VII.

Ableitung der allgemeinen Form der Kugelfunktionen.

[Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 1859, S. 346–362.]

1.

Dieses Problem ist auf verschiedene Arten von Laplace, Jacobi, Dirichlet behandelt; im folgenden soll ein mehr elementarer Weg eingeschlagen werden. Wir gehen von nachstehender Definition aus: „Unter einer Kugelfunktion n^{ter} Ordnung wird jede ganze rationale Funktion Y der drei Kugelkoordinaten

$$\cos\Theta,\quad \sin\Theta\cos\varphi,\quad \sin\Theta\sin\varphi$$

verstanden, welche der partiellen Differentialgleichung

$$\text{(I)}\qquad n(n+1)\sin\Theta\cdot Y+\frac{d}{d\Theta}\left(\sin\Theta\frac{dY}{d\Theta}\right)+\frac{1}{\sin\Theta}\frac{d^2Y}{d\varphi^2}=0$$

Genüge leistet.“ Bekanntlich ist dann sowohl $v=\varrho^n Y$, als auch $v=\varrho^{-(n+1)}Y$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\text{(II)}\qquad \sin\Theta\cdot\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho^2\frac{dv}{d\varrho}\right)+\frac{d}{d\Theta}\left(\sin\Theta\frac{dv}{d\Theta}\right)+\frac{1}{\sin\Theta}\frac{d^2v}{d\varphi^2}=0$$

oder, als Funktion der drei rechtwinkligen Parallelkoordinaten $\xi=\varrho\cos\Theta$, $\eta=\varrho\sin\Theta\cos\varphi$, $\zeta=\varrho\sin\Theta\sin\varphi$ angesehen, eine Lösung der Gleichung

$$\text{(III)}\qquad \frac{d^2v}{d\xi^2}+\frac{d^2v}{d\eta^2}+\frac{d^2v}{d\zeta^2}=0.$$

Wir wollen indessen lediglich die Gleichung (I) unserer Untersuchung zugrunde legen.

2.

Da Y eine ganze rationale Funktion von $\cos\Theta$, $\sin\Theta\cos\varphi$, $\sin\Theta\sin\varphi$, also eine Summe von Gliedern der Form

$$Const\cdot\cos\Theta^\alpha\sin\Theta^{\beta+\gamma}\cos\varphi^\beta\sin\varphi^\gamma$$

sein soll, worin α, β, γ ganze positive Zahlen oder Null sind, eine solche Funktion aber infolge der Identität

$$\cos\Theta^2 + (\sin\Theta\cos\varphi)^2 + (\sin\Theta\sin\varphi)^2 = 1$$

auf unendlich viele verschiedene Arten umgeformt werden kann, ohne diesen Charakter zu verlieren, so ist es zweckmäßig, zunächst eine Normalform festzusetzen, in welche jede solche Funktion stets, und auch nur auf eine einzige Weise, gebracht werden kann, und welche umgekehrt auch keine anderen als solche Funktionen enthält.

Zu einer solchen Darstellungsform gelangen wir leicht durch die folgende Bemerkung. Aus den Formeln für die Umwandlung der Produkte $2\sin a\sin b$, $2\cos a\cos b$, $2\sin a\cos b$ in eine Summe zweier Kosinus oder Sinus ergibt sich bekanntlich, daß man stets, je nachdem γ gerade oder ungerade ist,

$$\begin{aligned}\cos\varphi^\beta\sin\varphi^\gamma = a\cos(\beta+\gamma)\varphi + a_1\cos(\beta+\gamma-2)\varphi \\ + a_2\cos(\beta+\gamma-4)\varphi + \cdots\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\cos\varphi^\beta\sin\varphi^\gamma = b\sin(\beta+\gamma)\varphi + b_1\sin(\beta+\gamma-2)\varphi \\ + b_2\sin(\beta+\gamma-4)\varphi + \cdots\end{aligned}$$

setzen kann, worin $a, a_1, a_2 \ldots$ und $b, b_1, b_2 \ldots$ bestimmte Zahlkoeffizienten bedeuten. Da nun ferner

$$\sin\Theta^{\beta+\gamma} = (1-\cos\Theta^2)\sin\Theta^{\beta+\gamma-2} = (1-\cos\Theta^2)^2\sin\Theta^{\beta+\gamma-4} = \cdots$$

ist, so leuchtet ein, daß man jedes einzelne Glied einer rationalen ganzen Funktion von $\cos\Theta$, $\sin\Theta\cos\varphi$, $\sin\Theta\sin\varphi$ und folglich auch die ganze Funktion selbst in die Form

$$(1) \qquad \sum_{s=0}^{s=k}(y_s\cos s\varphi + z_s\sin s\varphi)\sin\Theta^s$$

bringen kann, wo y_s und z_s rationale Funktionen von $\cos\Theta$ sind und k den größten Wert von $\beta+\gamma$ bedeutet.

Daß eine rationale ganze Funktion von $\cos\Theta$, $\sin\Theta\cos\varphi$, $\sin\Theta\sin\varphi$ nur auf eine einzige Weise in diese Form gebracht werden kann, d. h. daß zwei solche Summen von der vorstehenden Form (1) nur dann identisch sein können, wenn die einzelnen Glieder, also auch die Funktionen y_s, z_s der einen Summe mit den entsprechenden der anderen Summe identisch sind, ist bekannt und läßt sich am kürzesten durch Multiplikation mit $\cos s\varphi\cdot d\varphi$, oder mit $\sin s\varphi\cdot d\varphi$ und Integration zwischen den Grenzen 0 und 2π beweisen.

Daß endlich umgekehrt jede solche Summe von der Form (1) auch eine ganze rationale Funktion von $\cos\Theta$, $\sin\Theta\cos\varphi$, $\sin\Theta\sin\varphi$ ist, folgt unmittelbar aus dem Moivreschen Satze

$$\sin\Theta^s\cos s\varphi + i\sin\Theta^s\sin s\varphi = (\sin\Theta\cos\varphi + i\sin\Theta\sin\varphi)^s,$$

worin $i = \sqrt{-1}$ ist.

Also ist die Form (1) eine solche oben verlangte Normalform.

3.

Wir haben jetzt die allgemeinste Form der rationalen ganzen Funktionen y_s, z_s von $\cos\Theta$ zu suchen, für welche der Ausdruck (1) eine Kugelfunktion n^{ter} Ordnung wird, d. h. der Differentialgleichung (I) genügt. Bezeichnen wir zur Abkürzung $\cos\Theta$, soweit diese Größe in den Funktionen y_s, z_s vorkommt, mit x, so daß also $dx = -\sin\Theta\cdot d\Theta$ ist, und unterwerfen wir den Ausdruck (1) der Differentialgleichung (I), so erhalten wir (da nach dem Vorhergehenden der Koeffizient von $\cos s\varphi$, sowie der von $\sin s\varphi$ in der entstehenden Gleichung für sich $= 0$ sein muß) das Resultat, daß die beiden rationalen ganzen Funktionen y_s, z_s von $x = \cos\Theta$ Lösungen der linearen Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung

$$[s] \qquad [n(n+1) - s(s+1)]u - 2(s+1)x\frac{du}{dx} + (1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

sein müssen. Und umgekehrt leuchtet ein, daß dann der Ausdruck (1) eine Kugelfunktion n^{ter} Ordnung sein wird.

Diese Differentialgleichung $[s]$ wollen wir nun untersuchen, dabei aber auch die Fälle betrachten, in welchen s eine negative ganze Zahl ist, während wir n stets als ganze positive Zahl oder Null voraussetzen. Durch Differentiation der Gleichung $[s]$ erhalten wir

$$[n(n+1) - (s+1)(s+2)]\frac{du}{dx} - 2(s+2)x\frac{d^2u}{dx^2} + (1-x^2)\frac{d^3u}{dx^3} = 0,$$

woraus unmittelbar der Satz folgt: Genügt u der Gleichung $[s]$, so genügt $\frac{du}{dx}$ der Gleichung $[s+1]$, und folglich $\frac{d^ru}{dx^r}$ der Gleichung $[s+r]$, wenn r eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet.

Nun finden wir aber für $s = -(n+1)$, daß das allgemeine Integral der Gleichung

$$[-(n+1)] \qquad 2nx\frac{du}{dx} + (1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

die Funktion

$$c\int(x^2-1)^n dx + c_1$$

ist, folglich ist nach dem eben bewiesenen Satz

$$c\frac{d^{n+s}(x^2-1)^n}{dx^{n+s}} = c\,D^{n+s}(x^2-1)^n$$

eine Lösung der Gleichung [s], und zwar ist diese Lösung eine ganze rationale Funktion von x. Sie gilt für alle ganzen Zahlenwerte von s zwischen $-n$ und $+n$.

Jetzt soll noch bewiesen werden, daß für alle ganzen Zahlwerte von s zwischen 0 und $+n$ jede rationale ganze Auflösung der Gleichung [s] in der eben gefundenen Form enthalten ist. Denn, wenn y und z irgend zwei von Null verschiedene Lösungen der Gleichung [s] sind, also

$$[n(n+1)-s(s+1)]\,y-2(s+1)\,x\frac{dy}{dx}+(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

$$[n(n+1)-s(s+1)]\,z-2(s+1)\,x\frac{dz}{dx}+(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}=0$$

ist, so folgt hieraus unmittelbar

$$-2(s+1)\,x\left\{z\frac{dy}{dx}-y\frac{dz}{dx}\right\}+(1-x^2)\left\{z\frac{d^2y}{dx^2}-y\frac{d^2z}{dx^2}\right\}=0,$$

und da

$$z\frac{d^2y}{dx^2}-y\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left\{z\frac{dy}{dx}-y\frac{dz}{dx}\right\}$$

ist, so erhält man durch Integration

$$z\frac{dy}{dx}-y\frac{dz}{dx}=\frac{Const}{(x^2-1)^{s+1}}.$$

Sind nun y und z ganze rationale Funktionen von x, und ist s eine der Zahlen 0, 1, 2, ... n, so kann diese Gleichung nur bestehen, wenn $Const = 0$ ist; daraus folgt

$$z\frac{dy}{dx}=y\frac{dz}{dx},\quad z=Const\,.\,y,$$

was zu beweisen war.

Da auf diese Weise die allgemeinste Form der Funktionen y_s, z_s für ein positives $s \lesseqgtr n$ gefunden ist, so fragt sich nur noch, ob auch für $s > n$ ganze rationale Lösungen der Gleichung [s] existieren. Nimmt man an, daß r der Grad einer solchen Lösung sei, so erhält man unmittelbar durch Einsetzen in die Differentialgleichung [s] und Vergleichung der Koeffizienten von x^r die Gleichung

$$n(n+1)-s(s+1)-2(s+1)r-r(r-1)=0$$

oder

$$n(n+1) - (r+s)(r+s+1) = 0,$$

woraus

$$r + s = n \quad \text{oder} \quad = -(n+1)$$

folgt. Ist daher $s > n$, so würde in beiden Fällen r negativ ausfallen; also existiert keine solche Lösung.

Auf diese Weise haben wir als die allgemeinste Form einer Kugelfunktion n^{ter} Ordnung

$$Y = \sum_{s=0}^{s=n} (\alpha_s \cos s\varphi + \beta_s \sin s\varphi)\, D^{n+s}(x^2-1)^n \cdot \sin \Theta^s$$

gefunden, in welcher α_s, β_s ganz willkürliche Konstanten bedeuten, deren Anzahl $= 2n + 1$ ist, und wo $x = \cos \Theta$ ist.

4.

Obgleich im vorhergehenden die ursprüngliche Aufgabe ihre vollständige Lösung erhalten hat, so wird es doch nicht unangemessen sein, die schönen Sätze von Jacobi u. a. aus derselben Quelle, aus der Differentialgleichung $[s]$ abzuleiten.

Ist s eine ganze Zahl zwischen 0 und $+n$, so folgt aus dem vorigen Artikel, daß

$$D^{n-s}(x^2-1)^n$$

eine Lösung der Differentialgleichung $[-s]$ ist; diese ganze Funktion ist offenbar teilbar durch $(x^2-1)^s$; setzen wir daher

$$D^{n-s}(x^2-1)^n = (x^2-1)^s w,$$

und suchen wir die ganze Funktion w zu bestimmen.

Setzen wir, ganz abgesehen von der dem w beigelegten speziellen Bedeutung, den Ausdruck $(x^2-1)^s w$ in die Differentialgleichung $[-s]$ ein, so ergibt sich, daß w der Gleichung $[s]$ genügen muß, woraus der allgemeine Satz folgt: Wenn w der Differentialgleichung $[s]$ genügt, so genügt $(x^2-1)^s w$ der Differentialgleichung $[-s]$, und umgekehrt.

Dies auf unseren Fall angewendet (in welchem $0 \gtreqless s \gtreqless +n$) gibt das Resultat, daß die ganze Funktion

$$w = Const \cdot D^{n+s}(x^2-1)^n$$

sein muß.

Setzt man dies in die vorige Gleichung ein, so erhält man durch Vergleichung der Koeffizienten von x^{n+s} auf beiden Seiten, den Satz von Jacobi:

$$D^{n-s}(x^2-1)^n = \frac{\Pi(n-s)}{\Pi(n+s)}(x^2-1)^s D^{n+s}(x^2-1)^n,$$

der zwar nur für $0 \leqq s \leqq n$ bewiesen ist, dessen Richtigkeit aber unmittelbar auf das ganze Intervall $-n \gtreqless s \gtreqless +n$ übertragen werden kann.

Durch wiederholte teilweise Integration findet man leicht, daß

$$\int_{-1}^{+1} D^m(x^2-1)^m D^n(x^2-1)^n dx = (-1)^s \int_{-1}^{+1} D^{m-s}(x^2-1)^m D^{n+s}(x^2-1)^n dx$$
$$= (-1)^m \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^m D^{n+m}(x^2-1)^n dx$$

ist. Hieraus folgt unmittelbar

$$\int_{-1}^{+1} D^m(x^2-1)^m D^n(x^2-1)^n dx = 0,$$

wenn $m > n$, und folglich auch, da die linke Seite symmetrisch in bezug auf m und n ist, wenn $m < n$. Ist aber $m = n$, so folgt

$$\int_{-1}^{+1} [D^n(x^2-1)^n]^2 dx = \Pi(2n) \cdot \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n dx;$$

da nun

$$\int (1-x^2)^n dx = \frac{x(1-x^2)^n}{2n+1} + \frac{2n}{2n+1}\int (1-x^2)^{n-1} dx$$

ist, so ist

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^n dx = \frac{2n}{2n+1}\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{n-1} dx = \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3}\cdot 2,$$

folglich

$$\int_{-1}^{+1} [D^n(x^2-1)^n]^2 dx = \frac{2}{2n+1}\cdot[2_n \Pi(n)]^2.$$

Wir bedürfen endlich noch des Wertes von $D^{n+s}(x^2-1)^n$ für $x = 1$, den wir mit h_s bezeichnen wollen. Da $D^{n+s}(x^2-1)^n$ der Differentialgleichung [s] genügt, so ergibt sich

$$[n(n+1) - s(s+1)]h_s - 2(s+1)h_{s+1} = 0,$$

also

$$h_s = \frac{2(s+1)}{(n-s)(n+s+1)} h_{s+1} = \frac{\Pi(n+s)}{\Pi(n-s)}\cdot\frac{2^n \Pi(n)}{2^s \Pi(s)},$$

da $h_n = \Pi(2n)$ ist.

5.

Nehmen wir auf einer mit einem Radius $= 1$ beschriebenen Kugelfläche einen bestimmten Punkt p als Pol eines Polarkoordinatensystems, indem wir mit Θ die Polardistanz $p\mu$ irgend eines Punktes μ der Kugelfläche, mit φ den Winkel bezeichnen, den der Meridian $p\mu$ mit einem festen Meridian bildet, so kann jede Funktion $f(\Theta, \varphi)$ von Θ, φ innerhalb der Grenzen $0 < \Theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$, als Funktion des Ortes eines Punktes μ auf dieser Kugelfläche angesehen werden. Es sei nun σ ein beliebig begrenzter Teil dieser Kugelfläche, ds ein unendlich kleines Element seiner Begrenzung, N die in ds nach innen errichtete sphärische Normale; ferner mögen Y, Z zwei Funktionen von Θ, φ sein, welche nebst ihren ersten partiellen Derivierten innerhalb des Gebietes σ endlich und stetig sind. Dann findet man

$$\iint \left\{\frac{d}{d\Theta}\left(Z \sin\Theta \frac{dY}{d\Theta}\right) + \frac{d}{d\varphi}\left(Z \frac{1}{\sin\Theta} \frac{dY}{d\varphi}\right)\right\} d\Theta\, d\varphi = -\int Z \frac{dY}{dN}\, ds,$$

worin das Doppelintegral linker Hand über alle Werte Θ, φ auszudehnen ist, denen Punkte innerhalb σ entsprechen, während rechts die Integration sich über die ganze Begrenzung s von σ erstreckt und $\dfrac{dY}{dN}$ die in der Richtung der nach innen errichteten Normale N genommene Derivierte von Y bedeutet. Um sich von der Richtigkeit dieses Satzes zu überzeugen, braucht man nur an jedem der beiden Teile links eine Integration auszuführen.

Andererseits ist aber

$$\frac{d}{d\Theta}\left(Z \sin\Theta \frac{dY}{d\Theta}\right) + \frac{d}{d\varphi}\left(Z \frac{1}{\sin\Theta} \frac{dY}{d\varphi}\right)$$

$$= Z\left\{\frac{d}{d\Theta}\left(\sin\Theta \frac{dY}{d\Theta}\right) + \frac{1}{\sin\Theta}\frac{d^2 Y}{d\varphi^2}\right\} + \sin\Theta \frac{dZ}{d\Theta}\frac{dY}{d\Theta} + \frac{1}{\sin\Theta}\frac{dZ}{d\varphi}\frac{dY}{d\varphi};$$

ist daher Y eine Kugelfunktion n^{ter} Ordnung, also

$$\frac{d}{d\Theta}\left(\sin\Theta \frac{dY}{d\Theta}\right) + \frac{1}{\sin\Theta}\frac{d^2 Y}{d\varphi^2} = -n(n+1)\sin\Theta \cdot Y,$$

so erhalten wir folgenden Satz:

$$\text{(IV)} \quad n(n+1)\int ZY\, d\sigma - \int\left\{\frac{dZ}{d\Theta}\frac{dY}{d\Theta} + \frac{1}{\sin\Theta^2}\frac{dZ}{d\varphi}\frac{dY}{d\varphi}\right\} d\sigma = \int Z \frac{dY}{dN}\, ds,$$

worin $d\sigma = \sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi$ ein unendlich kleines Element von σ bedeutet, und die Integrationen links über σ, rechts über die Begrenzung s von σ auszudehnen sind. Für $Z = 1$ erhalten wir das Resultat

$$\text{(V)} \qquad n(n+1)\int Y\,d\sigma = \int \frac{dY}{dN}\,ds,$$

und diese Gleichung ist nur als eine Transformation der Fundamentalgleichung (I) anzusehen, welche sich umgekehrt wieder aus (V) ableiten läßt, sobald man für σ das von zwei unendlich nahen Parallelkreisen (Θ und $\Theta + d\Theta$) und zwei unendlich nahen Meridianen (φ und $\varphi + d\varphi$) begrenzte Flächenelement $d\sigma = \sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi$ wählt. Diese Gleichung (V) spricht aber eine, von dem zufällig gewählten Polarkoordinatensystem (Θ, φ) ganz unabhängige, geometrische Eigenschaft der Ortsfunktion Y aus; nimmt man daher ein beliebiges anderes Polarkoordinatensystem, d. h. einen neuen Pol p' und einen neuen Anfangsmeridian, und bezeichnet mit ω die neue Polardistanz $p'\mu$, mit ψ den Winkel, den der Meridian $p'\mu$ mit dem neuen Anfangsmeridian bildet, so muß Y, als Funktion der neuen Koordinaten ω, ψ, der partiellen Differentialgleichung

$$\text{(VI)} \qquad n(n+1)\sin\omega\, Y + \frac{d}{d\omega}\left(\sin\omega\,\frac{dY}{d\omega}\right) + \frac{1}{\sin\omega}\,\frac{d^2Y}{d\psi^2} = 0$$

Genüge leisten. Ferner ist aus der Theorie der Transformation orthogonaler Koordinaten bekannt, daß jede der drei Größen

$$\cos\Theta, \quad \sin\Theta\cos\varphi, \quad \sin\Theta\sin\varphi$$

eine homogene lineare Funktion der drei Größen

$$\cos\omega, \quad \sin\omega\cos\psi, \quad \sin\omega\sin\psi$$

ist (und umgekehrt). Also ist Y auch eine ganze rationale Funktion dieser drei letzten Größen. Wir sehen also, daß die ursprünglich aufgestellte Definition einer Kugelfunktion ganz unabhängig ist von dem zugrunde gelegten Koordinatensystem. Bezeichnen wir daher zur Abkürzung $\cos\omega$ mit λ, so findet stets eine Identität von folgender Form statt:

$$Y = \sum_0^n (\alpha_s \cos s\varphi + \beta_s \sin s\varphi)\sin\Theta^s \cdot D^{n+s}(x^2-1)^n$$

$$= \sum_0^n (a_s \cos s\psi + b_s \sin s\psi)\sin\omega^s \cdot D^{n+s}(\lambda^2-1)^n.$$

6.

Wir benutzen die Resultate des vorigen Artikels, um folgende Aufgabe zu lösen: Die allgemeinste Form einer Kugelfunktion n^{ter} Ordnung

$$P = \sum_0^n (\alpha_s \cos s\varphi + \beta_s \sin s\varphi) \sin \Theta^s \cdot D^{n+s}(x^2 - 1)^n$$

zu finden, welche auf jedem einzelnen eines Systems von Parallelkreisen von gegebener Lage einen konstanten Wert hat.

Die Lage des Systems von Parallelkreisen ist durch die Lage des Pols p' derselben gegeben; bezeichnen wir die Koordinaten Θ, φ von p' mit Θ', φ' und nehmen wir p' zum Pol eines neuen Polarsystems ω, ψ, so ist

$$\cos \omega = \cos \Theta \cos \Theta' + \sin \Theta \sin \Theta' \cos(\varphi - \varphi') = \lambda.$$

Da nun die Kugelfunktion P lediglich von ω, nicht aber von ψ abhängen soll, so ist (nach der Endformel des vorigen Artikels)

$$P = Const \cdot D^n (\lambda^2 - 1)^n.$$

Es bleibt also noch die Aufgabe zu lösen, die Koeffizienten α_s, β_s in der Identität

$$D^n(\lambda^2 - 1)^n = \sum_0^n (\alpha_s \cos s\varphi + \beta_s \sin s\varphi) \sin \Theta^s D^{n+s}(x^2 - 1)^n$$

als Funktionen von Θ', φ' zu bestimmen. Da nun die linke Seite eine ganze rationale Funktion von

$$\lambda = \cos \omega = \cos \Theta \cos \Theta' + \sin \Theta \sin \Theta' \cos(\varphi - \varphi'),$$

also symmetrisch in bezug auf Θ, φ und Θ', φ', und folglich auch in bezug auf Θ', φ' eine Kugelfunktion n^{ter} Ordnuug ist, so sieht man voraus, daß

$$D^n(\lambda^2-1)^n = \sum_0^n \gamma_s \sin \Theta^s D^{n+s}(x^2-1)^n \sin \Theta'^s \cdot D^{n+s}(x'^2-1)^n \cos s(\varphi - \varphi')$$

sein muß, worin γ_s absolute Zahlenkoeffizienten bedeuten, welche allein noch zu bestimmen bleiben, und wo $x' = \cos \Theta'$ gesetzt ist.

7.

Statt diese Aufgabe durch die Bemerkung anzugreifen, daß die beiden partiellen Derivierten dieser Kugelfunktion, nach Θ und nach Θ' genommen, sich verhalten müssen, wie $\frac{d\lambda}{d\Theta}$ und $\frac{d\lambda}{d\Theta'}$, wodurch man ebenfalls zum Ziele kommen würde, schlagen wir einen anderen Weg ein, indem wir zunächst mit den uns zu Gebote stehenden Hilfsmitteln den bekannten Satz beweisen, daß, wenn $Y = f(\Theta, \varphi)$ eine beliebige Kugelfunktion n^{ter} Ordnung bedeutet,

$$\int Y D^n (\lambda^2 - 1)^n \, d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} \cdot 2^n \Pi(n) \cdot Y'$$

ist, worin die Integration links über die ganze Kugelfläche auszudehnen, und $Y' = f(\Theta', \varphi')$ ist.

Zu dem Zwecke denken wir uns Y als Funktion von ω, ψ in die Form

$$Y = \sum_0^n (a_s \cos s\psi + b_s \sin s\psi) \sin \omega^s \cdot D^{n+s} (\lambda^2 - 1)^n$$

entwickelt, und zerlegen die Kugelfläche diesen Koordinaten ω, ψ gemäß in unendlich kleine Elemente $d\sigma = \sin\omega \, d\omega \, d\psi$; so erhalten wir

$$\int Y D^n (\lambda^2 - 1)^n \, d\sigma = \int_0^\pi D^n (\lambda^2 - 1)^n \sin\omega \, d\omega \int_0^{2\pi} Y \, d\psi$$

$$= \int_0^\pi D^n (\lambda^2 - 1)^n \sin\omega \, d\omega \cdot 2\pi \cdot a_0 \cdot D^n (\lambda^2 - 1)^n$$

$$= 2\pi a_0 \int_{-1}^{+1} [D^n (\lambda^2 - 1)^n]^2 \, d\lambda = \frac{4\pi}{2n+1} \cdot [2^n \Pi(n)]^2 \cdot a_0.$$

Setzen wir aber in der obigen Form für Y die Variable $\omega = 0$, also $\lambda = 1$, so wird $Y = f(\Theta', \varphi') = Y'$, und folglich (Art. 4)

$$Y' = a_0 \cdot D^n (\lambda^2 - 1)^n]_{\lambda = 1} = a_0 h_0 = a_0 \cdot 2^n \Pi(n).$$

Wir erhalten daher

$$\int Y D^n (\lambda^2 - 1)^n \, d\sigma = \frac{4\pi}{2n+1} \cdot 2^n \Pi(n) \cdot Y';$$

was zu beweisen war.

Dieser Satz bildet die Ergänzung zu dem anderen Satze, daß, über die ganze Kugelfläche ausgedehnt,

$$\int Z Y \, d\sigma = 0$$

ist, wenn Z und Y Kugelfunktionen von verschiedenen Ordnungen bedeuten. Dieses folgt unmittelbar aus der Gleichung (IV), wenn man bedenkt, daß in diesem Falle das dort stehende Integral rechts wegfällt, und daß das zweite Integral links symmetrisch in bezug auf Y und Z ist; denn daraus folgt

$$n(n+1)\int ZY\,d\sigma = \int\left\{\frac{dZ}{d\Theta}\frac{dY}{d\Theta} + \frac{1}{\sin\Theta^2}\frac{dZ}{d\varphi}\frac{dY}{d\varphi}\right\}d\sigma = m(m+1)\int ZY d\sigma,$$

wenn m die Ordnung der Kugelfunktion Z ist. Wenn nun m und n verschieden sind, so ergibt sich unmittelbar der zuletzt aufgestellte Satz.

8.

Wir können nun leicht die Koeffizienten γ_s in der Entwicklung von $D^n(\lambda^2-1)^n$ in Art. 6 bestimmen, nach einem von Dirichlet angegebenen Verfahren. Setzen wir nämlich in dem ersten Satze des vorigen Artikels die spezielle Funktion

$$Y = \cos s\varphi \cdot \sin\Theta^s \cdot D^{n+s}(x^2-1)^n,$$

also

$$Y' = \cos s\varphi' \cdot \sin\Theta'^s \cdot D^{n+s}(x'^2-1)^n,$$

ein, so wird, wenn wir die Entwicklung von $D^n(\lambda^2-1)^n$ substituieren, die Kugelfläche, dem Polarsystem Θ, φ gemäß, in unendlich kleine Elemente $d\sigma = \sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi$ zerlegen, und die Variabeln $x = \cos\Theta$ einführen,

$$\int YD^n(\lambda^2-1)^n d\sigma = \gamma_s \sin\Theta'^s D^{n+s}(x'^2-1)^n \cos s\varphi' \cdot \frac{2\pi}{2n+1}\cdot\frac{\Pi(n+s)}{\Pi(n-s)}[2^n\Pi(n)]^2$$

für ein von Null verschiedenes s, während für $s=0$ der doppelte Wert zu nehmen ist. Da nun dies Resultat mit

$$\frac{4\pi}{2n+1}2^n\Pi(n)Y' = \frac{4\pi}{2n+1}\cdot 2^n\Pi(n)\cdot\cos s\varphi'\cdot\sin\Theta'^s D^{n+s}(x'^2-1)^n$$

identisch sein muß, so folgt, wenn s von Null verschieden,

$$\gamma_s = 2\cdot\frac{1}{2^n\Pi(n)}\cdot\frac{\Pi(n-s)}{\Pi(n+s)},$$

dagegen

$$\gamma_0 = \frac{1}{2^n\Pi n}.$$

Folglich ist

$$D^n(\lambda^2-1)^n$$
$$= \frac{2}{2^n\Pi(n)}\sum_0^n\frac{\Pi(n-s)}{\Pi(n+s)}\cdot\sin\Theta^s D^{n+s}(x^2-1)^n \sin\Theta'^s D^{n+s}(x'^2-1)^n\cos s(\varphi-\varphi'),$$

worin aber für $s = 0$ das entsprechende Glied auf die Hälfte zu reduzieren ist; diesen Übelstand vermeidet man in der Form

$$D^n(\lambda^2 - 1)^n$$
$$= \frac{1}{2^n \Pi(n)} \cdot \sum_{-n}^{+n} \frac{\Pi(n-s)}{\Pi(n+s)} \sin\Theta^s D^{n+s}(x^2-1)^n \sin\Theta'^s D^{n+s}(x'^2-1)^n \cos s(\varphi-\varphi'),$$

die man leicht aus der vorhergehenden ableitet.

9.

Zum Schluß wollen wir noch den Zusammenhang der letzten Untersuchung mit gewissen Reihenentwicklungen bemerken.

Bezeichnet r die Entfernung eines Punktes, dessen rechtwinklige Koordinaten

$$\xi = \varrho \cos\Theta, \quad \eta = \varrho \sin\Theta \cos\varphi, \quad \zeta = \varrho \sin\Theta \sin\varphi$$

sind, von einem festen Punkte, so genügt bekanntlich die Funktion $v = \frac{1}{r}$ der partiellen Differentialgleichung (III) und folglich auch der Gleichung (II). Nehmen wir als festen Punkt einen Punkt der mit dem Radius $= 1$ beschriebenen Kugelfläche, dessen Koordinaten

$$\xi' = \cos\Theta', \quad \eta' = \sin\Theta' \cos\varphi', \quad \zeta' = \sin\Theta' \sin\varphi'$$

sind, so ist

$$r^2 = 1 - 2\lambda\varrho + \varrho^2,$$

worin

$$\lambda = \cos\omega = \cos\Theta\cos\Theta' + \sin\Theta\sin\Theta'\cos(\varphi - \varphi')$$

ist. Entwickelt man daher $\frac{1}{r}$ in eine unendliche Reihe:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\lambda\varrho + \varrho^2}} = \sum_0^\infty P_n(\lambda) \cdot \varrho^n, \quad \text{für } \varrho < 1,$$

worin $P_n(\lambda)$ eine rationale ganze Funktion von λ bezeichnet, so ist

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{1}{\varrho}}{\sqrt{1 - 2\lambda\frac{1}{\varrho} + \left(\frac{1}{\varrho}\right)^2}} = \sum_0^\infty \frac{P_n(\lambda)}{\varrho^{n+1}}, \quad \text{für } \varrho < 1,$$

und $P_n(\lambda)$ ist eine rationale ganze Funktion von $\cos\Theta$, $\sin\Theta\cos\varphi$, $\sin\Theta\sin\varphi$, welche der partiellen Differentialgleichung (I) Genüge leistet, folglich eine Kugelfunktion n^{ter} Ordnung ist. Da sie aber die Variabeln Θ, φ nur in der Form $\lambda = \cos\omega$ enthält, so ist (nach Art. 6)

$$P_n(\lambda) = Const \cdot D^n(\lambda^2 - 1)^n = k_n D^n(\lambda^2 - 1)^n,$$

worin nur noch die Konstante k_n zu bestimmen ist; diese ergibt sich für $\lambda = 1$; denn man erhält

$$P_n(1) = k_n \cdot h_0 = 2^n \Pi(n) \cdot k_n.$$

Andererseits ist $P_n(1)$ der Koeffizient von ϱ^n in der Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\varrho + \varrho^2}} = \frac{1}{1 - \varrho} = \sum_0^\infty \varrho_n,$$

also

$$P_n(1) = 1, \quad \text{folglich} \quad k_n = \frac{1}{2^n \Pi(n)}$$

und

$$P_n(\lambda) = \frac{D^n(\lambda^2 - 1)^n}{2^n \Pi(n)}.$$

Mit Hilfe dieses Satzes kann man die vorletzte Gleichung des vorigen Artikels auch so schreiben:

$$P_n(\lambda) = 2 \sum_0^n \frac{\Pi(n-s)}{\Pi(n+s)} \cdot \sin\Theta^s D^s P_n(x) \cdot \sin\Theta'^s D^s P_n(x') \cdot \cos s(\varphi - \varphi'),$$

worin nur das $s = 0$ entsprechende Glied auf die Hälfte zu reduzieren ist. Ferner nimmt der Satz des Art. 7 die Gestalt

$$\int Y P_n(\lambda) . d\sigma = \frac{4\pi}{2n + 1} \cdot Y'$$

an, in welcher er gewöhnlich geschrieben wird. Als spezieller Fall desselben ist bemerkenswert

$$\int P_n(\lambda) P_n(\mu)\, d\sigma = \frac{4\pi}{2n + 1} \cdot P_n(\nu),$$

worin

$$\lambda = \cos\omega = \cos\Theta \cos\Theta' + \sin\Theta \sin\Theta' \cos(\varphi - \varphi')$$
$$\mu = \cos\omega' = \cos\Theta \cos\Theta'' + \sin\Theta \sin\Theta'' \cos(\varphi - \varphi'')$$
$$\nu = \cos\omega'' = \cos\Theta' \cos\Theta'' + \sin\Theta' \sin\Theta'' \cos(\varphi' - \varphi'')$$

die Kosinus der drei Seiten eines sphärischen Dreiecks sind, dessen drei Ecken die beiden festen Punkte (Θ', φ'), (Θ'', φ'') und der bewegliche Punkt (Θ, φ) sind.