II.

Über ein Eulersches Integral.

[Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 45, S. 370—374 (1853)].

Die von Gauß und Legendre in die Analysis eingeführten Funktionen Π und Γ stehen bekanntlich in dem Zusammenhange, daß $\Gamma(a)$ mit $\Pi(a-1)$ identisch ist, so lange a einen positiven Wert hat; für negative a ist $\Gamma(a)$ stets unendlich groß, während $\Pi(a-1)$ eine bestimmte Funktion bleibt und nur dann unendlich und unstetig wird, wenn a einen der Werte 0, -1, -2 usw. erhält. Die Funktion Π wird als unendliches Produkt, Γ als bestimmtes Integral definiert. Unstreitig ist die erstere Definition umfassender und gewährt eine tiefere Einsicht in das wahre Wesen dieser Funktionen; indessen ist es für die Integralrechnung wichtig, ohne Hilfe jener Entwicklungen in unendliche Produkte und Reihen, selbständig eine Theorie dieser Funktionen aufzustellen. Dies ist auch in der Tat nach und nach vollständig gelungen, seitdem namentlich Dirichlet (im 15. Bande dieses Journals) das berühmte Multiplikationstheorem von Gauß so elegant bewiesen hat. In dieser Abhandlung wird auch der Lehrsatz

$$\Pi(a-1)\cdot\Pi(-a)=\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x+1}=\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

angewendet, für welchen sehr verschiedene Beweise von verschiedenen Mathematikern gegeben sind, die aber fast alle ihren Weg über Entwicklungen in unendliche Reihen nehmen. In meiner, Ostern 1852 gedruckten Inaugural-Dissertation (Über die Elemente der Theorie der Eulerschen Integrale) sind die hauptsächlichsten zusammengestellt; auch habe ich schon dort einen neuen Weg hinzugefügt, welcher sich ganz im Gebiet der bestimmten Integrale hält, dem ich aber eine vollkommene Strenge nur dadurch zu verleihen vermochte, daß ich die Entstehung dieses Integrals aus der Multiplikation von $\Pi(a-1)$ und $\Pi(-a)$, und den Ausdruck für $\dfrac{d\log\Pi(a)}{da}$ als bekannt voraussetzte. Im folgenden soll nun ein, zwar auf ganz derselben Idee beruhender, aber von anderen Theorien ganz unabhängiger

Beweis gegeben werden, der nur die allgemeinsten Sätze über die bestimmten Integrale zu Hilfe nimmt.

Zuerst muß an einen Hilfssatz erinnert werden, der nachher einige Male gebraucht wird. Es ist bekanntlich

$$\int \frac{dw}{(\alpha w + \beta)(\alpha' w + \beta')} = \frac{log\left(\frac{\alpha w + \beta}{\alpha' w + \beta'}\right)}{\alpha\beta' - \alpha'\beta},$$

wo die Logarithmen hyperbolische sind. Sind nun $\frac{\beta}{\alpha}$ und $\frac{\beta'}{\alpha'}$ positive Größen, so folgt hieraus

$$\int\limits_0^\infty \frac{dw}{(\alpha w + \beta)(\alpha' w + \beta')} = \frac{log\frac{\alpha\beta'}{\alpha'\beta}}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$$

oder, wenn der Logarithme immer nur von dem absoluten Werte genommen wird:

$$(1) \qquad \int\limits_0^\infty \frac{dw}{(\alpha w + \beta)(\alpha' w + \beta')} = \frac{log(\alpha\beta') - log(\alpha'\beta)}{\alpha\beta' - \alpha'\beta};$$

und diese Gleichung gilt selbst für den Fall, in welchem $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha'}{\beta'}$ ist, wenn man den unter die Form $\frac{0}{0}$ tretenden Wert nach den Regeln der Differentialrechnung behandelt.

Gehen wir nun zu dem eigentlichen Gegenstande über, so ist erstens leicht zu sehen, daß das gegebene Integral

$$(2) \qquad \int\limits_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x+1} = A = \varphi(a)$$

nur dann einen endlichen, und zwar positiven Wert hat, wenn a ein positiver echter Bruch ist. Zerlegt man nämlich das Integral in zwei andere mit den Grenzen 0, 1 und 1, ∞, und schreibt im letzteren $\frac{1}{x}$ statt x, so findet man

$$(3) \qquad A = \int\limits_0^1 \frac{x^{a-1} + x^{-a}}{x+1}\,dx.$$

Da nun im ganzen Intervall der Integration $\frac{1}{x+1}$ zwischen den Grenzen 1 und $\frac{1}{2}$ liegt, so liegt auch A zwischen den Grenzen

$$\int_0^1 (x^{a-1} + x^{-a})\, dx \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\int_0^1 (x^{a-1} + x^{-a})\, dx.$$

Dieses Integral hat aber nur dann einen endlichen und positiven Wert, $= \frac{1}{a(1-a)}$, wenn a ein positiver echter Bruch ist. Dieselbe Bedingung ist daher auch für die Endlichkeit des Integrals A nötig.

Ferner ergibt sich unmittelbar aus der Gleichung (3) der Satz

$$\varphi(a) = \varphi(1-a). \tag{4}$$

Differentiiert man diese Gleichung in bezug auf a und setzt dann $a = \frac{1}{2}$, so findet man

$$\varphi'(\tfrac{1}{2}) = 0. \tag{5}$$

Da ferner, wie leicht zu sehen, $\varphi''(\frac{1}{2})$ positiv ist, so erreicht $\varphi(a)$ für $a = \frac{1}{2}$ einen Minimumwert

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{x^{-\frac{1}{2}}\, dx}{x+1} = 2\int_0^\infty \frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2} = \pi. \tag{6}$$

Bezeichnet w eine positive Größe, so erhält man, wenn man in der Gleichung (2) $\frac{x}{w}$ statt x schreibt:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\, dx}{x+w} = A w^{a-1}, \tag{7}$$

und wenn man $\frac{1}{w}$ statt w setzt,

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\, dx}{xw+1} = A w^{-a}. \tag{8}$$

Multipliziert man die Gleichung (7) mit $\frac{dw}{w+1}$, integriert in bezug auf w zwischen den Grenzen 0 und ∞ und bedenkt, daß zufolge des Hilfssatzes (1)

$$\int_0^\infty \frac{dw}{(w+1)(w+x)} = \frac{\log x}{x-1}$$

ist, so erhält man

$$AA = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x-1}\log x.$$

Integriert man jetzt in bezug auf a zwischen den Grenzen $(1-a)$ und a, so erhält man

$$\int_{1-a}^{a} AA\,da = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}-x^{-a}}{x-1}\,dx = \int_0^\infty \frac{w^{a-1}-w^{-a}}{w-1}\,dw.$$

Subtrahiert man die Gleichung (8) von (7), so findet man leicht:

$$A\,\frac{w^{a-1}-w^{-a}}{w-1} = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}(x-1)}{(xw+1)(w+x)}\,dx,$$

und wenn man zwischen den Grenzen $w=0$ und $w=\infty$ integriert und erwägt, daß

$$\int_0^\infty \frac{dw}{(xw+1)(w+x)} = \frac{2\log x}{xx-1}$$

ist, so folgt unmittelbar:

$$A\int_{1-a}^{a} AA\,da = A\int_0^\infty \frac{w^{a-1}-w^{-a}}{w-1}\,dw = 2\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x+1}\log x.$$

Zufolge der Eigenschaft von A, daß $A=\varphi(a)=\varphi(1-a)$ ist, ergibt sich aber

$$\int_{a-1}^{a} AA\,da = 2\int_{\frac{1}{2}}^{a} AA\,da.$$

Ferner ist

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{x+1}\log x = \frac{dA}{da},$$

und so erhält man endlich die Gleichung

$$A\int_{\frac{1}{2}}^{a} AA\,da = \frac{dA}{da}:$$

aus welcher sich durch Division mit A und Differentiation in bezug auf a die folgende ableiten läßt:

$$AA = \frac{1}{A}\frac{ddA}{da^2} - \frac{1}{AA}\left(\frac{dA}{da}\right)^2.$$

Da in derselben die unabhängige Variable a nicht vorkommt, so führe man $\frac{dA}{da} = A'$ als neue Variable ein. Dies gibt

$$AA = \frac{A'\,dA'}{A\,dA} - \frac{A'A'}{AA}, \quad A\,dA = \frac{AA\cdot A'\,dA' - A'A'\cdot A\,dA}{A^4}$$

oder

$$d(AA) = \frac{AA\cdot d(A'A') - A'A'\cdot d(AA)}{(AA)^2},$$

und das Integral dieser Gleichung ist offenbar

$$AA = Const. + \frac{A'A'}{AA} = Const. + \frac{1}{AA}\left(\frac{dA}{da}\right)^2.$$

Um die Konstante zu bestimmen, setze man $a = \frac{1}{2}$, wofür nach Gleichung (5) und (6) $\frac{dA}{da} = 0$ und $A = \pi$ ist; daraus folgt $\pi\pi$ als Wert der Konstante und

$$da = \pm\frac{dA}{A\sqrt{(AA-\pi\pi)}} = \mp\frac{1}{\pi}\frac{d\left(\frac{\pi}{A}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{\pi\pi}{AA}\right)}}.$$

Bezeichnet man mit c eine Konstante, so ergibt sich

$$a + c = \pm\frac{1}{\pi}\,arc\cos\frac{\pi}{A}, \quad A = \frac{\pi}{\cos(a+c)\pi}.$$

Um die Konstante c zu finden, setze man wieder $a = \frac{1}{2}$, woraus

$$1 = \cos(\tfrac{1}{2}\pi + c\pi) = -\sin c\pi, \quad \cos c\pi = 0$$

und

$$\cos(a+c)\pi = \sin a\pi$$

folgt. Man erhält daher

$$A = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

was zu beweisen war. Außerdem ergeben sich aus diesem Beweise sehr leicht noch mehrere verwandte Integrale, was ich hier nicht weiter ausführe.

Braunschweig, im September 1852.