährt man nun nach der gewöhnlichen Regel, so hat man

$$\frac{dr_1}{dx} + \frac{dr_2}{dx} + \frac{dr_3}{dx} = 0, \quad \frac{dr_1}{dy} + \frac{dr_2}{dy} + \frac{dr_3}{dy} = 0,$$
$$\frac{dr_1}{dz} + \frac{dr_2}{dz} + \frac{dr_3}{dz} = 0$$

zu setzen. Da man aber die Achsen mit jeder beliebigen Richtung h zusammenfallen lassen kann, so lassen sich diese drei Gleichungen in die einzige

$$\cos(p_1 h) + \cos(p_2 h) + \cos(p_3 h) = 0$$

zusammenfassen, in welcher p_1, p_2, p_3 die vom Punkte m nach m_1, m_2, m_3 laufenden Richtungen, und $(p_1 h)$, $(p_2 h)$, $(p_3 h)$ die Winkel bedeuten, welche dieselben mit der willkürlichen Richtung h einschließen.

Nimmt man h senkrecht auf p_2 und p_3, so folgt, daß h auch senkrecht auf p_1 ist, daß also die drei Richtungen p_1, p_2, p_3 und folglich auch die vier Punkte m, m_1, m_2, m_3 in einer Ebene liegen, was sich ohnehin erwarten ließ.

Läßt man ferner h sukzessive mit p_1, p_2, p_3 zusammenfallen, so erhält man

$$1 + \cos(p_2 p_1) + \cos(p_3 p_1) = 0,$$
$$\cos(p_1 p_2) + 1 + \cos(p_3 p_2) = 0,$$
$$\cos(p_1 p_3) + \cos(p_2 p_3) + 1 = 0,$$

woraus

$$\cos(p_2 p_3) = \cos(p_3 p_1) = \cos(p_1 p_2) = -\tfrac{1}{2}$$
$$(p_2 p_3) = (p_3 p_1) = (p_1 p_2) = 120^0$$

folgt.

Man erhält daher die bekannte Antwort, daß der Punkt m in der Ebene der drei Punkte m_1, m_2, m_3 so zu konstruieren ist, daß je zwei der drei Richtungen mm_1, mm_2, mm_3 einen Winkel von 120^0 miteinander bilden. Diese Konstruktion ist auch stets möglich, und liefert einen vollständig bestimmten Punkt m, sobald keiner der drei Winkel des Dreiecks $m_1 m_2 m_3$ größer ist als 120^0.

Ist aber einer der drei Winkel des Dreiecks $m_1 m_2 m_3$ größer als 120^0, so wird diese Konstruktion unausführbar; es gibt dann keinen Punkt m von der Beschaffenheit, daß je zwei der drei Richtungen mm_1, mm_2, mm_3 einen Winkel von 120^0 bilden; es gibt also keinen Punkt m, für welchen die partiellen Derivierten der Funktion u gleichzeitig verschwinden. Andererseits leuchtet aber aus dem Begriff der Funktion u, welche stets positiv ist und für unendlich entfernte Punkte unendlich wächst, unmittelbar ein, daß sie irgendwo in endlicher Entfernung doch einen Minimumwert haben muß. Wir müssen daraus schließen, daß dieser Minimumwert an einer solchen Stelle eintritt, wo die partiellen Derivierten von u unstetig werden. Da nun die Derivierten der absoluten Distanz eines beliebigen Punktes von einem festen Punkte nur in diesem letzteren selbst unstetig werden, und u eine Summe von drei solchen absoluten Distanzen ist, so werden die Derivierten nur in den drei gegebenen Punkten m_1, m_2, m_3 unstetig; es muß daher der gesuchte Punkt m mit einem dieser drei Punkte zusammenfallen. Da endlich für den Fall, daß der Dreieckswinkel bei m_1 um unendlich wenig kleiner als 120^0 ist, die frühere Konstruktion den gesuchten Punkt m unendlich nahe bei m_1 liefert, und auch, wenn dieser Winkel $= 180^0$ ist, der gesuchte Punkt offenbar mit m_1 zusammenfällt, so wird es daher so gut wie gewiß, daß auch für alle Werte des Winkels zwischen 120^0 und 180^0 die Spitze desselben der gesuchte Punkt ist.

Dies bestätigt sich analytisch, wenn man die unendlich kleine Änderung der Funktion u untersucht für den Fall, daß der variable Punkt m sich unendlich wenig von dem Punkte m_1 entfernt. Zieht man nämlich vom Punkte m_1 aus eine beliebige Richtung h, welche mit m_1m_2 und m_1m_3 die Winkel α und β einschließt, so ist die in dieser Richtung h genommene Derivierte der Funktion u gleich

$$1 - \cos\alpha - \cos\beta = 1 - 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

bezeichnet man ferner mit Θ den Winkel zwischen den Richtungen m_1m_2 und m_1m_3, von dem wir annehmen, daß er zwischen 120^0 und 180^0 liegt, so folgt aus den bekannten Eigenschaften

$$\alpha + \beta + \Theta \leqq 360^0, \quad \alpha + \beta \gtreqless \Theta,$$

der drei Winkel zwischen drei Richtungen, daß

$$120^0 \geqq \frac{\alpha+\beta}{2} \geqq 60^0,$$

also

$$-\frac{1}{2} \leqq \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \leqq +\frac{1}{2},$$

daß also der absolute Wert von $2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ ein echter Bruch ist. Mithin ist die obige Derivierte stets positiv, und folglich wächst u von dem Punkte m_1 aus nach allen Richtungen hin, was zu beweisen war.

Da der absolute Wert der Differenz $\alpha - \beta \leqq \Theta$, also $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ positiv ist, so kann die obige Derivierte nur dann den Wert Null haben, wenn

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 1; \quad \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = +\frac{1}{2}$$

ist, d. h. wenn

$$\alpha = \beta = 60^0 \quad \text{und folglich auch} \quad \Theta = 120^0,$$

also h die Halbierungsrichtung zwischen $m_1 m_2$ und $m_1 m_3$ ist. Aber in diesem Falle überzeugt man sich leicht, daß die zweite in derselben Richtung genommene Derivierte einen positiven Wert hat.
