

7.72 — ogólne zagadnienia ośrodków ciągłych,
plastyczność

PRACA HABILITACYJNA

Henryk Petryk

NIEJEDNOZNACZNOŚĆ I NIESTATECZNOŚĆ
PROCESÓW DEFORMACJI PLASTYCZNYCH

7/1987

P.269



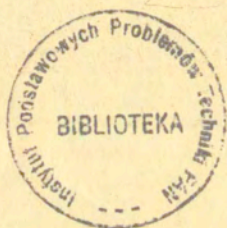
WARSZAWA 1987

<http://rcin.org.pl>

ISSN 0208-5658

Praca habilitacyjna

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 30 stycznia 1987 r.



56854



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 190 egz. Ark.wyd. 9,81 Ark.druk. 13,75

Oddano do drukarni w lutym 1987 r.

Nr zamówienia 120/87

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

NIEJEDNOZNACZNOŚĆ I NIESTATECZNOŚĆ
PROCESÓW DEFORMACJI PLASTYCZNYCH

Streszczenie Praca dotyczy zagadnień niejednoznaczności i niestateczności rozwiązań, opisujących quasi-statyczne procesy dużych deformacji plastycznych. Sformułowano teorię regularnego zagadnienia przyrostowego rzędu drugiego dla ciał sprężysto-plastycznych, ze szczególnym uwzględnieniem problemu jednoznaczności rozwiązania. Rozszerzono znaną teorię Hilla bifurkacji w prędkościach dla materiałów przyrostowo nieliniowych, wykazując słuszność twierdzeń tej teorii przy założeniu nowej nierówności konstytutywnej, słabszej od dotychczas stosowanego warunku względnej wypukłości potencjału konstytutywnego.

Przy założeniu konserwatywności obciążenia i istnienia potencjału dla przyrostowo nieliniowych równań konstytutywnych, przedstawiono nowe, jednolite podejście energetyczne do różnorodnych przejawów niestateczności w plastyczności. Wykazano, że z postulowanego energetycznego kryterium niestabilności procesu deformacji wynikają znane kryteria niestateczności plastycznej, wyprowadzane dotychczas w niejednolity sposób. Jako przykład rozpatrzono różne przejawy niestateczności w próbie jednoosiowego rozciągania dla klasy materiałów ortotropowych przy dowolnym przekroju próbki. Przedstawiono ogólne, energetyczne kryterium lokalizacji odkształceń plastycznych w przyrostowo nieliniowym materiale, oraz podano szczególną postać tego kryterium, odpowiadającą możliwości lokalizacji zachodzącej raptownie, jako proces dynamiczny. Sformułowano definicje stabilności w sensie energetycznym dla procesu deformacji plastycznych i stanu równowagi. Okazuje się, że stabilność stanu równowagi w sensie energetycznym wyklucza niestowarzyszone prawo płynięcia.

Przedstawiono szereg przykładów rozwiązań, uzyskanych metodą linii poślizgu przy wykorzystaniu techniki macierzowej. Rozwiązania opisują stacjonarne lub samopodobne procesy dużych deformacji w przypadku swobodnego brzegu o nieznanym z góry kształcie. Wykazano istnienie nieskończenie wielu rozwiązań dla zadanych warunków brzegowych w tej klasie zagadnień.

1. WPROWADZENIE

1.1 Cel i zakres pracy

Zachowanie się rzeczywistych konstrukcji, próbek czy obrabianych przedmiotów metalowych, odkształcanych w zakresie plastycznym przy powoli zmieniającym się obciążeniu, jest w znacznej liczbie prac modelowane teoretycznie poprzez pewien wyidealizowany, izotermiczny, quasi-statyczny proces deformacji ciała ciągłego, zbudowanego z materiału niewrażliwego na zmiany skali czasu. Te ogólne założenia są także przyjęte w niniejszej pracy. Teoretyczny proces deformacji jest wyznaczany poprzez rozwiązanie, często na drodze obliczeń numerycznych, odpowiednio sformułowanego zagadnienia początkowo-brzegowego. Oczywiście, zgodność przebiegu procesu teoretycznego z obserwowanym w rzeczywistości zachowaniem się konstrukcji, próbki czy przedmiotu, w pierwszym rzędzie zależeć będzie od właściwego doboru związków konstytutywnych, modelujących zachowanie się materiału, oraz warunków brzegowych, określających sposób obciążania.

Jednakże okazuje się, że teoretyczny przebieg procesu może być niezgodny z rzeczywistością nawet wówczas, gdy pominięte efekty termiczne, dynamiczne, reologiczne, itd. odgrywają nieistotną rolę, a przyjęte związki konstytutywne i warunki brzegowe stanowią dobre przybliżenie rzeczywistych własności materiału i warunków obciążania. Niezgodność ta wyraźnie

uwidacznia się w przypadkach, gdy próbka lub konstrukcja jest plastycznie odkształcana w warunkach, umożliwiających makroskopowo jednorodne deformacje, natomiast w rzeczywistości mechanizm deformacji jest pomimo to odmienny. Jako typowe przykłady można tu wymienić zjawiska wyboczenia przy ściskaniu, tworzenia się szyjki przy rozciąganiu, oraz lokalizacji odkształceń plastycznych w wąskich pasmach ścinania. Innego typu niezgodność ma miejsce w przypadku procesu odkształcania próbki lub konstrukcji w zakresie malejącej siły, jeżeli wartość tej siły jest zadawana bezpośrednio. Wówczas, pomimo powolnych zmian obciążenia, proces nie przebiega już dalej quasi-statycznie, lecz w sposób niekontrolowany, przy wystąpieniu efektów dynamicznych. Wreszcie, rozwiązania całkowicie poprawne w ramach określonej teorii mogą być czasem w sposób ewidentny nierealistyczne - jako przykład może służyć znane rozwiązanie dla stacjonarnego zagadnienia skrawania warstwy, uzyskane metodą linii poślizgu przez Lee i Shaffera [109], przewidujące nieograniczony wzrost siły skrawania dla niektórych kombinacji wartości kąta ostrza i współczynnika tarcia.

Te znane przykłady wykazują, że rozwiązanie zagadnienia początkowo-brzegowego nie gwarantuje uzyskania poprawnego opisu przebiegu deformacji nawet w przypadku, gdy rozwiązanie jest ściśle, a zagadnienie sformułowane z fizycznego punktu widzenia w pełni poprawnie. Oznacza to, że niezbędne jest prowadzenie dodatkowych badań teoretycznych, mających na celu sprawdzenie wiarygodności uzyskanego rozwiązania. Badania stateczności i jednoznaczności rozwiązań należą do podstawowych metod oceny wiarygodności rozwiązań na drodze teoretycznej. Zakres niniejszej pracy nie obejmuje, niewątpliwie również istotnych, zagadnień wrażliwości rozwiązań na niedoskonałości geometryczne lub materiałowe.

Niniejsza praca stanowi podsumowanie kilkuletnich badań

autora nad zagadnieniami niejednoznaczności i niestateczności rozwiązań, opisujących procesy dużych deformacji plastycznych. Celem pracy jest syntetyczne ujęcie nowych koncepcji, teorii i rezultatów, powstałych w wyniku tych badań, w szczególności:

1^o Rozszerzenie teorii bifurkacji procesów deformacji plastycznych, opracowanej przez Hilla, poprzez:

- sformułowanie teorii bifurkacji w (quasi-statycznych) przyspieszeniach,
- przyjęcie słabszej nierówności konstytutywnej dla przyrostowo nieliniowych modeli materiałów,

2^o Opracowanie nowego, energetycznego podejścia do zagadnień niestateczności procesów deformacji plastycznych;

3^o Podanie przykładów niejednoznacznych rozwiązań dla klasy stacjonarnych i samopodobnych zagadnień idealnej plastyczności z brzegiem swobodnym.

1.2 Charakterystyka rezultatów pracy na tle literatury

Od czasu ukazania się cyklu prac Hilla w drugiej połowie lat pięćdziesiątych, stało się jasne, że w zagadnieniach jednoznaczności i stateczności rozwiązań w teorii plastyczności należy uwzględnić efekty zmian geometrii odkształcanego ciała. Nie jest przy tym istotne, czy odkształcenia są "małe", czy też nie; istotną rolę odgrywa fakt, że wartości przynajmniej niektórych modułów, wiążących przyrosty naprężeń i odkształceń, są dla materiału plastycznego zwykle rzędu wartości naprężeń. Wskutek tego, przyrost lub spadek naprężeń, wywołany zmianami geometrii, może być równie istotny jak ich przyrost związany np. ze wzmocnieniem materiału. Wszystkie rezultaty niniejszej pracy w pełni uwzględniają zmiany geometrii ciała w trakcie deformacji i pozostają słuszne przy dowolnie dużych odkształceniach.

Geometrycznie ścisłą teorię jednoznaczności rozwiązania (w prędkościach) zagadnienia przyrostowego teorii plastycznego płynięcia rozwinął Hill [56] [57] [58] [60] [64] [67]. Zasadnicze elementy tej teorii, która zdobyła szerokie uznanie i była wielokrotnie stosowana w literaturze (zob. prace cytowane w Rozdziale 3), przytoczono poniżej w punkcie 3.1. Z teorii tej wynika, że dla pewnej klasy modeli materiałów o odcinkowo liniowych (przyrostowych) związkach konstytutywnych, punkt bifurkacji można określać, wprowadzając tzw. ciało porównawcze o liniowych związkach konstytutywnych. W praktyce sprowadza się to do możliwości pominięcia odciążania w momencie bifurkacji, zgodnie z wcześniejszą koncepcją Shanley'a [169] [170], co znacznie upraszcza obliczenia. łącznie z teorią pokrytycznego przebiegu deformacji, podaną przez Hutchinsona [81] [82], daje to wystarczające podstawy teoretyczne dla zrozumienia samego zjawiska bifurkacji procesu deformacji plastycznych i prowadzenia obliczeń numerycznych w wielu zagadnieniach praktycznych. Niemniej jednak, pozostają wciąż pewne problemy otwarte, których wyjaśnieniu (przynajmniej częściowemu) poświęcono pozostałą część Rozdziału 3.

Jeden z nich dotyczy kwestii, czy bifurkacja w prędkościach nie może być poprzedzona niejednoznacznością rozwiązania zagadnienia przyrostowego wyższego rzędu, np. zagadnienia w (quasi-statycznych) przyspieszeniach. Problem ten był dostrzeżony przez niektórych autorów (np. [64] [95] [180]), lecz pozostawał nierozstrzygnięty. W punktach 3.2 i 3.3.3 sformułowano teorię bifurkacji w przyspieszeniach dla ciał sprężysto-plastycznych, stanowiącą uogólnienie teorii, podanej w pracy autora wspólnie z Thermannem [155]. Do zasadniczych elementów tej teorii należy: sformułowanie przyrostowych równań konstytutywnych rzędu drugiego dla klasycznych materiałów sprężysto-plastycznych, udowodnienie zasady wariacyjnej i zasady minimum dla przyspieszeń, wykazanie, że warunek Hilla

wyklucza nie tylko bifurkację w prędkościach, lecz także w przyspieszeniach, sprecyzowanie okoliczności, w jakich bifurkacja w przyspieszeniach może poprzedzać bifurkację w prędkościach.

Jest rzeczą znaną, że klasyczny model materiału sprężysto-plastycznego o gładkiej powierzchni plastyczności i stowarzyszonym prawie piynięcia daje w szeregu przypadkach nierealistycznie wysokie wartości naprężeń w punkcie bifurkacji (zob. np. [82] [125]). Stąd wyniknęło znaczne w ostatnich latach zainteresowanie zastosowaniem, w zagadnieniach bifurkacji, bardziej ogólnych modeli materiału. Jednym kierunkiem badań jest tu odejście od zasady normalności (składowej plastycznej prędkości odkształcenia do powierzchni plastyczności) (np. [131] [157] [158] [12] [89] [13] [90]). Inną możliwością jest zastosowanie przyrostowo nieliniowych równań konstytutywnych, opisujących własności materiału w narożu powierzchni plastyczności (np. [167] [168] [82] [107] [186] [185]) (w krańcowym przypadku zakres sprężysty może nie występować). W niniejszej pracy (w Rozdziałach 3+6) uwaga jest skierowana na tę drugą możliwość, przy czym zachowano wprowadzone przez Hilla założenie o istnieniu potencjału prędkości odkształceń. Powstaje problem, czy w tym przypadku przy analizie możliwości bifurkacji procesu deformacji można ograniczyć się do rozpatrywania tylko przyrostowo liniowego ciała porównawczego. W ramach teorii Hilla, wymagane jest spełnienie warunku tzw. wypukłości względnej potencjału konstytutywnego, co ogranicza jednak dosyć istotnie klasę modeli materiału i nie jest wystarczająco uzasadnione nawet dla kryształów metali, a tym bardziej dla metali polikrystalicznych. W punkcie 3.3 wprowadzono nową nierówność konstytutywną, słabszą od rozpatrywanego przez Hilla warunku wypukłości względnej potencjału konstytutywnego, i wykazano, że można ją uzasadnić na drodze rozważenia mechanizmów

plastycznego płynięcia w skali mikro. Następnie udowodniono, że przy spełnieniu tej nierówności, zagadnienie bifurkacji procesu deformacji ciała sprężysto- plastycznego można sprowadzić do liniowego zagadnienia dla tzw. stycznego ciała porównawczego, bez konieczności spełnienia warunku Hilla.

Przechodząc do omówienia rezultatów, dotyczących zagadnienia niestateczności procesu deformacji, dla uniknięcia nieporozumień ustalmy stosowaną dalej terminologię. W mechanice konstrukcji pod terminem "niestateczność" rozumie się często (jeżeli nie z reguły) niestateczność stanu równowagi. Utrata stateczności stanu równowagi związana jest z pojawieniem się efektów dynamicznych (np. w zjawisku "przeskoku"), można ją więc nazywać "niestatecznością typu dynamicznego". W teorii plastyczności, termin "niestateczność" ma zwykle znaczenie szersze (por. np. tematykę Memoriału Considere'a nt. "Plastic instability", Paryż, 1985 r. [154]). Zjawiska związane ze zmianą kształtu ciała jak wyboczenie, wyrzucenie, przewężenie, itp. wygodnie jest określać mianem "niestateczności typu geometrycznego". Lokalizacja odkształceń plastycznych w paśmie ścinania może wystąpić lokalnie w ciele niejednorodnym, bez obserwowalnych zmian kształtu ciała, można ją więc traktować jako przejaw "niestateczności typu lokalnego". Inny charakter ma pojęcie "niestateczność materiału", np. w sensie Druckera [33] [34] [35], wprowadzone bez określania kinematycznego mechanizmu niestateczności; tak rozumiana niestateczność materiału nie jest w pracy rozpatrywana. Termin "niestateczność" jest w literaturze często stosowany w sensie intuicyjnym; w takim też sensie będzie używany w niniejszej pracy.

Różne typy niestateczności w ciałach plastycznych były badane w literaturze przy użyciu różnych podejść teoretycznych. Teoria bifurkacji Hilla, uzupełniona badaniami pokrytycznego zachowania się ciała i wrażliwości na imperfekcje, stanowi

obecnie podstawowe narzędzie badania niestateczności typu geometrycznego. Pojawienie się niestateczności typu dynamicznego określa się zwykle na podstawie kryterium energetycznego, w którym porównuje się przyrost pracy odkształcenia z pracą sił zewnętrznych (lub, równoważnie, bada się znak pracy dodatkowych sił zaburzających) przy wychylaniu ciała z położenia równowagi (zob. prace cytowane w punkcie 6.2), lub po prostu korzysta z klasycznego kryterium maksymalnego obciążenia. Zagadnienie lokalizacji odkształceń w wąskich pasmach, zarówno w blasze traktowanej jako ciało dwuwymiarowe, jak i w trójwymiarowym kontinuum, jest badane na drodze teoretycznej zwykle albo poprzez rozpatrywanie możliwości "bifurkacji" w paśmie (nie będącej jednak ściśle bifurkacją procesu deformacji ciała w sensie rozważanym przez Hilla), albo poprzez śledzenie rozwoju początkowej niejednorodności (zob. prace cytowane w Rozdziale 5). W wielu pracach korzystano także z intuicyjnych kryteriów niestateczności, formułowanych dla rozważanego, konkretnego zagadnienia (np. [175] [118] [47] [32]). Badano też niestateczność drogą bezpośredniej analizy dynamicznych ruchów zaburzonych (np. [36] [93] [94] [95]), co jest jednak wykonalne praktycznie jedynie dla prostych układów.

Żadna z wymienionych powyżej metod nie dostarcza jednolitego podejścia do zagadnień niestateczności typu dynamicznego, geometrycznego i lokalnego. W Rozdziale 4 wykazano, że takie jednolite podejście jest natomiast osiągalne (w przypadku konserwatywnego obciążenia i symetrii modułów przyrostowych) w wyniku wprowadzenia prostego, energetycznego kryterium niestabilności *procesu deformacji* (Kryterium 1, Punkt 4.2). Dla odróżnienia od intuicyjnego pojęcia "niestateczność", termin "niestabilność" jest w pracy używany wyłącznie w ściśle określonym sensie energetycznym i dotyczy *teoretycznego* procesu deformacji, tj. quasi-statycznego rozwiązania zagadnienia

początkowo-brzegowego. Niestabilność stanu równowagi jest traktowana jako szczególny przypadek niestabilności (zdegenerowanego) procesu o zerowych prędkościach deformacji. W Rozdziale 4 wyprowadzono z podstawowego Kryterium 1 szereg kryteriów, odpowiadających niestatecznościom poszczególnych typów; kryteria lokalizacji odkształceń przedstawiono w Rozdziale 5. Wykazano, że dla szerokiej klasy zagadnień (nie obejmującej jednak wszystkich możliwości), z proponowanego kryterium energetycznego można uzyskać rezultaty, wynikające (i) z kryterium bifurkacji procesu przy badaniu niestateczności typu geometrycznego, (ii) ze znanego kryterium energetycznego stateczności równowagi przy badaniu niestateczności typu dynamicznego, (iii) z kryterium bifurkacji w paśmie przy badaniu niestateczności w postaci lokalizacji odkształceń w pasmach ścinania. Przyjęcie pojedynczego Kryterium 1 niestabilności umożliwia więc dokonanie syntezy szeregu rezultatów, uzyskiwanych dotychczas przy zastosowaniu różnorodnych podejść, i nadanie im jednolitej interpretacji energetycznej. Ponadto, podejście energetyczne dostarcza w przypadku (i) dodatkowego kryterium wyboru ścieżki pobifurkacyjnej, a w przypadku (iii) rozstrzyga, czy lokalizacji należy się spodziewać z chwilą zaistnienia możliwości bifurkacji w paśmie. Rozpatrzony w punkcie 4.5 przykład jednoosiowego rozciągania próbki o dowolnym przekroju, z dowolnego materiału ortotropowego, stanowi ilustrację jednolitego podejścia energetycznego do różnorodnych przejawów niestateczności w plastyczności.

Trudności napotymane przy zastosowaniu znanych koncepcji stateczności ruchu do rozpatrywanej w pracy klasy quasi-statycznych procesów deformacji plastycznych omówiono w Rozdziale 6. Następnie w punkcie 6.1 przedstawiono proponowaną definicję stabilności procesu przy stale działających zaburzeniach, dla których przyjęto miarę energetyczną, i

wykazano, że Kryterium 1 niestabilności z Rozdziału 4 stanowi jego konsekwencję. Definicję stabilności stanu równowagi w sensie energetycznym i jej relacje do znanych koncepcji stateczności równowagi ciała plastycznego omówiono w punkcie 6.2. Nieoczywisty jest wynik, podany przy końcu Rozdziału 6 i udowodniony w pracy autora [153], że postulat stabilności stanu równowagi w sensie energetycznym wyklucza niestowarzyszone prawo płynięcia.

Problem istnienia niejednoznacznych rozwiązań w klasycznej teorii plastycznego płynięcia ciał sztywno-idealnie plastycznych w płaskim stanie kształcenia nie jest niczym nowym: przykładowo, znane zagadnienie Prandtla ma nieskończenie wiele rozwiązań w prędkościach. Mniej znana jest inna postać niejednoznaczności, mianowicie, niejednoznaczność rozwiązań opisujących ustalone procesy skończonych deformacji przy nieznanym z góry kształcie ciała, jak np. przy skrawaniu. Chociaż pojedyncze przykłady tego typu niejednoznaczności znane są od dawna [51] [106] [176], to jednak wciąż ukazują się prace, nawet znanych specjalistów, nie uwzględniające tej możliwości (np. [24] [21] [15]). Szereg niejednoznacznych rozwiązań, uzyskanych metodą linii poślizgów przez autora, przytoczono w Rozdziale 7. Najbardziej skomplikowane z nich, rozwiązanie dla stacjonarnego procesu toczenia walca po powierzchni plastycznego ośrodka, zawiera deformujący się brzeg swobodny, a jego wyznaczenie wymagało zastosowania, w ramach metody macierzowej Collinsa [20] [31], specjalnego typu operatorów brzegowych, zaproponowanych przez autora [145] [146]. Liczba i różnorodność rozpatrzonych przykładów pozwalają na sformułowanie wniosku, że stacjonarne i samopodobne zagadnienia w przypadku występowania swobodnego brzegu o nieznanym z góry położeniu mają z reguły nieskończenie wiele rozwiązań w ramach klasycznej teorii płaskiego, plastycznego płynięcia materiałów sztywno-idealnie plastycznych. Powstaje

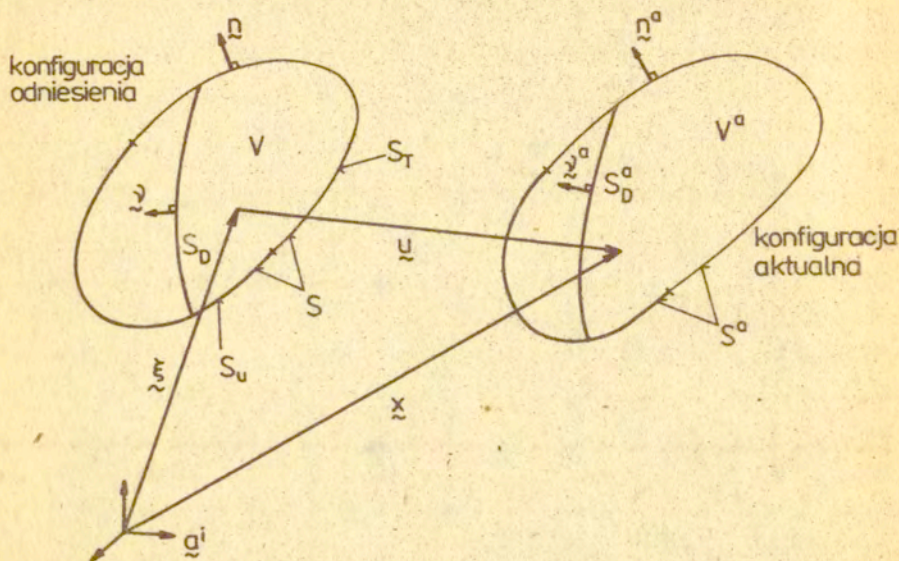
otwarty problem, czy tego typu niejednoznaczność jest związana ze zdegenerowanym modelem materiału, czy też z brakiem dobrze określonej konfiguracji początkowej odkształcanego ciała. W tym drugim przypadku problem niejednoznaczności stacjonarnych rozwiązań ze swobodnym brzegiem mógłby mieć istotne znaczenie również dla szerszej klasy modeli materiałów plastycznych.

W Rozdziale 2 oraz w punktach 3.1, 5.1 i częściowo 4.1 przytoczono rezultaty zaczerpnięte z literatury. Uwagi, zamieszczone na początku poszczególnych rozdziałów i nie ujęte w punktach, mają również charakter wstępny. Pozostała część pracy stanowi rezultat badań własnych autora.

2. PROCESY DEFORMACJI PLASTYCZNYCH

2.1 Opis deformacji

Rozważmy trójwymiarowe ciało ciągłe (tj. pewien model ciągły ciała materialnego), które w dowolnej lecz ustalonej konfiguracji odniesienia zajmowało pewien obszar V przestrzeni fizycznej, utożsamianej z trójwymiarową przestrzenią euklidesową, ograniczoną zamkniętą i płaskimi powierzchniami regularną S (Rys. 1). W przestrzeni fizycznej wprowadzamy prostokątny kartezjański układ współrzędnych x_i , $i = 1, 2, 3$, nazywanych dalej współrzędnymi przestrzennymi, zadany poprzez ustalenie trzech wzajemnie ortogonalnych wektorów jednostkowych bazy \mathbf{a}^i oraz punktu, określającego początek układu. Dla prostoty lecz bez straty ogólności rozważań, jako współrzędne materialne ξ_i przyjmujemy wartości współrzędnych przestrzennych punktów materialnych ciała w konfiguracji odniesienia. Wektory $\xi = \xi_i \mathbf{a}^i$ będziemy dla uproszczenia utożsamiać z punktami materialnymi, jak również z punktami obszaru V . W całej pracy



Rys. 1

dolne wskaźniki łacińskie od i do q przebiegają ciąg wartości 1, 2, 3 i określają składowe wektorów lub tensorów w ustalonej bazie e^i . W przypadku powtarzających się wskaźników przyjęto konwencję sumacyjną Einsteina.

W pracy ograniczamy się do rozpatrywania quasi-statycznych procesów deformacji ciała o własnościach niezależnych od czasu rzeczywistego. W związku z tym czas rzeczywisty we wzorach nie występuje, a jego rolę pełnił będzie monotonicznie rosnący parametr liczbowy t . Dla uproszczenia zachowamy jednak zwykłą terminologię, nazywając parametr t czasem i używając pojęć takich jak: chwila, pochodna czasowa, prędkość, przyspieszenie, itp. o odpowiednio zmienionym

znaczeniu. Przyjmuje się, że parametr t zmienia się dostatecznie wolno (względnie nieskończenie wolno) względem czasu rzeczywistego.

Przez proces deformacji rozumiemy (ciągłą) rodzinę konfiguracji ciała w przestrzeni, parametryzowaną przez t . Proces deformacji opisywany jest przez odwzorowanie ciągłe

$$(2.1) \quad \underline{x} = \underline{x}(\underline{\xi}, t), \quad \underline{\xi} \in V, \quad t \in [t_1, t_2],$$

gdzie $\underline{x} = x_i \underline{e}^i$ jest wektorem położenia punktu materialnego w trakcie procesu deformacji. Konfigurację ciała w rozpatrywanej aktualnie chwili t nazwiemy konfiguracją aktualną. Zarówno odkształcenia jak obroty mogą być dowolnie duże. Stosować będziemy opis materialny, przyjmując (kartezjańskie) współrzędne materialne ξ_i i czas t jako zmienne niezależne. Często będziemy stosować oznaczenia typu $\varphi = \varphi(\underline{\xi}, t)$ dla wielkości lokalnych, używając tego samego symbolu dla oznaczenia funkcji i jej wartości, o ile nie zachodzi obawa nieporozumienia. W razie potrzeby, symbol funkcji będzie dla odróżnienia opatrzony dodatkowo umieszczonym nad nim wężykiem. Przykładowo, pole prędkości w obszarze V będziemy oznaczać przez $\dot{\underline{y}}$.

Zakładając będziemy, że wszystkie wielkości lokalne występujące w rozważaniach, a więc i ich pochodne cząstkowe:

$$\varphi_i = \frac{\partial \varphi(\underline{\xi}, t)}{\partial \xi_i}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi(\underline{\xi}, t)}{\partial t}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{\partial^2 \varphi(\underline{\xi}, t)}{\partial t^2},$$

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\partial^2 \varphi(\underline{\xi}, t)}{\partial \xi_i \partial t} = \frac{\partial^2 \varphi(\underline{\xi}, t)}{\partial t \partial \xi_i}, \quad \varphi_{,ij} = \frac{\partial^2 \varphi(\underline{\xi}, t)}{\partial \xi_j \partial \xi_i}, \dots,$$

aż do rozpatrywanego rzędu włącznie, są przynajmniej odcinkowo ciągłymi funkcjami zmiennych ξ_i , t . Oznacza to, że

czterowymiarowy obszar $V \times [t_1, t_2]$ da się podzielić, poprzez poprowadzenie pewnej liczby trójwymiarowych regularnych hiperpowierzchni, na skończoną liczbę obszarów otwartych, w których dana wielkość lokalna (lub jej pochodna) jest ciągła i osiąga na brzegu obszaru granicę skończoną, ciągłą wzdłuż brzegu. W szczególności, rozważać będziemy wielkości, np. prędkości przemieszczeń, doznające skokowej zmiany w czasie. W takich przypadkach, jako wartość aktualną przyjmować będziemy jej granicę prawostronną: $\varphi(\xi, t) = \lim_{dt \rightarrow 0^+} \varphi(\xi, t+dt)$. Oznacza to, że materialna pochodna czasowa ($\dot{}$) jest definiowana jako pochodna prawostronna względem parametru t .

Niech $y = \underline{x} - \underline{\xi}$ oznacza przemieszczenie, $\dot{y} = \dot{\underline{x}} = \dot{\underline{y}}$ prędkość przemieszczenia lub po prostu prędkość, $\underline{F} = \partial \underline{x} / \partial \underline{\xi}$ gradient deformacji, oraz $\dot{\underline{F}} = \partial \dot{y} / \partial \underline{\xi} = \nabla \dot{y}$ gradient prędkości (określany w konfiguracji odniesienia). We współrzędnych mamy $F_{ij} = \partial x_i / \partial \xi_j$ oraz $\dot{F}_{ij} = \partial \dot{y}_i / \partial \xi_j$; ponieważ baza została ustalona, to ten sam typ wskaźników oznaczać będzie składowe wektorów lub tensorów, odnoszących się do konfiguracji aktualnej (jak np. \underline{x} lub \dot{y}) i do konfiguracji odniesienia (jak np. $\underline{\xi}$), a także tensorów dwupunktowych (jak np. \underline{F} lub $\dot{\underline{F}}$). Zakładamy, że zawsze $\det(\underline{F}) > 0$, gdzie $\det(\underline{F})$ oznacza wyznacznik macierzy (F_{ij}) . Z wyjątkiem Rozdziału 7, ograniczymy się do rozpatrywania tylko takich procesów deformacji, w których przemieszczenia y są ciągłymi funkcjami zmiennych ξ_i i t , \underline{F} zmienia się w sposób ciągły w czasie (ale może doznawać skoku względem ξ na powierzchni materialnej), a prędkości \dot{y} tworzą pole ciągle względem ξ (które jednak może zmienić się skokowo w czasie, np. w punkcie bifurkacji).

Wprowadzone powyżej założenia określają klasę gładkości (regularności) rozważanych procesów deformacji plastycznych. Ograniczenie się do funkcji odcinkowo gładkich (tzn. takich, których pochodne, do rozpatrywanego rzędu włącznie, są

odcinkowo ciągle) pozwala na stosowanie klasycznego aparatu matematycznego. Operowanie szerszymi przestrzeniami funkcyjnymi, np. przestrzeniami Sobolewa, wymagałoby zastosowania bardziej skomplikowanych metod analizy funkcjonalnej, z nieuniknionym przesunięciem akcentu z zagadnień o sensie mechanicznym na problemy natury czysto matematycznej. Niezupełność przyjętych przestrzeni funkcyjnych nie będzie odgrywać tu tak istotnej roli, jak w zagadnieniach istnienia rozwiązań, które nie wchodzą w zakres niniejszej pracy.

Oznaczmy infinitezymalny element objętości w konfiguracji odniesienia i w konfiguracji aktualnej odpowiednio przez dV i dV^a , element powierzchni odpowiednio przez dS i dS^a , oraz jednostkowy wektor normalny do dS lub do dS^a odpowiednio przez \underline{n} lub \underline{n}^a (Rys. 1). Składowe N_{ij} tensora naprężeń nominalnych \underline{N} oraz σ_{ij} tensora naprężenia Cauchy'ego $\underline{\sigma}$ są współczynnikami rozkładu siły $d\mathbf{T}$ działającej na element powierzchni:

$$(2.2) \quad d\mathbf{T}_j = N_{ij} n_i dS = \sigma_{ij} n_i^a dS^a .$$

dokonanego odpowiednio w konfiguracji odniesienia i w konfiguracji aktualnej. Z wzoru Nansona

$$(2.3) \quad n_j^a dS^a = \det(\mathbf{F}) F_{ij}^{-1} n_i dS .$$

gdzie \mathbf{F}^{-1} jest tensorem odwrotnym do \mathbf{F} , wynika związek

$$(2.4) \quad F_{ji} N_{ik} = \det(\mathbf{F}) \sigma_{jk} .$$

Zakładając brak naprężeń momentowych, musimy przyjąć, że

$$(2.5) \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} , \quad F_{ji} N_{ik} = F_{ki} N_{ij} .$$

Na ogół \underline{N} jest tensorem niesymetrycznym, $N_{ij} \neq N_{ji}$. Zwróćmy uwagę, że tensor transponowany \underline{N}^T jest określany w literaturze jako I-szy tensor Pioli-Kirchhoffa.

Praca odkształcenia na jednostkę objętości w konfiguracji odniesienia wyraża się wzorem

$$(2.6) \quad w = \int N_{ij} / \dot{F}_{ji} dt$$

2.2 Równania pola i warunki brzegowe

Przyjmujemy, że na niezerowej części S_u powierzchni ciała S zadawane są zmiany przemieszczeń w trakcie procesu deformacji, natomiast na pozostałej części S_T powierzchni nakładane są (zmiennie w czasie) warunki dla naprężeń. Jak wiadomo, podział ten można rozumieć w razie potrzeby w takim sensie, że w danej chwili zadawane są na brzegu ciała określone składowe przyrostów przemieszczeń i uzupełniające składowe przyrostów sił powierzchniowych. W tym ogólniejszym przypadku podział powierzchni ciała na S_u i S_T może być różny dla różnych składowych, ma więc charakter umowny. Rozważać będziemy tylko takie procesy deformacji, które spełniają nałożone warunki kinematyczne na S_u . W szczególności, w określonym stadium deformacji rozpatrywać będziemy tylko kinematycznie dopuszczalne pola prędkości $\dot{\underline{v}} \in \mathcal{V}$, gdzie \mathcal{V} jest klasą ciągłych i odcinkowo gładkich pól prędkości, określanych na obszarze V i przyjmujących na S_u zadane wartości.

Równania ruchu dla procesów quasi-statycznych sprowadzają się, po pominięciu członów dynamicznych, do równań równowagi. Jako punkt wyjścia wygodnie jest przyjąć zasadę prac (ściśle: mocy) wirtualnych

$$(2.7) \quad \int_V N_{i,j} w_{j,i} dV = \int_V b_j w_j dV + \int_{S_T} T_j w_j dS,$$

spełnioną dla wszystkich ciągłych i odcinkowo gładkich pól wektorowych \vec{w} , określanych na obszarze V i zerujących się na powierzchni S_u . Klasę (przestrzeń) pól wektorowych \vec{w} o tych własnościach oznaczymy przez \mathcal{W} . Równość wariacyjna (2.7) pociąga ona za sobą spełnienie lokalnych warunków równowagi, które w opisie materialnym mają postać:

$$(2.8) \quad N_{i,j,i} + b_j = 0 \quad \text{w } V \setminus S_D,$$

$$(2.9) \quad [N_{i,j}] \nu_i = 0 \quad \text{na } S_D.$$

Wektor b oznacza nominalne siły masowe, na jednostkę objętości w konfiguracji odniesienia. S_D oznacza regularną powierzchnię (lub pewną ich liczbę), w poprzek której rozważana wielkość, w tym przypadku tensor naprężenia, doznaje skokowej zmiany. Symbol $[\cdot]$ oznacza wartość skoku w poprzek S_D , a ν jest jednostkowym wektorem normalnym do S_D . Powierzchnia S_D i wektor normalny ν są rozpatrywane w konfiguracji odniesienia.

Przez T oznaczono w (2.7) nominalne siły powierzchniowe, odniesione do jednostki powierzchni w konfiguracji odniesienia, przyłożone do powierzchni ciała przez urządzenie obciążające. Jako konsekwencję równości (2.7) otrzymujemy statyczne warunki brzegowe

$$(2.10) \quad N_{i,j} n_i = T_j \quad \text{na } S_T,$$

gdzie n jest jednostkowym wektorem normalnym do S , skierowanym na zewnątrz ciała. Wartość T nie musi być zadawana bezpośrednio: może zależeć od konfiguracji ciała. Dalszą specyfikację warunków brzegowych podamy w rozdziałach

następnych.

Przyjmujemy, że konfiguracja ciała, stan naprężenia oraz własności materiału (na ogół niejednorodnego) w pewnej chwili początkowej t_1 są znane. Zakładamy, że tensor naprężenia w każdym stadium deformacji jest jednoznacznie określony poprzez funkcjonalną zależność od historii gradientu deformacji w danym elemencie materiału,

$$(2.11) \quad \mathbf{N}(t) = \mathcal{N}(\mathbf{F}(s); t_1 \leq s \leq t), \quad \xi \text{ ustalone,}$$

przy czym \mathbf{F} i \mathbf{N} zmieniają się w czasie w sposób ciągły. Wprowadzając zależność (2.11), ograniczamy się do rozpatrywania klasy tzw. materiałów prostych. Zależność (2.11) wyklucza materiały sztywno-plastyczne, dla których wartość naprężenia jest dodatkowo zależna, poprzez prawo płynięcia, od aktualnej prędkości odkształcenia w chwili t oraz może doznawać skokowych zmian wraz ze skokowymi zmianami prędkości odkształcenia.

Przez rozwiązanie zagadnienia początkowo-brzegowego, nazywane dalej również teoretycznym lub podstawowym procesem deformacji, rozumiemy będziemy funkcję χ (por. (2.1)) o zadanym stopniu regularności, spełniającą warunki brzegowe dla przemieszczeń na S_0 i taką, że $\chi(\cdot, t_1)$ opisuje zadaną konfigurację początkową ciała, a naprężenia (2.11) spełniają tożsamościowo równość (2.7) (a tym samym warunki równowagi (2.8) + (2.10)) w każdej chwili $t \in [t_1, t_2]$.

2.3 Miary odkształcenia i naprężenia [65][67]

Ten sam model materiału można w różny ale równoważny sposób opisać przy użyciu różnych miar odkształceń i naprężeń, dokonując odpowiednich transformacji związków konstytutywnych poprzez zamianę zmiennych. Jakościowe cechy modelu są jednak

odzwierciedlone przez ogólną strukturę związków konstytutywnych. Powstaje więc istotna kwestia niezmienniczości tej struktury przy zamianie miar odkształceń i naprężeń względnie strumieni naprężeń. Koncepcję tego rodzaju niezmienniczości rozwinął Hill [61] [65] [66] [67] [68]; dalsze aspekty były badane przez Kleibera i Ranieckiego [91], oraz w kontekście zagadnień przyrostowych rzędu drugiego - przez Petryka i Thermanna [155].

W niniejszej pracy ograniczymy się do rozpatrywania tensorowych miar odkształcenia $\underline{\epsilon}$ i naprężenia \underline{t} , sprzężonych poprzez pracę w sensie wprowadzonym przez Hilla:

$$(2.12) \quad \dot{w} = t_{ij} \dot{\epsilon}_{ij},$$

gdzie w jest pracą odkształcenia na jednostkę objętości w konfiguracji odniesienia (por. (2.6)). Tensor $\underline{\epsilon}$ jest z definicji tensorem symetrycznym, współosiowym z prawym tensorem rozciągnięcia \underline{U} , o wartościach głównych $e^i = \bar{F}(v^i)$ uzyskanych poprzez przeskalowanie wartości głównych v^i tensora \underline{U} przy pomocy jakiegokolwiek dostatecznie gładkiej i monotonicznie rosnącej funkcji jednej zmiennej \bar{F} , spełniającej warunki $\bar{F}(1) = 0$ i $\bar{F}'(1) = 1$ (\bar{F}' oznacza pochodną funkcji \bar{F}). Przypomnijmy, że zgodnie z twierdzeniem o rozkładzie polarnym, $F_{ij} = R_{ik} U_{kj}$, gdzie \underline{R} jest tensorem obrotu. Dla każdej tak określonej miary odkształcenia $\underline{\epsilon}$, związek (2.12) służy jako definicja symetrycznego tensora \underline{t} , stanowiącego sprzężoną z $\underline{\epsilon}$ miarę naprężenia. Jest widoczne, że nałożenie na element materiału dodatkowego obrotu (przy niezmienniej konfiguracji odniesienia) pozostawia miary \underline{t} i $\underline{\epsilon}$ niezmiennione, a więc miary te są obiektywne, w sensie lagranżowskim (por. np. [137]). Szczegółową dyskusję sprzężonych miar odkształcenia i naprężenia oraz wzory transformacyjne przy zamianie miar zawierają prace Hilla [65] [67]; zob. także [136].

Będziemy zachowywali w pracy, gdzie to będzie możliwe, swobodę wyboru sprzężonej pary miar odkształcenia i naprężenia, stosując ogólne symbole \underline{e} i \underline{t} przy niesprecyzowanej funkcji skalującej \bar{f} . Jako szczególne miary odkształcenia zastosujemy tensor odkształcenia Greena \underline{E} i tensor odkształceń logarytmicznych (Hencky'ego) \underline{H} , dla których funkcja skalująca \bar{f} jest określona odpowiednio jako $\bar{f}(v) = \frac{1}{2}(v^2 - 1)$ i $\bar{f}(v) = \ln v$. Sprzężone z nimi miary naprężenia oznaczymy odpowiednio przez \underline{S} i \underline{S}^H . \underline{S} jest II-gim tensorem Pioli-Kirchhoffa, natomiast \underline{S}^H w ogólnym przypadku nie wyraża się w prosty sposób przez standardowe miary naprężenia. Jednakże, gdy eulerowski tensor odkształcenia \underline{e}^a , $e_{ij}^a = R_{ik} e_{kl} R_{jl}$, jest współosiowy z eulerowskim tensorem prędkości odkształcenia $\underline{\epsilon}$, $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i)$, lub z tensorem naprężenia Cauchy'ego $\underline{\sigma}$, to wówczas składowe tensora \underline{S}^H w bazie \underline{e}^i pokrywają się ze składowymi tensora Kirchhoffa $\underline{\tau} = \det(\underline{E})\underline{\sigma}$ w bazie obróconej tensorem \underline{R} [65], czyli

$$S_{ij}^H = R_{ki} \tau_{kl} R_{lj}$$

W przypadku ogólnym, wzór ten jest przybliżony, a niedokładność jest rzędu kwadratu odkształcenia.

Konfiguracja odniesienia może być wybrana dowolnie; w szczególności można przyjąć konfigurację aktualną jako (chwilową) konfigurację odniesienia. Taki wybór jest wygodny w analizie zagadnień przyrostowych plastyczności, powodując m.inn. znaczne uproszczenie większości wzorów. W konfiguracji odniesienia mamy $\underline{e} = \underline{0}$, $\underline{t} = \underline{\sigma}$ i $\underline{\dot{e}} = \underline{\epsilon}$ dla wszystkich miar odkształcenia. Natomiast strumień naprężenia jest zależny od wyboru miary nawet w konfiguracji odniesienia, co wynika ze związku [65]

$$(2.13) \quad \dot{t}_{ij} = \dot{S}_{ij}^H - m (\sigma_{ik} \epsilon_{kj} + \epsilon_{ik} \sigma_{kj}), \quad m = \frac{1}{2}(1 + \bar{f}'(1)).$$

Dla miar odkształcenia \underline{H} i \underline{E} mamy odpowiednio $m = 0$ i $n = 1$. Z kolei, w dalszym ciągu w konfiguracji odniesienia, mamy następujący związek [65]

$$(2.14) \quad \dot{\underline{H}}^H = \dot{\underline{H}}_0 = \dot{\underline{\sigma}} + \epsilon_{kk} \dot{\underline{\sigma}},$$

gdzie symbol $(\dot{})$ oznacza współobrotową pochodną Zaremby - Jaumanna, stowarzyszoną z tensorem chwilowej prędkości obrotowej materiału $\underline{\omega}$, $\omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial v_i / \partial x_j - \partial v_j / \partial x_i)$,

$$(2.15) \quad \dot{\underline{r}}_{ij} = \dot{\underline{r}}_{ij} + r_{ik} \omega_{kj} - \omega_{ik} r_{kj}$$

Przyjmując konfigurację aktualną za konfigurację odniesienia i wykorzystując związki (2.13) i (2.14), można łatwo sprowadzić zależności pomiędzy $\dot{\underline{t}}$ i $\dot{\underline{\sigma}}$, preferowane w tej pracy z uwagi na ich ogólny i często niezmienniczy charakter, do zależności pomiędzy $\dot{\underline{t}}$ lub $\dot{\underline{\sigma}}$ i $\underline{\xi}$, a więc do zależności typu często spotykanego w literaturze. Z kolei, transformacji wzorów przy zamianie zmiennych $(\underline{t}, \underline{\xi})$ na $(\underline{N}, \underline{F})$ (względnie $(\dot{\underline{t}}, \dot{\underline{\sigma}})$ na $(\dot{\underline{N}}, \dot{\underline{F}})$) lub odwrotnie dokonuje się, wprowadzając zmienne $(\underline{S}, \underline{E})$ w miejsce $(\underline{t}, \underline{\xi})$ i wykorzystując związki

$$(2.16) \quad E_{ij} = \frac{1}{2} (F_{ki} F_{kj} - \delta_{ij}),$$

$$(2.17) \quad N_{ij} = S_{ik} F_{jk},$$

gdzie δ_{ij} jest symbolem Kroneckera. W szczególności, w konfiguracji odniesienia mamy

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \dot{N}_{ij} &= \dot{S}_{ij} + \sigma_{ik} \epsilon_{kj} - \sigma_{ik} \omega_{kj} \\ &= \dot{\underline{\sigma}}_{ij} - \epsilon_{ik} \sigma_{kj} - \dot{\sigma}_{ik} \omega_{kj} \end{aligned}$$

2.4 Związki konstytutywne

Jak wiadomo (zob. [181] [159]), każdą obiektywną relację konstytutywną typu (2.11) można zapisać w postaci funkcjonalnej zależności pomiędzy miarami naprężenia i odkształcenia $(\underline{t}, \underline{e})$,

$$(2.19) \quad \underline{t}(t) = \underline{f}(\underline{e}(s); t_1 \leq s \leq t) .$$

Dla prostoty zapisu, związek (2.19) zapiszemy w równoważnej postaci

$$(2.20) \quad \underline{t} = \underline{t}(\underline{E}) ,$$

przez \underline{E} oznaczając historię odkształcenia $\underline{e}(s)$ od chwili początkowej t_1 do chwili aktualnej.

Zależność funkcjonalna typu (2.20) nie jest wygodna w zastosowaniach. Równania konstytutywne teorii plastyczności przyjęto formułować w postaci przyrostowej bądź prędkościowej, wiążącej ze sobą przyrosty bądź pochodne czasowe naprężeń i odkształceń. Ogólną postać przyrostową związków konstytutywnych przyjmujemy w postaci (por. Hill [57])

$$(2.21) \quad \dot{\underline{t}} = \underline{t}(\dot{\underline{e}}; \underline{E}) ;$$

zapis ten oznacza, że $\dot{\underline{t}}$ jest funkcją aktualnej prędkości odkształcenia $\dot{\underline{e}}$, przy czym postać tej funkcji jest zależna od historii odkształcenia \underline{E} . Podkreślimy, że rozważane prędkości odkształcenia i zmiany naprężenia są rozumiane jako prawostronne pochodne względem parametru t (por. założenie w punkcie 2.1). Aktualna prędkość odkształcenia nie jest bowiem zdeterminowana przez historię odkształcenia \underline{E} do chwili aktualnej włącznie, gdyż dopuszczamy "załomy" na drodze

odkształcenia. Po scałkowaniu zależności (2.21) wzdłuż drogi odkształcenia (początkowa wartość naprężenia w chwili t_1 jest zadana) otrzymujemy zależność typu (2.20).

Jednym z podstawowych założeń pracy jest niewystępowanie czasu rzeczywistego w równaniach konstytutywnych. Opisywane własności materiału muszą być więc niezależne od skali "czasu" $\#$. W konsekwencji, $\dot{\epsilon}$ jako funkcja ϵ przy ustalonym \mathcal{E} musi być funkcją (dodatkowo) jednorodną rzędu pierwszego. Z twierdzenia Eulera o funkcjach jednorodnych wynika, że w każdym punkcie różniczkowalności funkcja taka da się zapisać w postaci

$$(2.22) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = L_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl},$$

gdzie

$$(2.23) \quad L_{ijkl} = L_{ijkl}(\dot{\epsilon}, \mathcal{E}) \equiv \frac{\partial \dot{\epsilon}_{ij}}{\partial \dot{\epsilon}_{kl}}(\dot{\epsilon}, \mathcal{E}).$$

Związek (2.22) pomiędzy prędkościami zmian naprężeń i odkształceń jest, dla materiałów sprężysto-plastycznych, nieliniowy, ponieważ wartości modułów L_{ijkl} zależą, przynajmniej poprzez kryterium obciążania/odciążania, od prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}$. Zależność $L_{ijkl}(\dot{\epsilon})$ jest jednorodna rzędu zerowego, tzn. L_{ijkl} zależą od "kierunku" prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}$, ale nie od jej modułu; z twierdzenia Eulera mamy więc

$$(2.24) \quad \frac{\partial L_{ijkl}}{\partial \dot{\epsilon}_{mn}} \dot{\epsilon}_{mn} = 0.$$

Moduły L_{ijkl} zależą ponadto od historii odkształcenia \mathcal{E} . W ciele niejednorodnym, względnie początkowo jednorodnym lecz następnie nierównomiernie odkształconym, postać funkcji

$L_{ijkl}(\dot{\underline{e}})$ w chwili aktualnej jest różna dla różnych ξ . Zapis $L_{ijkl}(\dot{\underline{e}})$ jest przyjęty dla prostoty; zależność modułów od ξ i ξ będzie w dalszym ciągu rozważań zakładana milcząco.

Ponieważ L_{ijkl} nie zależą od $|\dot{\underline{e}}|$, wystarczy zadawać funkcję $L_{ijkl}(\dot{\underline{e}})$ np. na sferze $|\dot{\underline{e}}| = 1$. Zakładamy, że funkcja ta jest odcinkowo gładka (dla ścisłości można zaznaczyć, że z wyjątkiem punktu $\dot{\underline{e}} = \underline{0}$), przy czym z definicji (2.23) wynika, że

$$(2.25) \quad \frac{\partial L_{ijkl}}{\partial \dot{e}_{mn}} = \frac{\partial L_{ijmn}}{\partial \dot{e}_{kl}}$$

Przyjmujemy, że $\dot{\underline{t}}$ jest funkcją ciągłą względem $\dot{\underline{e}}$, ale funkcja $L_{ijkl}(\dot{\underline{e}})$ nie musi być ciągła. Jeżeli w określonym stadium deformacji pochodna (2.23) istnieje dla $\dot{\underline{e}} = \dot{\underline{e}}^0$ (a więc jest ciągła względem $\dot{\underline{e}}$ w punkcie $\dot{\underline{e}}^0$), to powiemy, że odpowiednie moduły $L_{ijkl}^0 = L_{ijkl}(\dot{\underline{e}}^0)$ są dobrze określone.

Postać związków konstytutywnych (2.22) wraz z (2.23) obejmuje bardzo szeroką klasę modeli materiałów o własnościach niezależnych od czasu rzeczywistego, w tym materiałów sprężysto-plastycznych o dowolnej anizotropii, dowolnym kształcie powierzchni plastyczności, dowolnym wzmocnieniu lub osłabieniu, itp. Warto może podkreślić, że przejście od postaci wyjściowej (2.11) (wynikającej z zasady determinizmu dla materiałów prostych) do (2.22) nie wymaga, z praktycznego punktu widzenia, żadnych założeń, poza wymogiem obiektywności opisu i ograniczeniami na regularność występujących funkcjonalów. Postać (2.22) obowiązuje więc (dla materiałów prostych) także w przypadku uwzględnienia tzw. obrotów plastycznych, ostatnio szeroko dyskutowanych w literaturze (np. [115] [111] [25] [108] [139] [28]). Korzystanie z równań konstytutywnych w ogólnej postaci (2.22) nie wymaga wprowadzania wciąż budzącego kontrowersje rozkładu tensora

gradientu deformacji bądź tensora prędkości odkształcenia na część sprężystą i plastyczną. Oczywiście, dążenie do zachowania możliwie ogólnej postaci związków konstytutywnych jest ściśle związane z przedmiotem niniejszej pracy, mającej na celu głównie jakościową analizę rozwiązań z punktu widzenia ich jednoznaczności i stabilności: przy rozwiązywaniu konkretnych zagadnień niezbędne byłoby ograniczenie się do badania węższej klasy materiałów.

W materiałach sprężysto-plastycznych, wpływ historii odkształcenia w zakresie sprężystym (początkowym bądź po odciążeniu) manifestuje się jedynie poprzez końcową wartość odkształcenia. Można więc podzielić wpływ całkowitej historii odkształcenia \mathcal{E} na wpływ aktualnej wartości odkształcenia \underline{e} i historii odkształceń niesprężystych [75], oznaczonej tu symbolicznie przez \mathcal{X} . Z kolei wpływ \mathcal{X} można w przybliżeniu opisywać, zastępując go zależnością od pewnej liczby parametrów wewnętrznych, zmieniających się w trakcie deformacji zgodnie z przyjętymi dla nich równaniami ewolucji. Istnieje obszerna literatura z tego zakresu (zob. np. [143] [91], i prace tam cytowane).

W szczególnym przypadku, nieliniowy związek (2.22) może być związkiem odcinkowo liniowym. Wówczas, przy określonym \mathcal{E} , przestrzeń prędkości odkształcenia jest podzielona na pewną liczbę obszarów otwartych (koniecznie stożków o wierzchołkach w punkcie $\dot{\underline{e}} = \underline{0}$), nazywanych stożkami konstytutywnymi, wewnątrz których wartości L_{ijkl} są (w danej chwili) stałe. Odpowiada to pewnym modelom sprężysto-plastycznego zachowania się materiału w narożu powierzchni plastyczności (zob. np. [167] [67]), w szczególności zaś kryształu odkształcanego plastycznie przy kilku jednocześnie aktywnych systemach poślizgu (np. [74] [49] [71] [6]). W zakresie sprężystym występuje oczywiście tylko jeden stożek konstytutywny, obejmujący całą przestrzeń prędkości odkształcenia. W klasycznym sformułowaniu

przyrostowych związków konstytutywnych dla materiału sprężysto-plastycznego o gładkiej powierzchni plastyczności [56] [61], przestrzeń prędkości odkształcenia jest podzielona na dwie półprzestrzenie, odgrywające rolę stożków konstytutywnych, hiperpłaszczyzną zawierającą kierunki odkształcania styczne do powierzchni plastyczności w przestrzeni odkształceń $\{\dot{\epsilon}\}$ w punkcie odpowiadającym aktualnej wartości odkształcenia. Należy zaznaczyć, że moduły $L_{ijkl}(\dot{\epsilon})$ nie są jednoznacznie określone dla wartości $\dot{\epsilon}$, odpowiadających punktom brzegowym stożków konstytutywnych. Niemniej jednak, odpowiednie wartości $\dot{\epsilon}$ są jednoznacznie określone z warunku ciągłości funkcji $\dot{\epsilon}(\dot{\epsilon})$.

Związek typu (2.22) może być w pełni nieliniowy, a nie tylko odcinkowo liniowy. Zaproponowano szereg modeli materiałów sprężysto-plastycznych, w których wartości modułów zmieniają się płynnie wraz z kierunkiem dalszego odkształcania (np. [57] [92], [18], [41] [27]), głównie w celu opisanego zachowania się materiału w narożu powierzchni plastyczności. Tworzenie się naroża na powierzchni plastyczności dla metali polikrystalicznych można uzasadnić na drodze rozważenia przebiegu deformacji plastycznych w mikro-skali [62] [80] [110]. Lin [110] przedstawił możliwe wyjaśnienie, dlaczego próby doświadczalnego wykrycia naroża na powierzchni plastyczności napotykają na trudności.

Ze względu na symetrię tensorów $\dot{\epsilon}$ i $\dot{\epsilon}$, moduły L_{ijkl} spełniają standardowe warunki symetrii $L_{ijkl} = L_{ijlk} = L_{jilk}$. Znaczna część rezultatów pracy została uzyskana przy istotnym (wykluczającym np. niestowarzyszone prawo płynięcia), dodatkowym założeniu symetrii głównej tensora modułów:

$$(2.26) \quad L_{ijkl} = L_{klij}$$

Założenie to jest równoważne przyjęciu, że związki

konstrytutywne (2.22) dają się wyrazić przy pomocy potencjału V .

$$(2.27) \quad \dot{t}_{ij} = \frac{\partial V}{\partial \dot{e}_{ij}}$$

przy czym

$$(2.28) \quad V = V(\dot{\underline{e}}; \underline{\varepsilon})$$

Potencjał V jest funkcją ciągle różniczkowalną, jednorodną rzędu drugiego względem $\dot{\underline{e}}$, zależną ponadto od historii odkształcenia $\underline{\varepsilon}$. Z warunku jednorodności wynika, że V ma następującą postać:

$$(2.29) \quad V = \frac{1}{2} \dot{t}_{ij} \dot{e}_{ij} = \frac{1}{2} L_{ijkl} \dot{e}_{ij} \dot{e}_{kl}$$

przy czym

$$(2.30) \quad L_{ijkl} = \frac{\partial^2 V}{\partial \dot{e}_{ij} \partial \dot{e}_{kl}}$$

Zgodność (2.30) z (2.29) wynika z zależności (2.24) + (2.26).

Przy zmianie miar odkształcenia i naprężenia, wartości modułów L_{ijkl} ulegają zmianie (nawet w konfiguracji odniesienia, tj. przy zerowych odkształceniach), zgodnie z wzorami transformacyjnymi podanymi przez Hilla [67]. Jednakże, własność symetrii (2.26) i istnienie potencjału V są niezależne od wyboru sprzężonych miar, w tym także od wyboru konfiguracji odniesienia [67].

Spora uwagi będzie poświęcone w pracy klasycznym materiałom sprężysto-plastycznym o gładkiej powierzchni plastyczności i stowarzyszonym prawie płynięcia. Równania

konstrytuwne dla takich materiałów zapiszemy również w postaci (2.22) [56] [61] [67], ale przy ograniczeniu, że moduły L_{ijkl} w określonym stadium odkształcania, odpowiadającemu punktowi na powierzchni plastyczności, mogą przyjmować tylko dwie wartości:

$$(2.31) \quad L_{ijkl} = \begin{cases} L_{ijkl}^P & \text{gdy } \lambda_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} > 0, \\ \mathcal{L}_{ijkl} & \text{gdy } \lambda_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} < 0, \end{cases}$$

gdzie tensor λ wyznacza kierunek normalny do powierzchni plastyczności w przestrzeni odkształceń i jest skierowany na zewnątrz obszaru odkształceń sprężystych. Moduły L_{ijkl}^P odpowiadają dalszemu plastycznemu odkształcaniu (obciążaniu), a moduły \mathcal{L}_{ijkl} sprężystemu odciążaniu. Przy założeniu symetrii typu (2.26) dla modułów sprężystych, z warunku ciągłej zależności $\dot{\epsilon}$ od $\dot{\epsilon}$ i stowarzyszonego prawa płynięcia wynika, że

$$(2.32) \quad L_{ijkl}^P = L_{klij}^P = \mathcal{L}_{ijkl} - \frac{1}{g} \lambda_{ij} \lambda_{kl},$$

gdzie g jest skalarnym parametrem, przyjętym jako dodatni. Aktualne wartości \mathcal{L}_{ijkl} , λ_{ij} oraz g są w ogólności dowolnymi funkcjonalami historii odkształcania \mathcal{E} . Można pokazać [56] [61] [67], że powyższa struktura równań prowadzi do ortogonalności tzw. plastycznej składowej tensora prędkości odkształcania, definiowanej wzorem

$$(2.33) \quad (\dot{\epsilon}_{ij})^P = \dot{\epsilon}_{ij} - \mathcal{L}_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}$$

do powierzchni plastyczności w przestrzeni naprężeń $\dot{\epsilon}$ sprzężonych z $\dot{\epsilon}$, w punkcie odpowiadającym aktualnej wartości tensora naprężenia. Struktura równań i zasada ortogonalności są niezmiennicze przy zmianie jednej sprzężonej pary miar odkształcania i naprężenia na inną, natomiast sam rozkład

tensora prędkości odkształcenia, w szczególności eulerowskiego tensora ξ , na część sprężystą i plastyczną, jak również wartość modułu wzmocnienia, są zależne od przyjętych miar.

Przy rozpatrywaniu zagadnień brzegowych, wygodnie jest korzystać z równań konstytutywnych, wyrażonych w pochodnych czasowych niesymetrycznych miar (\dot{N}, \dot{F}) . Miary te są ze sobą sprzężone, gdyż $\dot{w} = N_{ij} \dot{F}_{ji}$. Równanie (2.22) można zapisać w postaci

$$(2.34) \quad \dot{N}_{ij} = C_{ijkl} \dot{F}_{lk},$$

przy czym z (2.16) i (2.17) wynika, że [67]

$$(2.35) \quad C_{ijkl} = F_{jp} F_{lq} \hat{L}_{ipkq} + S_{ik} \delta_{jl},$$

gdzie moduły \hat{L}_{ipkq} odnoszą się do miar (\hat{S}, \hat{E}) , tzn.

$$(2.36) \quad \hat{S}_{ij} = \hat{L}_{ijkl} \hat{E}_{kl}.$$

Wartości modułów C_{ijkl} podstawiane do (2.34) są oczywiście zależne od gradientu prędkości, poprzez zależność modułów \hat{L}_{ijkl} od chwilowego kierunku odkształcania; zależność tę oznaczymy symbolicznie jako $C_{ijkl}[\dot{y}] \equiv C_{ijkl}(\dot{F})$.

Ze związku (2.35) wynika, że $C_{ijkl} = C_{klij}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $L_{ijkl} = L_{klij}$. Stąd, istnienie potencjału ψ , takiego że zachodzi (2.27), jest równoważne istnieniu potencjału U dla gradientu prędkości \dot{F} , $U = U(\dot{F}, \epsilon)$, takiego że

$$(2.37) \quad \dot{N}_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \dot{F}_{ji}},$$

przy czym U jest funkcją jednorodną rzędu drugiego względem \dot{F} , a więc

$$(2.38) \quad U = \frac{1}{2} \dot{N}_{ij} \dot{F}_{ji}$$

Przyrostowe związki konstytutywne o ogólnej postaci (2.37) zaproponował Hill [56] [57], wykazując m. inn. znaczenie warunku istnienia potencjału U dla wariacyjnego sformułowania zagadnienia brzegowego w prędkościach. Ze związków (2.37) i (2.38) będziemy wielokrotnie korzystać w dalszej części pracy. Zależność wartości U od gradientu prędkości będziemy oznaczać symbolicznie przez $U[\underline{y}] \equiv U(\dot{\underline{F}})$; podobnie, wprowadzimy oznaczenie $\dot{N}[\underline{y}] \equiv \dot{N}(\dot{\underline{F}})$, przy czym w obu przypadkach dowolna zależność postaci tych funkcji od ξ i ε jest zakładana milcząco.

Wypiszmy jeszcze dwie użyteczne tożsamości,

$$(2.39) \quad \Delta \dot{N}_{ij} \Delta \dot{F}_{ji} = \Delta \dot{S}_{ij} \Delta \dot{E}_{ij} + S_{ik} \Delta \dot{F}_{ji} \Delta \dot{F}_{jk},$$

$$(2.40) \quad C_{ijkl}^L \Delta \dot{F}_{ji} \Delta \dot{F}_{lk} = \hat{L}_{ijkl}^L \Delta \dot{E}_{ij} \Delta \dot{E}_{kl} + S_{ik} \Delta \dot{F}_{ji} \Delta \dot{F}_{jk},$$

gdzie symbol Δ oznacza różnicę wielkości, odpowiadających dwóm różnym kontynuacjom procesu deformacji od zadanego stanu, a górny wskaźnik L oznacza dowolnie wybrane, ustalone moduły, przy czym moduły C_{ijkl}^L są związane z \hat{L}_{ijkl}^L zależnością, analogiczną do (2.35). Prosty dowód tych tożsamości wynika ze zróżniczkowania związków (2.16) i (2.17) i podstawienia (2.35).

3. TEORIA BIFURKACJI DLA CIAŁ SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH

Z uwagi na przyrostowy charakter równań konstytutywnych teorii plastycznego płynięcia, podstawowe zagadnienie na wartości brzegowe dla ciał sprężysto-plastycznych formuluje się dla nieskończenie małych przyrostów przemieszczeń względnie naprężeń od zadanego stanu. Wyznaczeniu podlega odpowiedź odkształcanego quasi-statycznie ciała na zadany przyrost zewnętrznych obciążeń bądź przemieszczeń na powierzchni ciała, czasami również sił masowych. Zgodnie z powszechnym zwyczajem, niejednoznaczność tej odpowiedzi ciała, prowadzącą do rozgałęzienia procesu deformacji, będziemy określać terminem "bifurkacja". Przyrost dowolnej wewnętrznej lub zewnętrznej wielkości można, przynajmniej w zasadzie, rozwinąć w szereg względem czaso-podobnego parametru t do określonego rzędu dokładności. Przy zachowaniu tylko liniowego członu takiego rozwinięcia, przyrosty można zastąpić prawostronnymi pierwszymi pochodnymi względem t . Odpowiednie przyrostowe zagadnienie brzegowe nazwiemy zagadnieniem przyrostowym rzędu pierwszego (lub zagadnieniem dla prędkości), a niejednoznaczność jego rozwiązania - bifurkacją rzędu pierwszego (lub bifurkacją w prędkościach). Biorąc pod uwagę człony wyższych rzędów we wspomnianym rozwinięciu, można sformułować odpowiednie zagadnienia przyrostowe wyższych rzędów, np. drugiego, których niejednoznaczność rozwiązań określić można jako bifurkację wyższego rzędu, np. rzędu drugiego.

W wielu pracach, zwłaszcza wcześniejszych, lecz również i ostatnio publikowanych, przy formułowaniu zagadnienia w prędkościach pomijano (zgodnie z tzw. zasadą zeszytnienia [190]) wpływ zmian geometrii ciała, tj. stosowano teorię geometrycznie liniową. Przy założeniu prawa płynięcia stowarzyszonego z nieosobliwym warunkiem plastyczności, oraz

wzmocnienia materiału, rozwiązanie typowego zagadnienia w prędkościach dla ciała sprężysto-plastycznego jest wówczas, jeżeli istnieje, jednoznacznie określone [122] [51]. Krytycznym punktem dowodu jednoznaczności jest wywnioskowanie ze związków konstytutywnych, że wyrażenie $\Delta \sigma_{ij} \Delta \epsilon_{ij}$, gdzie symbol Δ oznacza różnicę pomiędzy ewentualnymi dwoma rozwiązaniami, przyjmuje wyłącznie dodatnie wartości. Warunek ten jest spełniony, a jednoznaczność zachowana dla szerszej klasy przyrostowych równań konstytutywnych, dopuszczających potencjał ściśle wypukły [54] (por. także [98] [99]). Przy uwzględnieniu zmian geometrii, jednoznaczność rozwiązań dla ciał sprężysto-plastycznych nie ma już tak uniwersalnego charakteru, lecz może być uzależniona np. od kształtu ciała i sposobu obciążania. Zwykle uzasadnia się stosowanie teorii geometrycznie liniowej małością odkształceń. Nie zawsze jest to słuszne, gdyż w przeciwieństwie do liniowej teorii sprężystości, w przypadku materiału sprężysto-plastycznego o wartości modułu wzmocnienia rzędu wartości naprężenia, wpływ zmian geometrii ciała na postać i jednoznaczność rozwiązania może być istotny nawet wówczas, gdy odkształcenia i obroty są nieskończenie małe.

Ścisłą analizę zagadnienia przyrostowego rzędu pierwszego dla ciał sprężysto-plastycznych, ze szczególnym uwzględnieniem kwestii jednoznaczności rozwiązania, przeprowadził jako pierwszy Hill [56]. Teoria bifurkacji w prędkościach została następnie uogólniona w następnych pracach Hilla [57] [58] [60]; jej nowszą i nieco rozszerzoną wersję można znaleźć w pracy [67]. Hutchinson [81] [82] uzupełnił teorię Hilla, podając metodę analizy pobifurkacyjnego zachowania się ciała. Teoria bifurkacji, opracowana przez Hilla jest obecnie szeroko znana i była stosowana w licznych pracach, przykładowo: [76] [77] [78] [14] [123] [129] [167] [168] [81] [82] [83] [124] [130] [120] [172] [189] [182] [180] [125] [183] [107] [133] [179]

[185]. Teoria Hilla obowiązuje przy założeniu przyrostowego prawa konstytutywnego w postaci potencjalnej (2.27) lub (2.37) i "samosprężoności" przyrostowego obciążenia; te założenia są zachowane w niniejszej pracy (z wyjątkiem Rozdziału 7). Należy dodać, że kryteria jednoznaczności, podane przez Hilla, zostały uogólnione przez Ranieckiego [157] [158] na przypadek niespełnienia tych założeń, dla materiałów sprężysto-plastycznych o niestowarzyszonym prawie płynięcia. Te uogólnione kryteria znalazły zastosowanie w dalszych pracach [12] [89] [13] [90]. Zasadnicze elementy teorii Hilla przytoczymy w punkcie 3.1.

Teoria Hilla dotyczy zagadnień przyrostowych rzędu pierwszego. W większości przypadków można przeprowadzić analizę numeryczną quasi-statycznego procesu deformacji, rozpatrując ciąg następujących po sobie zagadnień przyrostowych tylko rzędu pierwszego (por. prace cytowane powyżej). Niemniej jednak, badanie zagadnień przyrostowych wyższych rzędów może prowadzić np. do zwiększenia efektywności algorytmu obliczeniowego (zob. np. [188] [87] [88]). Analiza zagadnień wyższego rzędu w punkcie bifurkacji jest też potrzebna do skonstruowania asymptotycznego rozwinięcia wzdłuż ścieżki pokrytycznej, które może dostarczyć informacji o pokrytycznym zachowaniu się ciała bez konieczności prowadzenia, krok po kroku, analizy numerycznej w zwykle silnie nieliniowym zakresie. Przede wszystkim jednak nie można z góry wykluczyć możliwości, że bifurkacja pierwotna, tj. pojawiająca się najwcześniej w trakcie procesu deformacji, będzie rzędu wyższego niż pierwszy, czyli że zagadnienie przyrostowe rzędu wyższego niż pierwszy będzie posiadało niejednoznacznie określone rozwiązanie, podczas gdy bifurkacja w prędkościach będzie wciąż niemożliwa.

Dotychczas w literaturze, dotyczącej ciał sprężysto-plastycznych, brak było teorii bifurkacji w dla zagadnień rzędu wyższego niż pierwszy, porównywalnej pod względem ogólności z

teorią Hilla, chociaż niektóre aspekty takich zagadnień były badane, np. przez Sewella [165], Hutchinsona [81], Klusznikowa [95], Triantafyllidisa [180]. Dlatego też celem niedawno opublikowanej, wspólnej pracy autora z Thermannem [155] było sformułowanie teorii regularnego zagadnienia przyrostowego rzędu drugiego, analogicznej do teorii Hilla zagadnienia rzędu pierwszego, na początek dla klasycznego modelu materiału sprężysto- plastycznego oraz dla prostych warunkach obciążania. W punkcie 3.2 przedstawiono uogólnienie tej teorii na przypadek obciążenia zależnego od konfiguracji powierzchni ciała, a w punkcie 3.3.3 na przypadek dowolnie nieliniowego potencjału konstytutywnego W przy założeniu, że moduły (2.30) są dobrze określone przez aktualne pole prędkości.

Teorie omówione w punktach 3.1 i 3.2 dotyczą problemu jednoznaczności rozwiązania zagadnienia przyrostowego na wartości brzegowe, sformułowanego dla ciała o zadanych własnościach. W zagadnieniach praktycznych, znany jest zwykle podstawowy proces deformacji, którego jednoznaczność chcemy zbadać: w większości przypadków, analizowanych w literaturze, był to proces deformacji jednorodnych. Okazuje się, że ta znajomość pozwala osłabić warunki jednoznaczności rozwiązań zagadnień przyrostowych, wynikające z ogólnej teorii. Te problemy przedstawiono w punkcie 3.3; szczególną uwagę poświęcono nowej nierówności konstytutywnej, mającej kluczowe znaczenie dla zagadnienia bifurkacji procesu.

Pozostaje jednak otwarty problem, w jakich okolicznościach wyeliminowanie możliwości bifurkacji w prędkościach i przyspieszeniach oznacza, że cały proces deformacji jest jednoznacznie określony przez warunki początkowo- brzegowe. Wydaje się, że rozstrzygnięcie tego problemu wymagałoby zastosowania metod analizy funkcjonalnej. Metody te umożliwiły przeprowadzenie ścisłego dowodu twierdzeń o jednoznaczności procesów deformacji ciał sprężysto- plastycznych, ale, jak

dotychczas, jedynie w ramach teorii geometrycznie liniowej [85] [134] [174] [138]. Znane są twierdzenia o jednoznaczności procesu dużych deformacji niesprężystych, ale dla materiałów lepkoplastycznych i zagadnień dynamicznych [102] [103]. Problem ten wymaga dalszych badań.

3.1 Zagadnienie przyrostowe w prędkościach - podstawowe elementy teorii Hilla

Sformułowanie zagadnienia

Przypuśćmy, że aktualna konfiguracja ciała, własności materiału i stan naprężenia w ciele (spełniający warunki równowagi) są znane. Przyrostowe warunki równowagi rzędu pierwszego można wyprowadzić w różny sposób: przykładowo, różniczkując po czasie tożsamość (2.7) przy ustalonym $\dot{\mathbf{y}}$. Z wprowadzonych w Rozdziale 2 założeń wynika, że ewentualna powierzchnia nieciągłości naprężeń jest powierzchnią materialną; wspomniane różniczkowanie prowadzi więc do równości

$$(3.1) \quad \int_V \dot{\mathbf{N}}_{i,j} w_{j,i} dV = \int_V \dot{\mathbf{b}}_j w_j dV + \int_{S_T} \dot{\mathbf{T}}_j w_j dS,$$

spełnionej dla wszystkich pól wektorowych $\dot{\mathbf{y}}$ z klasy \mathcal{W} . Jest to całkowita postać przyrostowych równań równowagi rzędu pierwszego; warunki lokalne mają postać analogiczną do warunków (2.8)+(2.10), przy zastąpieniu wielkości \mathbf{N} , \mathbf{b} i \mathbf{T} ich materialnymi (prawostronnymi) pochodnymi czasowymi.

Na części S_u powierzchni ciała zadane są prędkości przemieszczeń $\dot{\mathbf{y}}$; w celu skompletowania warunków brzegowych, należy jeszcze podać sposób określania wartości $\dot{\mathbf{T}}$ na pozostałej części S_T powierzchni S . W najprostszym przypadku, przyrost

nominalnych sił powierzchniowych jest zadany bezpośrednio: $\hat{T} = \hat{c}$, gdzie \hat{c} jest zadaną funkcją miejsca na powierzchni S_T , niezależną od pola prędkości. W przypadku ogólniejszym, Hill dopuszcza dodatkowo czułość \hat{T} na zmianę konfiguracji, poprzez liniową zależność od prędkości przemieszczeń i ich gradientu powierzchniowego w rozpatrywanym punkcie powierzchni:

$$(3.2) \quad \hat{T}_j = \hat{c}_j + f_j[\underline{v}], \quad f_j[\underline{v}] = k_{ij} v_i + n_i \mathcal{L}_{ijkl} v_{l,k};$$

niezależność od pochodnej prędkości w kierunku normalnym do powierzchni narzuca warunek $\mathcal{L}_{ijkl} n_i n_k = 0$. Hill wprowadza jeszcze istotne ograniczenie, że obciążenie \underline{f} ma być "samosprężone", w następującym sensie

$$(3.3) \quad \int_{S_T} (v_j^* f_j[\underline{v}] - v_j f_j[\underline{v}^*]) dS \equiv 0,$$

gdzie \underline{v} i \underline{v}^* stanowią dowolną parę ciągłych i odcinkowo różniczkowalnych pól prędkości, których różnica zeruje się na S_u . W szczególności, warunek ten implikuje symetrię $k_{ij} = k_{ji}$. Warunek (3.3) jest konieczny, aby obciążenie było (przyrostowo) konserwatywne w sensie globalnym. Jest on spełniony np. przy obciążeniu jednorodnym ciśnieniem p na części powierzchni o zadanych prędkościach na jej obwodzie; wówczas $\mathcal{L}_{ijkl} = (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{jk}) p$ w konfiguracji odniesienia.

Na związki konstytutywne (2.22) nakłada się warunek potencjalności (2.27); jest to równoważne założeniu istnienia potencjału U dla gradientu prędkości, z którego określa się pochodną czasową tensora naprężeń nominalnych \underline{N} (wzór (2.37)). Pociąga to za sobą symetrię główną modułów L_{ijkl} i C_{ijkl} . Po podstawieniu zależności (2.34) do lokalnych warunków przyrostowych równowagi, otrzymuje się układ nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych rzędu drugiego dla prędkości

przemieszczeń,

$$(3.4) \quad (C_{ijkl}[\underline{y}] v_{l,k})_{,i} + \dot{b}_j = 0 \quad \text{w } V \setminus S_D,$$

z warunkami zgodności na ew. powierzchniach S_D nieciągłości gradientu prędkości bądź modułów, postaci

$$(3.5) \quad [C_{ijkl}[\underline{y}] v_{l,k}] \nu_i = 0 \quad \text{na } S_D,$$

z warunkami brzegowymi

$$(3.6) \quad v_j = \bar{v}_j \quad \text{na } S_u,$$

$$(3.7) \quad \dot{C}_{ijkl}[\underline{y}] v_{l,k} n_i = \dot{c}_j + f_j[\underline{y}] \quad \text{na } S_T.$$

Pole prędkości, stanowiące rozwiązanie układu równań (3.4) oraz spełniające warunki zgodności (3.5) i warunki brzegowe (3.6) i (3.7), nazwiemy rozwiązaniem zagadnienia przyrostowego rzędu pierwszego.

Zasada wariacyjna

Rozważmy funkcjonal dla prędkości

$$(3.8) \quad \mathcal{F}(\underline{\tilde{v}}) = \int_V \langle U[\underline{y}] - \dot{b}_j v_j \rangle dV - \int_{S_T} \langle \dot{c}_j + \frac{1}{2} f_j[\underline{y}] \rangle v_j dS,$$

określony w klasie pól prędkości $\underline{\tilde{v}} \in \mathcal{V}$, tj. przyjmujących zadane wartości na S_u . Hill wykazał, że: pole prędkości $\underline{\tilde{v}}^0$ jest rozwiązaniem zagadnienia przyrostowego rzędu pierwszego wtedy i tylko wtedy, gdy pierwsza słaba wariacja (różniczka Gateaux) funkcjonału (3.8) jest tożsamościowo równa zeru dla $\underline{\tilde{v}} = \underline{\tilde{v}}^0$:

$$(3.9) \quad \delta \mathcal{F}(\vec{y}^0) = 0 .$$

Kryteria jednoznaczności

Punktem wyjścia do badania jednoznaczności rozwiązania jest tożsamość, wynikająca z zasady prac wirtualnych,

$$(3.10) \quad \int_V \Delta \dot{N}_{i,j} \Delta v_{j,i} dV = \int_{S_T} \Delta \dot{T}_j \Delta v_j dS ,$$

gdzie symbol Δ oznacza różnicę dwóch rozwiązań tego samego zagadnienia przyrostowego. Stąd, rozwiązanie w prędkościach, jeżeli istnieje, jest jednoznacznie określone, jeżeli dla wszystkich par różniących się od siebie pól prędkości, spełniających warunek (3.6), zachodzi nierówność

$$(3.11) \quad \int_V \Delta N_{i,j} \Delta v_{j,i} dV > \int_{S_T} \Delta f_j [y] \Delta v_j dS ,$$

przy czym symbol Δ oznacza tu różnicę wartości następującej po Δ wielkości dla dwóch dowolnych pól, niekoniecznie rozwiązań.

Warunek (3.11) nie jest wygodny w zastosowaniach, gdyż zależy od dwóch pól prędkości jednocześnie. Dlatego Hill wprowadził pojęcie ciała porównawczego, o tej samej konfiguracji, warunkach obciążania i stanie naprężenia co rozpatrywane ciało sprężysto-plastyczne, ale o przyrostowo liniowych związkach pomiędzy $\dot{\xi}$ i $\dot{\epsilon}$, a tym samym pomiędzy \dot{N} i \dot{F} . Niech górny wskaźnik L oznacza potencjał (kwadratowy) i moduły dla ciała porównawczego. Zakłada się, że funkcja $(U - U^L)(\dot{F})$ jest wypukła w każdym punkcie ciała, tzn. potencjał U jest wypukły względem U^L . Własność takiej względnej wypukłości jest niezmiennicza [67], t.j. funkcja $(W - W^L)(\dot{\epsilon})$ jest także wypukła

przy dowolnym wyborze miary odkształcenia. Warunek wypukłości względnej można zapisać w postaci

$$(3.12) \quad \Delta \dot{N}_{ij} \Delta \dot{F}_{ji} \geq C_{ijkl}^L \Delta \dot{F}_{ji} \Delta \dot{F}_{lk} \quad \text{dla wszystkich } \Delta \dot{F}_i,$$

lub

$$(3.12)' \quad \Delta \dot{t}_{ij} \Delta \dot{e}_{ij} \geq L_{ijkl}^L \Delta \dot{e}_{ij} \Delta \dot{e}_{kl} \quad \text{dla wszystkich } \Delta \dot{e}_i,$$

gdzie $\Delta \dot{F}_i$ (lub odpowiednio $\Delta \dot{e}_i$) jest różnicą dwóch dowolnych prędkości deformacji (odp. odkształcenia), a $\Delta \dot{N}_i$ (odp. $\Delta \dot{t}_i$) różnicą odpowiadających im poprzez (2.37) (odp. (2.27)) prędkości zmian tensora naprężeń nominalnych (odp. sprzężonych).

Podstawową rolę odgrywał będzie funkcjonal "bifurkacyjny"

$$(3.13) \quad I^L[\tilde{w}] = \int_V U^L[w] dV - \frac{1}{2} \int_{S_T} f_j[w] w_j dS,$$

określony na klasie pól wektorowych $\tilde{w} \in W$. Jeżeli funkcjonal ten przyjmuje tylko wartości dodatnie,

$$(3.14) \quad I^L(\tilde{w}) > 0 \quad \text{dla każdego } \tilde{w} \in W, \tilde{w} \neq \tilde{0},$$

to przy spełnionym warunku (3.12) zachodzi nierówność (3.11), a więc bifurkacja w prędkościach jest wykluczona, nie tylko dla ciała porównawczego, ale również dla rozpatrywanego ciała sprężysto-plastycznego. W dotychczasowych zastosowaniach podstawowe znaczenie miał fakt, że dla materiałów sprężysto-plastycznych o prawie płynięcia stowarzyszonym z gładkim warunkiem plastyczności, dla których równania konstytutywne można zapisać w postaci (2.22) z modułami (2.31)

wraz z (2.32), kluczowy warunek (3.12) jest automatycznie spełniony dla L_{ijkl}^L przyjętych jako równe L_{ijkl}^P w strefie plastycznej, a jako L_{ijkl}^E w ew. strefie sprężystej. Dla takich materiałów (a także dla pewnej klasy materiałów z narożem na powierzchni plastyczności, pod warunkiem, że moduły aktualne odpowiadają tzw. całkowicie aktywnej deformacji plastycznej, a macierz g^{KL} jest dodatnio określona - zob. punkt 3.3.1), ciało porównawcze o własności (3.12) uzyskuje się w regularnym procesie deformacji poprzez przyjęcie, jako L_{ijkl}^L , tzw. modułów stycznych L_{ijkl}^0 , odpowiadających aktualnej wartości prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}^0$.

Bifurkacja pierwotna

Zakres deformacji, w którym $I^L[\tilde{w}] > 0$ dla niezerowych \tilde{w} , zakończony jest zwykle (choć nie zawsze) tzw. stanem własnym dla ciała porównawczego. Stan własny dla ciała porównawczego jest z definicji osiągnięty wtedy, gdy istnieje dla tego ciała niezerowe rozwiązanie (tzw. postać własna \tilde{w}^*) zagadnienia przyrostowego rzędu pierwszego przy tzw. jednorodnych warunkach obciążania, to znaczy, przy $\dot{b} = 0$ w V , $\dot{\bar{v}} = 0$ na S_u i $\dot{\bar{c}} = 0$ na S_T . Oznacza to, że postać własna $\tilde{w}^* \in W$ spełnia układ równań

$$(3.15) \quad \begin{aligned} (C_{ijkl}^L w_{l,k}^*)_{,i} &= 0 && \text{w } V \setminus S_D, \\ [C_{ijkl}^L w_{l,k}^*] \nu_i &= 0 && \text{na } S_D, \\ C_{ijkl}^L w_{l,k}^* n_i &= f_j[\tilde{w}^*] && \text{na } S_T. \end{aligned}$$

Wskutek symetrii modułów C_{ijkl}^L i warunku (3.3), układ ten jest samosprężony. Spełnienie układu równań (3.15) jest równoważne stwierdzeniu, że pole \tilde{w}^* nadaje funkcjonalowi (3.13) wartość

stacjonarną, równą zero. Postać własną \vec{w}^* można więc znaleźć także z równoważnego warunku

$$(3.15) \quad \delta I^L(\vec{w}^*) = 0.$$

Oznacza to, że stan własny dla ciała porównawczego jest w szczególnym przypadku osiągalny, gdy funkcjonal $I^L(\vec{w})$ jest dodatnio pół-określony i zeruje się dla $\vec{w} = \vec{w}^* \neq \vec{0}$.

Gdy ciało porównawcze o własności (3.12) uzyskuje się, przyjmując $L_{ijkl}^L = L_{ijkl}(\dot{\vec{e}}^0)$, gdzie $\dot{\vec{e}}^0$ odpowiada rozwiązaniu podstawowemu \vec{y}^0 , a ponadto $L_{ijkl}(\dot{\vec{e}}) = \text{const.}$ w pewnym otoczeniu $\dot{\vec{e}}^0$, to poszukiwanie punktu bifurkacji na podstawowej ścieżce deformacji sprowadza się przede wszystkim do poszukiwania stanów własnych dla ciała porównawczego. Jeżeli pole prędkości $\vec{y}^* = \vec{y}^0 + \gamma \vec{w}^*$, gdzie γ jest liczbą, odpowiada tym samym wartościom modułów co \vec{y}^0 , to \vec{y}^* jest również rozwiązaniem zagadnienia wyjściowego; gdy tak określony punkt krytyczny na drodze deformacji nie jest tzw. punktem granicznym (w którym samo rozwiązanie \vec{y}^0 odpowiada jednorodnym warunkom obciążenia), to jest on punktem bifurkacji procesu deformacji, w sensie niejednoznaczności rozwiązania w prędkościach. Jeżeli do tego momentu spełniony był warunek (3.14), to wcześniejsza bifurkacja w prędkościach była wykluczona; omawiana bifurkacja jest wówczas bifurkacją pierwotną. Uzasadnia to, dla takich materiałów, dla których ciało porównawcze o własności (3.12) uzyskuje się poprzez przyjęcie modułów stycznych jako L_{ijkl}^L , założenie braku odciążania w punkcie bifurkacji, zgodnie z koncepcją, wprowadzoną przez Shanleya [169] [170].

Zasada minimum

Przypuśćmy, że zagadnienie przyrostowe rzędu pierwszego ma rozwiązanie \vec{y}^0 . Przypuśćmy także, że spełniony jest warunek

(3.11), dostateczny dla jednoznaczności rozwiązania. Hill wykazał, że wówczas

$$(3.16) \quad \mathcal{J}(\tilde{y}) > \mathcal{J}(\tilde{y}^0) \quad \text{dla każdego } \tilde{y} \in \mathcal{V}, \quad \tilde{y} \neq \tilde{y}^0,$$

tzn. pole \tilde{y}^0 odpowiada ściślemu, absolutnemu minimum wartości funkcjonatu (3.8) w klasie kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości.

3.2 Zagadnienie przyrostowe rzędu drugiego - bifurkacja w przyspieszeniach

3.2.1 Związki konstytutywne rzędu drugiego

W punkcie 3.2 ograniczymy się do rozpatrywania materiałów sprężysto-plastycznych typu klasycznego (ale w zakresie dowolnie dużych odkształceń); tj. o gładkiej powierzchni plastyczności i stowarzyszonym prawie płynięcia. Odpowiednie przyrostowe równania konstytutywne, zapisane w niezmienniczej postaci przy użyciu dowolnej sprzężonej pary miar odkształcenia i naprężenia, dyskutowane były już w Rozdziale 2 (zależności (2.22) z modułami (2.31) i (2.32)). Dla wygody, zapiszmy teraz moduły przyrostowe w postaci

$$(3.17) \quad L_{ijkl} = L_{klij} = \mathcal{L}_{ijkl} - \frac{\alpha}{\xi} \lambda_{ij} \lambda_{kl}, \quad \xi > 0,$$

przy czym parametr α przyjmuje wartość 0 albo 1 w zależności od tego, czy cząstka materiału w trakcie przyrostu deformacji odkształca się czysto sprężysto, czy też plastycznie. Dla określenia aktualnej wartości α potrzebne jest kryterium obciążania/odciążania, przy czym w zagadnieniach przyrostowych rzędu drugiego, standardowe kryterium (2.31) okazuje się w

w niektórych przypadkach niewystarczające.

Ogólne kryterium obciążania/odciążania, zgodne ze strukturą przyjętego modelu ciała, można sformułować następująco:

cząstka materiału odkształca się sprężysto (plastycznie), t.j. $\alpha = 0$ ($\alpha = 1$), jeżeli każdy, dostatecznie krótki odcinek ścieżki deformacji w przestrzeni odkształceń, poczynając od punktu, określającego aktualny stan odkształcenia, leży wewnątrz (na zewnątrz) ustalonego obszaru, pokrywającego się chwilowo z aktualnym obszarem odkształceń sprężystych.

Niech geometria powierzchni plastyczności będzie opisana w przestrzeni odkształceń przy pomocy ciągłej i dostatecznie regularnej funkcji skalarnej $F(\xi; X)$, takiej, że $F(\xi; X) = 0$ i $\partial F / \partial \xi \neq 0$ na powierzchni plastyczności oraz $F(\xi; X) < 0$ wewnątrz odpowiedniego obszaru odkształceń sprężystych. Przypomnijmy, że X symbolizuje wpływ historii odkształceń niesprężystych; nie musi oznaczać zbioru parametrów wewnętrznych, chociaż jest to naturalna interpretacja (por. [75]). Założymy, że aktualna wartość funkcji F jest niezmiennicza względem wyboru miary odkształcenia i konfiguracji odniesienia. Sformułowane powyżej geometryczne kryterium obciążania/odciążania można zapisać w równoważnej postaci analitycznej:

cząstka materiału odkształca się

sprężysto ($\alpha = 0$) jeżeli $F(\xi + \delta\xi; X) < 0$,

(3.18)

plastycznie ($\alpha = 1$) jeżeli $F(\xi + \delta\xi; X) > 0$,

gdzie $\delta\xi$ oznacza dostatecznie mały, niezerowy przyrost odkształcenia wzdłuż rozpatrywanej drogi odkształcenia od stanu, określonego przez parę (ξ, X) . Niezmienniczość obydwu sformułowań jest oczywista. Dla uniknięcia nieporozumień należy

podkreślić, że \mathcal{K} w powyższym kryterium jest myślowo ustalone; naturalnie, odkształceniom plastycznym cząstki towarzyszą zmiany \mathcal{K} takie, że $F(\underline{e} + \delta\underline{e}; \mathcal{K} + \delta\mathcal{K}) = 0$.

W zależności od rzędu rozpatrywanego zagadnienia przyrostowego, kryterium (3.18) można dalej specyfikować. Rozwijając funkcję $F(\underline{e} + \delta\underline{e}; \mathcal{K})$ w szereg Taylora, otrzymujemy

$$(3.19) \quad F(\underline{e} + \delta\underline{e}; \mathcal{K}) = F(\underline{e}; \mathcal{K}) + \frac{\partial F}{\partial e_{ij}} \Big|_{(\underline{e}; \mathcal{K})} \delta e_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} \Big|_{(\underline{e}; \mathcal{K})} \delta e_{ij} \delta e_{kl} + \dots$$

Na powierzchni plastyczności mamy proporcjonalność $\lambda \propto \partial F / \partial \underline{e}$, tak więc znane kryterium (por. (2.31)):

$$(3.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \quad \text{jeżeli } F(\underline{e}; \mathcal{K}) < 0 \\ \quad \quad \quad \text{lub } F(\underline{e}; \mathcal{K}) = 0 \text{ i } \lambda_{ij} \dot{e}_{ij} < 0, \\ \alpha = 1 \quad \text{jeżeli } F(\underline{e}; \mathcal{K}) = 0 \text{ i } \lambda_{ij} \dot{e}_{ij} > 0, \end{array} \right.$$

wynika z (3.18) po rozpatrzeniu dwóch pierwszych członów tego rozwinięcia. W przypadku gdy $F(\underline{e}; \mathcal{K})=0$ i jednocześnie $\lambda_{ij} \dot{e}_{ij}=0$, dla zagadnień rzędu drugiego należy wyznaczyć wartość F z dokładnością do członów rzędu drugiego względem przyrostu czasu δt . Podstawiając

$$\delta \underline{e} = \dot{\underline{e}} \delta t + \frac{1}{2} \ddot{\underline{e}} (\delta t)^2 + \dots,$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 F(\underline{e} + \delta \underline{e}; \mathcal{D}) &= F(\underline{e}; \mathcal{D}) + \left\{ \frac{\partial F}{\partial e_{ij}} \dot{e}_{ij} \right\} \Bigg|_{(\underline{e}; \mathcal{D})} \delta t \\
 (3.21) \quad &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial e_{ij}} \ddot{e}_{ij} + \frac{\partial^2 F}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} \dot{e}_{ij} \dot{e}_{kl} \right\} \Bigg|_{(\underline{e}; \mathcal{D})} (\delta t)^2 + \dots
 \end{aligned}$$

Z kryterium (3.18) wynika więc następujące kryterium obciążania/odciążania rzędu drugiego:

Jeżeli $F(\underline{e}; \mathcal{D}) = 0$ i $\lambda_{ij} \dot{e}_{ij} = 0$, to

$$(3.22) \quad \left. \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \alpha = 1 \end{array} \right\} \text{ dla } \frac{\partial F}{\partial e_{ij}} \ddot{e}_{ij} + \frac{\partial^2 F}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} \dot{e}_{ij} \dot{e}_{kl} \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases}$$

Kryterium to, podobnie jak kryterium (3.20), jest niewrażliwe na zmianę miary odkształcenia lub konfiguracji odniesienia, gdyż wynika z niezmienniczego kryterium (3.18). Niezmienniczość tę można oczywiście sprawdzić bezpośrednio.

Zauważmy, że w kryterium (3.22) pojawia się wpływ krzywizny powierzchni plastyczności. Człon zawierający drugą pochodną F jest proporcjonalny do krzywizny powierzchni plastyczności w przestrzeni odkształceń w przekroju normalnym, zawierającym aktualny kierunek odkształcania $\dot{\underline{e}}$, styczny do powierzchni. Geometryczna interpretacja kryterium (3.22) jest więc jasna: jeżeli droga odkształcenia jest chwilowo styczna do powierzchni plastyczności, to krzywizna tej drogi w płaszczyźnie zawierającej normalną do powierzchni plastyczności, proporcjonalna do pierwszego członu w nierównościach (3.22), jest porównywana z odpowiednią krzywizną normalną powierzchni plastyczności.

Moduł tensora λ , normalnego do powierzchni plastyczności, może być dobrany dowolnie, bez straty ogólności modelu materiału. Zdefiniujmy λ jako gradient funkcji F ,

$$(3.23) \quad \lambda_{ij} \equiv \frac{\partial F}{\partial e_{ij}},$$

zarówno na powierzchni plastyczności jak i w pewnym jej otoczeniu. Jeżeli wpływ przyrostu $\delta \mathcal{X}$ jest zerowy, przynajmniej z dokładnością do członów rzędu δt , co z definicji ma miejsce, gdy $\lambda_{ij} \dot{e}_{ij} = 0$ przy $F(\underline{e}; \mathcal{X}) = 0$, to

$$(3.24) \quad \dot{\lambda}_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial e_{kl} \partial e_{ij}} \dot{e}_{kl}.$$

Kryterium (3.22) można więc zapisać w następującej, zwartej postaci: Jeżeli $F(\underline{e}; \mathcal{X}) = 0$ i $\lambda_{ij} \dot{e}_{ij} = 0$ to

$$(3.25) \quad \left. \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \alpha = 1 \end{array} \right\} \text{ dla } (\lambda_{ij} \dot{e}_{ij})^* \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases}$$

Postać ta będzie użyteczna w dalszych rozważaniach.

Gdy rozważane jest zagadnienie przyrostowe rzędu pierwszego, to moduły L_{ijkl} w równaniu konstytutywnym (2.22) przyjmuje się jako określone przez historię odkształcenia \mathcal{E} (reprezentowaną przez parę $(\underline{e}, \mathcal{X})$) i aktualną wartość α , wyznaczoną z kryterium obciążania/odciążania. Proces deformacji można traktować (i badać numerycznie) jako ciąg małych przyrostów deformacji pod warunkiem, że przyrosty modułów są w jakiś sposób wyznaczalne w trakcie procesu, np. są związane w zadany sposób z przyrostami odkształcenia. Tak więc naturalnym jest założenie, że (prawostronna) pochodna czasowa modułów L_{ijkl} jest wyznaczalna, gdy znana jest historia odkształcenia \mathcal{E} , aktualna wartość prędkości odkształcenia $\dot{\underline{e}}$ i wartość parametru α . Przyjmując to założenie i różniczkując

(prawostronnie) związek (3.17) względem czasu, otrzymujemy wzór

$$(3.26) \quad \dot{L}_{ijkl} = \dot{\lambda}_{ijkl} - \frac{\alpha}{\dot{\xi}} \left(-\frac{\dot{\xi}}{\xi} \lambda_{ij} \lambda_{kl} + \dot{\lambda}_{ij} \lambda_{kl} + \lambda_{ij} \dot{\lambda}_{kl} \right),$$

w którym wartości $\dot{\lambda}_{ijkl}$, $\dot{\xi}$ i $\dot{\lambda}$ są jednoznacznie określone przez historię odkształcenia i aktualną wartość $\dot{\xi}$, gdy $\alpha = 1$. Jeżeli $\alpha = 0$, to tylko pochodne modułów sprężystych $\dot{\lambda}_{ijkl}$ muszą być określone, chociaż wskutek przyjętej definicji (3.23), $\dot{\lambda}$ jest wyznaczalne z (3.24):

Różniczkując (prawostronnie) związek (2.22) względem czasu, otrzymujemy przyrostowe równania konstytutywne rzędu drugiego

$$(3.27) \quad \ddot{t}_{ij} = L_{ijkl} \ddot{e}_{kl} + \dot{L}_{ijkl} \dot{e}_{kl},$$

gdzie moduły L_{ijkl} i ich pochodne \dot{L}_{ijkl} wyrażają się wzorami (3.17) i (3.26), w których wartość α określana jest z kryterium (3.20) albo z kryterium rzędu drugiego, (3.22) (względnie (3.25)). Gdyby wartość $(\lambda_{ij} \dot{e}_{ij})^*$ w (3.25) była równa zeru, to wartość α pozostałaby nieokreślona: tym niemniej samo \ddot{t} byłoby określone wskutek ciągłości zależności $\ddot{t}(\ddot{e})$, wykazanej poniżej.

Jeżeli odpowiedź na pytanie, czy cząstka materiału w trakcie przyrostu deformacji odkształca się sprężysto czy plastycznie, wynika z kryterium (3.20), to wówczas aktualne wartości modułów L_{ijkl} , jak również ich pochodnych \dot{L}_{ijkl} , nie zależą od \ddot{e} . Jeżeli ponadto prędkość odkształcenia \dot{e} jest traktowana jako znana, to związek (3.27) pomiędzy \ddot{t} i \ddot{e} jest liniowy choć niejednorodny (termin "liniowy" jest tu używany w sensie matematycznego określenia "afiniczny"), przy czym wartości modułów, występujących w członie liniowym, są te same, co w równaniu (2.22), wiążącym aktualne wartości \dot{t} i \dot{e} . Jeżeli

natomiast dla cząstki materiału w stanie granicznym ($F(\underline{e}; \mathcal{X})=0$) mamy $\lambda_{ij} \dot{e}_{ij} = 0$ (tzw. obciążenie "neutralne"), to dla uzyskania odpowiedzi na pytanie, czy do związku (3.27) należy podstawić moduły sprężyste czy plastyczne, musimy odwołać się do kryterium (3.22), w którym występuje \ddot{e} . Zależność (3.27) pomiędzy \ddot{t} i \ddot{e} staje się wówczas odcinkowo liniowa, ze skokiem wartości L_{ijkl} i \dot{L}_{ijkl} , zgodnie ze wzorami (3.17) i (3.26), gdy wyrażenie po lewej stronie nierówności (3.22) zmienia znak. Niemniej jednak, zależność pomiędzy \ddot{t} i \ddot{e} pozostaje ciągła, gdyż skokowe zmiany wartości obydwu członów po prawej stronie związku (3.27) wzajemnie się kompensują. Aby to wykazać, rozważmy różnicę wartości \ddot{t} wyznaczonych dla tych samych \dot{e} i \ddot{e} , ale raz w przypadku obciążania ($\alpha = 1$), a drugi raz odciążania ($\alpha = 0$). Oznaczając górnymi wskaźnikami p oraz s wartości, uzyskane odpowiednio dla $\alpha = 1$ i $\alpha = 0$, mamy

$$\begin{aligned} \ddot{t}_{ij}^p - \ddot{t}_{ij}^s &= (L_{ijkl}^p - L_{ijkl}^s) \ddot{e}_{kl} + (\dot{L}_{ijkl}^p - \dot{L}_{ijkl}^s) \dot{e}_{kl} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \left\{ \lambda_{ij} \lambda_{kl} \ddot{e}_{kl} + \left(-\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} \lambda_{ij} \lambda_{kl} + \dot{\lambda}_{ij} \lambda_{kl} + \lambda_{ij} \dot{\lambda}_{kl} \right) \dot{e}_{kl} \right\}. \end{aligned}$$

Parametr α jest nieciągły względem \ddot{e} tylko w przypadku, gdy jednocześnie zachodzą równości $F(\underline{e}; \mathcal{X})=0$, $\lambda_{ij} \dot{e}_{ij} = 0$ i $(\lambda_{ij} \dot{e}_{ij})' = 0$, jak to wynika z kryteriów (3.20) i (3.25). Wówczas jednak mamy

$$\ddot{t}_{ij}^p - \ddot{t}_{ij}^s = -\frac{1}{\varepsilon} \left\{ \lambda_{ij} (\lambda_{kl} \ddot{e}_{kl}) + \lambda_{ij} (\dot{\lambda}_{kl} \dot{e}_{kl}) \right\} = -\frac{1}{\varepsilon} \lambda_{ij} (\lambda_{kl} \dot{e}_{kl})' = 0,$$

co chcieliśmy udowodnić.

Przy omawianiu teorii Hilla w punkcie 3.1 widzieliśmy, że istotną rolę odgrywała tam nierówność (3.12), równoważna (3.12)' i określająca warunek wypukłości potencjałów U i Ψ

względem kwadratowego potencjału U^L dla ciała porównawczego. W przypadku równań konstytutywnych (2.22) z modułami (3.17), nierówność (3.12)' jest w strefie plastycznej (definiowanej jako obszar, w którym $F(\underline{\epsilon}; \mathcal{X})=0$) automatycznie spełniona [56] [67] po przyjęciu $L_{ijkl}^L \equiv L_{ijkl}^P$,

$$(3.28) \quad \Delta \dot{\underline{\epsilon}}_{ij} \Delta \ddot{\underline{\epsilon}}_{ij} \geq L_{ijkl}^P \Delta \ddot{\underline{\epsilon}}_{ij} \Delta \ddot{\underline{\epsilon}}_{kl} \quad \text{dla wszystkich } \Delta \dot{\underline{\epsilon}},$$

gdzie moduły L_{ijkl}^P uzyskuje się z (3.17) dla $\alpha = 1$.

Wykażemy, że analogiczna własność wypukłości względnej zachodzi również dla równań konstytutywnych rzędu drugiego, (3.27), mianowicie

$$(3.29) \quad \Delta \ddot{\underline{\epsilon}}_{ij} \Delta \ddot{\underline{\epsilon}}_{ij} \geq L_{ijkl}^P \Delta \ddot{\underline{\epsilon}}_{ij} \Delta \ddot{\underline{\epsilon}}_{kl} \quad \text{dla wszystkich } \Delta \ddot{\underline{\epsilon}},$$

gdzie $\Delta \ddot{\underline{\epsilon}}$ i $\Delta \dot{\underline{\epsilon}}$ oznaczają różnice odpowiadających sobie drugich pochodnych odkształceń i naprężeń, przy $\Delta \dot{\underline{\epsilon}}$ i $\Delta \underline{\epsilon}$ równych zeru. Oczywiście, (3.29) odnosi się tylko do cząstek materiału, dla których $F(\underline{\epsilon}; \mathcal{X})=0$, ale aktualna prędkość odkształcenia jest dowolna.

Dowód. Niech $\ddot{\underline{\epsilon}}^{(1)}$, $\ddot{\underline{\epsilon}}^{(2)}$ będą dowolnymi, ustalonymi wartościami $\ddot{\underline{\epsilon}}$, a $\dot{\underline{\epsilon}}(\ddot{\underline{\epsilon}})$ oznacza funkcję, zdefiniowaną przez (3.27). Rozpatrzmy pomocniczą funkcję f zmiennej θ ,

$$(3.30) \quad f(\theta) = (\dot{\underline{\epsilon}}_{ij}(\ddot{\underline{\epsilon}}^{(1)} + \theta \Delta \ddot{\underline{\epsilon}}) - \dot{\underline{\epsilon}}_{ij}(\ddot{\underline{\epsilon}}^{(1)}) - \theta L_{ijkl}^P \Delta \ddot{\underline{\epsilon}}_{kl}) \Delta \ddot{\underline{\epsilon}}_{ij},$$

gdzie $\Delta \ddot{\underline{\epsilon}} = \ddot{\underline{\epsilon}}^{(2)} - \ddot{\underline{\epsilon}}^{(1)}$ jest ustalone. Funkcja ta jest ciągła wskutek ciągłości funkcji $\dot{\underline{\epsilon}}(\ddot{\underline{\epsilon}})$, wykazanej powyżej. Ze związków (3.27) i (3.17) otrzymujemy

$$(3.31) \quad \frac{df(\theta)}{d\theta} = (L_{ijkl} - L_{ijkl}^P) \Delta \ddot{\underline{\epsilon}}_{ij} \Delta \ddot{\underline{\epsilon}}_{kl} = \frac{1-\alpha}{\epsilon} (\lambda_{ij} \Delta \ddot{\underline{\epsilon}}_{ij})^2 \geq 0.$$

Moduły L_{ijkl} odpowiadają tu oczywiście wartości α , która może zależeć od θ poprzez kryterium (3.22) z $\ddot{e} = \ddot{e}^{(1)} + \theta \Delta \ddot{e}$. Ponieważ $f(0) = 0$, a $f(\theta)$ jest funkcją ciągłą i niemalejącą wskutek (3.31), to musi zachodzić nierówność $f(1) \geq 0$, co daje dokładnie (3.29). Dowód został zakończony.

Własność (3.29), podobnie jak (3.28), nie zależy od wyboru sprzężonej pary miar odkształcenia i naprężenia. Aby to wykazać, wystarczy zauważyć, że powyższy dowód można przeprowadzić dla dowolnej, sprzężonej pary miar, ponieważ stowarzyszonego prawa płynięcia, a także postać (3.17) modułów L_{ijkl} z dodatnim parametrem g , są niezmiennicze [65] [67] [68]. Oczywiście, niezmienniczość własności (3.29) można sprawdzić także bezpośrednio.

Jeżeli wartości modułów L_{ijkl} i ich pochodnych \dot{L}_{ijkl} nie zależą od \ddot{e} , to ze związku (3.27) wynika, że różnice odpowiadających sobie drugich pochodnych naprężeń i odkształceń są związane liniową zależnością (por. [95])

$$(3.32) \quad \Delta \ddot{t}_{ij} = L_{ijkl} \Delta \ddot{e}_{kl},$$

przy czym moduły L_{ijkl} są tymi, które wiążą aktualne wartości \dot{t} i \dot{e} . W tym przypadku można wykorzystać równość

$$(3.33) \quad \Delta \dot{t}_{ij} \Delta \ddot{e}_{ij} = L_{ijkl} \Delta \ddot{e}_{ij} \Delta \ddot{e}_{kl},$$

zamiast nierówności (3.29).

Dla celów dalszych rozważań, wygodnie jest zapisać powyższe związki konstytutywne przy użyciu pary (N, F) . Najpierw, przy wyborze tensora odkształcenia Greena E i II tensora Pioli - Kirchhoffa S jako szczególnej pary miar (e, t) , zapiszmy związki (2.22) i (3.17) jako (2.36) z modułami

$$(3.34) \quad \hat{L}_{ijkl} = \hat{x}_{ijkl} - \frac{\alpha}{g} \hat{\lambda}_{ij} \hat{\lambda}_{kl}.$$

Wszystkie wielkości wyróżnione [dashed] odpowiadają mierze odkształcenia Greena. Nie zachodzi potrzeba wyróżniania w ten sposób parametru ϵ , gdyż jego wartość jest niezmiennicza, przy ustalonej konfiguracji odniesienia. Podstawiając (3.34) do (2.35), możemy zapisać związki konstytutywne w postaci (2.34) z modułami

$$(3.35) \quad C_{ijkl} = C_{klij} = \epsilon_{ijkl} - \frac{\alpha}{\epsilon} \eta_{ij} \eta_{kl}.$$

ϵ_{ijkl} oznaczają tu moduły sprężyste, związane z modułami $\hat{\epsilon}_{ijkl}$ zależnością, analogiczną do (2.35), a (na ogół niesymetryczny) tensor η jest zdefiniowany wzorem

$$(3.36) \quad \eta_{ij} = F_{jp} \hat{\lambda}_{ip}.$$

Zauważmy, że powierzchnia plastyczności w przestrzeni gradientu deformacji \underline{F} może być opisana równaniem $F^F(\underline{F}; \mathcal{X}) = 0$, gdzie $F^F(\underline{F}; \mathcal{X}) \equiv \hat{F}(E(\underline{F}); \mathcal{X})$ z zależnością $E(\underline{F})$ daną wzorem (2.16). Tensor η jest transponowanym gradientem funkcji F^F względem \underline{F} ,

$$(3.37) \quad \eta_{ij} = \frac{\partial F^F}{\partial F_{ji}},$$

co wynika z (3.23) i symetrii $\hat{\lambda}$. Zachodzi także równość

$$(3.38) \quad \lambda_{ij} \dot{e}_{ij} = \hat{\lambda}_{ij} \dot{E}_{ij} = \eta_{ij} v_{j,i},$$

wyrażająca niezmienniczość przyrostu wartości funkcji, opisującej kształt powierzchni plastyczności. Tak więc kryteria (3.20) i (3.25), z których określamy α , pozostają słuszne po zastąpieniu wyrażenia $\lambda_{ij} \dot{e}_{ij}$ przez $\eta_{ij} v_{j,i}$. Przyrostowe

równania konstytutywne rzędu drugiego można zapisać w postaci

$$(3.39) \quad \dot{N}_{ij} = C_{ijkl} \dot{v}_{l,k} + \dot{C}_{ijkl} v_{l,k};$$

potrzebne wartości \dot{n}_{ij} i \dot{C}_{ijkl} wyznaczmy, różniczkując po czasie prawe strony związków (3.36) i (3.35). Można wykazać, że zależność $\dot{N}(\dot{F})$ jest ciągła, podobnie jak zależność $\dot{\xi}(\dot{e})$.

3.2.2 Regularne zagadnienie przyrostowe rzędu drugiego (w przyspieszeniach)

Pełne zbadanie zagadnienia przyrostowego rzędu drugiego wymaga rozszerzenia, w porównaniu z zagadnieniem dla prędkości, klasy funkcji, w której rozwiązanie jest poszukiwane, gdyż, przykładowo, przyspieszenia nie muszą być ciągłe. W tym punkcie nie będziemy dyskutowali jednak tego typu nieciągłości i ograniczymy się do badania zagadnienia regularnego, w którym, z definicji, naprężenia, przemieszczenia i prędkości przemieszczeń są różniczkowalne (a więc ciągłe wraz z ich gradientami) w V , natomiast przyspieszenia $\underline{a} \equiv \dot{\underline{v}}$ i pierwsze pochodne czasowe naprężeń są ciągłe, ale mogą być tylko odcinkowo różniczkowalne w V . Założymy także, że siły masowe \underline{b} i ich pochodne $\dot{\underline{b}}$ są ciągłe w V , a siły powierzchniowe \underline{T} i ich pochodne $\dot{\underline{T}}$ są ciągłe na każdym z regularnych pól powierzchni S .

Przypuśćmy, że rozwiązanie zagadnienia przyrostowego rzędu pierwszego jest znane (lecz niekoniecznie jednoznacznie określone). Różniczkując tożsamość (2.7) dwukrotnie (albo równość (3.1) jednokrotnie) względem czasu przy ustalonym $\dot{\underline{v}}$, uzyskujemy przyrostowe warunki równowagi rzędu drugiego w postaci równości wariacyjnej

$$(3.40) \quad \int_V \ddot{N}_{i,j} w_{j,i} dV = \int_V \ddot{b}_j w_j dV + \int_{S_T} \ddot{T}_j w_j dS,$$

spełnionej dla wszystkich pól wektorowych \vec{w} z klasy W .
Zauważmy, że wykorzystaliśmy tu założenia ciągłości, wprowadzone przy definiowaniu zagadnienia regularnego: w przypadku ruchomej powierzchni nieciągłości wielkości \dot{N} lub \dot{b} , równość (3.40) nie byłaby na ogół prawdziwa. Jeżeli $\dot{N}_{i,j}$ są odcinkowo różniczkowalne, to standardowa argumentacja rachunku wariacyjnego pozwala na równoważny zapis równości (3.40) w postaci zestawu warunków lokalnych:

$$(3.41) \quad \dot{N}_{i,j,i} + \ddot{b}_j = 0 \quad \text{w } V \setminus S_D,$$

$$(3.42) \quad [\dot{N}_{i,j}] v_i = 0 \quad \text{na } S_D,$$

$$(3.43) \quad \dot{N}_{i,j} n_i = \ddot{T}_j \quad \text{na } S_T,$$

gdzie S_D jest w tym przypadku powierzchnią nieciągłości drugich pochodnych czasowych naprężeń, \dot{N} , która może pojawić się wskutek nieciągłości gradientu przyspieszeń lub własności materiału, np. na granicy pomiędzy strefą sprężystą i plastyczną.

Przyjmujemy, podobnie jak dla zagadnienia rzędu pierwszego, że na części S_u powierzchni S spełniony ma być warunek (3.6), a na pozostałej części S_T - warunek (3.2) z ograniczeniem (3.3), ale nie tylko w chwili aktualnej, lecz także w chwilach następnych. Wielkości b_j , \bar{v}_j i c_j traktujemy jako zadane funkcje zmiennych (ξ, t) , odpowiednio w V , na S_u i na S_T . Natomiast wielkości k_{ij} i ℓ_{ijkl} mogą ponadto zależeć od konfiguracji ciała; możemy jednak przyjąć, że ich pochodne czasowe \dot{k}_{ij} i $\dot{\ell}_{ijkl}$ są znane, gdy znane jest aktualne pole prędkości. Różniczkując (prawostronnie) (3.2) względem czasu,

otrzymujemy równanie, definiujące $\ddot{\mathbf{f}}$ na S_T :

$$(3.44) \quad \ddot{\mathbf{f}}_j = \ddot{\mathbf{c}}_j + f_j[\mathbf{a}] + \dot{f}_j[\mathbf{y}] ,$$

gdzie

$$(3.45) \quad \dot{f}_j[\mathbf{y}] = \dot{k}_{ij} v_i + n_i \dot{c}_{ijkl} v_{l,k} .$$

Po podstawieniu związków konstytutywnych (3.39), przyrostowe warunki równowagi (3.41) i (3.42) prowadzą do układu równań różniczkowych cząstkowych rzędu drugiego dla przyspieszeń i odpowiednich warunków na powierzchni słabej nieciągłości, postaci

$$(3.46) \quad \begin{aligned} (C_{ijkl} a_{l,k})_{,i} + \ddot{b}_j + (\dot{C}_{ijkl} v_{l,k})_{,i} &= 0 && \text{w } V \setminus S_D , \\ [C_{ijkl} a_{l,k}] \nu_i + [\dot{C}_{ijkl}] v_{l,k} \nu_i &= 0 && \text{na } S_D . \end{aligned}$$

Warunki brzegowe dla tego układu równań, wyrażone w przyspieszeniach, mają postać

$$(3.47) \quad \mathbf{a}_j = \dot{\mathbf{v}}_j \quad \text{na } S_u ,$$

$$(3.48) \quad n_i C_{ijkl} a_{l,k} - f_j[\mathbf{a}] = \ddot{\mathbf{c}}_j - n_i \dot{C}_{ijkl} v_{l,k} + \dot{f}_j[\mathbf{y}] \quad \text{na } S_T .$$

Regularne zagadnienie przyrostowe rzędu drugiego jest więc sformułowane następująco: znaleźć ciągle i odcinkowo gładkie pole przyspieszeń $\ddot{\mathbf{a}}$, spełniające równania (3.46) wewnątrz ciała i warunki brzegowe (3.47) i (3.48) na jego powierzchni.

Wartości modułów sprężystych ϵ_{ijkl} i plastycznych C_{ijkl}^p , jak również ich pierwszych pochodnych są znane (te ostatnie z rozwiązania w prędkościach, traktowanego jako znane - por. uwagi w punkcie 3.2.1). Natomiast problem, które z nich należy podstawić do równań (3.46) i (3.48), może pozostawać wciąż nierozstrzygnięty, jeżeli $\eta_{ij}v_{j,i} = 0$ w pewnym podobzdarze strefy plastycznej. W tym przypadku bowiem, wartości modułów i ich pochodnych uzależnione są od gradientu przyspieszeń poprzez kryterium (3.25) i związek (3.38). Układ równań (3.46) jest wówczas nieliniowy.

Jeżeli natomiast w strefie plastycznej wszędzie zachodzi nierówność $\eta_{ij}v_{j,i} \neq 0$, z wyjątkiem być może powierzchni S_D , to wartość parametru α , a tym samym wartości modułów C_{ijkl} i ich pochodnych \dot{C}_{ijkl} są niezależne od przyspieszeń (poza S_D). Układ równań (3.46) jest wówczas liniowy (niejednorodny), podobnie jak związek (3.48). Warto może zwrócić uwagę, że moduły i ich pochodne w warunku skoku (3.46)₂ są rozumiane jako graniczne wartości przy zbliżaniu się do powierzchni S_D z obu stron, a nie jako wartości na tej powierzchni; te graniczne wartości są niezależne od gradientu przyspieszeń, jeżeli $\eta_{ij}v_{j,i} \neq 0$ poza S_D .

Człony w równaniach (3.46) i (3.48), zawierające \dot{C}_{ijkl} lub $\ddot{f}[y]$ odgrywają rolę dodatkowych sił masowych względnie powierzchniowych. Z wyjątkiem tej różnicy, zachodzi formalna analogia pomiędzy tymi równaniami a równaniami (3.4), (3.5), (3.7) dla prędkości; analogia ta może być użyteczna np. w obliczeniach numerycznych.

W zagadnieniach praktycznych, liniowość regularnego zagadnienia przyrostowego rzędu drugiego jest raczej regułą niż wyjątkiem. Przypadek liniowy, którego analiza jest w zasadzie standardowa, rozpatrzmy osobno w punkcie 3.3.3 dla szerszej klasy równań konstytutywnych, bez zakładania postaci modułów (3.17). Poniżej rozważany jest ogólny przypadek nieliniowy dla związków konstytutywnych, przedyskutowanych w punkcie 3.2.1.

3.2.3 Zasada wariacyjna

Rozważmy funkcjonal

$$\begin{aligned}
 J(\vec{a}) = & \int_V \left\{ \frac{1}{2} C_{ijkl} a_{j,i} a_{l,k} + \dot{C}_{ijkl} v_{l,k} a_{j,i} - \frac{\alpha}{2\epsilon} (\dot{\eta}_{i,j} v_{j,i})^2 - b_j a_j \right\} dV \\
 (3.49) \quad & - \int_{S_T} (\dot{c}_j + \dot{f}_j[y] + \frac{1}{2} f_j[a]) a_j dS,
 \end{aligned}$$

określony na klasie \mathcal{A} ciągłych i odcinkowo gładkich pól przyspieszeń \vec{a} , przyjmujących zadane wartości (3.47) na S_u . Pole prędkości \vec{v} jest gładkim rozwiązaniem zagadnienia przyrostowego rzędu pierwszego i traktowane jest jako znane i ustalone.

Udowodnimy, że

pole przyspieszeń \vec{a}^0 jest rozwiązaniem regularnego zagadnienia przyrostowego rzędu drugiego wtedy i tylko wtedy, gdy pierwsza słaba wariacja (różniczka Gateaux) funkcjonału (3.49) jest tożsamościowo równa zeru dla $\vec{a} = \vec{a}^0$,

$$(3.50) \quad \delta J(\vec{a}^0) = 0.$$

Dowód. Niech $\Delta \vec{a} = \vec{a} - \vec{a}^0$ będzie różnicą pomiędzy dowolną parą dopuszczalnych pól przyspieszeń z klasy \mathcal{A} . Oznaczmy symbolem Δ także różnicę dowolnych, odpowiadających tym polom wielkości, np. $\Delta C_{ijkl} = C_{ijkl} - C_{ijkl}^0$. Ze związku (3.35) wynika, że

$$(3.51) \quad \Delta C_{ijkl} = - \frac{\Delta \alpha}{\epsilon} \eta_{i,j} \eta_{k,l},$$

$$(3.52) \quad \Delta \dot{C}_{ijkl} = - \frac{\Delta \alpha}{\epsilon} \left(- \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} \eta_{i,j} \eta_{k,l} + \dot{\eta}_{i,j} \eta_{k,l} + \eta_{i,j} \dot{\eta}_{k,l} \right).$$

Z pomocą elementarnej tożsamości

$$\begin{aligned}
 & B_{ijkl} P_{ij} Q_{kl} - B_{ijkl}^0 P_{ij}^0 Q_{kl}^0 \\
 (3.53) \quad & = B_{ijkl}^0 (P_{ij} - P_{ij}^0)(Q_{kl} - Q_{kl}^0) + B_{ijkl}^0 (P_{ij} - P_{ij}^0) Q_{kl}^0 \\
 & + B_{ijkl}^0 P_{ij}^0 (Q_{kl} - Q_{kl}^0) + (B_{ijkl} - B_{ijkl}^0) P_{ij} Q_{kl} ,
 \end{aligned}$$

słusznej dla dowolnych tensorów \underline{P} , \underline{Q} , \underline{P}^0 i \underline{Q}^0 o walencji dwa i dowolnych tensorów \underline{B} i \underline{B}^0 o walencji cztery, oraz przy wykorzystaniu symetrii $C_{ijkl} = C_{klij}$, liniowości \underline{f} i warunku "samosprężoności" obciążenia (3.3), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \Delta J(\underline{\underline{a}}) &= \int_V \left\{ \frac{1}{2} C_{ijkl}^0 \Delta a_{j,i} \Delta a_{l,k} + C_{ijkl}^0 \Delta a_{j,i} a_{l,k}^0 + \dot{C}_{ijkl}^0 v_{l,k} \Delta a_{j,i} \right\} dV \\
 (3.54) \quad & + \int_V \left\{ \frac{1}{2} (\Delta C_{ijkl}) a_{j,i} a_{l,k} + (\Delta \dot{C}_{ijkl}) v_{l,k} a_{j,i} - \frac{\Delta \alpha}{2g} (\dot{\eta}_{ij} v_{j,i})^2 \right\} dV \\
 & - \int_V \ddot{u}_j \Delta a_j dV - \int_{S_T} \left\{ \ddot{c}_j \Delta a_j + \dot{f}_j [v] \Delta a_j + \frac{1}{2} f_j [\Delta \underline{\underline{a}}] \Delta a_j + f_j [a^0] \Delta a_j \right\} dS.
 \end{aligned}$$

Zgodnie z kryterium (3.20) i równością (3.38), Δa może być różne od zera tylko w podobszarze V_n strefy plastycznej, w którym $\eta_{ij} v_{j,i} = \lambda_{ij} \dot{e}_{ij} = 0$. Tak więc, podstawiając (3.51) i (3.52) do (3.54), oraz wykorzystując (3.39) i (3.44), uzyskujemy następujące wyrażenie

$$\begin{aligned}
 \Delta J(\underline{\underline{a}}) &= \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl}^0 \Delta a_{j,i} \Delta a_{l,k} dV - \frac{1}{2} \int_{V_n} \frac{\Delta \alpha}{g} (\dot{\eta}_{ij} a_{j,i} + \dot{\eta}_{ij} v_{j,i})^2 dV \\
 (3.55) \quad & - \frac{1}{2} \int_{S_T} f_j [\Delta \underline{\underline{a}}] \Delta a_j dS + \int_V (\dot{N}_{ij}^0 \Delta a_{j,i} - \ddot{b}_j \Delta a_j) dV - \int_{S_T} \ddot{T}_j^0 \Delta a_j dS .
 \end{aligned}$$

Podstawmy teraz $\Delta \vec{a} = \theta \vec{w}$, gdzie $\vec{w} \in W$, a θ jest skalarnym parametrem, niezależnym od punktu w V . Pierwszą słabą wariacją (różniczkę Gateaux) funkcjonału $J(\vec{a})$ w kierunku \vec{w} , oznaczoną przez $\delta J(\vec{a}; \vec{w})$, uzyskamy dla $\vec{a} = \vec{a}^0$ jako pochodną wyrażenia (3.55) względem θ dla $\theta = 0$, podczas gdy \vec{a}^0 i \vec{w} są ustalone. Rezultat jest następujący

$$(3.56) \quad \delta J(\vec{a}^0; \vec{w}) = \int_V \langle \dot{N}_{ij}^0 w_{j,i} - \dot{b}_j w_j \rangle dV - \int_{S_T} \dot{T}_{ij}^0 w_j dS.$$

(W częściej stosowanej notacji, w miejsce w_j można napisać δa_j). Aby udowodnić prawdziwość wzoru (3.56), musimy pokazać, że pochodna względem θ całki po obszarze V_n w wyrażeniu (3.55) zeruje się przy $\theta = 0$. Zauważmy, że zgodnie z kryterium (3.25) i równością (3.38), $\Delta \alpha$ może być różne od zera tylko wówczas, gdy wyrażenia $(\eta_{ij} a_{j,i} + \dot{\eta}_{ij} v_{j,i})$ i $(\eta_{ij} a_{j,i}^0 + \dot{\eta}_{ij} v_{j,i})$ mają przeciwne znaki, lub przynajmniej jedno z nich równa się zeru. Stąd

$$(3.57) \quad |\eta_{ij} a_{j,i} + \dot{\eta}_{ij} v_{j,i}| \leq |(\eta_{ij} a_{j,i} + \dot{\eta}_{ij} v_{j,i}) - (\eta_{ij} a_{j,i}^0 + \dot{\eta}_{ij} v_{j,i})| \\ = |\theta| |\eta_{ij} w_{j,i}|,$$

a więc

$$(3.58) \quad \left| \int_{V_n} \frac{\Delta \alpha}{\epsilon} (\eta_{ij} a_{j,i} + \dot{\eta}_{ij} v_{j,i})^2 dV \right| \leq \theta^2 \int_{V_n} \frac{1}{\epsilon} (\eta_{ij} w_{j,i})^2 dV.$$

Oznacza to, że całka po V_n we wzorze (3.55) jest wielkością rzędu drugiego lub wyższego względem θ , której pochodna względem θ zeruje się przy $\theta=0$. Ponieważ wyrażenia pod pierwszą i trzecią całką po prawej stronie równości (3.55) są rzędu

drugiego względem θ , to prawdziwość wzoru (3.56) na różniczkę Gateaux funkcjonału (3.49) została wykazana. Widoczne jest, że różniczka ta jest liniowa względem \tilde{w} , a więc funkcjonał (3.49) posiada zawsze pochodną w sensie Gateaux. (Dla ścisłości dodajmy, że funkcjonał (3.49) można traktować jako określony na przestrzeni liniowej W , gdyż każde $\tilde{a} \in A$ ma postać $\tilde{a}^0 + \tilde{w}$, $\tilde{w} \in W$, gdzie \tilde{a}^0 jest dowolnym ustalonym polem z klasy A).

Stosując standardową argumentację rachunku wariacyjnego, łatwo wykazać, że wyrażenie (3.56) jest równe zero dla wszystkich $\tilde{w} \in W$ wtedy i tylko wtedy, gdy równania (3.41)+(3.43) są spełnione przez pole \tilde{N}^0 , a tym samym równania (3.46) i (3.48) przez pole \tilde{a}^0 . Zasada wariacyjna (3.50) została udowodniona.

3.2.4 Kryteria jednoznaczności

Przypuśćmy, że regularne zagadnienie przyrostowe rzędu drugiego ma dwa różne rozwiązania; oznaczmy chwilowo symbolem Δ różnicę pomiędzy odpowiednimi wielkościami w tych rozwiązaniach. Z tożsamości (3.40) otrzymujemy równość

$$(3.59) \quad \int_V \Delta \tilde{N}_{i,j} \Delta a_{j,i} \, dV = \int_{S_T} \Delta \tilde{T}_j \Delta a_j \, dS$$

analogiczną do równości (3.10) dla pary rozwiązań rzędu pierwszego. Na brzegu S_T mamy zależność

$$(3.60) \quad \Delta \tilde{T}_j = f_j[\Delta a_j],$$

wynikającą z (3.44) i liniowości f . Warunkiem dostatecznym dla jednoznaczności rozwiązania w przyspieszeniach jest więc spełnienie nierówności

$$(3.61) \quad \int_V \Delta \dot{N}_{ij} \Delta a_{j,i} dV > \int_{S_T} f_j [\Delta a_j] \Delta a_j dS$$

dla wszystkich par różniących się od siebie kinematycznie dopuszczalnych pól przyspieszeń z klasy \mathcal{A} zdefiniowanej powyżej, z oczywistym znaczeniem symbolu Δ .

Wyraźmy warunek (3.61) przy użyciu miar $(\mathcal{S}, \mathcal{E})$. Różniczkując zależności (2.16) i (2.17) dwukrotnie względem czasu oraz biorąc pod uwagę, że przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia oraz ich pierwsze pochodne czasowe są dla obu pól przyspieszeń takie same, otrzymujemy związki

$$(3.62) \quad \Delta \dot{N}_{ij} = \Delta \ddot{S}_{ik} F_{jk} + S_{ik} \Delta a_{j,k}$$

$$(3.63) \quad \Delta \ddot{E}_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta a_{k,i} F_{kj} + F_{ki} \Delta a_{k,j})$$

Wskutek symetrii tensora \mathcal{S} , mamy (por. (2.39))

$$(3.64) \quad \Delta \dot{N}_{ij} \Delta a_{j,i} = \Delta \ddot{S}_{ij} \Delta \ddot{E}_{ij} + S_{ik} \Delta a_{j,k} \Delta a_{j,i}$$

Możemy więc zapisać warunek jednoznaczności (3.61) w postaci

$$(3.61)' \quad \int_V (\Delta \ddot{S}_{ij} \Delta \ddot{E}_{ij} + S_{ik} \Delta a_{j,k} \Delta a_{j,i}) dV > \int_{S_T} f_j [\Delta a_j] \Delta a_j dS$$

Rozważmy teraz przyrostowo liniowe ciało porównawcze, którego moduły L_{ijkl}^L są definiowane jako L_{ijkl}^P w strefie plastycznej, a jako L_{ijkl}^E w strefie sprężystej (por. pkt. 3.1 i 3.2.1). Odpowiednie moduły C_{ijkl}^L są określone wzorem

$$(3.65) \quad C_{ijkl}^L = F_{jp} F_{lq} \hat{L}_{ipkq}^L + S_{ik} \delta_{jl}$$

i spełniają nierówność (3.12).

Warunek (3.14), wystarczający dla jednoznaczności rozwiązania w prędkościach, zarówno dla ciała porównawczego jak sprężysto-plastycznego (wskutek (3.12)), zapiszmy w postaci

$$(3.66) \quad \int_V C_{ijkl}^L w_{j,i} w_{l,k} dV > \int_{S_T} f_j [w] w_j dS.$$

Wykażemy, że

nierówność (3.66) spełniona dla wszystkich niezerowych pól wektorowych \vec{w} z klasy \mathcal{M} zapewnia również jednoznaczność rozwiązania regularnego zagadnienia przyrostowego rzędu drugiego.

Dowód przebiega podobnie jak w przypadku zagadnienia rzędu pierwszego i opiera się na własności wypukłości względnej (3.29). Korzystając z własności (3.29) w strefie plastycznej i własności (3.33) w strefie sprężystej oraz z zależności (3.64) i (3.65), otrzymujemy

$$(3.67) \quad \Delta \dot{N}_{ij} \Delta a_{j,i} \geq C_{ijkl}^L \Delta a_{j,i} \Delta a_{l,k}.$$

Oznacza to, że własność wypukłości względnej (3.29) zachowuje się przy przejściu do miar (\dot{N}, F) . Zauważmy, że różnica $\Delta \dot{a}$ dwóch dopuszczalnych pól przyspieszeń z klasy \mathcal{M} należy do klasy \mathcal{M} . Tak więc (3.66) pociąga za sobą (3.61), jak to wynika z (3.67), i wyklucza w ten sposób istnienie dwóch różnych rozwiązań dla rozważanego zagadnienia. Dowód został zakończony.

Podkreślmy, że tożsamościowe spełnienie (3.66) zapewnia jednoznaczność rozwiązania w przyspieszeniach bez względu na to, jakie jest aktualne rozwiązanie w prędkościach.

Po podstawieniu (3.65), nierówność (3.66) można zapisać w postaci

$$(3.68) \quad \int_V \left\{ \hat{L}_{i,pkq}^L (F_{j,p} w_{j,i}) (F_{l,q} w_{l,k}) + S_{ik} w_{j,i} w_{j,k} \right\} dV$$

$$> \int_{S_T} f_j [w] w_j dS.$$

Korzystając z podanych przez Hilla [67] wzorów transformacyjnych dla modułów L_{ijkl} , można wyrazić warunek (3.68) przy pomocy modułów, odpowiadających dowolnej parze miar $(\underline{t}, \underline{e})$.

Dyskusję możliwości bifurkacji drugiego rzędu w krytycznym punkcie na nieosobliwej drodze deformacji, poza którym (3.14) przestaje obowiązywać, przesuniemy do punktu 3.3, gdzie rozważymy szerszą klasę modeli materiału.

3.2.5 Zasada minimum dla przyspieszeń

Przypuśćmy, że rozważane regularne zagadnienie przyrostowe rzędu drugiego ma rozwiązanie \ddot{a}^0 . Założmy, że nierówność (3.61) jest spełniona dla każdego pola przyspieszeń \ddot{a} z klasy \mathcal{A} , gdy jako drugie pole bierzemy rozwiązanie \ddot{a}^0 , tj. gdy $\Delta \ddot{a} = \ddot{a} - \ddot{a}^0$. Ponieważ jedno pole jest teraz ustalone, jest to warunek słabszy od warunku (3.61) rozważanego poprzednio, ale wciąż wystarczający dla jednoznaczności rozwiązania jako wykluczający (3.59). Rozwiązanie \ddot{a}^0 jest więc jednoznacznie określone. Jak wykazano powyżej, pole przyspieszeń \ddot{a}^0 odpowiada punktowi stacjonarnemu funkcjonału $J(\ddot{a})$, określonego wzorem (3.49).

Udowodnimy teraz, że jeżeli nierówność (3.61) jest spełniona dla każdego $\Delta \ddot{a} = \ddot{a} - \ddot{a}^0 \neq \underline{0}$, to funkcjonał $J(\ddot{a})$ jest nie tylko stacjonarny w punkcie $\ddot{a} = \ddot{a}^0$, ale osiąga dla $\ddot{a} = \ddot{a}^0$ ściśle absolutne minimum w klasie \mathcal{A} ,

$$(3.69) \quad J(\ddot{a}) > J(\ddot{a}^0) \quad \text{dla każdego } \ddot{a} \in \mathcal{A}, \quad \ddot{a} \neq \ddot{a}^0.$$

Dowód. Wprowadźmy oznaczenia $\tilde{w} = \tilde{a} - \tilde{a}^0$, $\tilde{a}^* = \tilde{a}^0 + \theta \tilde{w}$, gdzie $\theta \in (0,1)$, i rozważmy funkcję zmiennej θ

$$(3.70) \quad f(\theta) = J(\tilde{a}^*) - J(\tilde{a}^0),$$

przy ustalonych \tilde{a} i \tilde{a}^0 . Pokazaliśmy poprzednio, że różniczka Gateaux funkcjonału $J(\tilde{a})$ wyraża się wzorem (3.56). Stąd

$$(3.71) \quad \frac{df(\theta)}{d\theta} = \delta J(\tilde{a}^*; \tilde{w}) = \int_V \langle \tilde{N}_{i,j}^* w_{j,i} - \tilde{b}_j w_j \rangle dV - \int_{S_T} \tilde{T}_j^* w_j dS,$$

gdzie \tilde{N}^* i \tilde{T}^* związane są z \tilde{a}^* odpowiednio poprzez równanie konstytutywne (3.39) i warunek (3.44) po podstawieniu $\tilde{a} = \tilde{a}^*$. Z ciągłości zależności $\tilde{N}(\tilde{F})$ wynika, że funkcja $f(\theta)$ jest ciągła i różniczkowalna. Pole \tilde{N}^0 , odpowiadające polu przyspieszeń \tilde{a}^0 , spełnia warunek $\delta J(\tilde{a}^0; \tilde{w}) = 0$, ponieważ \tilde{a}^0 jest rozwiązaniem. Wyrażenie (3.71) można więc przekształcić następująco

$$(3.72) \quad \begin{aligned} \frac{df(\theta)}{d\theta} &= \int_V \tilde{N}_{i,j}^* w_{j,i} dV - \int_{S_T} \tilde{T}_j^* w_j dS - \int_V \tilde{N}_{i,j}^0 w_{j,i} dV + \int_{S_T} \tilde{T}_j^0 w_j dS \\ &= \frac{1}{\theta} \left\{ \int_V (\tilde{N}_{i,j}^* - \tilde{N}_{i,j}^0) \langle a_{j,i}^* - a_{j,i}^0 \rangle dV - \int_{S_T} (\tilde{T}_j^* - \tilde{T}_j^0) \langle a_j^* - a_j^0 \rangle dS \right\} \end{aligned}$$

Wyrażenie w nawiasie klamrowym jest z założenia dodatnie. Stąd, funkcja $f(\theta)$ jest dla $\theta > 0$ monotonicznie rosnąca, a więc $f(1) > 0$, gdyż $f(0) = 0$. Zasada minimum (3.69) została tym samym udowodniona, ponieważ pole \tilde{a} jest dowolne.

Zauważmy, że zarówno warunek (3.61), spełniony dla każdej pary pól przyspieszeń, jak i warunek (3.14), również implikują (3.69), gdyż każdy z nich jest silniejszy od warunku, przy którym powyższy dowód został przeprowadzony.

3.3 Bifurkacja nieosobliwego procesu deformacji

W punktach 3.1 i 3.2 rozważaliśmy zagadnienia przyrostowe odpowiednio rzędu pierwszego i drugiego, ze szczególnym uwzględnieniem kwestii jednoznaczności rozwiązania. Nie zakładaliśmy przy tym znajomości tego rozwiązania, którego jednoznaczność była badana. W tym punkcie przyjmiemy, że podstawowy proces deformacji jest znany, przynajmniej w zasadzie, np. jest w przybliżeniu określony na drodze obliczeń numerycznych. Proces ten oznaczymy przez χ^0 , a wszystkie wielkości w nim występujące wyróżnimy przez górny wskaźnik 0. Przyrostowe warunki brzegowe są nadal na każdym etapie deformacji formułowane w postaci (3.2) (wraz z (3.3)) na S_T i (3.6) na S_u , chociaż, oczywiście, zadawane wielkości są na ogół zmienne w czasie. Pole naprężeń $\overset{\vee}{N}^0$ spełnia w każdej chwili warunki równowagi (tj. zasadę mocy wirtualnych (2.7)), a więc pola prędkości $\overset{\vee}{v}^0$ i przyspieszeń $\overset{\vee}{a}^0$ stanowią, na każdym etapie deformacji, rozwiązanie przyrostowych zagadnień brzegowych odpowiednio rzędu pierwszego i drugiego. Interesować nas będzie zagadnienie możliwej bifurkacji procesu χ^0 , tj. pojawienia się, na pewnym etapie deformacji, innej możliwej kontynuacji procesu. Ograniczymy się do rozpatrzenia bifurkacji rzędu pierwszego i drugiego. Okazuje się, że założenie znajomości podstawowego procesu χ^0 pozwala na dalsze rozwinięcie teorii bifurkacji, wykraczające poza ujęcie, przedstawione w punktach 3.1 i 3.2. Zakładamy w dalszym ciągu, że przyrostowe związki konstytutywne (2.22) dają się zapisać w postaci potencjalnej (2.27), przy czym potencjał V może być dowolnie nieliniową (oczywiście, jednorodną rzędu drugiego) funkcją prędkości odkształcenia. Ograniczymy się do rozpatrywania nieosobliwych procesów χ^0 , z definicji spełniających, poza warunkami określonymi w Rozdziale 2, dodatkowy warunek, że moduły styczne L_{ijkl}^0 są w każdej chwili dobrze określone prawie wszędzie w V ,

t.j. z wyjątkiem być może pewnego podzbioru o zerowej objętości (np. sprężysto-plastycznej granicy). Ten dodatkowy warunek (zwykle spełniony w zagadnieniach praktycznych) pozwala na wykorzystanie koncepcji stycznego ciała porównawczego.

3.3.1 Podstawowa nierówność konstytutywna

Niech droga odkształcenia $\underline{e}^0(t)$ w pewnym przedziale czasu będzie zadana, tak że w każdej chwili prędkość odkształcenia $\dot{\underline{e}}^0$ i związana z nią poprzez (2.27) pochodna czasowa naprężenia $\dot{\underline{t}}^0$ są znane.

Przypuśćmy, że wzdłuż drogi odkształcenia $\underline{e}^0(t)$ zachodzi nierówność

$$(3.73) \quad \dot{\underline{t}}_{ij}^0 \dot{\underline{e}}_{ij} - \dot{\underline{t}}_{ij} \dot{\underline{e}}_{ij}^0 \geq 0 \quad \text{dla każdego } \underline{e}.$$

$\dot{\underline{t}}$ jest tu związane z $\dot{\underline{e}}$, podobnie jak $\dot{\underline{t}}^0$ z $\dot{\underline{e}}^0$, nieliniową zależnością konstytutywną (2.27). Zbadamy tę nierówność szczegółowo z uwagi na jej znaczenie, wykazane dalej, dla postaci kryteriów jednoznaczności i niestabilności procesu deformacji.

Zauważmy przede wszystkim, że nierówność (3.73) zachodzi albo dla wszystkich sprzężonych par miar odkształcenia i naprężenia albo dla żadnej, przy dowolnym wyborze konfiguracji odniesienia. Wynika to z ogólniejszego twierdzenia Hilla [66], mówiącego, że wartość wyrażenia

$$(3.74) \quad \frac{1}{\rho^{(0)}} (\dot{\underline{t}}_{ij}^{(1)} \dot{\underline{e}}_{ij}^{(2)} - \dot{\underline{t}}_{ij}^{(2)} \dot{\underline{e}}_{ij}^{(1)}),$$

gdzie $\dot{\underline{t}}^{(1)}$ jest związane z $\dot{\underline{e}}^{(1)}$ oraz $\dot{\underline{t}}^{(2)}$ z $\dot{\underline{e}}^{(2)}$ poprzez dowolne (i niekoniecznie to samo) prawo konstytutywne, a

$\rho^{(0)}$ (>0), oznacza gęstość w konfiguracji odniesienia, jest niezmiennicza przy zmianie sprzężonej pary miar $(\underline{e}, \underline{t})$ lub konfiguracji odniesienia. Tak więc, proponując nierówność konstytutywną (3.73), nie musimy precyzować miary odkształcenia. Twierdzenie Hilla pozostaje prawdziwe przy przyjęciu niesymetrycznych (ale sprzężonych) miar odkształcenia i naprężenia, w szczególności pary miar $(\underline{F}, \underline{N})$; przy ustalonej konfiguracji odniesienia mamy więc

$$(3.75) \quad \dot{t}_{ij}^0 \dot{e}_{ij} - \dot{t}_{ij} \dot{e}_{ij}^0 = \dot{N}_{ij}^0 \dot{F}_{ji} - \dot{N}_{ij} \dot{F}_{ji}^0.$$

Nierówność (3.73) jest więc równoważna nierówności

$$(3.73)' \quad \dot{N}_{ij}^0 \dot{F}_{ji} - \dot{N}_{ij} \dot{F}_{ji}^0 \geq 0 \quad \text{dla każdego } \dot{\underline{F}}.$$

Sens fizyczny nierówności (3.73) można zilustrować na modelu materiału sprężysto-plastycznego, który może doznawać odkształceń plastycznych wskutek działania pewnej liczby N wewnętrznych mechanizmów deformacji plastycznych [167] [67]. Typowym przykładem będzie tu kryształ, deformowany plastycznie wskutek ruchu dyslokacji w kilku różnych płaszczyznach krystalograficznych, co w modelu kontynualnym odpowiada uaktywnieniu kilku systemów poślizgu. Związki typu (3.76) i (3.77) (lub równoważne, odwrócone zależności dla prędkości zmiany naprężenia) są akceptowane przez szereg badaczy jako modelujące poprawnie, choć być może w sposób uproszczony, plastyczne płynięcie kryształów metali (por. [74] [49] [71] [6] [50]). Niech górne wskaźniki $k = 1, \dots, N$ oznaczają wielkości, odpowiadające k -temu wewnętrznemu mechanizmowi deformacji plastycznych. Należy podkreślić, że N określa liczbę potencjalnie aktywnych w danym momencie mechanizmów deformacji plastycznych, tj. mechanizmów, które mogą być aktywne przy odpowiednim doborze aktualnej prędkości odkształcenia; na ogół

N ulega zmianom wzdłuż drogi odkształcenia. Odcinkowo liniowe, przyrostowe równania konstytutywne dla omawianego modelu materiału można zapisać w postaci

$$(3.76) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\gamma}^K \lambda_{ij}^K, \quad \dot{\gamma}^K \geq 0,$$

z konwencją sumacyjną dla powtarzającego się indeksu k. $\epsilon_{ijkl} = \epsilon_{klij}$ są modułami sprężystymi, natomiast symetryczne tensory λ^K wyznaczają kierunek "relaksacji" przyrostu naprężenia wskutek uaktywnienia k-tego mechanizmu deformacji. Jeżeli (3.76) opisuje zachowanie materiału w narożu powierzchni plastyczności przy stowarzyszonym prawie płynięcia, to λ^K są wektorami normalnymi do hiperpłaszczyzn, tworzących to naroże w przestrzeni odkształceń. $\dot{\gamma}^K$ są skalarnymi parametrami, określającymi intensywność prędkości deformacji według k-tego mechanizmu. Przyjmujemy, że $\dot{\gamma}^K$ związane są z $\dot{\epsilon}$ zależnościami

$$(3.77) \quad \begin{aligned} \lambda_{ij}^K \dot{\epsilon}_{ij} &= g^{KM} \dot{\gamma}^M & \text{gdy } \dot{\gamma}^K > 0, \\ \lambda_{ij}^K \dot{\epsilon}_{ij} &\leq g^{KM} \dot{\gamma}^M & \text{gdy } \dot{\gamma}^K = 0, \end{aligned} \quad g^{KM} = g^{MK}$$

gdzie g^{KM} jest macierzą konstytutywną, zależną od historii odkształcenia ϵ lecz niezależną od liczby w danym momencie aktywnych ($\dot{\gamma}^K > 0$) wewnętrznych mechanizmów deformacji i od aktualnej prędkości odkształcenia. Symetrię macierzy g^{KM} przyjmujemy dla zapewnienia warunku potencjalności (2.27). Ostra nierówność w zależności (3.77)₂ oznacza, że k-ty, potencjalnie aktywny w danym momencie mechanizm deformacji ulega odciążeniu (i wskutek tego nie może być aktywny w chwilach następnych). Przykładowo, w kryształach metalu potencjalnie aktywne będą te systemy poślizgu, dla których, zgodnie z prawem Schmid'a, aktualna wartość składowej stycznej naprężenia jest równa wartości krytycznej; odciążenie następuje

wskutek spadku odpowiedniego naprężenia poniżej wartości krytycznej. Gdy w danym stadium deformacji dla danego $\dot{\underline{\epsilon}}$ równość (3.77)₁ zachodzi dla każdego $k = 1, \dots, N$, to powiemy, że $\dot{\underline{\epsilon}}$ odpowiada całkowicie aktywnej deformacji plastycznej. Dla uniknięcia nieporozumień podkreślimy, że chodzi tu o brak odciążenia tych wewnętrznych mechanizmów deformacji plastycznych, które w danym momencie są potencjalnie aktywne. Można podać dualne sformułowanie związków (3.76) i (3.77) [167] [74] [67], którego nie będziemy tu przytaczać. Nadmienimy tylko, że jeżeli h^{KM} jest macierzą modułów wzmocnienia, a M_{ijkl} oznaczają podatności sprężyste, to

$$(3.78) \quad \underline{\underline{g}}^{KM} = h^{KM} + M_{ijkl} \lambda_{ij}^K \lambda_{kl}^M.$$

Jeżeli $N = 1$, to odcinkowo liniowy związek konstytutywny (3.76) redukuje się do związku dwu-liniowego z modułami (3.17).

Wykażemy, że dla modelu materiału, opisanego związkami (3.76) i (3.77), nierówność (3.73) jest spełniona pod warunkiem, że $\dot{\underline{\epsilon}}^0$ odpowiada całkowicie aktywnej deformacji plastycznej. Dowód jest prosty: po kolejnych przekształceniach otrzymujemy

$$(3.79) \quad \begin{aligned} & \dot{t}_{ij}^0 \dot{\epsilon}_{ij}^0 - \dot{t}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^0 \\ &= \underline{\underline{g}}_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^0 \dot{\epsilon}_{ij}^0 - \dot{\gamma}^{KO} \lambda_{ij}^K \dot{\epsilon}_{ij}^0 - \underline{\underline{g}}_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \dot{\epsilon}_{ij}^0 + \dot{\gamma}^K \lambda_{ij}^K \dot{\epsilon}_{ij}^0 \\ &= - \dot{\gamma}^{KO} \lambda_{ij}^K \dot{\epsilon}_{ij}^0 + \dot{\gamma}^K \underline{\underline{g}}^{KM} \dot{\gamma}^{MO} \\ &\geq - \dot{\gamma}^{KO} \underline{\underline{g}}^{KM} \dot{\gamma}^{MO} + \dot{\gamma}^K \underline{\underline{g}}^{KM} \dot{\gamma}^{MO} = 0. \end{aligned}$$

Pierwsza równość w (3.79) wynika z podstawienia związku (3.76) (wartości $\dot{\gamma}^{KO}$ odpowiadają $\dot{\underline{\epsilon}}^0$, a $\dot{\gamma}^K$ odpowiadają $\dot{\underline{\epsilon}}$), druga równość z symetrii modułów sprężystych i z założonej równości

(3.77)₁ dla $\dot{\underline{e}} = \dot{\underline{e}}^0$, następną nierówność z podstawienia związków (3.77), a ostatnia równość z symetrii macierzy \underline{g}^{KM} .

Źwróćmy uwagę, że w powyższym dowodzie nierówności (3.73) nie zakładaliśmy dodatniej określoności macierzy \underline{g}^{KM} , ani nawet jej odwracalności (dla zachowania jednowartościowości funkcji $\underline{t}(\underline{e})$ związki (3.77) mogą być uzupełnione dodatkowymi warunkami; gdy macierz \underline{g}^{KM} jest dodatnio określona, to jednowartościowość jest zapewniona automatycznie [74] [67]).

Zauważmy, że prędkość odkształcenia $\dot{\underline{e}}^0$ obliczana wzdłuż drogi deformacji odpowiada albo całkowicie aktywnej deformacji plastycznej albo deformacji w zakresie czysto sprężystym, z wyjątkiem być może pewnej liczby oddzielonych od siebie punktów na drodze deformacji. Gdyby bowiem tak nie było, to w każdym punkcie pewnego odcinka tej drogi następowałoby odciążenie przynajmniej jednego mechanizmu deformacji. Jest to niemożliwe, gdyż liczba mechanizmów deformacji jest z założenia skończona, a ponowne uaktywnienie odciążonego mechanizmu deformacji wymaga skończonego przyrostu deformacji. Ostra nierówność w zależności (3.77)₂ może w ogóle nie wystąpić dla $\dot{\underline{e}} = \dot{\underline{e}}^0$, jeżeli ew. odciążanie poszczególnych mechanizmów deformacji wzdłuż drogi odkształcenia $\underline{e}^0(t)$ będzie się odbywało w sposób "łagodny", poprzez stan neutralnego obciążania (por. kryterium odciążania (3.22)). Oczywiście, w zakresie sprężystym (lub ogólniej, dla materiałów przyrostowo liniowych), nierówność (3.73) jest spełniona ze znakiem równości przy założeniu symetrii (2.26).

Nierówność (3.73) wykracza poza samą zasadę normalności, którą przy założeniu symetrii modułów sprężystych można zapisać w postaci nierówności (por. [66])

$$(3.80) \quad \dot{t}_{ij} \dot{e}_{ij}^0 - \dot{t}_{ij}^0 \dot{e}_{ij} \geq 0 \quad \text{dla wszystkich } \dot{\underline{e}},$$

gdzie \dot{t}_{ij}^0 i \dot{e}_{ij}^0 odpowiadają czysto sprężystej deformacji i są związane równaniem $\dot{t}_{ij}^0 = \underline{\underline{L}}_{ijkl} \dot{e}_{kl}^0$. Nierówności (3.73) i (3.80)

można traktować jako wzajemnie uzupełniające: podstawiając $\dot{\underline{e}} = \dot{\underline{e}}^a$ do (3.73), a $\dot{\underline{e}} = \dot{\underline{e}}^0$ do (3.80), otrzymujemy w wyniku tę samą nierówność.

Wykażemy poniżej, że nierówność konstytutywna (3.73), podobnie jak (3.80), posiada pewną istotną własność, mianowicie zachowuje się przy przejściu od mikro-skali do makro-skali, przykładowo, od skali pojedynczego ziarna do reprezentatywnej objętości materiału polikrystalicznego. Ogólną analizę problemów, związanych z przejściem od mikro-skali do makro-skali w zakresie skończonych deformacji, przedstawił Hill [66] [69] [70]. Nie wchodząc w szczegóły, których omawianie wykraczałoby poza zakres niniejszej pracy, przytoczmy tylko za Hillem następujące twierdzenie o usrednianiu:

$$(3.81) \quad \langle \langle \dot{F}_{ij}^i \dot{N}_{jk}^j \rangle \rangle = \langle \langle \dot{F}_{ij} \rangle \rangle \langle \langle \dot{N}_{jk} \rangle \rangle ,$$

gdzie $\langle \langle \cdot \rangle \rangle$ oznacza usrednianie po objętości makrocząsteczki. Hill [69] omawia szczegółowo warunki, przy których równość (3.81) jest prawdziwa; dla naszych celów wystarczy wniosek, że (3.81) zachodzi, gdy pochodne czasowe \dot{N} naprężenia spełniają przyrostowe warunki równowagi (przy pominięciu sił masowych, uzasadnionym małą objętością makro-cząsteczki materiału), gradient prędkości \dot{F} uzyskiwany jest z ciągłego pola prędkości, a makrocząsteczka stanowi reprezentatywną próbkę mikroskopowo niejednorodnego materiału.

Jeżeli powyższe warunki są spełnione, to wykorzystując (3.81), otrzymujemy

$$(3.82) \quad \langle \langle \dot{N}_{ij}^0 \dot{F}_{ji} - \dot{N}_{ij} \dot{F}_{ji}^0 \rangle \rangle = \langle \langle \dot{N}_{ij}^0 \rangle \rangle \langle \langle \dot{F}_{ji} \rangle \rangle - \langle \langle \dot{N}_{ij} \rangle \rangle \langle \langle \dot{F}_{ji}^0 \rangle \rangle .$$

Zdefiniujmy teraz sprzężone miary odkształcenia i naprężenia w makro-skali, $\bar{\underline{e}}$ i $\bar{\underline{t}}$, związane w dokładnie w taki sam sposób z usrednionymi tensorami $\langle \langle \underline{F} \rangle \rangle$ i $\langle \langle \underline{N} \rangle \rangle$, jak miary \underline{e} i \underline{t} z

tensorami \underline{F} i \underline{N} . Zwróćmy uwagę, że w ogólnym przypadku $\underline{\dot{e}} \neq \langle \langle \underline{e} \rangle \rangle$, $\underline{\dot{t}} \neq \langle \langle \underline{t} \rangle \rangle$. Łącząc (3.82) z równością (3.75), obowiązującą zarówno w mikro-skali jak makro-skali, otrzymujemy (por. [66])

$$(3.83) \quad \langle \langle \dot{t}_{ij}^0 \dot{e}_{ij} - \dot{t}_{ij} \dot{e}_{ij}^0 \rangle \rangle = \dot{t}_{ij}^0 \dot{e}_{ij} - \dot{t}_{ij} \dot{e}_{ij}^0.$$

Wynika stąd natychmiast wspomniana własność, że jeżeli nierówność konstytutywna (3.73) obowiązuje w mikro-skali, to przenosi się również do makro-skali (przy spełnieniu założeń, prowadzących do (3.83)).

Jak wykazaliśmy powyżej, dla pojedynczego kryształu o związkach konstytutywnych (3.76) i (3.77), nierówność (3.73) jest spełniona wzdłuż drogi deformacji $\underline{e}^0(t)$, z wyjątkiem być może pewnego dyskretnego zbioru punktów na tej drodze. Wzdłuż gładkiej w makro-skali (tj. gdy $\underline{\dot{e}}^0$ i $\underline{\dot{t}}^0$ zmieniają się w sposób ciągły) drogi odkształcenia konglomeratu takich kryształów o losowej orientacji, możliwość równoczesnego niespełnienia nierówności (3.73) w objętości porównywalnej z objętością konglomeratu można więc uznać za nieprawdopodobną. Przy wykluczeniu tej możliwości, nierówność (3.73) zachodzi w skali makro wskutek równości (3.83).

Z przedstawionych rozważań wynika, że w fenomenologicznym opisie własności materiału polikrystalicznego wzdłuż makroskopowo gładkiej drogi odkształcenia, nierówność (3.73) można praktycznie uznać za konsekwencję przyjęcia związków konstytutywnych (3.76), (3.77) na poziomie pojedynczego kryształu. Dowód tego stwierdzenia nie jest jednak wystarczająco ścisły, aby zmienić status nierówności (3.73), traktowanej w dalszym ciągu jako postulowaną nierówność konstytutywną.

3.3.2 Styczny materiał porównawczy

Przypuśćmy, że na danym etapie deformacji potencjał $W(\dot{\underline{e}})$ jest dwukrotnie ciągle różniczkowalny w punkcie $\dot{\underline{e}} = \dot{\underline{e}}^0$, a więc moduły styczne L_{ijkl}^0 , wiążące \dot{t}^0 z $\dot{\underline{e}}^0$:

$$(3.84) \quad \dot{t}_{ij}^0 = \frac{\partial W}{\partial \dot{e}_{ij}}(\dot{\underline{e}}^0) = L_{ijkl}^0 \dot{e}_{kl}^0,$$

są dobrze określone (i równe $\partial^2 W / \partial \dot{e}_{ij} \partial \dot{e}_{kl} |_{\dot{\underline{e}} = \dot{\underline{e}}^0}$). Zdefiniujmy styczny materiał porównawczy jako hipotetyczny materiał o liniowym przyrostowym równaniu konstytutywnym z modułami L_{ijkl}^0 i o kwadratowym potencjale :

$$(3.85) \quad W^0(\dot{\underline{e}}) = \frac{1}{2} L_{ijkl}^0 \dot{e}_{ij} \dot{e}_{kl}.$$

Wykażemy prawdziwość następujących dwóch Lematów.

Lemat 3.1 Jeżeli moduły L_{ijkl}^0 są dobrze określone i zachodzi nierówność (3.73), to

$$(3.86) \quad W(\dot{\underline{e}}) \geq W^0(\dot{\underline{e}}) \quad \text{dla każdego } \dot{\underline{e}}.$$

Dowód. Niech $\dot{\underline{e}} = \dot{\underline{e}}^0 + \theta \Delta \dot{\underline{e}}$, $\theta \in (0, 1)$, i rozważmy funkcję zmiennej θ

$$(3.87) \quad f(\theta) = \frac{1}{\theta^2} \left\{ W(\dot{\underline{e}}) - W^0(\dot{\underline{e}}) \right\},$$

przy ustalonym $\Delta \dot{\underline{e}}$. Różniczkując (3.87) względem θ , po nieskomplikowanych przekształceniach otrzymujemy

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = -\frac{2}{\theta^3} \left\{ W(\dot{\underline{e}}) - W^0(\dot{\underline{e}}) \right\} + \frac{1}{\theta^2} \left\{ \dot{t}_{ij} \Delta \dot{e}_{ij} - L_{ijkl}^0 \dot{e}_{kl} \Delta \dot{e}_{ij} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\theta^3} \left\{ -2W(\dot{\underline{e}}) + 2W^0(\dot{\underline{e}}) + \dot{t}_{ij}(\dot{e}_{ij} - \dot{e}_{ij}^0) - L_{ijkl}^0 \dot{e}_{kl}(\dot{e}_{ij} - \dot{e}_{ij}^0) \right\} \\
 &= \frac{1}{\theta^3} (\dot{t}_{ij} \dot{e}_{ij} - \dot{t}_{ij} \dot{e}_{ij}^0)
 \end{aligned}$$

Przy spełnionej nierówności (3.73), funkcja $f(\theta)$ jest więc niemalejąca dla $\theta > 0$. Wartość $f(0)$ jest nieokreślona, ale z reguły de l'Hospitala mamy

$$\begin{aligned}
 \lim_{\theta \rightarrow 0} f(\theta) &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\dot{t}_{ij} \Delta \dot{e}_{ij} - L_{ijkl}^0 \dot{e}_{kl} \Delta \dot{e}_{ij}}{2\theta} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2} (L_{ijkl} - L_{ijkl}^0) \Delta \dot{e}_{ij} \Delta \dot{e}_{kl} = 0 ;
 \end{aligned}$$

ostatnia równość wynika z założonej ciągłości drugich pochodnych W , tj. modułów L_{ijkl} , dla $\dot{\underline{e}} = \dot{\underline{e}}^0$. W konsekwencji, $f(1) \geq 0$, co daje dokładnie (3.86). Ponieważ $\Delta \dot{\underline{e}}$ jest dowolne, to lemat został udowodniony.

Lemat 3.2 Jeżeli moduły L_{ijkl}^0 są dobrze określone to nierówność (3.73) jest równoważna nierówności

$$(3.88) \quad (\dot{t}_{ij} - \dot{t}_{ij}^0)(\dot{e}_{ij} - \dot{e}_{ij}^0) \geq L_{ijkl}^0 (\dot{e}_{ij} - \dot{e}_{ij}^0)(\dot{e}_{ij} - \dot{e}_{ij}^0)$$

dla każdego $\dot{\underline{e}}$.

Dowód. Rozważmy skalarną funkcję φ zmiennej $\dot{\underline{e}}$,

$$(3.89) \quad \varphi(\dot{\underline{e}}) = 2W(\dot{\underline{e}}) - 2W^0(\dot{\underline{e}}) + \dot{t}_{ij} \dot{e}_{ij} - \dot{t}_{ij} \dot{e}_{ij}^0 .$$

Podstawienie związków (2.29), (3.84), (3.85), z uwzględnieniem symetrii modułów L_{ijkl}^0 , wykazuje, że nierówność (3.88) jest całkowicie równoważna nierówności $\varphi(\dot{\underline{e}}) \geq 0$. Jeżeli zachodzi

(3.73), to, na mocy Lematu 3.1, prawdziwa jest nierówność (3.86), co łącznie z (3.73) pociąga za sobą $\varphi(\dot{\underline{e}}) \geq 0$. Tak więc (3.73) implikuje (3.88).

Przypuśćmy teraz, że dla wszystkich $\dot{\underline{e}}$ zachodzi (3.88), tj. $\varphi(\dot{\underline{e}}) \geq 0$. Podstawmy $\theta \dot{\underline{e}}$ ($\theta > 0$) w miejsce $\dot{\underline{e}}$ do (3.89), i niech $\theta \rightarrow 0^+$ przy ustalonym $\dot{\underline{e}}$. W wyniku otrzymujemy

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(\theta \dot{\underline{e}})}{\theta} = \dot{t}_{ij}^0 \dot{e}_{ij} - \dot{t}_{ij} \dot{e}_{ij}^0,$$

gdyż V i V^0 są jednorodnego rzędu drugiego względem $\dot{\underline{e}}$. Ponieważ przyjęliśmy, że $\varphi(\theta \dot{\underline{e}}) \geq 0$, to graniczna wartość w powyższej równości jest nieujemna, tj. zachodzi (3.73). Dowód został zakończony.

Nierówność (3.88), jako równoważna (3.73), jest niezmiennicza, tj. zachowuje się przy zmianie jednej sprzężonej pary miar (\dot{t}, \dot{e}) na inną, jak również przy zmianie konfiguracji odniesienia. Nierówność (3.88) daje się w równoważny sposób zapisać w postaci

$$(3.88)' \quad (\dot{N}_{ij} - \dot{N}_{ij}^0) (\dot{F}_{ji} - \dot{F}_{ji}^0) \geq C_{ijkl}^0 (\dot{F}_{ji} - \dot{F}_{ji}^0) (\dot{F}_{lk} - \dot{F}_{lk}^0) \quad \text{dla każdego } \dot{\underline{F}}.$$

Dowód wynika natychmiast z tożsamości (2.39) i (2.40). Podobnie, nierówność (3.86) jest niezmiennicza i równoważna nierówności

$$(3.86)' \quad U(\dot{\underline{F}}) \geq U^0(\dot{\underline{F}}) \quad \text{dla każdego } \dot{\underline{F}},$$

gdzie

$$(3.90) \quad U^0(\dot{\underline{F}}) = \frac{1}{2} C_{ijkl}^0 \dot{F}_{ji} \dot{F}_{lk}.$$

Nierówność (3.86)' jest bowiem granicznym przypadkiem nierówności (3.88)' gdy $|\dot{\xi}^1|/|\dot{\xi}^0| \rightarrow \infty$.

Porównując (3.88)' z własnością wypukłości względnej (3.12), odgrywającą ważną rolę w teorii bifurkacji Hilla, widoczny staje się sens wprowadzenia (3.73) jako nierówności konstytutywnej. Zwróćmy przy tym uwagę, że spełnienie nierówności (3.12)' przy $L_{ijkl}^L = L_{ijkl}^0$ dla wszystkich par prędkości odkształcenia i odpowiadających im prędkości zmian naprężenia, jest warunkiem na ogół silniejszym od (3.88) (a tym samym od (3.73)), w którym jeden element takich par został ustalony. Aby uwidocznic jeszcze wyraźniej różnicę pomiędzy (3.12)' a (3.88), sformułujmy następujące dwa lematy.

Lemat 3.3 Nierówność (3.12)' jest tożsamościowo spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(3.91) \quad (L_{ijkl}(\dot{\xi}) - L_{ijkl}^L) \Delta \dot{\xi}_{ij} \Delta \dot{\xi}_{kl} \geq 0 \quad \text{dla wszystkich } \Delta \dot{\xi}$$

i dla wszystkich $\dot{\xi}$ takich, dla których moduły L_{ijkl} są dobrze określone.

Dowód. Nierówność (3.12)' jest warunkiem koniecznym i dostatecznym wypukłości funkcji $(V-W^L)(\dot{\xi})$. Wyrażenie po lewej stronie nierówności (3.91) określa drugą pochodną tej funkcji w kierunku $\Delta \dot{\xi}$. Ponieważ $(V-W^L)(\dot{\xi})$ jest ciągle różniczkowalna, to (3.91) jest warunkiem koniecznym i dostatecznym dla wypukłości tej funkcji na dowolnym odcinku o kierunku $\Delta \dot{\xi}$, a więc i dla jej wypukłości. Wynika stąd teza lematu.

Lemat 3.4 Przypuśćmy, że

$$(3.92) \quad (L_{ijkl}(\dot{\xi}) - L_{ijkl}^0) \dot{\xi}_{ij}^0 \dot{\xi}_{kl}^0 \geq 0$$

dla wszystkich $\dot{\xi}$ takich, dla których moduły L_{ijkl} są

dobrze określone.

Wówczas zachodzi nierówność (3.73).

Dowód. Niech $\dot{\underline{e}} = \dot{\underline{e}}^0 + \theta \Delta \dot{\underline{e}}$, $\theta \in (0,1)$, i rozważmy pomocniczą funkcję zmiennej θ

$$(3.93) \quad f(\theta) = \frac{1}{\theta} (\dot{t}_{ij}^0 \dot{e}_{ij} - \dot{t}_{ij} \dot{e}_{ij}^0)$$

przy ustalonym $\Delta \dot{\underline{e}}$. Różniczkując (3.93) względem θ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{df(\theta)}{d\theta} &= \frac{1}{\theta^2} \{ \dot{t}_{ij} \dot{e}_{ij}^0 - \dot{t}_{ij}^0 \dot{e}_{ij} + \dot{t}_{ij}^0 (\dot{e}_{ij} - \dot{e}_{ij}^0) - L_{ijkl}(\dot{\underline{e}}) (\dot{e}_{kl} - \dot{e}_{kl}^0) \dot{e}_{ij}^0 \} \\ &= \frac{1}{\theta^2} (L_{ijkl}(\dot{\underline{e}}) - L_{ijkl}^0) \dot{e}_{ij}^0 \dot{e}_{kl}^0. \end{aligned}$$

Funkcja $f(\theta)$ jest więc niemalejąca, jeżeli zachodzi (3.92). Z kolei, z reguły de l'Hospitala i symetrii modułów mamy

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} f(\theta) &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} (\dot{t}_{ij}^0 \Delta \dot{e}_{ij} - L_{ijkl}(\dot{\underline{e}}) \Delta \dot{e}_{kl} \dot{e}_{ij}^0) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} (L_{ijkl}^0 - L_{ijkl}(\dot{\underline{e}})) \Delta \dot{e}_{kl} \dot{e}_{ij}^0 = 0; \end{aligned}$$

ostatnia równość wynika z założonej ciągłości modułów w punkcie $\dot{\underline{e}} = \dot{\underline{e}}^0$. Stąd $f(1) \geq 0$, czyli zachodzi nierówność (3.73). Ponieważ $\Delta \dot{\underline{e}}$ jest dowolne, to lemat został udowodniony.

Z porównania (3.91) i (3.92) wynika, że o ile wypukłość funkcji $(W-W^L)(\dot{\underline{e}})$ na każdym odcinku przestrzeni prędkości odkształcenia jest niezbędna dla (3.12)', to wypukłość funkcji $(W-V^0)(\dot{\underline{e}})$ tylko na odcinkach o kierunku $\dot{\underline{e}}^0$ wystarcza dla (3.73). Tak więc, moduły styczego ciała porównawczego, spełniające (3.88), nie muszą w ogólnym przypadku spełniać nierówności (3.12)' (po podstawieniu

$$L_{ijkl}^L = L_{ijkl}^0 \rangle.$$

3.3.3 Bifurkacja procesu deformacji a stan własny dla stycznego ciała porównawczego

Koncepcja sprowadzania nieliniowego zagadnienia bifurkacji procesu deformacji ciała sprężysto-plastycznego do analogicznego, ale znacznie prostszego, liniowego zagadnienia na wartości własne dla stycznego ciała porównawczego jest ideą klasyczną, pojawiającą się jeszcze w XIX wieku u Engessera w związku z badaniami zjawiska wyboczenia w zakresie plastycznym. Poprawne uzasadnienie takiej metody, w szczególnym przypadku zagadnienia wyboczenia kolumny, przyniosła jednak dopiero praca Shanley'a [169] [170] (por. także dyskusję von Karmana, zamieszczoną po artykule [170]). Ścisłego uzasadnienia w przypadku ogólnego, trójwymiarowego zagadnienia dla ciała z materiału sprężysto-plastycznego o gładkiej powierzchni plastyczności i stowarzyszonym prawie płynięcia dostarczyła praca Hilla [56]. W nieco późniejszej wersji swojej teorii Hill [57] [58] [67] rozszerzył to uzasadnienie na klasę odcinkowo-liniowych (z dowolną liczbą zakresów liniowości) przyrostowych równań konstytutywnych, przy założeniu, że aktualne moduły przyrostowe, obowiązujące wzdłuż podstawowej drogi deformacji (tj. moduły styczne), definiują ciało porównawcze o własności (3.12) (por. pkt. 3.1).

Pokażemy, że metoda poszukiwania punktów bifurkacji (tj. stanów własnych) dla stycznego ciała porównawczego (w metodzie elementów skończonych - poszukiwania punktów zerowania się wyznacznika tzw. macierzy stycznej) zamiast dla ciała sprężysto-plastycznego, jest uzasadniona dla szerszej klasy modeli materiału, mianowicie, dla dowolnie nieliniowego potencjału W pod warunkiem spełnienia nierówności (3.73);

spełnienie warunku (3.12) nie jest konieczne. Bifurkacja pierwotna nie musi być przy tym bifurkacją w prędkościach.

Zagadnienie przyrostowe rzędu pierwszego

Na każdym etapie deformacji definiujemy styczne ciało porównawcze jako ciało o tej samej konfiguracji, warunkach obciążania i stanie naprężenia co rozpatrywane ciało sprężysto-plastyczne, ale zbudowane ze stycznego materiału porównawczego o kwadratowym potencjale W^0 w miejsce dowolnie nieliniowego potencjału W .

Rozważmy funkcjonal "bifurkacyjny" dla stycznego ciała porównawczego (por. (3.13))

$$(3.94) \quad I^0(\tilde{w}) = \frac{1}{2} \int_V C_{ijkl}^0 w_{j,i} w_{l,k} dV - \frac{1}{2} \int_{S_T} f_j[\tilde{w}] w_j dS,$$

którego argumentem jest pole wektorowe \tilde{w} z klasy W .

Udowodnimy prawdziwość następującego kryterium jednoznaczności.

Kryterium 3.1 Jeżeli w nieosobliwym procesie deformacji χ^0 spełniona jest nierówność konstytutywna (3.73) oraz

$$(3.95) \quad -I^0(\tilde{w}) > 0 \quad \text{dla wszystkich } \tilde{w} \in W, \tilde{w} \neq \tilde{0},$$

to bifurkacja w prędkościach jest wykluczona.

Dowód. Bifurkacja w prędkościach będzie niemożliwa, jeżeli wykazemy prawdziwość nierówności (por. [67], str. 62)

$$(3.96) \quad \int_V (\dot{N}_{ij} - \dot{N}_{ij}^0)(v_{j,i} - v_{j,i}^0) dV > \int_{S_T} f_j[\dot{\gamma} - \dot{\gamma}^0](v_j - v_j^0) dS$$

dla wszystkich dopuszczalnych pól prędkości $\vec{v} \in \mathcal{F}$, $\vec{v} \neq \vec{v}^0$. Istnienie drugiego, różnego od \vec{v}^0 rozwiązania dla prędkości zaprzeczałoby bowiem wówczas tożsamości (3.11), gdyż na S_T mamy $\dot{f} - \dot{f}^0 = f[\vec{v}] - f[\vec{v}^0] = f[\vec{v} - \vec{v}^0]$, co wynika z (3.2). Ponieważ założyliśmy prawdziwość (3.73), to na mocy Lematu 3.2, spełniona jest tożsamościowo nierówność (3.88), a co za tym idzie, również nierówność (3.88)'. Różnica pól $\vec{v} - \vec{v}^0$ należy do klasy \mathcal{M} ; stąd (3.95) implikuje (3.96), a więc bifurkacja w prędkościach jest niemożliwa. Prawdziwość Kryterium 3.1 została udowodniona.

Wykażemy teraz, że jeżeli zachodzi (3.96) (dla wszystkich $\vec{v} \neq \vec{v}^0$), to prawdziwa jest zasada minimum (3.16).

Dowód. Niech $\vec{w} = \vec{v} - \vec{v}^0$, $\vec{v}^* = \vec{v}^0 + \theta \vec{w}$, $\theta \in (0, 1)$, i rozważmy funkcję zmiennej θ

$$f(\theta) = \mathcal{F}(\vec{v}^*) - \mathcal{F}(\vec{v}^0)$$

przy dowolnym, ale ustalonym \vec{w} . Oznaczając gwiazdką wielkości odpowiadające polu \vec{v}^* , oraz korzystając z (3.37), (3.2) i (3.3), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{df(\theta)}{d\theta} &= \int_V (\dot{N}_{i,j}^* w_{j,i} - \dot{b}_j w_j) dV - \int_{S_T} (\dot{c}_j w_j + \frac{1}{2} f_j[\vec{v}^*] w_j + \frac{1}{2} f_j[\vec{w}] v_j^*) dS \\ (3.97) \quad &= \int_V (\dot{N}_{i,j}^* w_{j,i} - \dot{b}_j w_j) dV - \int_{S_T} (\dot{c}_j + f_j[\vec{v}^*]) w_j dS. \end{aligned}$$

Zgodnie z zasadą wariacyjną (3.9), powyższe wyrażenie zeruje się po podstawieniu \vec{v}^0 w miejsce \vec{v}^* . Stąd

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = \int_V (\dot{N}_{i,j}^* w_{j,i} - \dot{b}_j w_j) dV - \int_{S_T} (\dot{c}_j + f_j[\vec{v}^*]) w_j dS$$

$$(3.97)' \quad - \int_V (\dot{N}_{ij}^0 w_{j,i} - \dot{b}_j w_j) dv + \int_{S_T} (\dot{c}_j + f_j[y^0]) w_j ds$$

$$= \frac{1}{\theta} \left\{ \int_V (\dot{N}_{ij}^* - \dot{N}_{ij}^0) (v_{j,i}^* - v_{j,i}^0) dv - \int_{S_T} f_j [y^* - y^0] (v_j^* - v_j^0) ds \right\}$$

Jeżeli zachodzi (3.96), to wyrażenie to jest dodatnie przy $\theta > 0$. Wówczas funkcja $f(\theta)$, będąca funkcją ciągłą, jest monotonicznie rosnąca. Ponieważ $f(0) = 0$, to musi być $f(1) > 0$, co daje dokładnie (3.16). Dowód został zakończony.

Poprzednio wykazaliśmy, że (3.73) i (3.95) łącznie implikują (3.96). Wynika stąd, że jeżeli spełnione są założenia Kryterium 3.1, to prawdziwa jest zasada minimum dla prędkości (3.16).

Zauważmy, że przyjęcie nierówności konstytutywnej (3.73) nie oznacza, że w nieosobliwym procesie podstawowym nie może występować odciążanie. Dopuszczalne jest np. stopniowe odciążanie ciała, wywołane propagacją frontu odciążania. Natomiast możliwość wystąpienia bifurkacji w przypadku skokowej zmiany pola prędkości \dot{v}^0 w czasie, prowadzącej do natychmiastowego odciążania i do niespełnienia (3.73) w obszarze o niezerowej objętości, musi być rozpatrzona oddzielnie, i może być np. wykluczona na podstawie kryterium Hilla (3.14). Zastosowanie tego kryterium wymaga jednak spełnienia nierówności konstytutywnej (3.12)', silniejszej niż (3.73) (por. punkt 3.3.2).

Zagadnienie przyrostowe rzędu drugiego

Przejdźmy teraz do rozpatrzenia problemu jednoznaczności rozwiązania zagadnienia przyrostowego rzędu drugiego. Podobnie jak w punkcie (3.2), ograniczymy się do rozpatrywania zagadnienia regularnego, w którym pola przyspieszeń są z

założenia ciągle. Wprowadzone powyżej założenie, że moduły L_{ijkl}^0 są (prawie wszędzie) dobrze określone w V , pozwala na znaczne uproszczenie rozważań (w porównaniu z punktem 3.2) i rozszerzenie analizy na przypadek dowolnie nieliniowego potencjału $W(\dot{\epsilon})$. W przypadku klasycznego modelu materiału sprężysto-plastycznego, przyjętego w punkcie 3.2, założenie to odpowiada wykluczeniu przypadku "neutralnego" obciążenia (γ dy $F(\dot{\epsilon}^0, \mathcal{E}) = 0$ i $\lambda_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} = 0$).

Wzdłuż znanej drogi odkształcenia, potencjał W i moduły L_{ijkl} można traktować jako znane funkcje zmiennych $(\dot{\epsilon}, t)$. Rozpatrzmy w pewnej chwili τ procesu deformacji \mathcal{X}^0 cząstkę materiału, dla której moduły L_{ijkl}^0 są dobrze określone. Weźmy pod uwagę dowolną drogę odkształcenia tej cząstki, "styczną" do drogi odkształcenia $\dot{\epsilon}^0(t)$ w chwili τ , tzn. taką że $\dot{\epsilon}^0 = \dot{\epsilon}^0$ w chwili τ . Wówczas można przyjąć, że w pewnym otoczeniu wartości $(\dot{\epsilon}^0, \tau)$ przy $t > \tau$ funkcja $L_{ijkl}(\dot{\epsilon}, t)$, określona dla tej drogi, jest różniczkowalna. Zgodnie z regułą różniczkowania funkcji złożonej, w chwili τ mamy

$$(3.98) \quad \dot{L}_{ijkl} = \frac{\partial L_{ijkl}}{\partial t} (\dot{\epsilon}^0, \tau) + K_{ijklpq}^0 \ddot{\epsilon}_{pq}^0,$$

gdzie K_{ijklpq}^0 są "modułami rzędu drugiego",

$$(3.99) \quad K_{ijklpq}^0 = \frac{\partial L_{ijkl}}{\partial \dot{\epsilon}_{pq}} (\dot{\epsilon}^0, \tau) = \frac{\partial^3 W}{\partial \dot{\epsilon}_{pq} \partial \dot{\epsilon}_{kl} \partial \dot{\epsilon}_{ij}} (\dot{\epsilon}^0, \tau).$$

Wprowadzimy założenie, że wartości $\partial L_{ijkl} / \partial t$ w chwili t zależą jedynie od historii odkształcenia \mathcal{E} do chwili τ i od aktualnej prędkości odkształcenia. Oznaczając przez Δ różnicę wielkości, odpowiadających dwóm różnym polom przyspieszeń przy $\Delta y \equiv 0$, ze wzoru (3.98) otrzymujemy wówczas

$$(3.100) \quad \Delta \dot{L}_{ijkl} = K_{ijklpq}^0 \Delta \ddot{e}_{pq}$$

Chociaż w ogólnym przypadku $\Delta \dot{L}_{ijkl} \neq 0$, to jednak

$$(3.101) \quad \Delta \dot{L}_{ijkl} \dot{e}_{kl}^0 = 0,$$

co stwierdza się po podstawieniu związków (3.100), (3.99), (2.25) i (2.24). Z obowiązującego wciąż równania konstytutywnego rzędu drugiego (3.27) wynika stąd, że

$$(3.102) \quad \Delta \ddot{t}_{ij} = L_{ijkl}^0 \Delta \ddot{e}_{kl}$$

Jest więc widoczne, że zagadnienie bifurkacji rzędu drugiego jest, przy wprowadzonych założeniach, liniowe, przy czym istotne są tylko moduły styczne. Wniosek ten nie jest całkiem nowy (por. Klusznikow [95] i Triantafyllidis [180]), jednakże warunki liniowości nie zostały przez tych autorów precyzyjnie określone (analiza w punkcie 3.3 wykazała, że w ogólności zagadnienie bifurkacji rzędu drugiego może nie być liniowe).

Tok rozumowania analogiczny do przedstawionego w punkcie 3.2, lecz znacznie uproszczony wskutek liniowości zależności (3.102), prowadzi do następujących wyników (które można traktować jako wnioski z rezultatów punktu 3.2, gdyż szczególna postać modułów (3.17) przestaje w przypadku liniowym odgrywać jakąkolwiek rolę). Każde rozwiązanie w przyspieszeniach (niekoniecznie jednoznaczne) jest określone poprzez zasadę wariacyjną (3.50) z

$$(3.103) \quad \begin{aligned} J(\ddot{a}) = & \int_V \left(\frac{1}{2} C_{ijkl}^0 a_{j,i} a_{l,k} + \dot{C}_{ijkl}^0 v_{l,k}^0 a_{j,i} - \dot{b}_j a_j \right) dv \\ & - \int_{S_T} \left(\ddot{c}_j + \dot{f}_j [v^0] + \frac{1}{2} f_j [a] \right) a_j dS ; \end{aligned}$$

zauważmy, że wskutek (3.101) wartość wyrażenia $\dot{C}_{ijkl}^0 v_{l,k}^0$ nie zależy od pola przyspieszeń \ddot{a}^0 (z wyjątkiem, być może, pewnej powierzchni, na której moduły C_{ijkl}^0 nie są dobrze określone). Ze związku (3.102) wynika równość (por. nierówność (3.67))

$$(3.104) \quad \Delta \ddot{N}_{ij} \Delta a_{j,i} = C_{ijkl}^0 \Delta a_{j,i} \Delta a_{l,k}.$$

Stąd (3.95) wyklucza (3.59), a więc spełnienie warunku (3.95) wyklucza bifurkację w przyspieszeniach. Należy jednak pamiętać o założeniach, przy których to stwierdzenie zostało uzyskane, w szczególności o założeniu nieosobliwego procesu i ciągłości pól przyspieszeń. Łatwo sprawdzić, że nierówność (3.95) jest teraz równoważna nierówności (3.69) dla funkcjonału (3.103).

Krytyczne stadium procesu deformacji

Pokazaliśmy, że w nieosobliwym procesie deformacji, warunek (3.95) wyklucza bifurkację w prędkościach, gdy spełniona jest nierówność konstytutywna (3.73), a także bifurkację w przyspieszeniach przy założonych warunkach regularności. Zachodzi naturalne pytanie, czy bifurkacja zachodzi w krytycznym momencie, począwszy od którego (3.95) przestaje obowiązywać. Przypuśćmy, że w takim krytycznym momencie funkcjonał $I^0(\overset{v}{w})$ występujący w (3.95) jest dodatnio pół-określony i zeruje się dla pewnego niezerowego pola $\overset{v}{w}^*$ z klasy $\overset{v}{W}$, a tym samym osiągnięty zostaje stan własny dla stycznego ciała porównawczego, tzn. (por. (3.15)')

$$(3.105) \quad \delta I^0(\overset{v}{w}^*) = 0.$$

(Zwróćmy jednak uwagę, że nie zawsze to ma miejsce, gdyż funkcjonał $I^0(\overset{v}{w})$ może stawać się nieokreślony także w inny

sposób). Założmy, że podstawowe rozwiązanie w prędkościach $\dot{\bar{y}}^0$ nie odpowiada jednorodnym warunkom obciążania: wyklucza to możliwość, że pole $\dot{\bar{y}}^0$ jest samo postacią własną. W krytycznym momencie zachodzą następujące dwie możliwości:

1^o Istnieje taka stała $c > 0$, że w każdym punkcie ciała, w którym moduły L_{ijkl}^0 są dobrze określone, zachodzi

$$(3.106) \quad L_{ijkl}(\dot{\bar{e}}) = L_{ijkl}^0 \quad \text{jeżeli} \quad |\dot{\bar{e}} - \dot{\bar{e}}^0| < c.$$

W szczególnym przypadku, gdy moduły L_{ijkl} określone są przez (3.17), warunek (3.106) sprowadza się do istnienia stałej dodatniej \bar{c} takiej, że w strefie plastycznej zachodzi

$$(3.107) \quad \lambda_{ij} \dot{\bar{e}}_{ij}^0 \geq \bar{c} > 0.$$

Można wtedy dobrać współczynnik liczbowy γ tak, że pole $\gamma \dot{\bar{w}}^*$, dodane do podstawowego rozwiązania w prędkościach $\dot{\bar{y}}^0$, daje w wyniku inne rozwiązanie zagadnienia przyrostowego rzędu pierwszego, odpowiadające tym samym wartościom modułów L_{ijkl}^0 co rozwiązanie $\dot{\bar{y}}^0$. Dla dostatecznie małych $|\gamma|$ wartości modułów pozostają bowiem przy tej operacji, wskutek (3.106), niezmienione. Z kolei, wynikowe pole spełnia przyrostowe warunki równowagi, ponieważ funkcja własna $\dot{\bar{w}}^*$ spełnia jednorodne równania (3.15) dla $C_{ijkl}^L = C_{ijkl}^0$. W krytycznym momencie następuje więc bifurkacja w prędkościach; jest to typowy przypadek, analizowany dotychczas w wielu pracach. Powyższa argumentacja pochodzi zasadniczo od Hilla; warunek (3.107) pojawia się u Hutchinsona [81]. Bifurkacja rzędu drugiego też jest możliwa w rozważanym momencie (zob. punkt 2^o poniżej), ale ma mniejsze znaczenie praktyczne.

Nie istnieje stała c taka, żeby spełniony był warunek

(3.106). Oczywiście jest tak wówczas, gdy przyrostowe prawo konstytutywne nie jest odcinkowo liniowe, tylko w pełni nieliniowe, tak że moduły rzędu drugiego, K_{ijklpq}^0 , zdefiniowane przez (3.99), nie są wszystkie równe zero. Ale i dla odcinkowo liniowego prawa taka stała c nie musi istnieć. Przykładowo, gdy ciało sprężysto-plastyczne o modułach (3.17) jest tylko częściowo w stanie plastycznym, a $\lambda_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}^0$ dąży do zera w miarę zbliżania się do sprężysto-plastycznej granicy od strony strefy plastycznej, warunek (3.107) nie jest spełniony dla żadnej stałej \bar{c} . Bifurkacja w prędkościach w krytycznym momencie jest w tym przypadku na ogół niemożliwa (bo dodanie pola γ_{ij}^{**} do pola prędkości \dot{v}^0 spowoduje zmianę modułów przy dowolnie małym $|\gamma|$), chyba że, przykładowo, dla modułów (3.17) wyrażenie $\eta_{ij}w_{j,i}^*$ nie zmienia znaku w obszarze, gdzie $\lambda_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}^0$ dąży do zera. Kwestia jednoznaczności rozwiązania zagadnienia przyrostowego rzędu drugiego przybiera na znaczeniu. Jak wykazano powyżej, zagadnienie to, przy wprowadzonych założeniach, jest liniowe. Wskutek (3.102), równania dla różnicy $\Delta \dot{q}$ ewentualnych dwóch rozwiązań mają dokładnie taką samą postać, jak równania (3.15) z $C_{ijkl}^L = C_{ijkl}^0$, spełnione przez \dot{q}^* . Tak więc, pole γ_{ij}^{**} z dowolnym stałym współczynnikiem γ można dodać do podstawowego rozwiązania \dot{q}^0 , uzyskując w ten sposób inne rozwiązanie regularnego zagadnienia przyrostowego rzędu drugiego. Okazuje się więc, że w omawianym krytycznym momencie zawsze możliwa jest bifurkacja w przyspieszeniach, chociaż w przypadku 2^0 bifurkacja w prędkościach w tym momencie może być wciąż niemożliwa.

Trzeba jednak zaznaczyć, że bifurkacja rzędu drugiego jest tu rozumiana po prostu jako niejednoznaczność rozwiązania w przyspieszeniach. Właściwy rząd bifurkacji procesu deformacji, wynikający z bardziej dokładnej

analizy pokrytycznej drogi deformacji, do rzędu wielkości wyższego od drugiego, może być inny niż dwa. W istocie, współczynnik μ można przyjąć jako równy nieskończoności, co może prowadzić do bifurkacji rzędu ułamkowego pomiędzy jeden i dwa (por. [180]). Niemniej jednak, w tym przypadku można sprowadzić analizę bifurkacji do rzędu drugiego poprzez odpowiednią zmianę parametryzacji procesu deformacji, tj. zmianę (osobliwą) skali "czasu".

Podkreślimy, że te wnioski są słuszne przy założeniu, że w krytycznym momencie zachodzi (3.105). Natomiast sama utrata dodatniej określoności funkcjonau $I^0(\frac{v}{w})$ jeszcze nie dowodzi, że punkt bifurkacji został przekroczony.

4. ENERGETYCZNE KRYTERIA NIESTABILNOŚCI PROCESÓW DEFORMACJI PLASTYCZNYCH

Przyjmijmy, że podstawowy proces deformacji χ^0 jest znany, przy czym jego przebieg nie musi być jednoznacznie określony przez warunki początkowo-brzegowe. Interesować nas będzie teraz zagadnienie, kiedy proces ten staje się niestateczny, w sensie omówionym w Rozdziale 1. Przy założeniu konserwatywności obciążenia (zob. punkt 4.1) i przyrostowego związku konstytutywnego w postaci potencjalnej (2.27), w punkcie 4.2 wprowadzimy w formie postulatu ogólne, energetyczne kryterium niestabilności procesu deformacji; samo pojęcie stabilności procesu będzie bardziej szczegółowo omawiane w Rozdziale 6. Podkreślimy, że kryterium dotyczy procesu przebiegającego przy zmieniającym się obciążeniu, a nie tylko pojedynczego stanu równowagi, oraz procesu teoretycznego, a nie rzeczywistego. Zasadnicza idea polega na wyeliminowaniu przy pomocy tego kryterium takich procesów teoretycznych, które nie opisują

poprawnie rzeczywistości wskutek ich czułości na dowolnie małe, stale działające zaburzenia. Intuicyjna hipoteza, wywodząca się jeszcze z prac Considère'a i często przyjmowana w pracach inżynierskich mówi, że materiał w rzeczywistym procesie powolnych deformacji plastycznych będzie się odkształcał "po najmniejszej linii oporu" lub "przy minimalnej konsumpcji energii". Oczywiście, takie sformułowania są zbyt ogólnikowe, tym niemniej prawdopodobnie odzwierciedlają obserwowane zachowanie się metali. Wydaje się, że ściśle i jednocześnie ogólne sformułowanie tego typu hipotezy dla szerszej klasy procesów deformacji plastycznych przyniosły dopiero prace autora [149] [152] [154]. Określony został przy tym status samej hipotezy jako postulatu dotyczącego stabilności procesu, nie wynikającego z ogólnych zasad mechaniki czy termodynamiki. Wszystkie dalsze kryteria niestabilności stanowią konsekwencje podstawowego Kryterium 1. Rozdziały 4 i 5 stanowią rozszerzenie pracy [154].

4.1 Urządzenie obciążające

Rozważamy ciało odkształalne, umieszczone w urządzeniu obciążającym, które przykładając siły powierzchniowe i masowe względnie wymusza przemieszczenia na powierzchni ciała w sposób zależny od skalarne go parametru obciążania λ , zmieniającego się w zadany sposób w czasie. (W szczególności można przyjąć $\lambda \equiv t$.) Rozkład obciążeń może ulegać dowolnym zmianom przy zmieniającym się λ ; przyjmiemy, że siły powierzchniowe mogą zależeć ponadto od konfiguracji powierzchni ciała, w tym być nawet funkcjami (zależnymi od parametru λ) pola przemieszczeń na powierzchni ciała. Wprowadzimy jednak istotne ograniczenie, że przy ustalonym λ obciążenie powierzchniowe jest *konserwatywne w sensie globalnym* [60] [167]. Przyjmujemy mianowicie, że dla

każdej ustalonej wartości λ , całkowita praca przyłożonych sił powierzchniowych jest równa zeru dla wszystkich zamkniętych wirtualnych dróg przemieszczeń, zgodnych z więzami geometrycznymi i przywracających wszystkim punktom materialnym powierzchni ich wyjściowe położenia. Założenie to zapiszemy w postaci

$$(4.1) \quad \int_S \oint T_j dx_j dS \equiv 0, \quad \lambda = \text{const.}$$

Zauważmy, że praca siły powierzchniowej na zamkniętym cyklu przemieszczenia nie musi zerować się w każdym punkcie powierzchni oddzielnie, a tylko całka z tej pracy po całej powierzchni ciała jest równa zeru.

Jako przykłady obciążeń konserwatywnych w sensie równości (4.1), wymienić można (i) siły na części powierzchni o zadawanych przemieszczeniach, (ii) siły na powierzchni statycznego kontaktu z hipersprężystym kontinuum, (iii) obciążenie równomiernie rozłożonym ciśnieniem (cieczy lub gazu) na części powierzchni o utwierdzonym obwodzie, (iv) obciążenie poprzez "rozmyty" układ sprężyn (model podłoża sprężystego), (v) tzw. obciążenie "martwe". W określonym punkcie materialnym powierzchni (t.j. dla określonego ξ) i przy ustalonym λ , siła powierzchniowa T odpowiednio: (i) pozostaje nieokreślona, (ii) jest funkcjonalem pola przemieszczeń na powierzchni, (iii) jest funkcją powierzchniowego gradientu przemieszczenia w punkcie ξ , (iv) jest funkcją przemieszczenia w punkcie ξ , (v) ma zadaną wartość. Dopuszczamy w tym momencie także jednostronne lub dwustronne więzy geometryczne na powierzchni kontaktu ze sztywnym narzędziem, jednakże ewentualny poślizg po tej powierzchni musi zachodzić bez tarcia. Dla uproszczenia przyjmujemy, że nominalne siły masowe ρ zależą jedynie od ξ i λ , chociaż uwzględnienie konserwatywnych sił masowych, zależnych

od przemieszczeń lub nawet od konfiguracji ciała byłoby możliwe.

Całkowitą pracę sił powierzchniowych i masowych w dowolnym kinematycznie dopuszczalnym procesie, zgodnym z więzami dla przemieszczeń i prowadzącym od konfiguracji \tilde{x}^1 do \tilde{x}^2 , oznaczmy przez W_{12}^{obc} ,

$$(4.2) \quad W_{12}^{obc} = \int_S \int_{\tilde{x}^1}^{\tilde{x}^2} T_j dx_j dS + \int_V \int_{\tilde{x}^1}^{\tilde{x}^2} b_j dx_j dV.$$

Z wprowadzonych założeń wynika, że w ruchu wirtualnym przy ustalonym λ wartość W_{12}^{obc} jest niezależna od drogi przemieszczeń. (Przy zmiennym λ wartość W_{12}^{obc} jest natomiast od drogi zależna). Tak więc, możemy zdefiniować energię potencjalną urządzenia obciążającego U jako zależny od λ funkcjonal, określony w klasie dopuszczalnych konfiguracji ciała, taki że

$$(4.3) \quad U(\tilde{x}^2, \lambda) - U(\tilde{x}^1, \lambda) = -W_{12}^{obc}, \quad \lambda = \text{const.}$$

Przez klasę dopuszczalnych konfiguracji ciała rozumiemy tu zbiór konfiguracji, zgodnych z więzami geometrycznymi i osiągalnych na wirtualnej drodze deformacji ciała przy ustalonym λ począwszy od pewnej konfiguracji podstawowej. Formalnie, funkcjonal U jest określony przez (4.3) z dokładnością do addytywnej funkcji parametru λ , która może być dobrana dowolnie bez wpływu na przebieg i rezultaty dalszych rozważań. Wyboru można dokonać dla określonego urządzenia obciążającego tak, aby termin "energia potencjalna" miał sens fizyczny.

Należy podkreślić, że w procesie deformacji ciała, zachodzącym przy zmiennym λ , przyrost wartości U nie jest już

Równy $-W_{12}^{obc}$, natomiast jest on nadal niezależny od drogi przemieszczeń. Wyrażenie

$$(4.3) \quad E_{12}^{obc} = W_{12}^{obc} + Q(\bar{\chi}^2, \lambda^2) - Q(\bar{\chi}^1, \lambda^1)$$

określa ilość energii pobranej ze źródeł zewnętrznych przez urządzenie obciążające w procesie deformacji, prowadzącym od $\bar{\chi}^1$ do $\bar{\chi}^2$ przy λ zmieniającym się od λ^1 do λ^2 . Część tej energii, równa W_{12}^{obc} , zostaje przekazana deformowanemu ciału, a pozostała część zostaje zakumulowana w postaci przyrostu energii potencjalnej urządzenia obciążającego. Zakładamy tu, że przyrost energii kinetycznej urządzenia obciążającego jest pomijalnie mały.

4.2 Podstawowe kryterium niestabilności procesu deformacji

Dla dowolnego kinematycznie dopuszczalnego procesu $\bar{\chi}$, oznaczymy przez $W = W(\bar{\chi}, t)$ odpowiednią pracę odkształcenia od chwili początkowej t_1 do chwili aktualnej t ,

$$(4.4) \quad W(\bar{\chi}, t) = \int_V \int_{t_1}^t N_{ij} v_{j,i} dt dV,$$

gdzie naprężenia N związane są z historią deformacji w procesie $\bar{\chi}$ relacją konstytutywną typu (2.11). Wprowadźmy funkcjonal energetyczny E ,

$$(4.5) \quad E = W + U,$$

którego aktualna wartość zależy w ogólności od drogi deformacji i od rozpatrywanej chwili czasu. W bardziej formalnym zapisie mamy

$$(4.6) \quad E(\chi, t) = W(\chi, t) + U(\chi(\cdot, t), \lambda(t)) .$$

Przyrost wartości funkcjonału E w quasi-statycznym procesie deformacji można interpretować (pod warunkiem, że U ma fizyczny sens energii potencjalnej) jako ilość energii, jaką należy dostarczyć w tym procesie do układu, składającego się z ciała i urządzenia obciążającego.

Weźmy pod uwagę dowolną chwilę τ podstawowego procesu deformacji χ^0 , $t_1 \leq \tau < t_2$. Rozważmy klasę kinematycznie dopuszczalnych odgałęzień procesu w chwili τ , tzn. klasę takich procesów deformacji, które pokrywają się z χ^0 do chwili τ , a dla $t > \tau$ są zgodne z więzami kinematycznymi, lecz niekoniecznie spełniają warunki statyczne. Odgałęzienia takie można rozpatrywać jako efekt powolnego nakładania dodatkowych, zmiennych w czasie sił zaburzających (masowych i powierzchniowych), stanowiących brakujące człony w warunkach równowagi; przy tej interpretacji (nie jedynej), rozpatrywane odgałęzienia procesu podstawowego traktować można również jako procesy quasistatyczne.

Oznaczmy przez δE przyrost wartości funkcjonału energetycznego wzdłuż pewnej drogi deformacji w małym przedziale czasu $[\tau, \tau + \delta t]$,

$$(4.7) \quad \delta E = E(\chi, \tau + \delta t) - E(\chi, \tau),$$

a przez δE^0 odpowiedni przyrost w procesie podstawowym χ^0 . (Należy odróżnić symbol przyrostu δ od symbolu wariacji; w tym ostatnim przypadku sens wariacji jest w pracy zawsze wyraźnie określony słownie). Dla ustalonej drogi deformacji, funkcjonał E staje się funkcją czasu. Rozważać będziemy tylko takie odgałęzienia procesu, wzdłuż których funkcja ta daje się w chwili τ rozwinąć (prawostronnie) w szereg Taylora przynajmniej

do członu rzędu drugiego włącznie, tj.

$$(4.8) \quad \delta E = \dot{E} \delta t + \frac{1}{2} \ddot{E} (\delta t)^2 + \dots,$$

gdzie \dot{E} i \ddot{E} są prawostronnymi pochodnymi czasowymi E , określonymi w chwili τ wzdłuż drogi odgałęzienia.

Przypuśćmy, że własności materiału opisywane są na każdym etapie deformacji przyrostowym równaniem konstytutywnym w postaci potencjalnej (2.27). Postulujemy następujące kryterium niestabilności procesu w sensie energetycznym.

Kryterium 1. Jeżeli istnieje kinematycznie dopuszczalne odgałęzienie procesu χ^0 takie, że dla dostatecznie małych δt

$$(4.9) \quad \delta E < \delta E^0,$$

to proces χ^0 jest niestabilny (w sensie energetycznym).

Zauważmy, że kryterium to określa jedynie warunek dostateczny dla niestabilności, a tym samym, przez zaprzeczenie, warunek konieczny dla stabilności procesu. Definicję stabilności, określającą warunki konieczne i dostateczne stabilności w sposób zgodny z Kryterium 1, podamy w Rozdziale 6. Podkreślimy, że chwila odgałęzienia τ jest w Kryterium 1 dowolna (z przedziału określoności procesu χ^0); ta dowolność jest milcząco zakładana również we wszystkich dalszych kryteriach niestabilności, stanowiących konsekwencje Kryterium 1.

Uwaga 4.1. Kryterium 4.1 dotyczy faktycznie niestabilności ruchu układu mechanicznego jako całości, a jego podział na deformowane ciało i urządzenie obciążające ma charakter drugorzędny. Jak wykażemy poniżej, Kryterium 1 stosuje się tylko do ruchów (procesów) quasi-statycznych.

Zgodnie z założeniem na str. 20, naprężenia w dowolnym procesie

są ciągle w czasie. Przyjmujemy również, że przykładane przez urządzenie obciążające siły masowe i powierzchniowe zmieniają się w sposób ciągły w czasie w dowolnym procesie deformacji. Wykluczamy więc z rozważań jednostronne więzy geometryczne, dla których założenie to jest na ogół niespełnione. Oznaczmy przez symbol Δ różnicę dowolnych, odpowiadających sobie wielkości w kinematycznie dopuszczalnym odgałęzieniu \tilde{x} i w procesie \tilde{x}^0 w tej samej chwili odgałęzienia τ . Podkreślimy, że zgodnie z umową, wprowadzoną w punkcie 2.1, jako wartości aktualne wielkości nieciągłych w czasie przyjmujemy ich granice prawostronne, t.j. przy $t \rightarrow \tau^+$. Ze związków (4.5), (4.3) i (4.2), po podstawieniu $\tilde{x}^2 = \tilde{x}(\cdot, t)$, $\tilde{x}^1 = \tilde{x}^0(\cdot, t)$, zróżniczkowaniu względem czasu i przejściu do granicy przy $t \rightarrow \tau^+$, otrzymujemy

$$(4.10) \quad \Delta \dot{E} \equiv (\dot{E} - \dot{E}^0) \Big|_{\tau} = \int_V (N_{ij}^0 \Delta v_{j,i} - b_j \Delta v_j) dV - \int_{S_T} T_j^0 \Delta v_j dS,$$

przy czym wartości N^0 , T^0 i b w (4.10) są określane w chwili τ . Tak jak poprzednio, wszystkie wielkości odnoszące się do procesu \tilde{x}^0 wyróżniamy górnym wskaźnikiem 0. Ponieważ wykluczaliśmy przypadek więzów jednostronnych, $\Delta \tilde{v}$ może być dowolnym polem z klasy \mathcal{W} . Jest widoczne, że $\Delta \dot{E}$ jest funkcjonałem liniowym, zależnym, w ustalonej chwili τ , tylko od pola $\Delta \tilde{v}$. Z Kryterium 1 wynika, że w stabilnym procesie musi być

$$(4.11) \quad \Delta \dot{E} \geq 0$$

dla wszystkich $\Delta \tilde{v}$ z klasy \mathcal{W} . Stąd, wskutek liniowości $\Delta \dot{E}$, spełnienie równości

$$(4.12) \quad \Delta \dot{E} = 0 \quad \text{dla każdego } \Delta \tilde{v} \in \mathcal{W}$$

jest warunkiem koniecznym dla stabilności procesu. Równość

(4.12) pokrywa się dokładnie z zasadą mocy wirtualnych (2.7) dla procesu ξ^0 , a więc jest automatycznie spełniona, gdy proces ξ^0 odpowiada quasi-statycznemu rozwiązaniu zagadnienia początkowo - brzegowego. Zauważmy, że spełnienie warunków równowagi jest konieczne (ale nie dostateczne) dla stabilności procesu; w tym sensie postulowane Kryterium 1 jest niesprzeczne z podstawowymi równaniami, rządzącymi przebiegiem rozpatrywanych procesów quasi-statycznych.

Uwaga 4.2. Wykluczenie więzów jednostronnych nie jest konieczne. Przyjmijmy dla uproszczenia konfigurację aktualną za konfigurację odniesienia i przypuśćmy, że na pewnej części S_v powierzchni S materiał może zarówno ślizgać się (bez tarcia) po powierzchni sztywnego narzędzia jak też odrywać się od niego z chwilową prędkością normalną $v_n = (v_j - \bar{v}_j) \cdot n_j \leq 0$, gdzie \bar{v} jest zadaną lokalną prędkością punktu narzędzia. Przyjmujemy, że z chwilą oderwania się materiału od narzędzia mamy $\bar{T}=0$; można sprawdzić, że tego typu jednostronne więzy beztarciowe nie naruszają warunku potencjalności obciążenia (4.1), a wzór (4.10) pozostaje słuszny. Rozumując jak w przypadku utwierdzenia lub więzów dwustronnych, z Kryterium 1 otrzymujemy, że dla stabilności procesu ξ^0 jest konieczne, aby $\Delta v_n = 0$ na S_v pociągało za sobą $\Delta \dot{E} = 0$. Jeżeli warunek ten jest spełniony, to dla $\Delta v_n \neq 0$ na S_v otrzymujemy

$$(4.13) \quad \Delta \dot{E} = \int_{S_v} \sigma_{ij}^0 n_i n_j \Delta v_n dS.$$

Korzystając z ograniczenia $v_n \leq 0$ łatwo się przekonać, że wyrażenie (4.13) przyjmuje wartości nieujemne dla wszystkich dopuszczalnych pól $\Delta \bar{v}$ wtedy i tylko wtedy, gdy na S_v spełniony jest warunek:

$$(4.14) \quad \sigma_{ij}^0 n_i n_j = 0 \quad \text{i} \quad v_n^0 \leq 0,$$

albo:

$$\sigma_{ij}^0 n_i n_j < 0 \quad \text{i} \quad v_n^0 = 0.$$

Jest to zwykle przyjmowany warunek kontaktowy; jest interesujące, że wynika on z warunku (4.11), koniecznego dla stabilności procesu w sensie energetycznym. Ograniczając się do badania niestabilności w klasie odgałęzień takich, że $\Delta v_n = 0$ na S_v , sprowadzamy przypadek więzów jednostronnych do rozpatrywanego w pracy (por. uwagę na str. 18) przypadku więzów dwustronnych. W przypadku (4.14)₂ ograniczenie to jest całkowicie uzasadnione, gdyż przy $\Delta v_n \neq 0$ mamy $\Delta \dot{E} > 0$, co wyklucza spełnienie kryterium niestabilności. Natomiast w przypadku, gdy (4.14)₁ zachodzi na części powierzchni S_v o niezerowej mierze, ograniczenie to wiązać się może z pewną stratą ogólności. Ten ostatni przypadek (w praktyce mało prawdopodobny) można rozpatrywać oddzielnie.

Uwaga 4.3. Ograniczając się do badania stabilności w klasie zaburzeń takich, że $\Delta y = 0$ w otoczeniu pewnej części S_n powierzchni ciała, można rozszerzyć stosowalność Kryterium 1 na przypadek dowolnych lokalnych (także niekonserwatywnych) warunków brzegowych na S_n , przykładowo, przy dowolnym warunku tarcia na powierzchni S_n kontaktu z narzędziem. Gdy siły powierzchniowe zależą tylko od pola przemieszczeń na S_n , to wystarczy żądać $\Delta y = 0$ na S_n ; oznacza to, że badamy stabilność przy "sztywniejszych" warunkach brzegowych niż zadane. Jednakże, w przeciwieństwie do sytuacji omawianej w Uwadze 4.2, w ten sposób na ogół uzyskać można tylko przybliżoną górną ocenę momentu utraty stabilności.

Z Kryterium 1 i równości (4.8) i (4.12) wynika następujące

Kryterium 2. Jeżeli istnieje kinematycznie dopuszczalne odgałęzienie procesu χ^0 takie, że w chwili odgałęzienia

$$(4.15) \quad \Delta \dot{E} < 0,$$

to proces χ^0 jest niestabilny.

Jeżeli δE i δE^0 w Kryterium 1 są rozumiane nie jako dokładne wartości przyrostów, lecz jako wyrażenia składające się tylko z członów pierwszego i drugiego rzędu względem δt (tj. otrzymane

po pominięciu członów, oznaczonych symbolicznie kropkami w (4.8)); to Kryteria 1 i 2 są, przy wprowadzonych założeniach, równoważne.

4.3 Zasada minimum dla prędkości

Kryterium 2 jest wyrażone w drugich pochodnych wartości funkcjonału E, tak więc mogłoby się wydawać, że zależne jest ono nie tylko od prędkości przemieszczeń, ale i od przyspieszeń. Okazuje się jednak, że przyspieszenia można wyeliminować. Rozważmy przyrostowe warunki brzegowe takie, jak w teorii bifurkacji, omawianej w Rozdziale 3. Przyjmijmy więc, że na części S_u powierzchni S spełniony ma być warunek (3.6), a na pozostałej części S_T - warunek (3.2), zarówno w chwili odgałęzienia, jak i w chwilach następnych (por. punkt 3.2.2). Zależność warunków brzegowych bezpośrednio od czasu zastąpimy przy tym zależnością od (zmiennego w czasie) parametru obciążenia λ . Warunek "samosprężoności" (3.3) dla dowolnej pary kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości wynika teraz z założonej w punkcie 4.1 konserwatywności obciążenia [60] [67].

Niech $\dot{\bar{x}}^1$ i $\dot{\bar{x}}^2$ oznaczają we wzorach (4.2) i (4.3) konfigurację ciała w procesach podstawowym i odgałęzionym w tej samej chwili t, tzn. niech $\dot{\bar{x}}^1 = \dot{\bar{x}}^0 = \dot{\bar{x}}^0(\cdot, t)$, $\dot{\bar{x}}^2 = \dot{\bar{x}}^1 = \dot{\bar{x}}^1(\cdot, t)$. Aby określić różnicę wartości U w chwili t w obu procesach, należy, zgodnie z (4.3), obliczyć wartości całek w (4.2) przy ustalonej wartości $\lambda = \lambda(t)$ na dowolnej dopuszczalnej drodze od \bar{x}^0 do \bar{x}^1 , np. na drodze prostoliniowej: $\bar{x}(s) = (\bar{x}^1 - \bar{x}^0) \cdot s$, $0 \leq s \leq 1$. Rozpatrując chwilę $t = t + \delta t$ i stosując "wzór trapezu", otrzymujemy z dokładnością do członów rzędu $(\delta t)^2$ wyrażenie

$$U(\bar{x}^0, \lambda) - U(\bar{x}^1, \lambda) = \int_V b_j(x_j - x_j^0) dV$$

(4.16)

$$+ \int_{S_T} \frac{1}{2} (T_j + T_j^C) (x_j - x_j^0) dS + \dots,$$

w którym wszystkie wielkości odnoszą się do chwili $t = \tau + \delta t$, a siły T odpowiadają konfiguracji \tilde{x} . Różniczkując (4.16) dwukrotnie względem czasu, podstawiając (3.2) i (3.3) i przechodząc do granicy przy $\delta t \rightarrow 0^+$, otrzymujemy potrzebny do określenia $\Delta \ddot{E}$ (ściśle) wzór, słuszny w chwili odgałęzienia τ ,

$$(4.17) \quad - \Delta \ddot{U} = \int_V (2\dot{b}_j \Delta v_j + b_j \Delta \dot{v}_j) dV \\ + \int_{S_T} (2\dot{c}_j \Delta v_j + \Delta (f_j [y] v_j) + T_j^0 \Delta \dot{v}_j) dS.$$

Przy obliczaniu $\Delta \ddot{W}$ weźmiemy pod uwagę możliwość występowania ruchomej powierzchni nieciągłości gradientu prędkości. Obrazem takiej powierzchni w konfiguracji odniesienia niech będzie regularna powierzchnia S_D (ew. pewna ich liczba), propagująca się względem materiału ze skończoną prędkością normalną $c \neq 0$. Różniczkując wyrażenie (4.4) na globalną pracę odkształcenia dwukrotnie względem czasu przy wykorzystaniu twierdzenia o transporcie w przypadku występowania powierzchni osobliwej (zob. np. [178]), otrzymujemy

$$(4.18) \quad \ddot{W} = \int_V (\dot{N}_{ij} v_{j,i} + N_{ij} \dot{v}_{j,i}) dV - \int_{S_D} [N_{ij} v_{j,i}] c dS.$$

Przyjęliśmy tu następującą umowę co do znaków: gdy (+) i (-) oznaczają dwie strony powierzchni S_D , to $[\cdot] = (\cdot)^+ - (\cdot)^-$; jednostkowy wektor y normalny do S_D jest skierowany w stronę (+), oraz $c > 0$ przy propagowaniu się S_D w stronę (+). Naprężenia i prędkości przemieszczeń, przy przyjętych w punkcie 2.1 założeniach regularności, muszą pozostawać ciągłe w poprzek S_D .

Ze standardowych warunków zgodności wynika, że na S_D występuje skok wartości przyspieszeń \dot{y} taki, że

$$(4.19) \quad [v_{j,i}]_c = - [\dot{v}_j] v_i .$$

Wykorzystując ciągłość naprężeń i podstawiając (4.19), ze związku (4.18) otrzymujemy słuszny w chwili τ wzór

$$(4.20) \quad \ddot{W} = \int_V (\dot{N}_{i,j} \dot{v}_{j,i} + N_{i,j}^0 \dot{v}_{j,i}) dV + \int_{S_D} N_{i,j}^0 v_i [\dot{v}_j] dS .$$

Odejmując od (4.20) podobne wyrażenie na \ddot{W}^0 oraz stosując twierdzenie Greena i podstawiając warunki równowagi dla N^0 , uzyskujemy w wyniku wzór na $\Delta \ddot{W}$ w chwili odgałęzienia τ ,

$$(4.21) \quad \Delta \ddot{W} = \Delta \left\{ \int_V \dot{N}_{i,j} v_{j,i} dV \right\} + \int_V b_j \Delta \dot{v}_j dV + \int_{S_T} T_j^0 \Delta \dot{v}_j dS .$$

Po połączeniu (4.17) z (4.21) w celu wyznaczenia $\Delta \ddot{E}$, człony zawierające przyspieszenia wzajemnie się redukują i otrzymujemy ostatecznie podstawowy związek

$$(4.22) \quad \frac{1}{2} \Delta \ddot{E} = \Delta \mathcal{F}(\dot{y}) ,$$

gdzie

$$(4.23) \quad \mathcal{F}(\dot{y}) = \int_V \left(\frac{1}{2} \dot{N}_{i,j} [\dot{y}] v_{j,i} - \dot{b}_j v_j \right) dV - \int_{S_T} \left(\dot{c}_j + \frac{1}{2} f_j [\dot{y}] \right) v_j dS$$

jest funkcjonałem, określonym na klasie \mathcal{F} ciągłych i odcinkowo gładkich pól prędkości \dot{y} , przyjmujących na S_u wartości zadane w chwili τ .

Z Kryterium 2 i związku (4.22) wynika następujące

kryterium niestabilności, sformułowane w prędkościach.

Kryterium 3. Jeżeli istnieje kinematycznie dopuszczalne pole prędkości $\check{y} \in \mathcal{V}$ takie, że

$$(4.24) \quad \mathcal{F}(\check{y}) < \mathcal{F}(\check{y}^0),$$

to proces \check{x}^0 jest niestabilny.

Kryterium 3 sprowadza zagadnienie "wykrywania" niestabilności procesu w sensie energetycznym do określania okoliczności, w jakich podstawowe pole prędkości \check{y}^0 przestaje odpowiadać minimalnej wartości funkcjonału (4.23). Zwróćmy uwagę, że wystarczy znaleźć tylko jedno pole prędkości \check{y} prowadzące do nierówności (4.24), aby wykazać niestabilność procesu podstawowego \check{x}^0 . Wskutek równości (4.17) i (4.22), kontynuacja procesu zgodna z takim polem prędkości \check{y} jest energetycznie bardziej korzystna, w sensie nierówności (4.9), niż kontynuacja podstawowa \check{y}^0 .

Każde kinematycznie dopuszczalne pole prędkości daje się przedstawić w postaci $\check{y} = \check{y}^0 + \check{w}$, gdzie $\check{w} \in \mathcal{W}$. Traktując pole \check{y}^0 jako zadane, można więc uważać funkcjonał (4.23) za określony na przestrzeni liniowej \mathcal{W} . Pole $\check{w} \in \mathcal{W}$ prowadzące do (4.24) można nazwać postacią niestateczności. Kryterium 3 umożliwia określenie zakresu niestateczności zadanego typu, np. wyboczenia przy ściśnieniu lub tworzenia się szyjki przy rozciąganiu. W tym celu należy przyjąć pewną klasę pól prędkości, odpowiadających niestateczności zadanego typu, i poszukiwać pola \check{w} spełniającego (4.24) tylko w tej klasie. Przykład podany w punkcie 4.5 ilustruje efektywność tej metody. Gdy klasą rozważanych pól jest zawężona, to metoda ta na ogół nie prowadzi do ścisłego określenia momentu utraty stateczności, lecz do jego górnej oceny.

Kryterium 3 jest w sposób oczywisty równoważne następującej

zasadzie minimum dla prędkości.

Pole prędkości \vec{v}^0 w stabilnym procesie χ^0 odpowiada absolutnemu minimum wartości funkcjonału (4.23) w klasie kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości, tzn.

$$(4.25) \quad \mathcal{F}(\vec{v}) \geq \mathcal{F}(\vec{v}^0) \quad \text{dla każdego } \vec{v} \in \mathcal{V}.$$

Założenie potencjalności przyrostowego prawa konstytutywnego nie było wykorzystywane przy wykazaniu prawdziwości nierówności (4.25) w stabilnym procesie χ^0 . W szczególności, wzór (4.22) jest słuszny i bez tego założenia. Jednakże, jest rzeczą znaną, że dla modułów niesymetrycznych, $C_{ijkl}^0 \neq C_{klij}^0$, zasada ekstremalna typu (4.25) na ogół nie może być słuszna. Istotnie, koniecznym warunkiem lokalnym dla minimum funkcjonału (4.23) będzie spełnienie odpowiedniego równania Eulera-Lagrange'a, które po podstawieniu związku konstytutywnego (2.34) w przypadku dobrze określonych modułów C_{ijkl}^0 można zapisać w postaci

$$(4.26) \quad (C_{ijkl}^0 + C_{klij}^0) v_{l,k}^0)_{,i} + \dot{b}_j = 0.$$

Porównanie z przyrostowym równaniem równowagi (3.4) wykazuje, że równanie (4.26) na ogół nie będzie spełnione przy $C_{ijkl}^0 \neq C_{klij}^0$. Jest teraz widoczne, dlaczego Kryterium 1 zostało wprowadzone tylko dla materiałów, których równania konstytutywne dopuszczają istnienie potencjałów \mathcal{V} i \mathcal{D} . Podkreślmy, że jest to ta sama klasa materiałów, dla której została sformułowana teoria bifurkacji, przedstawiona w Rozdziale 3.

Podstawienie (2.38) do (4.23) wykazuje, że dla potencjalnego prawa konstytutywnego funkcjonał (4.23) ma dokładnie tę samą postać co funkcjonał (3.8), wprowadzony przez Hilla. Zgodnie z zasadą wariacyjną (3.9), każde rozwiązanie \vec{v}^0

rozważanego zagadnienia brzegowego dla prędkości nadaje funkcjonałowi (3.8) wartość stacjonarną; tym samym podstawowy warunek konieczny dla (4.25) jest automatycznie spełniony. Nie zawsze natomiast punkt stacjonarności funkcjonału (3.8) jest punktem minimum: nierówność (3.16) została udowodniona przez Hilla jedynie pod warunkiem, że zachodzi warunek (3.11) dostateczny dla jednoznaczności rozwiązania (jak wykazano w punkcie 3.3.3, (3.16) wynika w istocie ze słabszego warunku (3.96)).

Pomimo formalnego podobieństwa, sens zasad ekstremalnych (3.16) i (4.25) jest odmienny. Ponieważ warunek dostateczny do jednoznaczności, (3.11) względnie (3.96), nie ma charakteru postulatu, wywnioskowana z niego nierówność (3.16) jest warunkowa: mogą istnieć (i istnieją) rozwiązania, dla których nie jest ona prawdziwa. Nadawanie minimalnej wartości funkcjonału (3.8) nie jest przy tym w teorii bifurkacji wyróżnikiem rozwiązań "bardziej" poprawnych, gdyż wszystkie ściśle rozwiązania są traktowane jako równie poprawne. Odpowiedź na podstawowe dla interpretacji punktu bifurkacji pytanie, która z możliwych pobifurkacyjnych dróg deformacji: podstawowa czy wtórna, będzie prawidłowo opisywała proces rzeczywisty, wymaga dodatkowego argumentu.

Uwaga 4.4 Zwykle w literaturze istotną rolę odgrywała tu analiza wpływu początkowych niedoskonałości (imperfekcji). Ta metoda postępowania wymaga jednak na ogół pracochłonnych obliczeń numerycznych. Jest to poza tym metoda niepewna, zwłaszcza w bardziej skomplikowanych zagadnieniach, gdyż rezultat może być zależny od (zakładanej arbitralnie) postaci początkowej imperfekcji. Ponadto, nie jest oczywiste, że niewielkie początkowe imperfekcje mają decydować o przebiegu procesu np. w zakresie dużych deformacji plastycznych. Oczywiście, nie umniejsza to innych zalet metody badania wpływu początkowych imperfekcji, jakimi są np. jej uniwersalność lub możliwość uzyskania wielu dodatkowych informacji.

Zasada ekstremalna (4.25) ma inną interpretację. Przede wszystkim została wyprowadzona na zupełnie odmiennej drodze, z postulowanego energetycznego kryterium niestabilności procesu, bez wprowadzania jakiegokolwiek warunku odnośnie jednoznaczności rozwiązania. Zachodzi ona dla tych wszystkich rozwiązań, jednoznacznych lub niejednoznacznych, które opisują proces stabilny w przyjętym sensie energetycznym. Rozwiązania w prędkościach, które nie minimalizują wartości funkcjonału (3.8), odpowiadają procesom niestabilnym. Można postawić hipotezę, że procesy niestabilne w sensie Kryterium 1 nie opisują poprawnie rzeczywistego procesu odkształcania. Przy przyjęciu takiej hipotezy, zasada minimum (4.25) jest prawdziwa dla wszystkich rozwiązań, zgodnych z rzeczywistym przebiegiem procesu. (Występuje tu wyraźna analogia do warunku minimum lokalnego całkowitej energii potencjalnej układu konserwatywnego: nie wszystkie rozwiązania statyczne, odpowiadające stanom równowagi układu, spełniają ten warunek, ale przyjmuje się, że jest on spełniony dla obserwowalnych w rzeczywistości, statecznych stanów równowagi.) Wypływa stąd istotny dla zastosowań wniosek: zasada stacjonarności (3.9) może być, przy przyjęciu powyższej hipotezy, zastąpiona w obliczeniach numerycznych zasadą minimum (4.25), co prowadzi do automatycznego eliminowania rozwiązań, pozbawionych sensu fizycznego. Ta metoda obliczeniowa nie była dotychczas, według rozeznania autora, stosowana w literaturze. Na podstawie rezultatów, przedstawionych w punkcie 4.4.1 można przewidywać, że odpowiedni algorytm obliczeniowy umożliwi samorzutne przechodzenie na wtórną ścieżkę pokrytyczną po przekroczeniu punktu bifurkacji. Autor planuje zastosowanie tej metody w ramach dalszych badań.

4.4 Moment krytyczny utraty stabilności procesu

Wzdłuż typowej drogi deformacji ciała sprężysto - plastycznego, nierówność (4.25) będzie spełniona (z ostrą nierównością, przy pominięciu trywialnych przypadków równości) dla wszystkich kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości do pewnego krytycznego momentu, począwszy od którego funkcjonal $\Delta\mathcal{F}(\dot{\underline{y}})$ staje się nieokreślony. Jeżeli utrata stabilności nie nastąpiła wcześniej z innego powodu (warunek (4.25) jest tylko konieczny dla stabilności), to moment krytyczny oznacza, zgodnie z Kryterium 3, początek niestabilności podstawowego procesu deformacji. Przypuśćmy, że tak jest. Staje się wówczas istotne, w jaki sposób funkcjonal $\Delta\mathcal{F}(\dot{\underline{y}})$ staje się nieokreślony i jakie własności posiada w momencie krytycznym, gdyż to może mieć zasadniczy wpływ na pokrytyczne zachowanie się ciała. Poniżej przedyskutujemy trzy przypadki, odpowiadające trzem typowym rodzajom niestateczności, wyróżnionym w Rozdziale 1.

4.4.1 *Niestateczność typu geometrycznego*

W punkcie 4.4.1 będziemy zakładali, że w momencie krytycznym $\dot{\lambda} \neq 0$; sens tego założenia wyjaśni się w punkcie 4.4.2. Przypuśćmy, że w momencie krytycznym nierówność (4.25) jest wciąż spełniona, ale już ze znakiem równości dla pewnego pola prędkości $\dot{\underline{y}}^*$, różniącego się w sposób istotny od $\dot{\underline{y}}^0$. Wówczas $\dot{\underline{y}}^*$, podobnie jak $\dot{\underline{y}}^0$, nadaje funkcjonałowi (3.8) wartość minimalną, a tym samym i stacjonarną. Z zasady wariacyjnej (3.9) wynika, że $\dot{\underline{y}}^*$ jest również rozwiązaniem zagadnienia brzegowego dla prędkości, czyli że w momencie krytycznym mamy bifurkację w prędkościach. Tak więc, w rozważanym przypadku poszukiwanie początku niestabilności procesu w sensie postulowanego kryterium energetycznego sprowadza się do poszukiwania odpowiedniego punktu bifurkacji. Jeżeli wtórna,

pokrytyczna droga deformacji jest stabilna, to może ona zastąpić niestabilną drogę podstawową, prowadząc w ten sposób do obserwowalnej niestateczności typu geometrycznego.

W ogólności, niejednoznaczność rozwiązania w prędkościach może wystąpić przed rozważanym tu momentem krytycznym bez żadnych konsekwencji dla stabilności podstawowego procesu deformacji. Zachodzi bowiem możliwość, że wtórna, pobifurkacyjna droga deformacji będzie odpowiadała przyrostowi wartości funkcjonału energetycznego, δE , większemu niż odpowiedni przyrost δE^0 wzdłuż drogi podstawowej. Poniżej sprecyzujemy warunki, przy spełnieniu których taka możliwość jest wykluczona, tak że bifurkacja pierwotna ma miejsce dokładnie w momencie krytycznym.

Przypuśćmy, że moduły C_{ijkl}^0 są dobrze określone prawie wszędzie w V , tj. w całym ciele, z wyjątkiem być może pewnego podzbioru obszaru V o zerowej objętości, np. sprężysto-plastycznej granicy. Wykażemy, że

jeżeli moduły C_{ijkl}^0 są prawie wszędzie w V dobrze określone to druga słaba wariacja (tj. druga różniczka Gateaux) funkcjonału (3.8) w kierunku \tilde{w} :

$$(4.27) \quad \delta^2 g(\tilde{y}^0, \tilde{w}) \equiv \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\theta^2} g(\tilde{y}^0 + \theta \tilde{w}) \Big|_{\theta=0}$$

istnieje i wyraża się wzorem

$$(4.28) \quad \delta^2 g(\tilde{y}^0, \tilde{w}) = I^0(\tilde{w}) \quad \text{dla każdego } \tilde{w} \in W,$$

gdzie $I^0(\tilde{w})$ jest funkcjonałem kwadratowym (3.94).

Dowód wynikałby natychmiast ze standardowego twierdzenia rachunku wariacyjnego (zastosowanego w razie potrzeby osobno w poszczególnych podobszarach V , w których wymagane warunki

regularności, z uwagi na założenia wprowadzane w Rozdziale 2, byłyby spełnione), gdyby moduły C_{ijkl} zmieniały się w sposób ciągły przy zmianie parametru liczbowego θ (por. (4.27)) w pewnym ustalonym przedziale wokół zera. Ten ostatni warunek nie musi być jednak zawsze spełniony; wykazemy, że nie jest on jednak istotny dla prawdziwości równości (4.28). Udowodnimy najpierw, że zachodzi następująca tożsamość.

$$(4.29) \quad \mathcal{F}(\tilde{y}) - \mathcal{F}(\tilde{y}^0) = I^0(\tilde{y} - \tilde{y}^0) + \int_V \{U[\tilde{y}] - U^0[\tilde{y}]\} dV$$

dla wszystkich $\tilde{y} \in \mathcal{F}$.

Podstawiając (3.8) i (3.90) oraz wykorzystując (3.3), otrzymujemy

$$(4.30) \quad \mathcal{F}(\tilde{y}) - \mathcal{F}(\tilde{y}^0) - \int_V \{U[\tilde{y}] - U^0[\tilde{y}]\} dV =$$

$$= \int_V \{U^0[\tilde{y}] - U^0[\tilde{y}^0]\} dV - \int_{S_T} \frac{1}{2} f_j[\tilde{y} - \tilde{y}^0] (v_j - v_j^0) dS$$

$$- \int_V \dot{b}_j (v_j - v_j^0) dV - \int_{S_T} (\dot{c}_j + f_j[\tilde{y}^0]) (v_j - v_j^0) dS.$$

Z tożsamości (3.1) dla \tilde{N}^0 po uwzględnieniu (3.2) wynika, że wyrażenie w ostatniej linii powyższego wyrażenia jest równe $-\int_V \dot{N}_{ij}^0 (v_{j,i} - v_{j,i}^0) dV$. Stąd, wskutek symetrii modułów C_{ijkl}^0 , wyrażenie (4.30) ma postać

$$\mathcal{F}(\tilde{y}) - \mathcal{F}(\tilde{y}^0) - \int_V \{U[\tilde{y}] - U^0[\tilde{y}]\} dV =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_V \left\{ \frac{1}{2} C_{ijkl}^0 v_{j,i} v_{l,k} - \frac{1}{2} C_{ijkl}^0 v_{j,i}^0 v_{l,k}^0 - C_{ijkl}^0 v_{l,k}^0 (v_{j,i} - v_{j,i}^0) \right\} dV \\
 &\quad - \int_S \frac{1}{2} f_j [y - y^0] (v_{j,i} - v_{j,i}^0) dS \\
 &= \int_V \frac{1}{2} C_{ijkl}^0 (v_{j,i} - v_{j,i}^0) (v_{l,k} - v_{l,k}^0) dV - \int_{S_T} \frac{1}{2} f_j [y - y^0] (v_{j,i} - v_{j,i}^0) dS.
 \end{aligned}$$

Tożsamość (4.29) została więc udowodniona.

Oczywiście, druga wariacja kwadratowego funkcjonału $I^0(\tilde{y} - \tilde{y}^0)$ w kierunku \tilde{w} jest równa $I^0(\tilde{w})$, a wartość $f(\tilde{y}^0)$ jest ustalona. Aby udowodnić słuszność wzoru (4.28), musimy więc wykazać, że druga słaba wariacja ostatniej całki w (4.29) zeruje się tożsamościowo dla $\tilde{y} = \tilde{y}^0$. Podstawmy $\tilde{y} = \tilde{y}^0 + \theta \tilde{w}$ i rozpatrzmy pomocniczą funkcję zmiennej θ

$$f(\theta) = \int_V \{ U[\tilde{y}] - U^0[\tilde{y}^0] \} dV$$

przy dowolnym, ale ustalonym $\tilde{w} \in W$. Mamy wykazać, że $d^2 f / d\theta^2 = 0$ dla $\theta = 0$. $f(\theta)$ jest funkcją różniczkowalną, przy czym jej pochodna

$$(4.31) \quad \frac{df(\theta)}{d\theta} = \int_V \{ \dot{N}_{l,j}[\tilde{y}] - C_{ijkl}^0 v_{l,k} \} w_{j,i} dV.$$

zeruje się dla $\theta = 0$. Z ciągłości funkcji $\dot{N}(\tilde{F})$ i ograniczoneści modułów C_{ijkl} wynika oszacowanie

$$(4.32) \quad |\dot{N}(\tilde{F}) - \dot{N}(\tilde{F}^0)| \leq M |\tilde{F} - \tilde{F}^0|,$$

gdzie M jest pewną stałą dodatnią. Stąd

$$\frac{d^2 f(\theta)}{d\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\theta} \frac{df(\theta)}{d\theta} \right) = \int_V \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \{ \dot{N}_{ij}[\underline{y}] - C_{ijkl}^0 v_{l,k} \} w_{j,i} dV$$

$$(4.33)$$

$$= \int_V \lim_{\theta \rightarrow 0} \{ C_{ijkl}[\underline{y}] - C_{ijkl}^0 \} w_{j,i} v_{l,k} dV;$$

wykorzystaliśmy tu twierdzenie o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki oraz regułę de l'Hospitala. Wykorzystując teraz założenie o ciągłości modułów względem $\underline{\dot{F}}$ dla $\underline{\dot{F}} = \underline{\dot{F}}^0$ (prawie wszędzie w V), wykazujemy, że wartość wyrażenia (4.33) dąży w granicy do zera. To kończy dowód równości (4.28).

Uwaga 4.4 Krótszy dowód równości (4.28) można uzyskać, korzystając z wyrażenia (3.97)', stanowiącego w istocie rzeczy wzór na wariację funkcjonału (3.8) w kierunku $(\underline{\dot{y}} - \underline{\dot{y}}^0)$. Udowodniona "po drodze" tożsamość (4.29) jest jednak sama w sobie interesująca, i będzie przydatna w dalszych rozważaniach.

Niejemność drugiej wariacji jest konieczna dla minimum funkcjonału. Stąd, z Kryterium 3 i wzoru (4.28) otrzymujemy następujące

Kryterium 4 Jeżeli moduły C_{ijkl}^0 są prawie wszędzie w V dobrze określone i istnieje pole wektorowe $\underline{\dot{y}} \in \mathcal{M}$ takie, że

$$(4.34) \quad I^0(\underline{\dot{y}}) < 0,$$

to proces $\underline{\dot{x}}^0$ jest niestabilny.

Zgodnie z definicją nieosobliwego procesu $\underline{\dot{x}}^0$ (punkt 3.3), Kryterium 4 można w równoważny sposób sformułować następująco: wzdłuż stabilnego nieosobliwego procesu $\underline{\dot{x}}^0$ zachodzi nierówność

$$(4.35) \quad I^0(\underline{\dot{y}}) \geq 0 \quad \text{dla każdego } \underline{\dot{y}} \in \mathcal{M}.$$

Ponieważ rozważamy przypadek, że do krytycznego momentu proces \tilde{x}^0 był stabilny, to w nieosobliwym procesie \tilde{x}^0 nierówność (4.35) była do krytycznego momentu spełniona. Po wykluczeniu trywialnych przypadków równości, np. wynikających w zagadnieniach osiowo-symetrycznych z możliwości sztywnych obrotów względem osi symetrii, można przyjąć, że w typowym procesie do momentu krytycznego zachodziła nieco silniejsza nierówność (3.95). Przypuśćmy teraz, że spełniona jest nierówność konstytutywna (3.73); z Kryterium 3.1 (punkt 3.3.3) wynika, że w tym przypadku do krytycznego momentu bifurkacja w prędkościach była wykluczona. Jeżeli w momencie krytycznym nierówność (4.25) zachodzi ze znakiem równości dla pewnego $\tilde{y}^* \neq \tilde{y}^0$ (co przyjęliśmy na początku tego punktu), to w tym momencie następuje pierwotna bifurkacja w prędkościach. W ten sposób warunki dostateczne dla pokrywania się punktu pierwotnej bifurkacji w prędkościach z momentem krytycznym utraty stabilności procesu w sensie energetycznym zostały sprecyzowane. Podsumujmy te warunki: (i) proces jest nieosobliwy, (ii) zachodzi nierówność konstytutywna (3.73), (iii) do momentu krytycznego zachodzi nierówność (3.95), (iv) w momencie krytycznym zachodzi nierówność (4.25) ze znakiem równości dla pewnego $\tilde{y}^* \neq \tilde{y}^0$.

Można wyciągnąć dalsze wnioski. Z tożsamości (4.29) i Lematu 3.1 wynika, że przy spełnieniu warunków (i), (ii), (iv), w momencie krytycznym mamy, oprócz nierówności (4.35), także równość $I^0(\tilde{y}^* - \tilde{y}^0) = 0$. Stąd, $\tilde{y}^* = \tilde{y}^* - \tilde{y}^0$ stanowi postać własną dla stycznego ciała porównawczego, wyznaczalną z (3.105). Tożsamość (4.29) może być przy tym spełniona tylko wtedy, gdy $U[\tilde{y}^*] = \dot{U}[\tilde{y}^*]$ prawie wszędzie w V ; można się spodziewać, że praktycznie wystąpi to tylko wówczas, gdy pole prędkości \tilde{y}^* odpowiada modułom L_{ijkl}^0 przy spełnionym warunku (3.106) (por. punkt 3.3.3). Jest to typowa sytuacja w szeregu praktycznych

zagadnieniach bifurkacji, rozważanych dotychczas w literaturze (por. prace cytowane na str. 34); okazuje się, że dokładnie ten sam moment krytyczny i postać niestateczności uzyskuje się przy przyjęciu energetycznego Kryterium i niestabilności procesu, w przypadku gdy spełnione są warunki (i) + (iv). Jest więc widoczne, że dla wielu zagadnień, podejście "bifurkacyjne" i proponowane podejście energetyczne prowadzą do dokładnie tych samych wartości sił względnie odkształceń krytycznych i postaci niestateczności typu geometrycznego. Z równości (4.22) wynika dodatkowo interpretacja energetyczna punktu pierwotnej bifurkacji jako pierwszego punktu na podstawowej drodze deformacji, w którym $\Delta \ddot{E} = 0$ dla pewnego $\ddot{y}^* \neq \ddot{y}^0$ i $\Delta \ddot{E} \geq 0$ dla wszystkich $\ddot{y} \in \mathcal{V}$.

Wykazaliśmy powyżej, że w procesie nieosobliwym nierówność (4.25) pociąga za sobą (4.35); implikacja odwrotna na ogół nie jest prawdziwa. Jednakże, z chwilą przyjęcia nierówności konstytutywnej (3.73), nierówności (4.25) i (4.35) stają się sobie równoważne. Wyrażenie podcałkowe w ostatnim członie tożsamości (4.29) jest bowiem wówczas na mocy Lematu 3.1 nieujemne, co pociąga za sobą implikację w drugą stronę. Tym samym, przy założeniu nierówności konstytutywnej (3.73), Kryteria 3 i 4 w przypadku nieosobliwego procesu deformacji \ddot{y}^0 są wzajemnie równoważne.

Zakładając nadal spełnienie warunków (i) + (iii), przyjmijmy teraz, że (v) w momencie krytycznym zachodzi nierówność (4.35) ze znakiem równości dla pewnego $\ddot{y}^* \neq \ddot{y}^0$. W przypadku niespełnienia warunku (3.106), warunek (v) nie musi pociągać za sobą (iv). Tym niemniej, jak wykazano w punkcie 3.3.3, bifurkacja w momencie krytycznym przy słabszym założeniu (v) zamiast (iv) również występuje, jeżeli nie w prędkościach, to w przyspieszeniach. Przy pominięciu możliwych przypadków osobliwych, skoro funkcjonal $I^0(\ddot{y})$ przestaje być dodatnio określony (w sensie nierówności (3.95)) w momencie krytycznym,

to będzie. on nieokreślony w chwilach następnych wzdłuż podstawowej drogi deformacji. Zgodnie z Kryterium 4, proces χ^0 poza punktem krytycznym staje się niestabilny w sensie energetycznym: w porównaniu z podejściem bifurkacyjnym, podejście energetyczne dostarcza więc dodatkowo argumentu za odrzuceniem pierwotnej ścieżki pobifurkacyjnej. Włorna ścieżka pobifurkacyjna może być stabilna, gdyż wskutek następującego wzdłuż niej odciążania (por [81] [82]), odpowiadające jej styczne ciało porównawcze staje się "sztywniejsze" niż to dla ścieżki podstawowej, co umożliwia ponowne spełnienie nierówności (3.95).

4.4.2 Niestateczność typu dynamicznego

W celu wykazania, że Kryterium 2 albo 3 może być zastosowane do określania momentu pojawienia się niekontrolowanego, dynamicznego przebiegu procesu deformacji, wprowadźmy funkcjonal

$$(4.36) \quad I(\vec{w}) = \int_V U[\vec{w}] dV - \frac{1}{2} \int_{S_T} f_j[\vec{w}] w_j dS$$

określony na klasie pól wektorowych $\vec{w} \in W$. Z Kryterium 3 wynika następujące

Kryterium 5 Jeżeli istnieje pole wektorowe $\vec{w} \in W$ takie, że

$$(4.37) \quad I(\vec{w}) < 0,$$

to proces χ^0 jest niestabilny.

Dowód. Rozważmy wyrażenie

$$\frac{1}{\theta^2} \{ \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{y}}^0 + \theta \tilde{\mathbf{w}}) - \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{y}}^0) \}$$

i przejdźmy do granicy przy $\theta \rightarrow \infty$, podczas gdy pole $\tilde{\mathbf{w}}$ jest ustalone. Korzystając z własności jednorodności i ciągłości funkcji $U[\mathbf{y}]$ i $f[\mathbf{y}]$, w granicy otrzymujemy $I(\tilde{\mathbf{w}})$. Tak więc, jeżeli $I(\tilde{\mathbf{w}})$ jest ujemne, to pole $\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{y}}^0 + \theta \tilde{\mathbf{w}}$ spełnia nierówność (3.24) dla dostatecznie dużych θ . Stąd, z Kryterium 3 otrzymujemy, że warunek $I(\tilde{\mathbf{w}}) < 0$ jest dostateczny dla niestabilności procesu podstawowego. Prawdziwość Kryterium 5 została tym samym udowodniona.

Warunek (4.37) można na innej drodze uzyskać jako warunek dostateczny dla niestabilności stanu równowagi w sensie energetycznym, definiowanej jako niestabilność szczególnego, zdegenerowanego procesu deformacji, w którym konfiguracja równowagi ciała nie ulega zmianom w czasie (por. punkt 6.2). Oczywiście, warunki obciążania też muszą być przy tym niezmiennie w czasie, musimy więc przyjąć $\lambda = \text{const}$, z czego wynika, że $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ na S_u , $\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{0}$ na S_T i $\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{0}$ w V . Wówczas (3.24) redukuje się po prostu do (4.37). Przy tych warunkach, $I(\delta \tilde{\mathbf{u}})$ jest wyrażeniem rzędu drugiego na ilość energii, jaką należy dostarczyć do układu (ciało wraz z urządzeniem obciążającym) na prostej, wirtualnej drodze quasi-statycznych deformacji, prowadzącej od stanu równowagi do sąsiedniej konfiguracji, określonej przez przyrost przemieszczeń $\delta \tilde{\mathbf{u}}$. Wynika to z równości (4.8), (4.12) i (4.22) oraz z definicji funkcjonału energetycznego E . Widoczny jest teraz związek Kryterium 5 ze znanymi kryteriami energetycznymi stateczności stanu równowagi ciała sprężysto-plastycznego [56] [57] [35], z tą różnicą, że nieujemność tej dodatkowej ilości energii jest tu warunkiem koniecznym dla stabilności, a nie dostatecznym. Oczywiście, całka powierzchniowa w wyrażeniu (4.36) znika w często rozpatrywanym przypadku obciążenia "martwego". Dalszą dyskusję

stabilności stanu równowagi przedstawimy w Rozdziale 6.

Jeżeli nierówność (4.37) zachodzi dla pewnego pola wektorowego \tilde{w} , to istnieje określony przez to pole "kierunek" odejścia od stanu równowagi, wzdłuż którego energia jest uwalniana z układu. Uwolniona energia może, przynajmniej w zasadzie, być zamieniona na energię kinetyczną, gdyż nie jest przy tym wymagany przyrost (z założenia powolny) wartości parametru obciążenia λ . Tym samym układ może spontanicznie oddalić się od stanu równowagi pod wpływem dowolnie małego impulsu; w tym sensie Kryterium 5 można interpretować jako kryterium dla niestateczności typu dynamicznego.

Nierówność $I(\tilde{w}) \geq 0$ dla wszystkich \tilde{w} nie pociąga za sobą na ogół nierówności (4.25). Oznacza to, że proces deformacji może być niestabilny, zgodnie np. z Kryterium 3, chociaż każda z konfiguracji równowagi w tym procesie, rozpatrywana oddzielnie, może być stabilna. Zważywszy na wykazaną poprzednio typową (ale nie zawsze obowiązującą) interpretację punktu utraty stabilności procesu jako punktu bifurkacji, wniosek ten nie jest niespodziewany.

Pojawienie się niestabilnych stanów równowagi w procesie deformacji może być (ale na ogół nie musi) bezpośrednio poprzedzone przez stan własny rozważanego ciała sprężysto-plastycznego, kiedy to istnieje niezerowe rozwiązanie \tilde{w}^* dla przyrostowych równań równowagi rzędu pierwszego przy $\lambda = \text{const}$ (por. np. [64] [14] [124] [125]). Istotnie, taki stan własny jest osiągnięty m. inn. w krytycznym momencie, gdy funkcjonal $I(\tilde{w})$ staje się dodatnio półokreślony (tzn. $I(\tilde{w}) \geq 0$ dla wszystkich $\tilde{w} \in N$ i $I(\tilde{w}^*) = 0$ dla pewnego $\tilde{w}^* \neq \tilde{0}$); prawdziwości tego stwierdzenia dowieść można, argumentując jak na początku punktu 4.4.1. Natomiast, jeżeli przed tym krytycznym momentem funkcjonal (4.36) był dodatnio określony, to na ogół staje się po tym momencie nieokreślony, co implikuje niestabilność procesu podstawowego i, co więcej, niestabilność wszystkich

przyjmowanych w tym procesie konfiguracji równowagi, rozpatrywanych z osobna. Stan własny rozważanego ciała sprężysto-plastycznego jest więc związany z niestabilnością stanu równowagi w podobny sposób, jak stan własny stycznego ciała porównawczego z niestabilnością procesu deformacji. Dla ciała z materiału przyrostowo liniowego, którego (symetryczne) moduły są niezależne od aktualnego gradientu prędkości, obydwa stany własne oczywiście się pokrywają, a nierówności (4.24), (4.34) i (4.37) oraz odpowiednie Kryteria 3, 4 i 5 stają się wzajemnie równoważne. W szczególności, dla ciała hipersprężystego każda z tych nierówności sprowadza się do zaprzeczenia nieujemności drugiej wariacji całkowitej energii potencjalnej układu, który w tym przypadku staje się jako całość konserwatywny.

Mając na uwadze opisany powyżej związek stanu własnego ciała z niestabilnością równowagi, sformułujemy prosty warunek dostateczny dla jego wystąpienia: Stan własny ciała sprężysto-plastycznego jest osiągnięty w chwili, gdy parametr obciążenia λ osiąga wartość analitycznego ekstremum względem typowego przemieszczenia na podstawowej drodze deformacji.

Dowód jest następujący. Rozważmy pewne przemieszczenie $u^0(t)$ w podstawowym procesie deformacji, uznane jako typowe, np. zmienną w czasie składową wektora przemieszczenia w wybranym punkcie ciała. Oznaczmy przez τ^* chwilę osiągnięcia analitycznego ekstremum wartości λ względem u^0 . Możemy utożsamić u^0 z "czasem" t w pewnym otoczeniu chwili τ^* ; wówczas w punkcie ekstremum mamy $\dot{\lambda} = 0$ oraz $\ddot{y}^0 \neq 0$. W konsekwencji, w chwili τ^* pole \ddot{y}^0 należy do klasy \mathcal{M}^1 , będąc rozwiązaniem, samo stanowi postać własną \ddot{y}^* . Dowód został zakończony..

W zagadnieniach praktycznych, jeżeli funkcjonał $I(\tilde{y})$ był w trakcie podstawowego procesu deformacji dodatnio określony przed osiągnięciem stanu własnego, to staje się nieokreślony po dowolnie małym przyroście deformacji po chwili osiągnięcia tego

stanu. Stąd, powyższy warunek analitycznego ekstremum (minimum albo maksimum) wartości parametru λ , określa w zagadnieniach praktycznych moment pojawienia się niestateczności typu dynamicznego. Warunek ten jest uogólnieniem klasycznego kryterium maksymalnego obciążenia (tzw. punkt graniczny), uzyskiwanego tu w szczególnym przypadku, gdy obciążenie jest zadawane bezpośrednio i rośnie monotonicznie wraz z λ .

Jeżeli proces χ^0 jest nieosobliwy i spełniona jest nierówność konstytutywna (3.73), to (4.35) wyklucza (4.37) wskutek (3.86)' (por. Lemat 3.1). Zakres dodatniej określoności funkcjonału $I^0(\tilde{w})$ wzdłuż procesu deformacji χ^0 jest wówczas nie większy niż zakres dodatniej określoności funkcjonału $I(\tilde{w})$. W pewnych przypadkach mogą się te zakresy kończyć w tym samym momencie, mianowicie, gdy osiągnięty zostaje punkt $\dot{\lambda}=0$, wykluczony z rozważań w punkcie 4.4.1 i rozpatrzony powyżej, odpowiadający pojawieniu się niestateczności typu dynamicznego.

4.4.3 Niestateczność typu lokalnego

Wszystkie kryteria niestabilności omawiane powyżej, mają charakter globalny, tj. dotyczą całego układu. Moment utraty stabilności zależy na ogół, między innymi, od kształtu ciała i warunków brzegowych. W tym punkcie sformulujemy ogólne kryteria niestabilności, zależne jedynie od własności materiału i stopnia zaawansowania rozpatrywanego procesu deformacji. W ciele niejednorodnym lub nierównomiernie obciążonym, odpowiadająca tym kryteriom utrata stateczności może mieć charakter lokalny, tzn. objawiać się w pewnym małym obszarze, przykładowo, w postaci pasma ścinania o niewielkim rozprzestrzenieniu. W tym sensie rozpatrywane poniżej kryteria można traktować jako odnoszące się do niestateczności typu lokalnego. W przypadku jednorodnej próbki materiału poddanej równomiernym deformacjom, taka niestateczność może mieć równocześnie charakter globalny,

np. pasmo ścinania może rozprzestrzenić się do brzegów próbki, tym niemniej moment utraty stateczności jest nadal określany niezależnie od kształtu próbki i warunków brzegowych.

Ogólne kryteria niestabilności typu lokalnego uzyskamy z Kryterium 3, wykorzystując pewne istniejące w rachunku wariacyjnym (choć raczej mało znane) pojęcia i twierdzenia, dotyczące warunków koniecznych istnienia minimum funkcjonału typu całkowego. Rozpatrując potencjał U na danym etapie deformacji jako funkcję zmiennych $(\xi, \dot{\xi})$, $\xi \in V$, wprowadzimy następującą definicję (por. Morrey [127] [128], Ball [8] [9]).

Definicja 4.1 Funkcja U jest quasi-wypukła w punkcie $(\xi, \dot{\xi}^0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(4.38) \quad \int_{\Omega} U(\xi, \dot{\xi}^0 + \nabla \underline{w}(\xi^*)) \, d\xi^* \geq U(\xi, \dot{\xi}^0) \cdot |\Omega|$$

dla każdego ograniczonego obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ i dla każdego różniczkowalnego pola wektorowego $\underline{w}(\xi^*)$ na \mathbb{R}^3 , zerującego się poza obszarem Ω .

Uwaga 4.5 W nierówności (4.38), $|\Omega| \equiv \int_{\Omega} d\xi^*$ jest objętością obszaru Ω , a ξ^* określa punkt obszaru Ω . Podkreślmy, że ξ określa punkt obszaru V zupełnie niezwiązanego z Ω i jest niezależne od ξ^* . W powyższej definicji wystarczy żądać, aby nierówność (4.38) zachodziła dla jednego otwartego obszaru $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, gdyż można wykazać [127] [121] [9], że wówczas zachodzi ona również dla wszystkich takich obszarów. Tym samym obszar Ω występujący w definicji quasi-wypukłości nie jest istotny, a własność quasi-wypukłości potencjału U zależy wyłącznie od własności materiału w rozpatrywanym stadium zaawansowania procesu deformacji.

Rozpatrzmy funkcjonal

$$(4.39) \quad \mathcal{J}_V(\underline{y}) = \int_V \langle U(\xi, \nabla \underline{y}(\xi)) - \dot{b}_j v_j \rangle \, dV;$$

dla uniknięcia możliwych nieporozumień, argumenty funkcji U zostały tu wypisane w sposób jawny. Następujące twierdzenie stanowi uproszczoną wersję twierdzenia, sformułowanego przez Balla [8], a udowodnionego wcześniej przez Meyersa [121].

Twierdzenie 4.1 Przypuśćmy, że

$$(4.40) \quad \mathcal{F}_V(\tilde{y}) \geq \mathcal{F}_V(\tilde{y}^0)$$

dla wszystkich pól prędkości $\tilde{y} \in V$ takich, że $y = y^0$ w pewnym otoczeniu powierzchni S .

Wówczas funkcja U jest quasi-wypukła w punkcie $(\xi, \nabla y^0(\xi))$ dla każdego $\xi \in V$, będącego punktem różniczkowalności pola \tilde{y}^0 .

Dowód powyższego twierdzenia przebiega identycznie, jak dowód twierdzenia 3.1 w pracy Balla [8].

Jeżeli zasada minimum dla prędkości (4.25) jest spełniona, to w szczególności jest ona spełniona w klasie pól prędkości, zakładanej w Twierdzeniu 4.1, przy czym nierówność (4.25) redukuje się do (4.40). Z Kryterium 3 i twierdzenia 4.1 otrzymujemy więc następujący warunek stabilności lokalnej procesu:

dla stabilności (lokalnej) procesu jest konieczne, aby potencjał U był quasi-wypukły w punkcie $(\xi, \nabla y^0(\xi))$ dla każdego $\xi \in V$ będącego punktem różniczkowalności pola \tilde{y}^0 .

Przy wyprowadzeniu tego warunku stabilności lokalnej, warunki brzegowe mogą być dowolne (por. Uwagę 4.3). Warunek ten można również postulować jako niezależne kryterium.

Uwaga 4.6 Warunek quasi-wypukłości potencjału U ma następującą interpretację mechaniczną. Przyjmijmy dla uproszczenia konfigurację aktualną za konfigurację odniesienia, i rozważmy hipotetyczną jednorodną próbkę o

objętości Ω , zbudowaną z materiału wziętego z pewnego punktu ξ ciała i odkształcaną równomiernie w taki sposób, że przebieg deformacji w próbce jest taki sam, jak w punkcie ξ w procesie χ^0 . Zakładamy, że na próbkę nie działają siły masowe, a przemieszczenia na całej powierzchni próbki są zadawane. Wówczas warunek quasi-wypukłości (4.38) pokrywa się z warunkiem stabilności (4.25) dla procesu deformacji próbki i oznacza, że spośród kinematycznie dopuszczalnych kontynuacji tego procesu (dających te same przemieszczenia na całym brzegu próbki), deformacja jednorodna odpowiada najmniejszej wartości przyrostu pracy odkształcenia. Można więc interpretować warunek (4.38) jako warunek konieczny dla stabilności procesu deformacji cząstki materiału ciała, traktowanej jako jednorodne kontinuum o kinematycznych warunkach brzegowych.

Bezpośrednie sprawdzenie warunku (4.38) może być kłopotliwe w zastosowaniach; znacznie wygodniejszy (choć prawdopodobnie słabszy) jest inny warunek konieczny dla absolutnego minimum funkcjonału całkowego, tzw. warunek Weierstrassa, uogólniony na przypadek wielowymiarowego obszaru całkowania przez Graves'a [42]. Wprowadźmy tzw. funkcję Weierstrassa E_U^0 dla potencjału U , określaną dla podstawowej drogi deformacji jako funkcja różnicy $\Delta \dot{F} = \dot{F} - \dot{F}^0$ gradientu prędkości, postaci

$$(4.41) \quad E_U^0(\Delta \dot{F}) \equiv U(\dot{F}^0 + \Delta \dot{F}) - U(\dot{F}^0) - \dot{N}_{ij}^0 \Delta \dot{F}_{ji}$$

gdzie w miejsce $(\partial U / \partial \dot{F}_{ji})(\dot{F}^0)$ podstawiono \dot{N}_{ij}^0 , zgodnie z (2.37). Oczywiście, funkcja E_U^0 zależy od stopnia zaawansowania procesu deformacji χ^0 i na ogół także od ξ , lecz dla uproszczenia pomijamy te argumenty w zapisie. Z twierdzenia Graves'a [42] otrzymujemy, jako szczególny przypadek, następujące twierdzenie (por. Twierdzenie 4.1).

Twierdzenie 4.2 *Przypuśćmy, że*

$$(4.40) \quad \mathcal{F}_V(\check{y}) \geq \mathcal{F}_V(\check{y}^0)$$

dla wszystkich pól prędkości $\vec{v} \in V$ takich, że $y = y^0$ w pewnym otoczeniu powierzchni S .

Wówczas funkcja U spełnia warunek Weierstrassa:

$$(4.42) \quad E_{ij}^0(\xi^i \eta^j) \geq 0 \quad \text{dla wszystkich wektorów } \xi, \eta$$

w każdym punkcie $\xi \in V$, będącym punktem różniczkowalności pola \vec{v}^0 .

Z Twierdzenia 4.2 wynika, że jeżeli warunek Weierstrassa (4.42) nie jest spełniony w jakimś punkcie ciała (a więc i w pewnym jego otoczeniu), to można znaleźć kinematycznie dopuszczalne pole prędkości takie, że nie zachodzi nierówność (4.40), a tym samym nie jest spełniona również nierówność (4.25). Warunek Weierstrassa (4.42) można alternatywnie wyprowadzić z warunku quasi-wypukłości (4.38), stosując twierdzenie Graves'a. Z Kryterium 3 wynika więc następujące kryterium niestabilności lokalnej.

Kryterium 6. Jeżeli w pewnym punkcie ciała zachodzi nierówność

$$(4.43) \quad E_{ij}^0(\xi^i \eta^j) < 0 \quad \text{dla pewnych wektorów } \xi, \eta,$$

to proces \vec{x}^0 jest (lokalnie) niestabilny.

Nie wiadomo dotychczas, czy warunek (4.38) jest w ogólnym przypadku równoważny (4.42). Natomiast gdy potencjał U jest kwadratowy (t.j. gdy materiał jest przyrostowo liniowy), to warunek quasi-wypukłości (4.38) jest równoważny warunkowi Weierstrassa (4.42) i sprowadza się [127] do znanego warunku Legendge'a - Hadamarda, nazywanego też warunkiem (pół-silnej) eliptyczności. Dalszą dyskusję tych warunków przedstawimy w Rozdziale 5.

Podkreślmy, że utrata stabilności procesu wskutek przekroczenia na pewnym etapie deformacji warunku lokalnego (4.42) lub (4.38) nie musi być na ogół związana z istnieniem na tym etapie niezerowej postaci własnej $\vec{w} \in W$ dla żadnego z funkcjonalów (3.8), (3.94), (4.36). W szczególności, wystąpienie niestabilności lokalnej nie musi odpowiadać punktowi bifurkacji procesu w prędkościach w sensie teorii Hilla.

4.5 Przykład: niestateczność procesu jednoosiowego rozciągania trójwymiarowej próbki z materiału ortotropowego

Jak już wspomniano powyżej, Kryterium 1, lub któreś z dalszych Kryteriów stanowiących jego konsekwencje, może być stosowane bezpośrednio, prowadząc do górnej oceny momentu krytycznego: należy w tym celu znaleźć konkurencyjny mechanizm deformacji, od pewnego stadium deformacji prowadzący do wartości δE mniejszej niż δE^0 . W szczególności, zgodnie z Kryterium 4, wystarczy znaleźć jedno takie pole wektorowe $\vec{w} \in W$, które nadaje funkcjonalowi (3.94) wartość ujemną, aby wykazać niestabilność procesu, bez konieczności rozwiązywania zagadnienia na wartości własne (3.105), jak w podejściu bifurkacyjnym. Należy tu podkreślić, że chociaż istnienie takiego pola oznacza, że warunek (3.96) dostateczny dla jednoznaczności (a tym bardziej warunek (3.11)) został już wcześniej przekroczony (gdyż w przeciwnym wypadku mielibyśmy sprzeczność z zasadą minimum (3.16)), to sam ten fakt jeszcze nie pozwala z całą pewnością twierdzić, że również punkt bifurkacji już wcześniej wystąpił. Nawet gdy wykażemy istnienie przybliżonego (numerycznego), nietrywialnego rozwiązania zagadnienia (3.105), to istnienie nietrywialnego dokładnego rozwiązania tego zagadnienia wymaga jeszcze dowodu. Natomiast

metoda określania górnej oceny momentu krytycznego jest uzasadniona ściśle w ramach podejścia energetycznego, gdyż niejednoznaczność rozwiązania nie jest warunkiem koniecznym dla niestabilności w sensie energetycznym (ani też, w ogólnym przypadku, warunkiem dostatecznym). Do stwierdzenia niestabilności procesu nie jest przy tym konieczne spełnienie żadnego z warunków (ii)+(v), wymienionych w punkcie 4.4.1 przy rozważaniu możliwości bifurkacji w momencie krytycznym.

W zastosowaniach do ciał sprężysto-plastycznych, wygodnie jest, nadal stosując opis materialny, wyrażać warunki niestabilności przy przyjęciu konfiguracji aktualnej za (chwilową) konfigurację odniesienia. Przy tym założeniu, moduły \bar{L}_{ijkl} stowarzyszone z logarytmiczną miarą odkształcenia \bar{H} , występują również (por. (2.14)) w związku (często przyjmowanym w literaturze jako wyjściowy) pomiędzy pochodną Zaremby-Jaumanna tensora naprężenia Kirchhoffa a eulerowskim tensorem prędkości odkształcenia ξ ,

$$(4.44) \quad \overset{\circ}{T}_{ij} = \bar{L}_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad \bar{L}_{ijkl} = \bar{L}_{ijkl}(\xi),$$

a przy przyjęciu prawa potencjalnego (2.27) mamy

$$(4.45) \quad \overset{\circ}{T}_{ij} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad \bar{V} = \bar{V}(\xi) = \frac{1}{2} \bar{L}_{ijkl}(\xi) \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}.$$

Moduły C_{ijkl} wyrażają się wówczas wzorem (por. (2.18))

$$(4.46) \quad C_{ijkl} = \bar{L}_{ijkl} - \frac{1}{2} (\sigma_{jk} \delta_{il} - \sigma_{ik} \delta_{jl} + \sigma_{il} \delta_{jk} + \sigma_{jl} \delta_{ik}),$$

a U można zapisać w postaci

$$(4.47) \quad U = \bar{V} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} (\epsilon_{ik} \epsilon_{jk} + 2\omega_{ik} \epsilon_{jk} - \omega_{ik} \omega_{jk}).$$

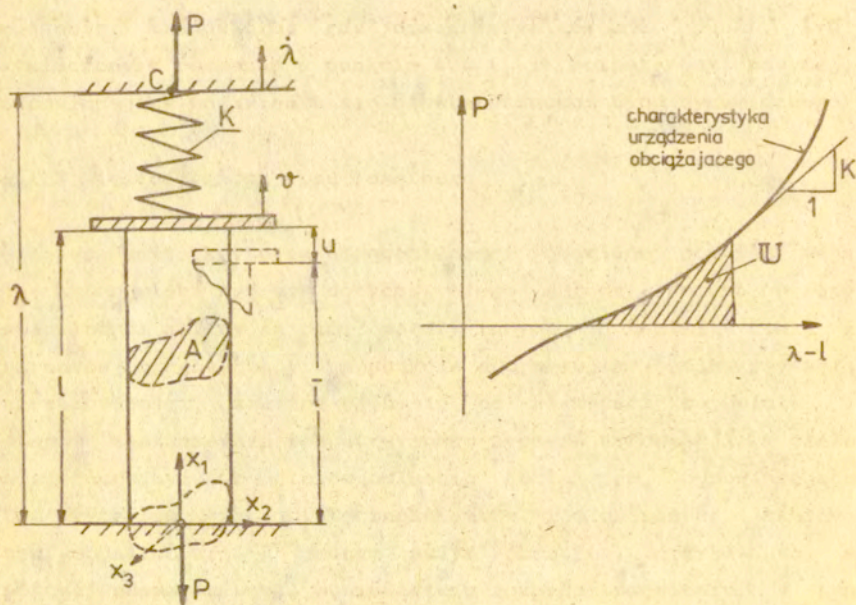
Wartości główne tensorów symetrycznych, np. σ , oznaczymy pojedynczymi wskaźnikami 1, 2, 3, np. $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Jako ilustrację możliwych zastosowań proponowanego podejścia energetycznego, rozpatrzmy proces jednoosiowego rozciągania pryzmatycznej próbki, traktowanej jako ciało trójwymiarowe. Typowymi przejawami niestateczności procesu są tu, jak wiadomo, tworzenie się szyjki (niestateczność typu geometrycznego) względnie utrata kontroli nad przebiegiem procesu (niestateczność typu dynamicznego); rzadziej można zaobserwować ścięcie próbki, zapoczątkowane niestatecznością typu lokalnego. Moment rozpoczęcia tworzenia się szyjki w trójwymiarowej próbce poddanej jednoosiowemu rozciąganiu był określany teoretycznie w szeregu pracach (np. [123] [17] [83] [124] [32] [125] [89] [90]), głównie przy zastosowaniu podejścia bifurkacyjnego. Poniżej rozpatrzono zagadnienie bardziej ogólne od dotychczas rozpatrywanych: przekrój próbki jest dowolny, a materiał jest ortotropowy o dowolnych własnościach w klasie materiałów, opisywanych przyrostowym równaniem o postaci potencjalnej (2.27).

4.5.1 Sformułowanie zagadnienia

Rozważmy jednorodną, pryzmatyczną próbkę o dowolnym przekroju, poddaną próbie jednoosiowego rozciągania. Oznaczmy początkową długość próbki przez \bar{z} , jej długość aktualną przez z , aktualny przekrój przez A i jego pole przez $|A|$. Przy opisie zagadnienia przyrostowego, jako (chwilową) konfigurację odniesienia przyjmiemy konfigurację aktualną (a więc $\xi_1 = x_1$ w rozpatrywanym momencie); oś x_1 pokrywa się z osią próbki, przechodzącą przez środek ciężkości przekroju A . Przyjmiemy następującą idealizację rzeczywistych warunków brzegowych (Rys. 2). Powierzchnie boczne próbki są wolne od obciążeń ($\underline{T} \equiv \underline{0}$), natomiast płaskie powierzchnie końcowe $x_1=0$ i $x_1=z$ są wolne od

naprężeń stycznych. Na płaszczyznach $x_1=0$ i $x_1=l$ składowe prędkości v_2 i v_3 są traktowane jako dowolne, natomiast składowa v_1 jest stała w całym przekroju, przy czym w płaszczyźnie $x_1=0$ przyjęto $v_1=0$. W quasi-statycznym procesie deformacji, wartość v_1 w przekroju $x_1=l$, oznaczona przez v ($v=\dot{u}=\dot{\lambda}$, gdzie $u=l-\bar{l}$ jest wydłużeniem próbki), wynika z rozpatrzenia globalnego warunku przyrostowej równowagi układu, złożonego z próbki i urządzenia obciążającego. Podatność urządzenia modelowana jest przez sprężynę o dowolnie nieliniowej charakterystyce siła - ugięcie (Rys.2) i o aktualnej sztywności $K = K(P)$, $K>0$, gdzie P jest siłą rozciągającą. Jako parametr obciążenia λ przyjmujemy



Rys. 2

przemieszczenie końca C sprężyny, przy czym λ zmienia się w czasie w zadany sposób. Siły masowe pomijamy.

Jako proces podstawowy χ^0 , którego stabilność chcemy badać, przyjmiemy, quasi-statyczny proces równomiernych deformacji próbki, w którym gradient prędkości $\dot{\mathbf{F}}^0$ jest stały w całej objętości próbki, oraz $\dot{F}_{ij}^0 = 0$ dla $i \neq j$. Zakładamy, że $\epsilon_1^0 > 0$. Jediną niezerową składową tensora naprężenia Cauchy'ego σ^0 jest równomierne naprężenie osiowe σ_{11}^0 , oznaczone dalej przez σ_1 .

W dowolnym stanie równowagi w procesie podstawowym mamy

$$(4.48) \quad \dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{W}} + \dot{\mathbf{U}} = P^0 v + P^0 (\dot{\lambda} - v) = P^0 \dot{\lambda} = \text{const}$$

dla wszystkich kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości, tj. spełniających warunki $v_1 = 0$ dla $x_1 = 0$ i $v_1 = v$ dla $x_1 = \ell$. Podstawiając (por. Rys. 2)

$$(4.49) \quad \dot{\mathbf{P}} = K (\dot{\lambda} - v),$$

zamiast wzoru (4.17) otrzymujemy

$$(4.50) \quad \begin{aligned} \Delta \ddot{\mathbf{U}} &= + \Delta (P (\dot{\lambda} - v))' \\ &= - 2K \dot{\lambda} \Delta v + K \Delta (v^2) - P^0 \Delta \dot{\mathbf{U}} \end{aligned}$$

Funkcjonał $\mathcal{F}(\ddot{\mathbf{y}})$ redukuje się do postaci

$$(4.51) \quad \mathcal{F}(\ddot{\mathbf{y}}) = \int_V U[\ddot{\mathbf{y}}] dV - K \dot{\lambda} v + \frac{1}{2} K v^2,$$

przy czym wzór (4.22) oczywiście nadal obowiązuje dla wszystkich kinematycznie dopuszczalnych pól $\ddot{\mathbf{y}}$. Będziemy

korzystać z Kryterium 4, prowadzącego do następującego warunku niestabilności procesu rozciągania (por. (4.34), (4.28) i (3.94))

$$(4.52) \quad I^0(\tilde{w}) \equiv \int_V \frac{1}{2} C_{ijkl}^0 w_{j,i} w_{l,k} dV + \frac{1}{2} K v^2 < 0,$$

gdzie ciągle i odcinkowo różniczkowalne pole wektorowe \tilde{w} ma spełniać warunki $w_1 = 0$ dla $x_1 = 0$ i $w_1 = v$ dla $x_1 = l$, lecz poza tym może być dobrane dowolnie. Zachowamy oznaczenia \mathcal{V} i \mathcal{W} odpowiednio dla klas dopuszczalnych pól \tilde{y} i \tilde{w} . Nadmienmy, że nierówność (4.52) stanowi warunek dostateczny dla niestabilności stanu równowagi stycznego ciała porównawczego.

Przyjmujemy, że własności materiału w procesie podstawowym cechuje ortotropowa symetria (o osiach x_i). Stąd, jedynymi niezerowymi modułami Γ_{ijkl}^0 (zakładamy, że są one dobrze określone) mogą być moduły typu Γ_{rrss}^0 i Γ_{rsrs}^0 ; wprowadzamy umowę, że dla wskaźników r, s konwencja sumacyjna nie obowiązuje. Po podstawieniu związku (4.46) i uwzględnieniu szczególnej postaci modułów Γ_{ijkl}^0 i stanu naprężenia σ^0 , otrzymujemy

$$(4.53) \quad C_{ijkl}^0 w_{j,i} w_{l,k} = \sum_{r,s} \Gamma_{rrss}^0 \epsilon_{rr}^v \epsilon_{ss}^v - \sigma_1 (\epsilon_{11}^v)^2 + 2 \sum_{\substack{r,s \\ r \neq s}} \Gamma_{rsrs}^0 (\epsilon_{rs}^v)^2 - \sigma_1 \sum_{r=2,3} ((\epsilon_{ir}^v)^2 + 2 \epsilon_{ir}^v \omega_{ir}^v - (\omega_{ir}^v)^2),$$

gdzie $\epsilon_{rs}^v = \frac{1}{2}(w_{r,s} + w_{s,r})$ i $\omega_{rs}^v = \frac{1}{2}(w_{r,s} - w_{s,r})$.

4.5.2 Niestateczność typu dynamicznego

Niestabilność stanów równowagi, prowadząca do

niestateczności typu dynamicznego, określa się z warunku (por. warunek (4.37) i jego interpretację)

$$(4.54) \quad I(\vec{w}) = \int_V U[\vec{w}] dV + \frac{1}{2} K v^2 < 0,$$

gdzie $\vec{w} \in W$. W szczególności, warunek niestabilności stanu równowagi (4.54) jest spełniony, gdy nierówność (4.52) zachodzi dla pola $\vec{w} = \gamma \vec{v}^0$, gdzie γ jest współczynnikiem liczbowym, niezależnym od punktu ciała. Jest to możliwe, gdyż w rozważanym przykładzie warunki brzegowe dla prędkości nie zależą od λ ; wystarczy przyjąć $v = \gamma v^0$ ($v^0 > 0$ z założenia). W tym przypadku mamy $U[\vec{w}] = U^0[\vec{w}] = \gamma^2 U[v^0]$; z kolei zachodzi wzór

$$(4.55) \quad 2 \int_V U[v^0] dV = \int_V C_{ijkl}^0 v_{j,i}^0 v_{l,k}^0 dV = \int_V \dot{N}_{ij}^0 v_{j,i}^0 dV \\ = \dot{P}^0 v^0 = \frac{dP^0}{du} (v^0)^2.$$

Po podstawieniu tych związków do (4.54) otrzymujemy warunek wystarczający dla niestabilności stanu równowagi, postaci

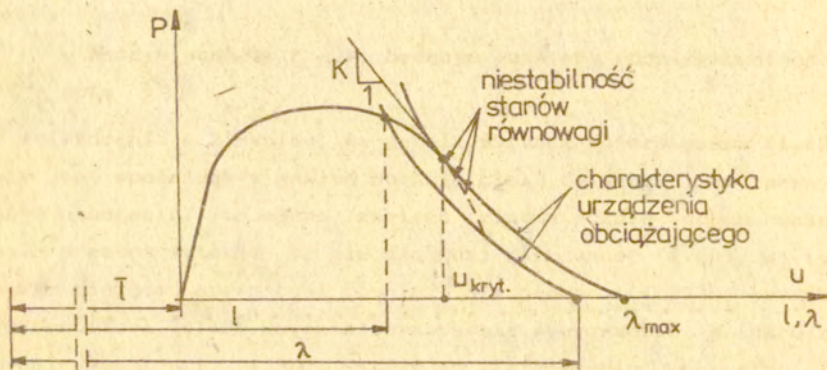
$$(4.56) \quad \frac{dP^0}{du} + K < 0,$$

który można równoważnie (por. (4.49) zapisać jako

$$(4.56)' \quad \dot{\lambda} < 0.$$

Interpretacja geometryczna nierówności (4.56) i (4.56)' jest uwidoczniiona na Rys. 3: odcinek krzywej $P \sim u$, opadający bardziej stromo od charakterystyki urządzenia obciążającego i

odpowiadający zmniejszaniu się wartości λ , określa zakres niestabilnych stanów równowagi (a więc i niestabilności procesu deformacji). W przypadku nieskończonego podatnego urządzenia obciążającego ($K \rightarrow 0$), stan równowagi staje się niestabilny, jak tylko siła rozciągająca zaczyna maleć.



Rys. 3

Jeżeli krzywa $P \sim u$ jest gładka, to zakres (4.56) rozpoczyna się w krytycznym momencie, kiedy charakterystyka urządzenia obciążającego staje się styczna do tej krzywej; odpowiada to analitycznemu maksimum funkcji $\lambda(u)$ (por. punkt 4.4.2). Zauważmy, że dotychczas nie wykorzystywaliśmy warunku równomierności deformacji w procesie $\bar{\chi}^0$: łatwo sprawdzić, że nierówności (4.56) i (4.56)' implikują niestabilność procesu deformacji (i stanu równowagi) dowolnego ciała, jeżeli tylko urządzenie obciążające daje się przedstawić w postaci pojedynczej sprężyny jak powyżej.

Zdefiniujmy moduł styczny E_t w procesie równomiernego jednoosiowego rozciągania jako $E_t = \dot{\tau}_1^0 / \dot{\epsilon}_1^0$ przy założeniu, że konfiguracja odniesienia pokrywa się z konfiguracją aktualną, a

więc $\tau_1 = \sigma_1$ w chwili aktualnej. Wówczas $dP/du = (E_t - \sigma_1) |A| / \mathcal{L}$; stąd, siła P osiąga maksimum w momencie, gdy $E_t = \sigma_1$.

Jeżeli w procesie podstawowym deformacje są równomierne, to kryterium niestabilności (4.56) sprowadza się więc do postaci

$$(4.57) \quad E_t < \sigma_1 - \frac{K \mathcal{L}}{|A|}.$$

Zauważmy, że wyrażenie po prawej stronie nierówności (4.57) zależy nie tylko od wartości naprężenia w próbce i sztywności urządzenia obciążającego, lecz również od wymiarów próbki, oraz może przyjmować wartości zarówno dodatnie jak ujemne. Gdy w procesie równomiernych deformacji, wartość modułu stycznego E_t spadnie poniżej tej wartości, to, zgodnie z interpretacją kryterium (4.54), należy się spodziewać, że dalszy przebieg procesu deformacji będzie niekontrolowany, z efektami dynamicznymi.

4.5.3 Niestateczność typu geometrycznego

Przejdziemy teraz do szacowania momentu pojawienia się innego typu niestateczności w procesie jednorodnego rozciągania, na ogół nie związanego z niestatecznością typu dynamicznego, mianowicie, niestateczności typu geometrycznego w postaci tworzenia się szyjki. Rozważać będziemy możliwość niestabilności podstawowego procesu równomiernego rozciągania w zakresie $\dot{\lambda} > 0$, co oznacza, że znak nierówności (4.56) i (4.57) jest odwrócony. Korzystać będziemy nadal z kryterium niestabilności (4.52), przyjmując pola \vec{v} już nie proporcjonalne do \vec{v}^0 , ale odpowiadające postaci przewężenia próbki.

Założymy teraz, że $v=0$; w zakresie $\dot{\lambda} > 0$ można to zrobić bez straty ogólności rozważań. Istotnie, dowolne inne

dopuszczalne w (4.52) pole \tilde{w}^* takie, że $w_1^* = v^* = \text{const.}$ dla $x_1 = \ell$, daje się przedstawić w postaci $\tilde{w}^* = \tilde{w} + \gamma \tilde{v}^0$, gdzie $\gamma = v^*/v^0$ i $w_1 = 0$ dla $x_1 = \ell$. Korzystając z twierdzenia Greena, założonych warunków brzegowych, wzoru (4.55) i warunku $\lambda > 0$, otrzymujemy

$$(4.58) \quad I^0(\tilde{w}^*) = \int_V \frac{1}{2} G_{ijkl}^0 w_{j,i} w_{l,k} dV + \frac{1}{2} \gamma^2 (v^0)^2 \left(\frac{dP^0}{du} + K \right) \\ \geq \int_V \frac{1}{2} G_{ijkl}^0 w_{j,i} w_{l,k} dV = I^0(\tilde{w}),$$

Tak więc, jeżeli $I^0(\tilde{w}^*) < 0$, to tym bardziej $I^0(\tilde{w}) < 0$ dla $\tilde{w} = \tilde{w}^* - (v^*/v^0) \tilde{v}^0$, co wykazuje zasadność założenia $v=0$.

Dokładne określenie zakresu niestabilności, w którym zachodzi (4.52) dla pewnego \tilde{w} , wymaga znajomości wszystkich modułów \bar{L}_{ijkl}^0 , co z kolei jest praktycznie osiągalne tylko poprzez przyjęcie konkretnego modelu materiału. Jednakże, dla procesu jednoosiowego rozciągania można uzyskać sensowną górną ocenę momentu rozpoczęcia tworzenia się szyjki, bez konieczności precyzowania modelu materiału (z założenia ortotropowego). W tym celu, ograniczymy się do rozpatrzenia zawężonej klasy pól \tilde{w} postaci

$$(4.59) \quad \begin{aligned} w_1 &= \beta_1 \beta_2' \beta_3' \\ w_2 &= -\nu_2 \beta_1' \beta_2 \beta_3' \\ w_3 &= -\nu_3 \beta_1' \beta_2' \beta_3 \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.60) \quad \nu_2 = -\epsilon_2^0/\epsilon_1^0, \quad \nu_3 = -\epsilon_3^0/\epsilon_1^0$$

są znanymi współczynnikami, przyjętymi za dodatnie, a β_r są

funkcjami jednej zmiennej x_r ,

$$(4.61) \quad \beta_r = \beta_r(x_r), \quad \beta'_r = d\beta_r/dx_r$$

(bez sumowania po r). Przyjęcie pola $\overset{\vee}{w}$ postaci (4.59) daje związek

$$(4.62) \quad \epsilon_{33}^{\vee} : \epsilon_{22}^{\vee} : \epsilon_{11}^{\vee} = \epsilon_3^0 : \epsilon_2^0 : \epsilon_1^0,$$

który pozwala wyeliminować moduły typu $\overset{\vee}{L}_{rrss}$ ze wzoru (4.53), ponieważ w tym przypadku mamy

$$(4.63) \quad \sum_{r,s} \overset{\vee}{L}_{rrss}^0 \epsilon_{rr}^{\vee} \epsilon_{ss}^{\vee} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^{\vee} \\ \epsilon_0^{\vee} \\ \epsilon_1^{\vee} \end{pmatrix}^2 \sum_{r,s} \overset{\vee}{L}_{rrss}^0 \epsilon_r^0 \epsilon_s^0 = \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^{\vee} \\ \epsilon_0^{\vee} \\ \epsilon_1^{\vee} \end{pmatrix}^2 \epsilon_1^0 \epsilon_1^0 \\ = E_l (\epsilon_{11}^{\vee})^2.$$

Wpływ modułów ścinania $\overset{\vee}{L}_{rsrs}^0$ oszacujemy uwzględniając, że przyjmują one wartości ograniczone,

$$(4.64) \quad \overset{\vee}{L}_{rsrs}^0 \leq G, \quad r \neq s$$

powiedzmy, przez sprężysty moduł ścinania G . (Można wykazać, że dopuszczenie nieskończonych wartości modułów $\overset{\vee}{L}_{rsrs}^0$, co ma miejsce przy przejściu w granicy do materiałów sztywno-plastycznych o gładkiej powierzchni plastyczności, uniemożliwia skonstruowanie pola $\overset{\vee}{w}$ o założonych własnościach [123]).

Podstawiając (4.63) i (4.64) do (4.53), a uzyskane wyrażenie do (4.52), otrzymujemy następującą postać warunku wystarczającego do niestabilności procesu :

$$(4.65) \quad (E_t - \sigma_1) \int_V (\epsilon_{11}^V)^2 dV < \int_V \left\{ -4G ((\epsilon_{12}^V)^2 + (\epsilon_{13}^V)^2 + (\epsilon_{23}^V)^2) \right. \\ \left. + \sigma_1 ((\epsilon_{12}^V)^2 + (\epsilon_{13}^V)^2 + 2\epsilon_{12}^V \omega_{12}^V) \right. \\ \left. + 2\epsilon_{13}^V \omega_{13}^V - (\omega_{12}^V)^2 - (\omega_{13}^V)^2 \right\} dV$$

dla pewnego pola \tilde{w} postaci (4.60), spełniającego warunek $w_1=0$ dla $x_1=0$ i dla $x_1=l$.

Przyjmijmy funkcję β_1 postaci

$$(4.66) \quad \beta_1(x_1) = \sin \frac{K\pi x_1}{l}, \quad K = 1, 2, \dots$$

spełniającą powyższe warunki brzegowe dla w_1 , a funkcje β_2 i β_3 postaci

$$(4.67) \quad \beta_2(x_2) = \sin \frac{K\pi x_2 \sqrt{V_2}}{l},$$

$$\beta_3(x_3) = \sin \frac{K\pi x_3 \sqrt{V_3}}{l},$$

co daje $\epsilon_{12}^V \equiv \epsilon_{13}^V \equiv 0$. Oczywiście, powyższy dobór funkcji β_r jest arbitralny; można starać się poprawić uzyskane przy tym wyborze oszacowanie wartości krytycznych, jednakże kosztem skomplikowania obliczeń. Łatwo sprawdzić, że pole \tilde{w} określone przez (4.59) wraz z (4.66) i (4.67) rzeczywiście stanowi kinematycznie dopuszczalną postać zapoczątkowania tworzenia się szyjki, przy czym dla $K=1$ przewężenie powstaje przy końcu ($x_1=l$) próbki, dla $K=2$ w środku długości próbki; wartości $K \geq 3$ mają mniejsze znaczenie praktyczne.

Po nieskomplikowanych obliczeniach otrzymujemy z (4.65)

następujący wynik końcowy: proces równomiernego rozciągania jest niestabilny, jeżeli

$$(4.68) \quad E_t < \sigma_1 - \frac{\nu_2 \Phi_2 + \nu_3 \Phi_3}{\Psi} \sigma_1 - \frac{4\nu_2 \nu_3 \theta}{\Psi} G,$$

gdzie

$$(4.69) \quad \begin{aligned} \Phi_2 &= \iint_A \sin^2 \frac{K\pi x_2 \sqrt{\nu_2}}{\ell} \cos^2 \frac{K\pi x_3 \sqrt{\nu_3}}{\ell} dx_2 dx_3, \\ \Phi_3 &= \iint_A \sin^2 \frac{K\pi x_3 \sqrt{\nu_3}}{\ell} \cos^2 \frac{K\pi x_2 \sqrt{\nu_2}}{\ell} dx_2 dx_3, \\ \Psi &= \iint_A \cos^2 \frac{K\pi x_2 \sqrt{\nu_2}}{\ell} \cos^2 \frac{K\pi x_3 \sqrt{\nu_3}}{\ell} dx_2 dx_3, \\ \theta &= \iint_A \sin^2 \frac{K\pi x_2 \sqrt{\nu_2}}{\ell} \sin^2 \frac{K\pi x_3 \sqrt{\nu_3}}{\ell} dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

W przypadku smukłych próbek, wartości sinusów w wyrażeniach podcałkowych można zastąpić wartościami ich argumentów, a w miejsce cosinusów podstawić jedynki. W ten sposób, dla smukłych próbek o przekroju prostokątnym $2b_2 \times 2b_3$ otrzymujemy przybliżony wzór

$$(4.70) \quad E_t^c \approx \left(1 - \frac{1}{3} \gamma_2^2 - \frac{1}{3} \gamma_3^2\right) \sigma_1^c - \frac{4}{9} \gamma_2^2 \gamma_3^2 G, \quad \gamma_r = \frac{K\nu_r b_r}{\ell},$$

gdzie σ_1^c oznacza oszacowanie wartości krytycznej naprężenia rozciągającego w chwili rozpoczęcia tworzenia się szyjki, a E_t^c jest modulem wzmocnienia, odpowiadającym wartości σ_1^c , zgodnie z krzywą umocnienia. Dla smukłych, transwersalnie izotropowych,

($\nu_2 = \nu_3 = \nu$), cylindrycznych próbek o promieniu R otrzymujemy przybliżony wzór

$$(4.71) \quad E_c^c \approx (1 - \frac{1}{2} \gamma^2) \sigma_1^c - \frac{1}{6} \gamma^4 G, \quad \gamma = \frac{K\pi R}{L}$$

Wzory (4.70) i (4.71) można porównać z podobnymi wzorami, uzyskanymi poprzez zastosowanie podejścia bifurkacyjnego odpowiednio przez Milesa [124] i Hutchinsona i Milesa [83] dla szczególnego przypadku nieściśliwego materiału sprężysto-plastycznego o gładkiej powierzchni plastyczności. Pomimo dosyć arbitralnego wyboru pola \tilde{w} , określającego postać niestabilności procesu, występuje zgodność do członów rzędu γ^2 włącznie. Zgodnie z ogólnym porównaniem rezultatów uzyskiwanych z obu podejść, przedstawionym w punkcie 4.4.1 dla znacznie szerszej klasy zagadnień, pole \tilde{w} dające najlepszą ocenę momentu utraty stabilności procesu, określanego z warunku (4.52), pokrywałoby się z rozwiązaniem zagadnienia na wartości własne, wynikającego z podejścia bifurkacyjnego. W konsekwencji, dla takiego pola \tilde{w} uzyskalibyśmy dokładne pokrywanie się rezultatów, uzyskanych z obu podejść. Warto jednak podkreślić, że energetyczne kryterium niestabilności (4.68) i wynikające z niego wzory (4.70) i (4.71) uzyskane zostały bez konieczności rozwiązywania jakiegokolwiek układu równań, oczywiście, kosztem pogorszenia (praktycznie mało istotnego dla smukłych próbek) dokładności oszacowania.

Analiza kryteriów niestabilności (4.56) i (4.68) prowadzi do następujących wniosków:

1^o Gdy smukłość próbki (stosunek maksymalnego wymiaru poprzecznego do długości) dąży do nieskończoności, to dwa ostatnie człony po prawej stronie nierówności (4.68) dążą do zera. Dla bardzo smukłych próbek, niestateczności typu geometrycznego należy się spodziewać z chwilą, gdy $E_c < \sigma_1$, a

więc natychmiast po przekroczeniu punktu maksimum siły rozciągającej, bez względu na kształt przekroju próbki i szczegóły modelu konstytutywnego (sprężysto-plastycznego) materiału. Dalszy proces niérównomiernych deformacji może przebiegać w sposób quasi-statyczny, jeżeli nie zachodzi nierówność (4.56) (niestateczność typu dynamicznego), t. j. jeżeli urządzenie obciążające jest wystarczająco "sztywne".

2° Dla danego materiału i danego urządzenia obciążającego, moment pojawienia się niestateczności typu geometrycznego lub dynamicznego, a także kolejność ich wystąpienia, zależy od wymiarów próbki; jest to wyraźnie widoczne ze wzorów (4.57) i np. (4.71).

Zachodzi pytanie, czy można uzyskać dolne oszacowanie momentu utraty stabilności, stanowiące uzupełnienie górnych oszacowań (4.57) i (4.68). Aby na to pytanie odpowiedzieć, rozważymy najpierw dwie dalsze postaci niestabilności.

4.5.4 Niestateczność typu konstytutywnego

W tym punkcie rozpatrzymy szczególną możliwość, że postać niestabilności, prowadząca do nierówności (4.24), jest polem prędkości o stałym gradiencie, $\nabla v = \text{const.}$ Jest oczywiste, że ta możliwość jest ściśle związana z konkretną postacią przyjętych warunków brzegowych dla procesu rozciągania. Przypuśćmy, że dla pewnego ξ zachodzi nierówność

$$(4.72) \quad \bar{V}(\xi) < \bar{V}(\xi^0) \quad \text{przy } \epsilon_{1i} = \epsilon_{1i}^0,$$

równoważna, wskutek (4.47), nierówności

$$(4.72)' \quad U(\xi) < U(\xi^0) \quad \text{przy } \epsilon_{1i} = \epsilon_{1i}^0.$$

Wówczas równomierny przyrost deformacji próbki, odpowiadający

prędkości odkształcenia $\underline{\epsilon}$ zamiast $\underline{\epsilon}^0$, odpowiada mniejszej wartości funkcjonału (4.51), tzn. wymaga dostarczenia mniejszej ilości energii do układu, niż przyrost deformacji zgodny z $\underline{\epsilon}^0$. Wynika to natychmiast z obserwacji, że odpowiednie pola prędkości dają tę samą wartość v wskutek ograniczenia $\epsilon_{11} = \epsilon_{11}^0$. Nierówność (4.72) jest więc warunkiem dostatecznym dla niestabilności energetycznej podstawowego procesu deformacji. Ten szczególny rodzaj niestateczności nazwiemy niestatecznością typu konstytutywnego, jako że odpowiedni warunek niestateczności zależy tylko od postaci potencjału konstytutywnego \bar{V} . Warunek

$$(4.73) \quad \bar{V}(\underline{\epsilon}) \geq \bar{V}(\underline{\epsilon}^0) = \frac{1}{2} E_t (\epsilon_1^0)^2 \quad \text{dla wszystkich } \underline{\epsilon} \text{ takich, że } \epsilon_{11} = \epsilon_{11}^0$$

jest więc konieczny dla stabilności procesu. Nierówność (4.73) pociąga za sobą nierówność

$$(4.74) \quad \bar{L}_{ijkl}^0 \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \geq E_t (\epsilon_1^0)^2 \quad \text{dla wszystkich } \underline{\epsilon} \text{ takich, że } \epsilon_{11} = \epsilon_{11}^0.$$

Niespełnienie warunku (4.74) umożliwia spełnienie warunku niestabilności (4.52) przy $\nabla \underline{w} = \text{const}$. Ponieważ $\epsilon_{12}^0 = \epsilon_{13}^0 = 0$, to warunek (4.74) można równoważnie zapisać w postaci

$$(4.74)' \quad \bar{L}_{ijkl}^0 \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \geq E_t (\epsilon_{11}^0)^2 \quad \text{dla wszystkich } \underline{\epsilon} \text{ takich, że } \epsilon_{12} = \epsilon_{13} = 0.$$

Przy założonej ortotropowej symetrii, po uwzględnieniu, że $\bar{r}_{ij}^0 = 0$ z wyjątkiem $i=j=1$, otrzymujemy, że nierówność (4.74) jest równoważna równoczesnemu spełnieniu następujących dwóch nierówności

$$(4.75) \quad \sum_{r,s=2,3} L_{rrss}^0 q_r q_s \geq 0 \quad \text{dla wszystkich liczb } q_2, q_3,$$

$$(4.76) \quad L_{2323}^0 \geq 0.$$

Przejawem niestateczności typu konstytutywnego może być dalsza quasi-statyczna, równomierna deformacja próbki, różniaca się od deformacji podstawowej.

4.5.5 Niestateczność typu lokalnego

Innym rodzajem niestateczności w próbie rozciągania może być lokalizacja odkształceń w paśmie ścinania. Odpowiednim warunkiem niestabilności będzie, zgodnie z Kryterium 7, podanym dalej w Rozdziale 5, nierówność

$$(4.77) \quad C_{ijkl}^0 \nu_i \nu_k \epsilon_j \epsilon_l < 0 \quad \text{dla pewnych } \nu, \xi,$$

która po podstawieniu (4.46) sprowadza się do nierówności

$$(4.78) \quad L_{ijkl}^0 \nu_i \nu_k \epsilon_j \epsilon_l < \frac{1}{2} \sigma_{ij} (\epsilon_i \epsilon_j |\nu|^2 - \nu_i \nu_j |\xi|^2 + 2 \nu_i \epsilon_j \nu_k \epsilon_k).$$

Po uwzględnieniu ortotropowej symetrii modułów L_{ijkl}^0 i jednoosiowości stanu naprężenia, warunek niestabilności (4.78) przyjmuje postać (por. (4.53))

$$(4.79) \quad \sum_{r,s} L_{rrss}^0 \nu_r \epsilon_r \nu_s \epsilon_s + \frac{1}{2} \sum_{\substack{r,s \\ r \neq s}} L_{rrss}^0 (\nu_r \epsilon_s + \nu_s \epsilon_r)^2 < \frac{1}{2} \sigma_1 (\epsilon_1^2 |\nu|^2 - \nu_1^2 |\xi|^2 + 2 \nu_1 \epsilon_1 \nu_k \epsilon_k),$$

W szczególności, (4.79) zachodzi dla $\xi = a^1$ i $\nu = a^2$ lub $\nu = a^3$, gdy

$$(4.80) \quad \Gamma_{1212}^0 < \frac{1}{2}\sigma_1 \quad \text{lub} \quad \Gamma_{1313}^0 < \frac{1}{2}\sigma_1 .$$

Nierówności (4.80) można interpretować jako warunki lokalizacji odkształceń w pasmach ścinania biegnących równolegle do osi rozciągania. Zwróćmy uwagę, że wbrew dosyć rozpowszechnionemu mniemaniu, lokalizacja może się rozpocząć przy dodatnich wartościach modułów ścinania. Łatwo sprawdzić, że spełnienie nierówności

$$(4.81) \quad \Gamma_{1212}^0 \geq \frac{1}{2}\sigma_1 \quad \text{i} \quad \Gamma_{1313}^0 \geq \frac{1}{2}\sigma_1 ,$$

łącznie z (4.75) i (4.76), wyklucza (4.79) przy $\nu_1=0$ (a tym bardziej przy $\epsilon_1=0$).

W ogólnym przypadku pasmą lokalizacji odkształceń biegnącego skośnie do osi rozciągania, warunek (4.79) trudno jest dalej uprościć, a moment lokalizacji określany z tego warunku silnie zależy od wzajemnych stosunków wartości poszczególnych modułów Γ_{ijkl}^0 . Bez wprowadzenia konkretnego modelu materiału, dalsza analiza warunku (4.79) napotyka na trudności.

4.5.6 Dolne oszacowanie momentu krytycznego

Powyżej analizowaliśmy warunki dostateczne dla niestabilności, wyrażone w modułach stycznych Γ_{ijkl}^0 , nie badając możliwości wcześniejszej utraty stabilności, związanej z nieliniowością potencjału \bar{W} . Takie postępowanie jest uzasadnione w przypadku materiałów, dla których zachodzi nierówność konstytutywna (3.73). Dla tych materiałów, na mocy Lematu 3.1, zachodzi bowiem nierówność (3.86), równoważna (3.86)'. W konsekwencji, w rozpatrywanym przykładzie jednoosiowego rozciągania, nierówność (4.52) jest nie tylko dostateczna, ale i konieczna dla (4.24), a tym samym i dla

(4.15). Podobnie, nierówność (4.74) jest równoważna (4.73), a nierówność (4.77) nierówności (4.43). Tak więc, badanie, przy pomocy Kryterium 2, niestabilności procesu rozciągania próbki z materiału, dla którego spełniona jest nierówność konstytutywna (3.73), sprowadza się do badania, przy pomocy warunku (4.52), niestabilności stanu równowagi styycznego ciała porównawczego.

W celu uzyskania dolnego oszacowania momentu krytycznego (w sensie Kryterium 2 lub 3), rozważmy następujące warunki:

- (i) $E_1 \geq \sigma_1$ (t.j. siła P w procesie podstawowym jest niemalejająca),
- (ii) spełniona jest nierówność konstytutywna (3.73),
- (iii) zachodzą dalsze nierówności konstytutywne (4.75) i (4.76) (czyli że wykluczona jest niestateczność typu konstytutywnego),
- (iv) zachodzą nierówności (4.81) (a więc niespełniony jest energetyczny warunek lokalizacji w paśmie równoległym do osi rozciągania),

Wykażemy, że

jeżeli spełnione są powyższe warunki (i) + (iv), to zachodzi nierówność (4.25) dla funkcjonału (4.51)

(a więc quasi-statyczny proces równomiernego rozciągania próbki może być stateczny).

Dowód. Z założenia (ii) na mocy Lematu 3.1 wynika nierówność (3.86)'. W analogiczny sposób jak w punkcie 4.4.1 można wykazać, że tożsamość (4.29) pozostaje słuszna dla funkcjonałów \mathcal{J} i I^0 określonych wzorami (4.51) i (4.52). Stąd

$$(4.82) \quad \mathcal{J}(\vec{y}) - \mathcal{J}(\vec{y}^0) \geq I^0(\vec{y} - \vec{y}^0).$$

Z założenia (i) wynika, że wykluczona jest nierówność (4.57), a więc i nierówność (4.56); zachodzi więc nierówność (4.58).

Pozostaje więc do wykazania, że

$$(4.83) \quad \int_V U^0[\underline{w}] dV \equiv \int_V \frac{1}{2} C_{ijkl}^0 w_{j,i} w_{l,k} dV \geq 0$$

dla wszystkich pól \check{V} spełniających warunek $w_1=0$ dla $x_1=0$ i $x_1=L$. Ze wzoru (4.53) wynika, że dla zadanego \check{V} wyrażenie podcałkowe we wzorze (4.83) osiąga minimalną wartość dla $w_{12}^V = \epsilon_{12}^V$ i $w_{13}^V = \epsilon_{13}^V$ i nie zależy od w_{23}^V [64]. Wyrażenie to będzie więc nieujemne, gdy (por. (4.53))

$$(4.84) \quad \frac{1}{2} \sum_{r,s} \Gamma_{rrss}^0 \epsilon_{rr} \epsilon_{ss} - \frac{1}{2} \sigma_1 (\epsilon_{11})^2 + \sum_{\substack{r,s \\ r \neq s}} \Gamma_{rars}^0 (\epsilon_{rs})^2 - \sigma_1 ((\epsilon_{12})^2 + (\epsilon_{13})^2) \geq 0$$

dla wszystkich \check{V} . Z założonych nierówności (4.76) i (4.81) otrzymujemy, że suma członów zawierających ϵ_{rs} , $r \neq s$, jest nieujemna. Pozostaje więc do wykazania prawdziwość nierówności

$$(4.85) \quad \Gamma_{ijkl}^0 \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \geq \sigma_1 (\epsilon_{11})^2 \quad \text{gdy } \epsilon_{ij} = 0 \text{ dla } i \neq j.$$

Ale zaobserwowaliśmy już powyżej, że z założenia (iii) wynika nierówność (4.74)', która wskutek (i) pociąga za sobą (4.85). Dowód został zakończony.

Jeżeli warunek (i) zastąpimy nieco silniejszym warunkiem $E_1 > \sigma_1$ (tj. że siła rozciągająca rośnie w procesie podstawowym), to znak nierówności (4.83) jest ostry dla $\check{w} \neq 0$ (przy $w=0$). Istotnie, ponieważ $\epsilon_1^0 > 0$ z założenia, to dla każdego dopuszczalnego $\check{w} \neq 0$ (przy $w=0$) musi być $\epsilon_{11}^V > 0$ przynajmniej w pewnej objętości próbki. W tej objętości mamy ostrą nierówność (4.85), a wskutek tego, przez odwrócenie argumentacji z dowodu, $U[\check{w}] > 0$ w tej objętości i $U[\check{w}] \geq 0$ wszędzie, co po scałkowaniu

i uwzględnieniu (4.58) daje $I^0(\vec{u}) > 0$. Łatwo sprawdzić, że Kryterium 3.1 jednoznaczności nadal obowiązuje, a więc do punktu maksimum siły bifurkacja jest wykluczona; z (4.82) wynika przy tym zasada ścisłego minimum (3.16).

Udowodniliśmy w ten sposób, że przy wznrastającej sile rozciągającej oraz przy podanych wyżej założeniach (ii), (iii) i (iv), bifurkacja procesu rozciągania jest wykluczona oraz zachodzi nierówność (3.16) w klasie kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości.

Powyższy wynik stanowi uogólnienie rezultatów Hilla [55] [64] i Milesa [123], uzyskane wskutek osłabienia założeń dotyczących materiału.

5. KRYTERIA LOKALIZACJI ODKSZTAŁCENÍ PLASTYCZNYCH W TRÓJWYMIAROWYM KONTINUUM

Jest rzeczą dobrze znaną, że odkształcenia plastyczne w metalach nie są w rzeczywistości nigdy równomierne, wskutek np. dyskretnej natury poślizgów (wywołanych ruchem dyslokacji) w kryształach względnie różnic w deformacjach ziaren o różnych orientacjach krystalograficznych w polikryształach. Tym niemniej, w odpowiedniej skali obserwacji, odkształcenia plastyczne mogą być w wielu przypadkach traktowane z dobrym przybliżeniem jako równomierne, zarówno w skali pojedynczego kryształu, jak w skali próbki z materiału polikrystalicznego. Z kolei, liczne doświadczenia wykazują, że przy dostatecznie dużych odkształceniach, dalsze deformacje zachodzą już w sposób wyraźnie niejednorodny, często (choć nie tylko - zob. np. [40]) wskutek lokalizowania się odkształceń w wąskich obszarach, zwanych "pasmami ścinania". (Omówienie tego zjawiska z odnośnikami do literatury można znaleźć w pracy Rice'a [160];

zob. także [142] [2] [48] [101] i prace tam cytowane). Przyczyny i przebieg tego zjawiska nie są dotychczas w pełni wyjaśnione. Przy ograniczeniu się do rozpatrywania tylko powolnych, izotermicznych procesów deformacji (kryteria lokalizacji przy dużych prędkościach odkształcenia omówiono w pracy [19]), można wyróżnić, w ramach czystej mechaniki sprężysto - plastycznego kontinuum, dwa rozwijane w literaturze podejścia teoretyczne do zjawiska lokalizacji odkształceń w pasmach ścinania. W maksymalnym skrócie można określić jedno z nich jako "bifurkacyjne", a drugie jako "imperfekcyjne".

Zacznijmy od pobieżnego omówienia podejścia "imperfekcyjnego", które jest mniej związane z przedstawionymi dalej rezultatami badań własnych. Podstawowa idea polega na wprowadzeniu w materiale wyjściowym pewnego zaburzenia jednorodności, a następnie na śledzeniu, z konieczności na drodze obliczeń numerycznych, rozwoju nierównomierności plastycznego płynięcia, wywołanej tą niejednorodnością. Przenosząc na przypadek trójwymiarowego kontinuum zaproponowaną przez Marciniaka [117] [119] [118] metodę analizy zbliżonego zjawiska lokalizacji w rozciąganych blachach, często przyjmuje się początkowe zaburzenie jednorodności takie samo w całym paśmie, które w efekcie staje się pasmem ścinania. Wadą tej metody jest konieczność arbitralnego założenia orientacji pasma ścinania, powiększoną jeszcze o wrażliwość na (dowolnie przyjmowaną) wartość początkowego odchylenia od jednorodności. Z kolei, w analizie procesu lokalizacji, dokonywanej metodą elementów skończonych, obok powyższej wrażliwości występuje dodatkowo wrażliwość na kierunek linii siatki i na rozmiar jej oczek. Podejście "imperfekcyjne" stosowano m. inn. w pracach [132] [84] [1] [186] [184] [142] [112] [162].

W podejściu "bifurkacyjnym" nie wprowadza się sztucznie jakichkolwiek niejednorodności: przyjmuje się, że początek lokalizacji następuje w chwili osiągnięcia pewnego stanu

krytycznego, w którym, oprócz dalszej równomiernej deformacji, możliwa jest bifurkacja w prędkościach wewnątrz pasma o stałej grubości. To podejście, obecnie szeroko wykorzystywane, przedstawione zostanie w punkcie 5.1. Należy zaznaczyć, że rozważane pasmo przebiega w jednorodnym kontinuum o nieokreślonym brzegu, a nie w ograniczonym ciele materialnym przy zadanych warunkach brzegowych. Przypadek bifurkacji w paśmie nie jest więc ujęty w teorii bifurkacji, przedstawionej w Rozdziale 3, i jest traktowany w odrębny sposób niż bifurkacje typu "geometrycznego", odpowiadające początkowi wyboczenia lub tworzenia się szyjki.

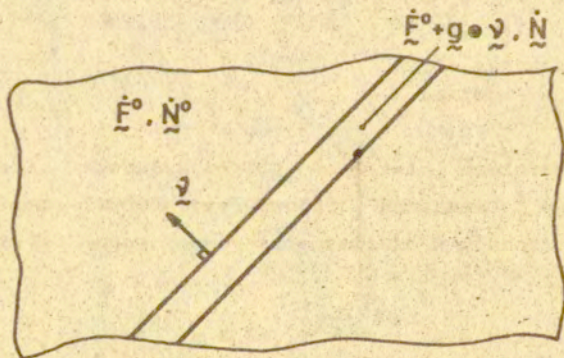
W punkcie 5.2 przedstawimy nowe, energetyczne podejście do określania początku lokalizacji, wynikające z podstawowego Kryterium 1; tak więc, lokalizacja odkształceń w materiale będzie rozpatrywana w ramach tego samego, jednolitego podejścia energetycznego, co zagadnienia niestateczności globalnej. Sprecyzujemy okoliczności, w jakich podejścia bifurkacyjne i energetyczne do zagadnienia lokalizacji prowadzą do identycznych rezultatów.

Z kolei w punkcie 5.3 rozpatrzmy możliwość lokalnej utraty stabilności stanu równowagi, prowadzącej do raptownej lokalizacji odkształceń plastycznych w wyniku procesu dynamicznego. Obserwacje metalurgiczne sugerują taką możliwość (zob. np. [48] [101]). Zostanie sformułowane i przedyskutowane odpowiednie kryterium energetyczne dla tego zjawiska.

Bifurkacyjne i energetyczne kryteria lokalizacji odkształceń są z reguły bardzo czułe na szczegóły modelu konstytutywnego materiału, przykładowo na obecność chociażby nieznacznie zarysowanego naroża na powierzchni plastyczności. Szczegółowa analiza tej wrażliwości wykraczałaby jednak poza ramy niniejszej pracy.

5.1 Bifurkacja w pasmach ścinania

Przedstawimy poniżej, za pracą Rice'a [160], podstawowe równania teorii bifurkacji w pasmach ścinania, bazującej na wcześniejszych pracach Hadamarda [46], Thomasa [178], Hilla [59] i Mandela [114]. Rozważmy jednorodny, równomiernie odkształcone kontinuum o własnościach niezależnych od czasu rzeczywistego. Niech to kontinuum będzie poddane dalszemu przyrostowi deformacji w warunkach, jakie mogłyby dać w wyniku jednorodnego pola $\dot{\underline{F}}^0, \dot{\underline{N}}^0$. Chcemy stwierdzić, czy możliwa jest bifurkacja w prędkościach w paśmie o orientacji ψ w konfiguracji odniesienia (Rys. 4), takie, że $\dot{\underline{F}}$ w paśmie zależne jest tylko od $\zeta = \zeta_i v_i$ (tj. od położenia mierzonego w poprzek pasma), podczas gdy przyrostowe równanie równowagi $\dot{N}_{ij,i} = 0$ (dla $b = \text{const}$) jest spełnione. Przyjmuje się tu, że poza pasmem



Rys. 4

wartości $\dot{\underline{F}}^0, \dot{\underline{N}}^0$ pozostają takie, jak przy deformacji jednorodnej. Do spełnienia są dwa warunki. Z ciągłości pola prędkości wynika warunek pierwszy, kinematyczny,

$$(5.1) \quad \dot{F}_{ji} - \dot{F}_{ji}^0 = \xi_j \nu_i,$$

gdzie wektor ξ jest pewną funkcją ξ , różną od zera wewnątrz pasma. Przy warunku (5.1), \dot{N} może zależeć tylko od ξ , a więc przyrostowe równanie równowagi przyjmuje postać $\nu_i \partial \dot{N}_{ij} / \partial \xi = 0$. Wynika stąd warunek drugi, statyczny,

$$(5.2) \quad (\dot{N}_{ij} - \dot{N}_{ij}^0) \nu_i = 0.$$

Przyjmując odcinkowo-liniowy związek konstytutywny (2.34) (Rice [160] stosuje inną kolejność wskaźników - moduły C_{ijkl} w niniejszej pracy odpowiadają L_{ijkl} w [160] - i nie zakłada symetrii modułów) i podstawiając go do (5.2), otrzymujemy równanie na kinematyczną nierównomierność ξ ,

$$(5.3) \quad (C_{ijkl} \nu_i \nu_k) \xi_l = \nu_i (C_{ijkl}^0 - C_{ijkl}) \dot{F}_{ik}^0,$$

gdzie $C_{ijkl} = C_{ijkl}(\dot{F}^0 + \xi \otimes \nu)$ i C_{ijkl}^0 oznaczają odpowiednio moduły obowiązujące w paśmie i poza pasmem. Równanie (5.3) ma zawsze trywialne rozwiązanie $\xi = 0$; początek lokalizacji następuje w pierwszym punkcie na drodze deformacji, w którym istnieje rozwiązanie nietrywialne.

W najprostszym przypadku, wartości modułów obowiązujące w paśmie i poza nim są takie same, $C_{ijkl} = C_{ijkl}^0$. Wówczas z (5.3) otrzymujemy kryterium początku lokalizacji w postaci

$$(5.4) \quad \det(C_{ijkl}^0 \nu_i \nu_k) = 0.$$

Równanie (5.4) lub jemu równoważne było przyjmowane w wielu pracach za kryterium zapoczątkowania lokalizacji w paśmie ścinania, np. [72] [163] [173] [160] [7] [132] [5] [3] [187] [84] [4] [142] [141] [26]. Rzadziej był analizowany w

literaturze ogólniejszy przypadek (5.3), gdy moduły w paśmie nie są równe C_{ijkl}^0 . Wymienimy tu prace: [161] [100] [29] [16] [113].

Stopień zgodności pomiędzy przewidywanymi na podstawie powyższej teorii momentem zapoczątkowania lokalizacji i orientacją pasma z danymi doświadczalnymi zależy w dużej mierze od wyboru prawa konstytutywnego dla materiału; zgodność ta nie zawsze jest zadowalająca (zob. np. [2]). Z teoretycznego punktu widzenia, podejście "bifurkacyjne" do zagadnienia lokalizacji budzi następujące zastrzeżenia:

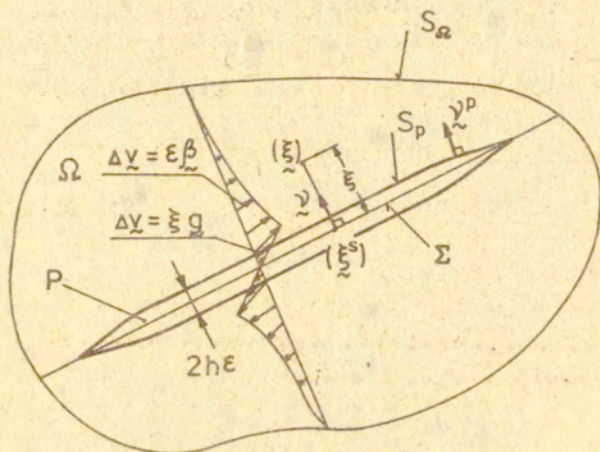
- a) Zakłada się, że materiał jest jednorodny i równomiernie odkształcony. Ponieważ w rzeczywistości pojawienie się pasm ścinania jest często poprzedzone wyraźnie nierównomierną deformacją, np. wskutek wcześniejszego tworzenia się szyjki przy rozciąganiu, to powstaje kwestia interpretacji warunku bifurkacji w paśmie w takich przypadkach. Najczęstsza interpretacja jest taka, że bifurkacja ma sens "lokalny"; nie jest to jednak w tym przypadku pojęcie ściśle.
- b) Nawet gdy ciało jest w rozpatrywanym momencie jednorodne, to pole prędkości w paśmie narusza zwykle warunki brzegowe na jego przecięciu z powierzchnią ciała. Pomijając pewne konfiguracje o szczególnej symetrii, w ciele o skończonych wymiarach pasmo musi być w momencie (ściśle pojmowanej) bifurkacji nieskończenie cienkie [72], tymczasem w teorii ma ono pewną, choć nieokreśloną grubość.
- c) Spełnienie warunku bifurkacji w paśmie, np. (5.4), oznacza tylko możliwość, w dodatku niezbyt precyzyjnie określoną, deformacji innej niż równomierna. W ramach teorii bifurkacji brak jest argumentu, dlaczego dalsza deformacja musi być nierównomierna, prowadząc do lokalizacji odkształceń.

5.2 Energetyczne kryteria lokalizacji odkształceń w pasmach ścinania

Rozważmy ciało sprężysto-plastyczne w pewnym stadium zaawansowania podstawowego procesu deformacji χ^0 . W tym punkcie, jak również w punktach 4.4.3 i 5.3, warunki brzegowe na powierzchni ciała mogą być dowolne (założenie o konserwatywności obciążenia można odrzucić). Weźmy pod uwagę pewien wycinek ciała, tzn. podobzar $\Omega \subset V$ w konfiguracji odniesienia. Rozpatrzmy możliwe kinematycznie dopuszczalne odgałęzienie procesu przy prędkościach na brzegu i na zewnątrz wycinka pokrywających się z $\dot{\gamma}^0$. Chcemy określić warunek, przy którym istnieje postać odgałęzienia, odpowiadająca początkowej fazie lokalizacji odkształceń w pewnym wąskim obszarze wewnątrz Ω i wymagająca doprowadzenia mniejszej ilości energii do układu niż z założenia gładka deformacja podstawowa. Dla uproszczenia, a także w celu porównania z podejściem bifurkacyjnym przyjmujemy, że obszar Ω jest jednorodny i równomiernie odkształcany w procesie χ^0 , a siły masowe są ustalone ($\dot{h} = 0$); tak więc, \dot{F}^0 i \dot{N}^0 są w danej chwili stałe w Ω . Istotna różnica w samym sformułowaniu problemu polega na tym, że w podejściu bifurkacyjnym nie rozpatruje się warunków brzegowych dla obszaru Ω , natomiast obecnie nakładamy na brzeg obszaru Ω warunek kinematyczny $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}^0$; dowolne warunki brzegowe dla ciała są przy tym automatycznie spełnione, gdyż $\dot{\gamma} \neq \dot{\gamma}^0$ tylko we wnętrzu Ω . Przyrostowe prawo konstytutywne przyjmujemy w postaci (2.27) z dowolnie nieliniowym potencjałem V .

Przyjmijmy, że lokalizacja odkształceń rozpoczyna się w pewnym podobzdarze $P \subset \Omega$ w kształcie dysku o zmiennej grubości $2h(\xi^0)\varepsilon$, gdzie $h(\xi^0)$ jest zadaną gładką funkcją wektora położenia ξ^0 punktu na płaszczyźnie środkowej dysku Σ , a ε jest małym dodatnim parametrem. Można przyjąć (choć nie jest to konieczne), że dysk ma postać "pasma ścinania" o stałej

grubości, z wyjątkiem strefy przejściowej w pobliżu jego krawędzi (Rys. 5). Załóżmy, że wewnątrz dysku różnica $\Delta \vec{v} = \vec{v} - \vec{v}^0$



Rys. 5

gradientów prędkości dla pól \vec{v} i \vec{v}^0 ma wartość stałą, równą ξg , gdzie ν jest jednostkowym wektorem normalnym do płaszczyzny środkowej dysku, a ξ jest dowolnym ustalonym wektorem (gdy $\xi \perp \nu$ to pole prędkości \vec{v} w obszarze P odpowiada nałożonemu na pole \vec{v}^0 prostemu ścinaniu). Zgodnie z tym założeniem, niech

$$(5.5) \quad \Delta v(\xi) = \begin{cases} \xi \xi & \text{dla } \xi \in P, \\ \epsilon \beta(\epsilon, \xi) & \text{dla } \xi \in P, \xi \in \Omega, \\ 0 & \text{dla } \xi \in \Omega, \end{cases}$$

a więc

$$(5.6) \quad \Delta \vec{F}_{j,i}(\xi) = \begin{cases} \varepsilon_j v_i & \text{dla } \xi \in P, \\ \varepsilon \beta_{j,i} & \text{dla } \xi \in P, \xi \in \Omega, \\ 0 & \text{dla } \xi \in \Omega, \end{cases}$$

gdzie $\xi = v_i (\xi_i - \xi_i^0)$, przy czym ξ^0 jest rzutem punktu ξ na płaszczyznę środkową dysku, oraz $\beta(\varepsilon, \xi)$ jest pewnym ciągłym i odcinkowo gładkim, zależnym od ε polem wektorowym na $\Omega \setminus P$, spełniającym warunki ciągłości.

$$(5.7) \quad \beta(\varepsilon, \xi) = \text{sign}(\xi) h(\xi^0) \xi = \frac{\chi}{\varepsilon} \xi \quad \text{na } S_P,$$

$$\beta(\varepsilon, \xi) = 0 \quad \text{na } S_\Omega;$$

S_P jest tu powierzchnią dysku P , a S_Ω powierzchnią obszaru Ω . Zauważmy, że wartości β na S_P nie zależą od ε ; można więc tak dobrać funkcję $\beta(\varepsilon, \xi)$, że $|\nabla \beta(\varepsilon, \xi)| < M$ ($M = \text{const.} > 0$) dla każdego ξ przy dostatecznie małym ε . Jest widoczne, że dla dostatecznie małych ε różnica gradientów prędkości $\Delta \vec{F}$ poza dyskiem (paśmie) może być dowolnie mała w porównaniu z taką różnicą w paśmie, nigdy jednak nie zeruje się tożsamościowo, jak to przyjmuje się w podejściu bifurkacyjnym. Natomiast prędkość deformacji w paśmie może być dowolnie duża w porównaniu z prędkościami odkształcenia w procesie podstawowym; przyjęta postać (5.5) odgałęzienia procesu odpowiada więc kinematycznie dopuszczalnej postaci lokalizacji odkształceń w paśmie.

Przy przyjętych założeniach, z Kryterium 2 lub 3 otrzymujemy następujący warunek dostateczny dla niestabilności podstawowego procesu deformacji

$$(5.8) \quad \frac{1}{2} \Delta \dot{E} = \int_{\Omega} \langle U[y] - U[y^0] \rangle dV < 0;$$

warunek ten wynika też z zaprzeczenia warunku quasi-wypukłości (4.38). Podstawiając (5.6) do wyrażenia po lewej stronie nierówności (5.8) i biorąc pod uwagę, że ε jest małym parametrem, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\Delta\ddot{E} &= |P| \langle U(\dot{\underline{F}}^0 + \xi \otimes \underline{\nu}) - U(\dot{\underline{F}}^0) \rangle + \int_{\Omega \setminus P} \langle U(\dot{\underline{F}}^0 + \varepsilon \nabla \beta) - U(\dot{\underline{F}}^0) \rangle dV \\
 (5.9) \quad &= |P| \langle U(\dot{\underline{F}}^0 + \xi \otimes \underline{\nu}) - U(\dot{\underline{F}}^0) \rangle + \int_{\Omega \setminus P} \varepsilon \dot{N}_{ij}^0 \beta_{j,i} dV + \dots,
 \end{aligned}$$

gdzie wykropkowano człony rzędu wyższego niż liniowy względem ε . Ostatnia całka we wzorze (5.9) sprowadza się, bez żadnych uproszczeń, do postaci

$$(5.10) \quad \int_{\Omega \setminus P} \varepsilon \dot{N}_{ij}^0 \beta_{j,i} dV = |P| \dot{N}_{ij}^0 \varepsilon_j \nu_i,$$

gdyż \dot{N}^0 nie zależy od ξ , oraz

$$(5.11) \quad \int_{\Omega \setminus P} \varepsilon \beta_{j,i} dV = - \int_{S_P} \xi \varepsilon_j \nu_i^P dS = - \varepsilon_j \int_P \xi_{,i} dV = - |P| \nu_i \varepsilon_j.$$

Pierwsza równość w (5.11) wynika z twierdzenia Greena po uwzględnieniu warunków (5.7), (ν^P jest wektorem normalnym do S_P skierowanym na zewnątrz obszaru P), druga równość z twierdzenia Greena dla obszaru P i warunku $\xi = \text{const.}$, a ostatnia ze wzoru $\xi_{,i} = \nu_i = \text{const.}$, wynikającego z definicji ξ .

Po podstawieniu (5.10) i (4.41) do (5.9), otrzymujemy końcowy wzór

$$(5.12) \quad \frac{1}{2}\Delta\ddot{E} = |P| E_{ij}^0 \langle \xi \otimes \underline{\nu} \rangle + \dots,$$

w którym uwidoczniony człon po prawej stronie równości jest liniowy względem ϵ , a człony wyższych rzędów względem ϵ są oznaczone kropkami. Dla dostatecznie małych ϵ , tzn. dla dostatecznie małej grubości dysku (pasma) w porównaniu z rozmiarami obszaru Ω , znak $\Delta \ddot{E}$ będzie taki sam, jak znak $E_Y^0(\xi \otimes \nu)$. Szukanym energetycznym warunkiem zapoczątkowania lokalizacji odkształceń w pasmie jest więc nierówność $E_Y^0(\xi \otimes \nu) < 0$. Można pokazać, że wniosek ten pozostaje słuszny, gdy obszar Ω nie jest równomiernie odkształcany ($\dot{N}^0 \neq \text{const.}$ w Ω) i $\dot{E} \neq 0$, pod warunkiem, że obszar Ω ma dostatecznie małe wymiary. Kryterium 6, podane w punkcie 4.4.3, można więc interpretować jako kryterium lokalizacji odkształceń w pasmach ścinania, przy czym wektory ν i ξ spełniające nierówność (4.43) określają możliwą orientację pasma i prędkość deformacji w nim.

Przyjmowaliśmy powyżej, że lokalizacja ma swój początek w dysku o małej, lecz skończonej grubości. Można rozpatrzyć przypadek, gdy lokalizacja następuje w dysku o początkowo zerowej grubości, która następnie wzrasta wskutek propagacji powierzchni dysku względem materiału, będących powierzchniami nieciągłości przyspieszeń. W wyniku uzyskuje się [152] również warunek (4.43) jako kryterium lokalizacji, z tym, że wówczas różnica przyrostów funkcjonu energetycznego, $\Delta(\delta E)$, jest wielkością rzędu trzeciego względem przyrostu czasu δt , a nie drugiego (wskutek $\Delta \dot{E} \neq 0$) jak powyżej.

Przy interpretacji nierówności (4.43) pomocny jest wzór

$$(5.13) \quad E_Y^0(\xi \otimes \nu) = \nu_i \nu_k \xi_j \xi_l \int_0^1 C_{ijkl} (\dot{E}^0 + s \xi \otimes \nu) (1-s) ds .$$

Aby wykazać prawdziwość tego wzoru, utwórzmy dla dowolnych, ale ustalonych \dot{E}^0 , ξ , ν , pomocniczą funkcję f zmiennej θ ,

$$f(\theta) = E_{\mathcal{Y}}^0(\theta \xi \otimes \nu)$$

Druga pochodna f wyraża się wzorem

$$f''(\theta) = C_{ijkl}(\xi^0 + \theta \xi \otimes \nu) \nu_i \nu_k \xi_j \xi_l$$

Ponieważ $f(\theta)$ jest ciągle różniczkowalna oraz $f(0)=0$, $f'(0)=0$, to zachodzi elementarny wzór

$$f(\theta) = \int_0^\theta f''(s) (\theta-s) ds$$

Po podstawieniu wyrażenia na $f''(\theta)$ oraz $\theta = 1$, uzyskujemy (5.13).

Weźmy pod uwagę punkt materiału, w którym moduły C_{ijkl}^0 są dobrze określone. Po podstawieniu $\varepsilon \xi$ w miejsce ξ do (5.13), otrzymujemy

$$(5.13)' \quad E_{\mathcal{Y}}^0(c \xi \otimes \nu) = \frac{1}{2} c^2 C_{ijkl}^0 \nu_i \nu_k \xi_j \xi_l + \dots,$$

gdzie c jest małym parametrem, a kropki oznaczają czony rzędu wyższego niż drugi względem c . Z Kryterium 6 i związku (5.13)' wynika następujące

Kryterium 7 Jeżeli w pewnym punkcie ciała przy dobrze określonych modułach C_{ijkl}^0 zachodzi nierówność

$$(5.14) \quad C_{ijkl}^0 \nu_i \nu_k \xi_j \xi_l < 0 \quad \text{dla pewnych } \xi, \nu,$$

to proces \mathcal{X}^0 jest (lokalnie) niestabilny.

Inaczej mówiąc, dla stabilności nieosobliwego procesu \mathcal{X}^0

konieczne jest spełnienie (prawie wszędzie w V) warunku tzw. pół-silnej eliptyczności dla modułów stycznych,

$$(5.15) \quad C_{ijkl}^0 \nu_i \nu_k \xi_j \xi_l \geq 0 \quad \text{dla wszystkich } \xi, \nu.$$

Nierówność (5.15) przedstawia znany warunek Legendre'a - Hadamarda [45], konieczny dla minimum funkcjonału $\int_V U(\underline{y}) dV$, a także dla minimum funkcjonału $\mathcal{F}(\underline{y})$. Dla materiałów przyrostowo-liniowych, gdy $C_{ijkl} \equiv C_{ijkl}^0$, warunki (4.38), (4.42) i (5.15) są wzajemnie równoważne [127], a więc Kryteria 6 i 7 też stają się równoważne. W przypadku ogólnym mamy tylko implikację (4.38) \Rightarrow (4.42) \Rightarrow (5.15). Natomiast pół-silna eliptyczność modułów $C_{ijkl}(\underline{\dot{F}})$ dla każdego $\underline{\dot{F}}$ pociąga za sobą (4.42), co wynika natychmiast z (5.13).

Wykażemy teraz, że gdy moduły C_{ijkl}^0 są dobrze określone, to warunki (4.38), (4.42) i (5.15) są sobie równoważne także dla materiałów przyrostowo nieliniowych, gdy spełniona jest nierówność konstytutywna (3.73). Wystarczy udowodnić, że (5.15) implikuje wówczas (4.38). Na mocy Lematu 3.1 zachodzi nierówność (3.86)', a więc dla określonego ξ mamy (por. (4.38))

$$(5.16) \quad \int_{\Omega} U(\underline{\dot{F}}^0 + \nabla_{\underline{W}}(\underline{\xi}^*)) d\underline{\xi}^* \geq \int_{\Omega} U^0(\underline{\dot{F}}^0 + \nabla_{\underline{W}}(\underline{\xi}^*)) d\underline{\xi}^*.$$

Z twierdzenia Greena i warunku $\underline{y} = 0$ na brzegu obszaru Ω wynika, że

$$(5.17) \quad \int_{\Omega} U^0(\underline{\dot{F}}^0 + \nabla_{\underline{W}}(\underline{\xi}^*)) d\underline{\xi}^* = |\Omega| U(\underline{\dot{F}}^0) + \int_{\Omega} U^0(\nabla_{\underline{W}}(\underline{\xi}^*)) d\underline{\xi}^*.$$

Ale gdy zachodzi (5.15), to ostatnia całka w (5.17) ma wartość nieujemną, na mocy twierdzenia van Hove'a. Z połączenia (5.16) i (5.17) wynika więc (4.38). Dowód został zakończony.

Z powyższego dowodu wynika, że dla równoważności Kryteriów 6 i 7 wystarczy warunek (3.86), słabszy niż (3.73).

Przypuśćmy teraz, że warunek Weierstrassa (4.42) był spełniony (z ostrą nierównością dla niezerowych wektorów ξ, ν) wzdłuż podstawowej drogi deformacji pewnej cząstki materiału, aż do pewnego krytycznego momentu, począwszy od którego zachodzi nierówność (4.43), a więc proces deformacji staje się lokalnie niestabilny, zgodnie z Kryterium 6. Przypuśćmy także, że w momencie krytycznym (4.42) wciąż zachodzi, ale ze znakiem równości dla pewnej pary niezerowych wektorów ξ^*, ν^* . Wówczas funkcja $E_U^0(\xi \otimes \nu)$ osiąga minimalną (zerową) wartość dla tej pary ξ^*, ν^* , a w konsekwencji, jej pochodne cząstkowe względem ξ_j i ν_i w punkcie (ξ^*, ν^*) muszą być równe zeru. Stąd, w momencie krytycznym mamy

$$(5.18) \quad (\dot{N}_{ij}^* - \dot{N}_{ij}^0) \nu_i^* = 0,$$

$$(5.19) \quad (\dot{N}_{ij}^* - \dot{N}_{ij}^0) \xi_j^* = 0,$$

gdzie \dot{N}^* jest związane z gradientem prędkości $\dot{F}^* = \dot{F}^0 + \xi^* \otimes \nu^*$ równaniem konstytutywnym (2.37). Jest widoczne, że wielkości oznaczone gwiazdką spełniają warunki (5.1) i (5.2); tak więc, w krytycznym momencie spełnione są warunki bifurkacji w paśmie. Warunek (5.19) jest tu warunkiem dodatkowym, niekoniecznym dla bifurkacji.

W ogólności, warunek bifurkacji w paśmie może być spełniony przed omawianym powyżej punktem krytycznym na drodze deformacji cząstki, bez żadnych konsekwencji dla stabilności procesu. Odpowiednia postać lokalizacji wymaga wówczas dostarczenia większej ilości energii, niż deformacja podstawowa. Określmy warunki, przy spełnieniu których ta możliwość jest wykluczona. W momencie bifurkacji w paśmie skutek (5.1) i (5.2) musi zachodzić równość

$$(5.20) \quad \langle \dot{N}_{ij} - \dot{N}_{ij}^0 \rangle \langle \dot{F}_{ji} - \dot{F}_{ji}^0 \rangle = 0 \quad \text{dla } \dot{F}_{ji} - \dot{F}_{ji}^0 = \epsilon_j \nu_i.$$

Natomiast z tożsamości

$$(5.21) \quad \langle \dot{N}_{ij} - \dot{N}_{ij}^0 \rangle \langle \dot{F}_{ji} - \dot{F}_{ji}^0 \rangle = 2E_Y^0 \langle \Delta \dot{F} \rangle + \dot{N}_{ij}^0 \dot{F}_{ji} - \dot{N}_{ij} \dot{F}_{ji}^0$$

(którą się dowodzi poprzez podstawienie związków (2.38) i (4.41) i rozpisanie wszystkich członów) i (3.75) wynika, że

$$(5.22) \quad \langle \dot{N}_{ij} - \dot{N}_{ij}^0 \rangle \langle \dot{F}_{ji} - \dot{F}_{ji}^0 \rangle > 0 \quad \text{dla } \dot{F}_{ji} - \dot{F}_{ji}^0 = \epsilon_j \nu_i,$$

jeżeli $E_Y^0 \langle \xi \otimes \nu \rangle > 0$ przy spełnionej nierówności (3.73). Tak więc, jeżeli $E_Y^0 \langle \xi \otimes \nu \rangle > 0$ przy spełnionej nierówności (3.73), to bifurkacja w paśmie nie może wystąpić przed omawianym punktem krytycznym.

Rozważmy teraz analogiczny moment krytyczny na podstawowej drodze deformacji pewnej cząstki materiału w procesie χ^0 , związany z warunkiem niestabilności (5.14) zamiast (4.43), przy założeniu, że moduły C_{ijkl}^0 są dobrze określone. Przypuśćmy więc, że do tego momentu moduły styczne C_{ijkl}^0 spełniają warunek tzw. silnej eliptyczności,

$$(5.23) \quad C_{ijkl}^0 \nu_i \nu_k \epsilon_j \epsilon_l > 0 \quad \text{dla wszystkich } \xi, \nu \neq 0,$$

a potem zachodzi warunek niestabilności (5.14). Jeżeli moduły C_{ijkl}^0 zmieniają się w procesie χ^0 w sposób ciągły, to w momencie krytycznym istnieją wektory ξ^*, ν^* takie, że wyrażenie występujące po lewej stronie warunku eliptyczności osiąga dla nich zerową wartość minimalną. W konsekwencji, po uwzględnieniu symetrii modułów,

$$(5.24) \quad C_{ijkl}^0 \nu_i^* \nu_k^* \xi_j^* = 0,$$

$$(5.25) \quad C_{ijkl}^0 \xi_j^* \xi_l^* \nu_i^* = 0.$$

Stąd, w punkcie krytycznym mamy

$$(5.26) \quad \det(C_{ijkl}^0 \nu_i^* \nu_k^*) = 0,$$

$$(5.27) \quad \det(C_{ijkl}^0 \xi_j^* \xi_l^*) = 0.$$

Tak więc, jeżeli wartości modułów C_{ijkl}^0 zmieniają się w sposób ciągly wraz z deformacją, to otrzymujemy dobrze znany rezultat, że warunek bifurkacyjny (5.4) jest spełniony w momencie utraty eliptyczności dla modułów C_{ijkl}^0 (por. [72], [160], [125]). Natomiast nowe jest następujące twierdzenie:

w zakresie silnej eliptyczności (5.23), równanie (5.3) ma tylko trywialne rozwiązanie dla przyrostowo nieliniowych materiałów, dla których spełniona jest nierówność (3.73).

Dowód wynika natychmiast z równości (5.20) i Lematu 3.2.

Z powyższych rezultatów wypływa wniosek końcowy: jeżeli spełnione są następujące warunki:

- (i) materiał jest jednorodny i równomiernie odkształcany, a prawo konstytutywne jest przyrostowo liniowe (warunki, przy których został wyprowadzony warunek (5.4)),
- (ii) moduły styczne są dobrze określone i zmieniają się w sposób ciągly w trakcie deformacji
- (iii) przyrostowe prawo konstytutywne dopuszcza istnienie potencjału (2.37) i zachodzi nierówność konstytutywna (3.73),

to energetyczne kryterium lokalizacji odkształceń określa ten sam moment krytyczny i orientację pasma ścinania, co kryterium

bifurkacyjne (5.4). W przypadku ogólnym podejścia te mogą prowadzić do różniących się wyników. Podkreślamy, że podejście energetyczne nie wymaga wprowadzania założenia (i), a Kryterium 6 wynika w sposób ścisły z Kryterium 1 przy dowolnych warunkach brzegowych.

5.3 Kryterium lokalizacji dynamicznej

W tym punkcie rozpatrzmy możliwość lokalnej niestabilności stanu równowagi. Jest to szczególny przypadek lokalnej niestabilności procesu deformacji, związanej z równoczesną niestabilnością stanu równowagi według Kryterium 5. Stosując twierdzenie Graves'a [42], jako warunek konieczny nieujemności funkcjonału $I(\tilde{w})$ (4.36), a więc jako warunek konieczny stabilności stanu równowagi, otrzymujemy

$$(5.28) \quad U(\xi_0, \eta) \geq 0 \quad \text{dla wszystkich } (\xi, \eta)$$

w miejsce (4.42), gdyż w stanie równowagi traktowanym jako proces musimy podstawić $\dot{F}^0=0$. Alternatywnie, nierówność tę można też wyprowadzić z warunku (4.42) lokalnej stabilności procesu przy niezerowym \dot{F}^0 . W tym celu rozważmy wyrażenie $E_{ij}^0(\theta \xi_0, \eta) / \theta^2$ i przejdźmy do granicy przy $\theta \rightarrow \infty$, podczas gdy wektory ξ i η są ustalone. Korzystając z jednorodności potencjału U , w granicy otrzymujemy $U(\xi_0, \eta)$. Jeżeli zachodzi (4.42), to graniczna wartość jest nieujemna, czyli zachodzi (5.28).

Wynika stąd kolejne

Kryterium 8 Jeżeli w pewnym punkcie ciała zachodzi nierówność

$$(5.29) \quad U(\xi_0 \nu) < 0 \quad \text{dla pewnych wektorów } \xi, \nu$$

to proces ξ^0 jest (lokalnie) niestabilny, co więcej, stan równowagi jest (lokalnie) niestabilny.

Zastosujmy teraz argumentację identyczną jak w punkcie 5.2, ale podstawiając dodatkowo wszędzie $\nu^0 \equiv 0$ i $\xi^0 \equiv 0$. W rezultacie otrzymamy, w miejsce (5.12), wzór

$$(5.30) \quad \frac{1}{2} \ddot{E} = |P| U(\xi_0 \nu) + \dots$$

Wzór ten określa drugą pochodną pracy odkształcenia na drodze zlokalizowanych deformacji w obszarze P , z początkowymi prędkościami w otoczeniu tego obszaru określonymi przez (5.5). Pozostała część ciała pozostaje przy tym w bezruchu. Jeżeli zachodzi nierówność (5.29), to podczas takiej deformacji następuje uwolnienie energii z materiału. W tych okolicznościach, proces lokalizacji może przebiegać w sposób raptowny, dynamiczny, gdyż powstająca nadwyżka energii może być zamieniona na energię kinetyczną. W tym sensie Kryterium 8 można interpretować jako kryterium lokalizacji dynamicznej.

Różniczkując wzór (2.4) łatwo sprawdzić, że w konfiguracji odniesienia mamy $\dot{N}_{ij} \nu_i = \dot{\sigma}_{ij} \nu_i$ gdy $\dot{F}_{ji} = \xi_j \nu_i$ (por. [163]). Warunek (5.28) można więc zapisać w równoważnej postaci

$$(5.28)' \quad \dot{\sigma}_{ij} \epsilon_{ij} \geq 0 \quad \text{dla wszystkich } \dot{F} = \xi_0 \nu$$

Jest to warunek słabszy od analogicznej (ale nieobiektywnej) nierówności, proponowanej przez Drückera [33], w której powyższe ograniczenie na postać \dot{F} nie występuje.

Odrzućmy teraz chwilowo założenie o quasi-statycznych deformacjach, i rozważmy dynamiczne zagadnienie propagacji fali przyspieszenia (tj. powierzchni nieciągłości przyspieszeń) w

materiale, znajdującym się przed frontem fali w spoczynku. Nadal zakładamy, że materiał jest przyrostowo nieliniowy, o równaniu konstytutywnym dającym się wyrazić w postaci potencjalnej (2.37). Udowodnimy, że

warunek (5.28) jest konieczny i dostateczny, aby prędkość propagacji wszystkich fal przyspieszenia (w sensie dynamicznym) w materiale, będącym przedtem w spoczynku, była rzeczywista.

Dowód. Warunek propagacji fali przyspieszenia można zapisać w postaci [59] (dla uproszczenia przyjmujemy konfigurację aktualną za konfigurację odniesienia):

$$(5.31) \quad [\dot{N}_{i,j}] v_i = \rho c^2 \xi_j,$$

gdzie \underline{v} jest jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni nieciągłości przyspieszeń, dla wygody skierowanym w stronę deformującego się materiału. c jest prędkością propagacji fali, $\xi = [\partial v_i / \partial x_i] v_i$, przy czym nawias kwadratowy oznacza skok danej wielkości w poprzek fali, w rozważanym przypadku równy wartości po stronie deformującego się materiału (por. umowę co do znaków na str. 99). Przyspieszenie po tej stronie jest równe $(-c\xi)$ (stąd $\xi \neq 0$), a gradient prędkości jest równy $\xi \otimes \underline{v}$; dlatego w związku (5.31) należy podstawić $[\dot{N}_{i,j}] = \dot{N}_{i,j}(\xi \otimes \underline{v})$. Po pomnożeniu obu stron równości (5.31) przez ξ_j i podstawieniu (2.38), otrzymujemy

$$(5.32) \quad 2 U(\xi \otimes \underline{v}) = \rho |\xi|^2 c^2.$$

Ponieważ $\rho > 0$ i $\xi \neq 0$, to $c^2 \geq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $U(\xi \otimes \underline{v}) \geq 0$. Pozostaje do wykazania, że gdy zachodzi (5.29), to wśród par (ξ, \underline{v}) spełniających (5.29) istnieje para, spełniająca równanie propagacji. Gdy zachodzi (5.29), to funkcja

$U(\xi \otimes \nu) / |\xi|^2$ osiąga ujemną wartość minimalną dla pewnej pary ξ^*, ν^* . W punkcie tego minimum musi być

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_j}(\xi^* \otimes \nu^*) |\xi^*|^2 - 2U(\xi^* \otimes \nu^*) \xi_j^* = 0.$$

Ze związku konstytutywnego (2.37) mamy

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_j}(\xi^* \otimes \nu^*) = \dot{N}_{ij}(\xi^* \otimes \nu^*) \nu_i^* = [\dot{N}_{ij}^*] \nu_i.$$

Stąd i z (5.32) otrzymujemy, że warunek propagacji (5.31) jest spełniony dla pary $(\xi^* \otimes \nu^*)$ przy $c^2 < 0$. Wynika stąd teza twierdzenia.

Warunek (5.28) można traktować jako uogólnienie warunku Hadamarda (5.15), koniecznego dla "infinitezymalnej" stateczności równowagi ciała sprężystego (por. Truesdell i Noll [181]) na przypadek ciała przyrostowo nieliniowego o związku konstytutywnym (2.37). Oczywiście, dla materiałów przyrostowo liniowych, Kryteria 6, 7 i 8 są wzajemnie równoważne.

Rozważmy teraz, jako przypadek szczególny, materiał sprężysto-plastyczny typu klasycznego, o modułach określonych przez (2.17) względnie (2.31) i (2.32). Wykażemy, że dla takiego materiału w stanie naprężenia spełniającym warunek plastyczności, warunki (5.28), (4.42) i warunek (pół-silnej) eliptyczności dla modułów plastycznych,

$$(5.33) \quad C_{ijkl}^p \nu_i \nu_k \xi_j \xi_l \geq 0 \quad \text{dla wszystkich } \xi, \nu$$

są wzajemnie równoważne.

Dowód. Zauważmy najpierw, że ze związku (3.35) mamy

$$(5.34) \quad (\xi_{ijkl} - C_{ijkl}^p) \nu_i \nu_k \xi_j \xi_l = \frac{\alpha}{\xi} (\eta_{ij} \xi_j \nu_i)^2 \geq 0.$$

Oznacza to, że gdy spełniony jest warunek (5.33) dla modułów plastycznych, to jest też spełniony analogiczny warunek dla modułów sprężystych, a więc dla wszystkich możliwych modułów. Stąd i z równości (5.13) wynika spełnienie warunku Weierstrassa (4.42), a więc i warunku (5.28). Pozostaje do wykazania, że (5.28) implikuje (5.33). Przypuśćmy, że nierówność (5.33) nie zachodzi dla pewnych wektorów ξ, ν . Można tak dobrać znaki tych wektorów (co nie wpływa na postać (5.33)), że prędkość deformacji $\dot{F} = \xi \otimes \nu$ będzie odpowiadać $\lambda_{ij} \dot{\xi}_i \geq 0$. Wówczas lewe strony nierówności (5.33) i (5.28) będą miały identyczną postać (z pominięciem czynnika $\frac{1}{2}$). Nie jest więc możliwe niespełnienie (5.33) przy spełnionym warunku (5.28). Wyriki stąd, że (5.28) implikuje (5.33), co kończy dowód.

Z powyższego twierdzenia wynika, że dla rozważanego materiału sprężysto-plastycznego typu klasycznego, utrata eliptyczności pociąga za sobą utratę stabilności stanu równowagi w sensie energetycznym, i dopuszcza tym samym proces dynamicznej lokalizacji.

Przy wyprowadzeniu Kryterium 8 jako kryterium lokalnej niestabilności stanu równowagi, nie trzeba zakładać symetrii modułów, a więc i istnienia potencjału U (por. punkt 6.2). Kryterium 5 może być traktowane jako globalne kryterium stateczności równowagi bez tego ograniczenia, przy czym U , zdefiniowane przez (2.38), na ogół nie spełnia (2.37). Warunek (5.28) nadal wynika z warunku $I(\tilde{W}) \geq 0$ i z twierdzenia Graves'a. Wzór (5.30) nadal obowiązuje, a więc Kryterium 8 można nadal uważać za kryterium lokalizacji dynamicznej.

Weźmy pod uwagę materiał sprężysto-plastyczny o gładkiej (w otoczeniu rozważanego jej punktu) powierzchni plastyczności, lecz o niestowarzyszonym prawie płynięcia. Moduły są określone

nadal przez (2.31), ale moduły plastyczne L_{ijkl}^P nie są symetryczne i nie spełniają związku (2.32). Argumentując jak poprzednio można wykazać, że niespełnienie warunku (5.33) przez moduły plastyczne pociąga za sobą spełnienie warunku niestabilności (5.29). Należy podkreślić, że odpowiedni moment krytyczny utraty silnej eliptyczności jest (w przypadku ciągłej zmiany modułów w trakcie deformacji) określany z warunku

$$(5.35) \quad \det((C_{ijkl}^P + C_{kl ij}^P)v_i v_k) = 0$$

i na ogół poprzedza moment utraty zwykłej eliptyczności, określany z warunku (5.4) gdy $C_{ijkl}^0 = C_{ijkl}^P$.

6. O KONCEPCJI STATECZNOŚCI QUASI-STATYCZNYCH PROCESÓW DEFORMACJI PLASTYCZNYCH I STANU RÓWNOWAGI

Pojęcie stateczności jest używane w literaturze w wielu różnorodnych znaczeniach, dlatego badania stateczności mają określony sens tylko wówczas, gdy samo pojęcie zostało uprzednio wystarczająco sprecyzowane. W literaturze dotyczącej zagadnień quasi-statycznych deformacji ciał sprężysto-plastycznych, pojęcie stateczności jest mniej lub bardziej ściśle określone w odniesieniu do stanu równowagi [140], [56], [57], [35], [135], [105]. Brak było dotychczas, według rozeznania autora, takiej teorii lub definicji stateczności procesów deformacji plastycznych, która byłaby dostatecznie ogólna i ścisła oraz równocześnie dawała się zastosować w badaniach praktycznych takich przejawów niestateczności, jak wyboczenie, tworzenie się szyjki czy lokalizacja odkształceń. Często można spotkać w literaturze termin "niestateczność" w odniesieniu do bifurkacji, a więc niejednoznaczności. Nie jest to jedna

wyjście zadowalające, gdyż intuicyjny sens słowa "stateczność" tkwi, mówiąc potocznie, w pewnej niewrażliwości na małe zaburzenia.

Wydaje się, że trudności w dostosowaniu znanych, niekiedy bardzo ogólnych, matematycznych definicji stateczności do klasy interesujących nas w tej pracy procesów wynikają ze szczególnego charakteru tych procesów, związanego (i) ze skończonym przedziałem "czasu" ich trwania, (ii) z zależnością stanu aktualnego od historii deformacji, (iii) z wymuszaniem procesu przez zadawane zmiany obciążenia. Przykładowo, zastosowanie szeroko znanej i stosowanej, klasycznej koncepcji stateczności w sensie Lapunowa, uogólnionej przez Mowczana [126] (omówionej obszernie np. przez Knopsa i Wilkesa [97]; zob. także [144]), wiąże się z następującymi trudnościami:

- 1^o Przy rozpatrywaniu procesu quasi-statycznego, określonego na skończonym odcinku czasu, pojęcie stateczności w sensie Lapunowa - Mowczana w klasie quasi-statycznych procesów zaburzonych redukuje się do pojęcia ciągłej zależności od warunków początkowych. Natomiast występują trudności przy określaniu stateczności takiego procesu w sensie dynamicznym, gdyż proces zaburzony, traktowany jako dynamiczny, a nie quasi-statyczny, przebiega w innej skali czasu.
- 2^o Przy założeniu, że proces zaburzony jest procesem quasi-statycznym, zaburzona konfiguracja początkowa musi być konfiguracją równowagi, co komplikuje określenie klasy dopuszczalnych zaburzeń początkowych i dobranie odpowiedniej miary dla nich.
- 3^o Wskutek wpływu historii deformacji na własności materiału plastycznego, podanie tylko zaburzonej konfiguracji początkowej nie wystarcza do określenia własności materiału w tej konfiguracji, a więc i do określenia dalszego przebiegu procesu. Jeżeli chcemy badać

stateczność procesu deformacji *zadanego* ciała (tj. gdy samo ciało pozostaje niezmienione przy zaburzeniu warunków początkowych procesu), to niezbędne staje się określanie, wraz z konfiguracją zaburzoną, drogi dojścia do tej konfiguracji. Ta trudność powstaje również przy definiowaniu stateczności równowagi. Jeżeli własności materiału opisane są przy użyciu parametrów wewnętrznych, to można uzyskać warunki dostateczne dla stateczności, rozpatrując otoczenie konfiguracji początkowej nie tylko w sensie geometrycznym i kinematycznym, lecz również w przestrzeni parametrów wewnętrznych (zob. np. [104]).

4^o Ponieważ rozważane w tej pracy procesy nie przebiegają spontanicznie, a są wymuszone poprzez zmiany obciążenia, to funkcjonal energii całkowitej przestaje spełniać rolę naturalnego funkcjonału Lapunowa. Nie jest jasne, jak konstruować funkcjonal Lapunowa w tym przypadku, aby móc skorzystać z tzw. metody bezpośredniej, bardzo wygodnej w praktyce, gdyż nie wymagającej znajomości rozwiązań zaburzonych.

Należy podkreślić, że chociaż wymienione trudności nie uniemożliwiają sformułowania definicji stateczności typu Lapunowa - Mowczana dla quasi-statycznych procesów deformacji plastycznych, to jednak wskazują, że pojęcie stateczności w sensie Lapunowa niekoniecznie musi odgrywać tak podstawową rolę, jak to ma miejsce przy analizie ruchu układów dynamicznych (w sensie mechanicznym).

Zanim przedstawimy własną koncepcję stabilności quasi-statycznego procesu deformacji plastycznych, należy wspomnieć o dwóch sugestiach: Druckera [34] [35] i Klusznikowa [95], wyrażonych w dostatecznie ogólnej formie (szereg propozycji, przedstawionych np. w pracach [175] [47] [118] [39] [32] i innych, dotyczy poszczególnych zagadnień i nie ma wystarczająco ogólnego charakteru). Drucker [34], proponując

swój postulat stateczności dla materiałów zależnych od czasu (stanowiący uogólnienie poprzedniego [33], bardziej znanego postulatu stateczności materiału plastycznego), zasugerował równocześnie, że analogiczny postulat mógłby być wykorzystany do określania stateczności ruchu dowolnego układu mechanicznego. Co prawda, postulat stateczności "w dużym" jest w tym przypadku zbyt ograniczający [35], ale postulat stateczności "w małym" może być przyjęty. Przystosowując ten ostatni postulat Druckera do rozważanych w tej pracy procesów, otrzymalibyśmy następujący warunek stateczności procesu

$$(6.1) \quad \int_V \underline{b}_j^* \Delta \dot{u}_j \, dV + \int_{S_T} \underline{T}_j^* \Delta \dot{u}_j \, dS > 0 ,$$

gdzie \underline{b}_j^* , \underline{T}_j^* stanowią dodatkowe siły masowe i powierzchniowe, wolno przykładane przez czynnik zewnętrzny ("external agency") w trakcie trwania procesu, a $\Delta \underline{u} = \underline{u}^* - \underline{u}^0$ oznacza wywołaną przez te dodatkowe siły zmianę przemieszczeń w odniesieniu do procesu podstawowego. Nierówność (6.1) miałaby obowiązywać w momencie rozpoczęcia przykładania dowolnych, niezerowych pól takich zaburzających sił. Lewa strona nierówności (6.1), pomnożona przez $(\delta t)^2$ stanowi, zgodnie z oryginalną koncepcją Druckera, wyrażenie na tzw. pracę drugiego rzędu przyłożonych dodatkowych sił \underline{b}_j^* , \underline{T}_j^* , na spowodowanych przez nie zmianach przemieszczeń $\Delta \underline{u}$. Nie jest jasne, czy warunek (6.1) należałoby uważać za warunek konieczny, czy też dostateczny dla stateczności procesu.

Kryterium stateczności, wynikające z (6.1) ma charakter quasi-statyczny: ciało w procesie zaburzonym poprzez przyłożenie dodatkowych sił jest w każdej chwili w równowadze. Stąd, po skorzystaniu z twierdzenia Greena i uwzględnieniu warunków brzegowych (3.2) i (3.6), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (6.2) \quad & \int_V \dot{b}_j^* \Delta \dot{u}_j \, dV + \int_{S_T} \dot{t}_j^* \Delta \dot{u}_j \, dS \\
 & = \int_V - \Delta \dot{N}_{i,j,i} \Delta \dot{u}_j \, dV + \int_{S_T} \dot{t}_j^* \Delta \dot{u}_j \, dS \\
 & = \int_V \Delta \dot{N}_{i,j} \Delta \dot{u}_{j,i} \, dV - \int_{S_T} \langle \Delta \dot{N}_{i,j} n_i - \dot{t}_j^* \rangle \Delta \dot{u}_j \, dS \\
 & = \int_V \Delta \dot{N}_{i,j} \Delta \dot{u}_{j,i} \, dV - \int_{S_T} r_j [\Delta \dot{u}_j] \Delta \dot{u}_j \, dS .
 \end{aligned}$$

Jest widoczne, że warunek (6.1) jest równoważny warunkowi Hilla (3.11), dostatecznemu dla jednoznaczności rozwiązania. Wydaje się, że to powiązanie koncepcji Druckera stateczności układu z teorią bifurkacji przy uwzględnieniu efektów zmian geometrii pozostało nieodnotowane w literaturze. Dla uniknięcia ew. nieporozumień zaznaczmy, że stateczność materiału w sensie Druckera nie jest tutaj w ogóle poruszana.

Koncepcja określania stateczności quasi-statycznego procesu deformacji plastycznych przy pomocy testów zachowania się ciała przy nałożeniu małych dodatkowych sił występuje również w pracach Klusznikowa. Klusznikow [93] [94] [95] w wyidealizowanych przypadkach rozważał procesy dynamiczne, wywołane przyłożeniem dodatkowych sił, i doszedł do wniosku, że w ciałach sprężysto-plastycznych efekty bezwładnościowe można w takich przypadkach pominąć, wskutek plastycznej dysypacji początkowej energii kinetycznej. Klusznikow ([95], str. 29) zaproponował następującą definicję niestateczności procesu: *proces niezaburzony, poczynając od danego momentu, jest niestabilny, jeżeli zanikająco mała zmiana parametrów ruchu w danym momencie powoduje ich skończoną zmianę w dowolnym, następującym potem, skończonym przedziale czasu.* Ta definicja jest niestety nieprecyzyjna; np. dopiero z dalszego kontekstu

wynika, że chodzi o zaburzenie, wywołane przez przyłożenie i zdjęcie (w danym momencie) dodatkowych, zanikająco małych co do wartości sił powierzchniowych i objętościowych. Ponadto, taka definicja nie jest wygodna w zastosowaniach, z wyjątkiem prostych zagadnień; w przypadku ogólnym Klusznikow stosuje więc kryterium bifurkacji procesu, postulując jedynie ([95], str. 36), że wpływa ono z cytowanego powyżej kryterium stateczności.

Te dwie koncepcje, Druckera i Klusznikowa, mają dwie istotne cechy wspólne: (i) rozpatruje się zaburzenie procesu w pewnym, dowolnie dobranym (a nie początkowym) momencie, (ii) zaburzenie rozpatruje się w postaci nałożenia dodatkowych sił masowych i powierzchniowych (a nie w postaci arbitralnej zmiany geometrii ciała lub własności materiału). Te dwie cechy wyraźnie odróżniają koncepcję stateczności procesu od jego wrażliwości na początkowe niedoskonałości (imperfekcje).

W przedstawionej poniżej koncepcji stabilności również rozważać będziemy zaburzenia przebiegu procesu w postaci działania dodatkowych sił masowych i powierzchniowych, z tą różnicą, że dopuścimy tzw. stałe działające zaburzenia. Jako miarę intensywności zaburzenia przyjmiemy miarę energetyczną. Sformułujemy ściśłą definicję stabilności procesu, z której proponowane w Rozdziale 4 podstawowe Kryterium 1 niestabilności wynikać będzie jako wniosek.

6.1 Stabilność procesów deformacji plastycznych w sensie energetycznym [149] [150]

Podstawowe założenia pozostają takie, jak w Rozdziale 4. Przyjmujemy więc, że obciążenie jest w ogólności zależne od parametru obciążenia λ i od konfiguracji ciała, i wprowadzamy ograniczenie, że przy ustalonym λ obciążenie jest konserwatywne w sensie globalnym (warunek (4.1)). Własności materiału nie

zależą od czasu rzeczywistego; przyjmujemy ponadto, że równania konstytutywne dla materiału dają się zapisać w postaci przyrostowej typu potencjalnego, (2.27). To ostatnie ograniczenie formalnie nie jest konieczne, ale praktycznie wynika z proponowanej definicji stabilności (por. dyskusję równania (4.26) oraz [153]). Wszystkie procesy deformacji rozważane poniżej spełniają warunki regularności, określone w Rozdziale 2. Rozważać będziemy tylko kinematycznie dopuszczalne procesy, które rozpoczynają się od zadanej konfiguracji początkowej w pewnej chwili t_1 i, oprócz warunków regularności, spełniają jeszcze w każdej chwili (kinematyczne) warunki brzegowe dla przemieszczeń na S_u .

Rozważmy podstawowy proces deformacji χ^0 w przedziale "czasu" \mathcal{T} , przy czym $\mathcal{T} = [t_1, t_2]$ albo, w szczególnych przypadkach, $\mathcal{T} = [t_1, \infty)$. Stabilność procesu χ^0 będziemy rozumieć w następującym sensie. Niech przebieg procesu będzie zakłócony przez zaburzenie z pewnej klasy. Proces χ^0 będziemy uważać za stateczny w przedziale \mathcal{T} , jeżeli odległość pomiędzy nim a każdym procesem zaburzonym jest w przedziale \mathcal{T} zanikająco mała gdy samo zaburzenie jest zanikająco małe. Powyższe określenie stateczności jest oczywiście nieprecyzyjne. Należy ściśle określić (i) klasę rozważanych zaburzeń, (ii) miarę intensywności zaburzenia, (iii) miarę odległości między procesami. Jest to istotne, zwłaszcza dla układów ciągłych, gdyż, jak dobrze wiadomo (zob. np. Knops i Wilkes [97]), ten sam proces w myśl tej samej definicji może być stateczny przy jednym doborze miar i niestateczny przy innym.

Proces, którego stateczność chcemy badać, jest zawsze procesem wyidealizowanym, gdyż cziony równań rządzących jego przebiegiem nigdy nie odpowiadają ściśle rzeczywistości. Dotyczy to oczywiście zarówno równań pola jak warunków początkowych i brzegowych, a zwłaszcza, w przypadku materiałów plastycznych, równań konstytutywnych. Zwykle rozpatruje się

stateczność tylko względem zaburzeń warunków początkowych. Jednakże, nie ma z góry żadnej gwarancji, że proces stateczny względem zaburzeń początkowych będzie także stateczny względem zaburzeń innego rodzaju. Z tego względu będziemy rozważać zaburzenia o ogólniejszym charakterze.

Będziemy dopuszczać stałe działające zaburzenia, których fizyczny charakter może być rozmaity. Przyjmujemy, że klasa dopuszczalnych zaburzeń jest na tyle szeroka, że w wyniku ich działania może być zrealizowany dowolny kinematycznie dopuszczalny proces, nazywany procesem zaburzonym, przebiegający w dostatecznie małym otoczeniu procesu niezaburzonego \mathcal{X}^0 (w sensie miary odległości d , omówionej dalej). Zaburzenia te są reprezentowane przez zmienne w czasie pola dodatkowych sił masowych $\underline{b}^* = \underline{b}^*(\xi, t)$, $\xi \in V$, i powierzchniowych $\underline{T}^* = \underline{T}^*(\xi, t)$, $\xi \in S_T$, niezależnych od sił przykładanych przez urządzenie obciążające (oznaczenia \underline{b}^* , \underline{T}^* odnoszą się do sił nominalnych, tj. obliczanych na jednostkę objętości lub powierzchni w konfiguracji odniesienia): Proces zaburzony jest traktowany jako proces quasi-statyczny, a ewentualne siły bezwładności są włączone do sił zaburzających. W tym przypadku, wzdłuż procesu zaburzonego spełniona jest zasada prac wirtualnych, w postaci uwzględniającej obecność sił \underline{b}^* , \underline{T}^* , tzn.

$$(6.3) \quad \int_V N_{i,j} w_{j,i} dV = \int_V (\underline{b}_j + \underline{b}_j^*) w_j dV + \int_{S_T} (\underline{T}_j + \underline{T}_j^*) w_j dS$$

dla każdego $\underline{w} \in W$. Przedyskutujemy dalej także możliwość traktowania procesu zaburzonego jako procesu dynamicznego.

Zauważmy, że dowolny kinematycznie dopuszczalny proces może być (oczywiście tylko teoretycznie) zrealizowany poprzez odpowiedni dobór sił zaburzających. Istotnie, określając naprężenia w tym procesie ze związku (2.11) i definiując siły

zaburzone przez

$$(6.4) \quad b_j^* = -N_{i,j,i} - b_j \quad \text{w } V,$$

$$(6.5) \quad T_j^* = N_{i,j}n_i - T_j \quad \text{na } S_T,$$

spełniamy automatycznie równość (6.3) (w przypadku, gdy naprężenia doznają skoku w poprzek pewnej powierzchni $S_D \subset V$, tak że (2.9) nie jest spełnione, to odpowiednie skoncentrowane siły masowe b^* na S_D /typu delty Diraca/ określone są z równania (6.4), rozumianego w sensie dystrybucyjnym).

Intensywność zaburzenia będziemy określać, stosując energetyczną miarę zaburzenia ρ^E , zdefiniowaną jako

$$(6.6) \quad \rho^E = \rho^E(\chi, \chi^0, t) = \sup_{\tau \in [t_1, t]} \Delta E(\tau),$$

gdzie E jest funkcjonałem energetycznym, wprowadzonym w Rozdziale 4, oraz

$$(6.7) \quad \Delta E(t) \equiv E(\chi, t) - E(\chi^0, t).$$

Ponieważ w dowolnym procesie wartość E zmienia się w czasie w sposób ciągły, to supremum we wzorze (6.6) może być zamienione na maksimum. Zgodnie z interpretacją funkcjonału E , wyrażenie (6.7) określa nadwyżkę energii, jaka musi być doprowadzona w przedziale czasu $[t_1, t]$ ze źródeł zewnętrznych do układu (ciało plus urządzenie obciążające) w procesie zaburzonym w odniesieniu do procesu podstawowego. Z bilansu energii wynika, że ta nadwyżka energii rozkłada się na dwie części,

$$(6.8) \quad \Delta E = W^* + \Delta E^{obc},$$

gdzie

$$(6.9) \quad W^* = W^*(\chi, t) = \int_{t_1}^t \left\{ \int_V b_i^* v_i \, dV + \int_{S_T} T_i^* v_i \, dS \right\} dt$$

jest całkowitą pracą sił b^* i T^* na przemieszczeniach w procesie χ , a ΔE^{obc} (zob. wzór (4.3)') jest różnicą ilości energii pobranej ze źródeł zewnętrznych przez urządzenie obciążające w obu procesach, w każdym przypadku w przedziale czasu od chwili t_1 do rozpatrywanego momentu. Wzór (6.8) można również przyjąć jako definicję nadwyżki energii ΔE , a postać (6.7) traktować jako jego konsekwencję (por. [149] [150]).

Zauważmy, że miara zaburzenia ρ^E na ogół zmienia się w czasie; odróżnia to tę miarę od miary zaburzeń początkowych, np. w ogólnym sensie, rozpatrywanym przez Mowczana [126], która od czasu nie zależy. Jest to związane z przyjętym charakterem zaburzeń: rozważane, tu zaburzenia mogą narastać w czasie. Jeżeli jednak nadwyżka energii ΔE zmniejsza się w czasie, to ρ^E , z definicji, pozostaje niezmiennie; w szczególności, gdy ΔE przybiera tylko wartości ujemne lub zero, to $\rho^E = 0$ (bo $\Delta E(t_1) = 0$). Stąd, dla dowolnego procesu χ , ρ^E jest ciągłą, nieujemną i niemalejącą funkcją czasu.

Miara odległości d pomiędzy dwoma procesami (zaburzonym i podstawowym) może zależeć od konkretnego zagadnienia. Dla naszych celów jest istotne, aby miara d spełniała następujące warunki (i) $d = d(\chi, \chi^0, t) \geq 0$ dla wszystkich χ, t , (ii) jeżeli $\Delta E \neq 0$ w chwili τ , to $d > 0$ przynajmniej w pewnej chwili $t \in (t_1, \tau)$, (iii) d zmienia się w czasie w sposób ciągły; poza tym miara d może być dowolna. Przykładowo, można przyjąć miarę d postaci

$$(6.10) \quad d = d(\chi, \chi^0, t) = \int_V (x_j - x_j^0)(x_j - x_j^0) \, dV,$$

gdzie $\underline{x} = \underline{x}(\underline{\xi}, t)$, $\underline{x}^0 = \underline{x}^0(\underline{\xi}, t)$. W razie potrzeby, można by uzależnić miarę odległości d również bezpośrednio od różnicy gradientów przemieszczeń. Z kolei, przykładowo w zagadnieniach osiowo symetrycznych, można by wprowadzić miarę d nieczułą na sztywne obroty wokół osi symetrii, itd.

Definicja 6.1 Proces \underline{x}^0 jest stabilny (w sensie energetycznym) w przedziale czasu \mathcal{T} wtedy i tylko wtedy gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje inna liczba $\delta > 0$ taka, że dla każdego procesu zaburzonego \underline{x} i dla każdej chwili $t \in \mathcal{T}$,

$$\text{jeżeli } \rho^E(\underline{x}, \underline{x}^0, t) < \delta \quad \text{to } d(\underline{x}, \underline{x}^0, t) < \varepsilon .$$

Proces \underline{x}^0 nazywamy niestabilnym (w sensie energetycznym), jeżeli nie jest on stabilny według powyższej definicji.

Definicja 6.1 stanowi pewną kombinację definicji równomiernej stateczności procesu względem dwóch miar (metryk) (Mowczan [126]) i definicji stateczności przy stałe działających zaburzeniach (np. Małkin [116]). Wprowadzenie zmiennej w czasie miary zaburzenia spowodowało konieczność niewielkiego zmodyfikowania zwykle przyjmowanej definicji.

Gdybyśmy chcieli traktować proces zaburzony jako proces dynamiczny (proces podstawowy \underline{x}^0 musi być quasi-statyczny), to w funkcjonale energetycznym E należałoby uwzględnić energię kinetyczną układu, E^k . Do wzoru (6.6) należałoby wówczas podstawić

$$(6.11) \quad \Delta E = \Delta W + \Delta U + E^k ;$$

wzór (6.8) pozostawałby przy tym niezmienny. Ponieważ $E^k \geq 0$,

to dla określonego kinematycznie dopuszczalnego procesu, odpowiadająca mu miara zaburzenia mogłaby przy tym tylko wzrosnąć, przy niezmienionej odległości między procesami. Oznacza to, że uwzględnienie ewentualnych efektów dynamicznych w procesie zaburzonym nie mogłoby przemienić procesu stabilnego w niestabilny. Z kolei, energia kinetyczna w określonym procesie kinematycznie dopuszczalnym staje się dowolnie mała, jeżeli parametr t zmienia się dostatecznie wolno w czasie rzeczywistym, co z założenia (por. punkt 2.1) ma być możliwe. Stąd, proces niestabilny nie mógłby się stać stabilny po uwzględnieniu efektów dynamicznych w procesach zaburzonych. Tak więc, w Definicji 6.1 procesy zaburzone mogłyby być traktowane również jako procesy dynamiczne (ze zmianą związku (6.7) na (6.11)), przy niezmienionym pojęciu stabilności.

Z Definicji 6.1 wynika Kryterium 1 niestabilności, postulowane w Rozdziale 4 jako niezależne kryterium. Istotnie, spełnienie warunku występującego w Kryterium 1 oznacza, że istnieje kinematycznie dopuszczalny proces taki, że w pewnej chwili $\tau + \delta t > \tau$, gdzie τ jest chwilą odgałęzienia procesu od procesu podstawowego, $\rho^E=0$ i $d > 0$; wynika to z definicji miary ρ^E i założenia (ii) dotyczącego miary d . Przyjęcie tego procesu za proces zaburzony (zauważmy, że proces χ w Definicji 6.1 nie musi być określony na całym przedziale J) powoduje niespełnienie warunku stabilności, określonego w Definicji 6.1. Tak więc niestabilność procesu χ^0 w sensie Kryterium 1 jest również niestabilnością w sensie Definicji 6.1. Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa: Definicja 6.1 nakłada na stabilny proces silniejsze ograniczenia, niż Kryterium 1. Można to ująć poglądowo (ale niezbyt ściśle) tak: Kryterium 1 nakłada ograniczenie, że każde odchylenie od stabilnego procesu podstawowego wymaga dostarczenia pewnej dodatkowej (dodatniej) ilości energii do układu, natomiast Definicja 6.1 żąda ponadto, aby odległość od stabilnego procesu podstawowego dążyła do zera

wraz z wartością tej dodatkowej energii.

Sformułowanie weryfikowalnych w praktyce warunków dostatecznych dla stabilności jest znacznie trudniejsze, niż uzyskanie przedstawionych w Rozdziałach 4 i 5 warunków koniecznych dla stabilności względnie dostatecznych dla niestabilności, i będzie stanowiło przedmiot dalszych badań.

6.2 Stabilność stanu równowagi w sensie energetycznym

Stabilność stanu równowagi \bar{x}^0 definiujemy jako stabilność, w sensie Definicji 6.1, szczególnego, zdegenerowanego procesu \bar{x}^0 , w którym żadna z wielkości nie zmienia się w czasie. Jest to już definicja ścisła; dla wygody podamy poniżej jej bezpośrednie sformułowanie.

W przypadku badania stabilności stanu równowagi, wybór chwili początkowej t_1 jest nieistotny, ponadto, stabilność stanu równowagi można badać zarówno na skończonym, $\mathcal{T} = [t_1, t_2]$, jak pół-nieskończonym, $\mathcal{T} = [t_1, \infty)$, odcinku czasu. Mamy teraz $\lambda = \text{const.}$, $W(\bar{x}^0, t) \equiv 0$, $E(\bar{x}^0, t) \equiv U(\bar{x}^0, \lambda) = \text{const.}$; bez straty ogólności możemy więc przyjąć, że $E(\bar{x}^0, t) = 0$. Przez proces zaburzony rozumiemy proces kinematycznie dopuszczalny, rozpoczynający się od stanu równowagi \bar{x}^0 i zgodny z warunkiem $\dot{y} \equiv 0$ na S_u . Miara zaburzenia (6.6) sprowadza się do postaci (por. (6.8))

$$(6.12) \quad \rho^E = \rho^E(\bar{x}, t) = \max_{\tau \leq t} W^*(\bar{x}, \tau).$$

Będziemy nadal traktować proces zaburzony jako quasi-statyczny. Z bilansu energii mamy $W = W^{obc} + W^*$, czyli

$$(6.13) \quad \rho^E = \rho^E(\chi, t) = \max_{\tau \leq t} (W(\chi, \tau) - W^{obc}(\chi, \tau)),$$

gdzie $W^{obc}(\chi, t)$ jest pracą sił, przykładanych do ciała przez urządzenie obciążające w procesie zaburzonym χ , określaną z (4.2) lub (4.3) przy $\dot{\chi}^1 = \dot{\chi}^0$ i $\dot{\chi}^2 = \dot{\chi}(\cdot, t)$. Gdyby proces zaburzony traktowany był jako proces dynamiczny, to w nawiasie klamrowym we wzorze (6.13) należałoby dopisać energię kinetyczną układu w procesie zaburzonym. Samo pojęcie stabilności stanu równowagi w sensie energetycznym pozostałoby przy tym niezmienione (por. dyskusję w punkcie 6.1).

W odróżnieniu od Definicji 6.1 stabilności procesu deformacji, poniższą definicję stabilności stanu równowagi wprowadzimy dla dowolnego modelu materiału o własnościach niezależnych od czasu rzeczywistego. W szczególności, przy badaniu stabilności równowagi nie muszą obowiązywać wzory (2.26), (2.27), (2.37), a wzór (2.38) może służyć jako definicja funkcji $U(\dot{F})$.

Przyjmując $\dot{\chi}^0 \equiv \dot{\chi}^0$, z Definicji 6.1 otrzymujemy następującą definicję stabilności stanu równowagi.

Definicja 6.2 Stan równowagi $\dot{\chi}^0$ jest stabilny (w sensie energetycznym) w przedziale czasu \mathcal{T} wtedy i tylko wtedy gdy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje inna liczba $\delta > 0$ taka, że dla każdego procesu zaburzonego χ i dla każdej chwili $t \in \mathcal{T}$,

$$\text{jeżeli } \rho^E(\chi, t) < \delta \quad \text{to } d(\chi, \dot{\chi}^0, t) < \varepsilon.$$

Stan równowagi $\dot{\chi}^0$ nazywamy niestabilnym (w sensie energetycznym), jeżeli nie jest on stabilny według powyższej definicji.

Wykażemy, że

warunkiem dostatecznym dla stabilności stanu równowagi w

sensie energetycznym jest istnienie stałej c i funkcji rzeczywistej x , spełniającej warunki $x(0)=0$ i $x(\varepsilon) > 0$ dla $\varepsilon > 0$, takich że nierówność

$$(6.14) \quad W(x, t) - W^{obc}(x, t) \geq x(\varepsilon)$$

zachodzi dla każdego $t > t_1$ i dla wszystkich kinematycznie dopuszczalnych procesów takich, że $d(x, x^0, t) = \varepsilon \leq c$ i $d(x, x^0, \tau) \leq \varepsilon$ dla $\tau \leq t$.

Dowód. Przypuśćmy, że powyższe twierdzenie nie jest prawdziwe, tzn. mimo podanych warunków, stan równowagi jest niestabilny. Zgodnie z Definicją 6.1, istnieje wówczas takie $\varepsilon > 0$ takie, że dla dowolnie małego δ można osiągnąć wartość $d=\varepsilon$ przy $\rho^E < \delta$ w pewnym procesie x_δ (zależnym na ogół od δ). Niech $\varepsilon_1 = \min(\varepsilon, c)$. Ponieważ $d(t)$ jest funkcją ciągłą, a $\rho^E(t)$ niemalejącą, to można znaleźć proces x_δ i chwilę t takie, że $d(x_\delta, x^0, t) = \varepsilon_1$, $d(x_\delta, x^0, \tau) \leq \varepsilon_1$ dla $\tau \leq t$, oraz $\rho^E(x_\delta, t) < \delta$. Ze związku (6.13) otrzymujemy, że $W(x_\delta, t) - W^{obc}(x_\delta, t) < \delta$. Dla $\delta = x(\varepsilon_1)$ wynika stąd sprzeczność z (6.14), a więc twierdzenie jest prawdziwe.

Powyższy warunek dostateczny dla stabilności stanu równowagi w sensie energetycznym można traktować jako uogólnienie na przypadek materiałów plastycznych pewnego warunku dla układów posiadających potencjał globalny (konserwatywnych lub dysypatywnych), żądającego, aby stan równowagi leżał w tzw. "studni potencjału". Ten ostatni warunek jest warunkiem dostatecznym dla stateczności dynamicznej (w sensie Lapunowa-Mowczana) stanu równowagi takiego układu, przy odpowiednim doborze miar (zob. np. [44] [96] [10]). Podobne do (6.14) (ale nieco silniejsze) warunki dostateczne dla stateczności dynamicznej stanu równowagi ciała sprężysto-plastycznego pod "martwym" obciążeniem sformułowano w

pracach [77] [135]. Okazuje się, że jeszcze słabszym warunkiem dostatecznym dla stateczności dynamicznej stanu równowagi, przy odpowiednim wyborze miar, jest właśnie stabilność stanu równowagi w sensie energetycznym.

Aby to wykazać, musimy najpierw podać odpowiednią definicję stateczności dynamicznej stanu równowagi. Zgodnie z klasyczną koncepcją stateczności w sensie dynamicznym, jako dynamiczny proces zaburzony χ^* przyjmiemy swobodny ruch dynamiczny układu, następujący po uprzednim wychyleniu układu ze stanu równowagi \tilde{x}^0 do pewnej konfiguracji \tilde{x}^* , stanowiącej w chwili t^* konfigurację początkową procesu zaburzonego. Rozważmy wymuszony działaniem sił zaburzających proces przejściowy χ^* , prowadzący od \tilde{x}^0 do \tilde{x}^* , traktowany jako proces dynamiczny. Zakładamy, że proces χ , składający się z następujących po sobie procesów χ^* i \tilde{x}^* jest kinematycznie dopuszczalny. Jako miarę $\hat{\rho}$ zaburzenia początkowego przyjmiemy (por. Krawietz [105])

$$(6.15) \quad \hat{\rho} = \sup_{t \leq t^*} W^*(\chi^*, t);$$

Miara odległości $\hat{d} = \hat{d}(\chi(t), \tilde{x}^0)$ pomiędzy konfiguracją w procesie zaburzonym a konfiguracją równowagi jest dowolna, z wyjątkiem założenia, że jest ona ograniczona przez miarę $\hat{\rho}$ odległości między procesami, tzn. $\hat{d}(\chi(t), \tilde{x}^0) \leq M \hat{\rho}$, gdzie M jest pewną stałą dodatnią. W szczególności, można przyjąć miarę (6.10) w obu przypadkach.

Definicja 6.3 Stan równowagi \tilde{x}^0 jest stateczny w sensie dynamicznym wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że w każdym dynamicznym procesie zaburzonym χ^* ,

jeżeli $\hat{\rho} < \delta$, to $\hat{d}(\chi^*(t), \tilde{x}^0) < \epsilon$ dla wszystkich $t \leq t^*$.

Wykażemy, że

jeżeli stan równowagi jest stabilny w sensie energetycznym w przedziale czasu $[t_1, \infty)$ (według Definicji 6.2), to jest on również stateczny w sensie dynamicznym (według Definicji 6.3).

Dowód. Rozważmy kinematycznie dopuszczalny proces χ , składający się z następujących po sobie procesów χ^* i χ^s . Dla $t \geq t^*$ zachodzi

$$\begin{aligned} \rho^E(\chi, t) &= \sup_{r \leq t} (W(\chi, r) - W^{obc}(\chi, r)) \\ &\leq \sup_{r \leq t} (W(\chi, r) - W^{obc}(\chi, r) + E^k(\chi, r)) \\ &= \sup_{r \leq t^*} (W(\chi, r) - W^{obc}(\chi, r) + E^k(\chi, r)) \\ &= \sup_{r \leq t^*} W^*(\chi^*, r), \end{aligned}$$

gdzie kolejno wykorzystaliśmy: równość (6.13), nieujemność energii kinetycznej, zasadę zachowania energii w dynamicznym procesie swobodnym χ^s i bilans energii w procesie χ^* . Mamy więc, dla $t \geq t^*$, $\rho^E(\chi, t) \leq \hat{\rho}$, oraz, z założenia, $\hat{d}(\chi(t), \chi^0) \leq M d(\chi, \chi^0, t)$. Niech $\delta_1(\varepsilon)$ oznacza funkcję, która określa regułę dobierania wartości $\delta > 0$ dla każdego $\varepsilon > 0$ w Definicji 6.2 stabilności. Dobierzmy wartość δ_2 dla każdego $\varepsilon > 0$ jako $\delta_2(\varepsilon) = \delta_1(\varepsilon/M)$. Wówczas, jeżeli stan równowagi jest stabilny w sensie Definicji 6.2, to dla $\hat{\rho} < \delta_2(\varepsilon)$, a więc dla $\rho^E < \delta_1(\varepsilon/M)$ w każdej chwili $t \geq t^*$, mamy $d < (\varepsilon/M)$, a więc $\hat{d} < \varepsilon$, dla wszystkich $t \geq t^*$. Ponieważ procesy χ^* i χ^s oraz liczba $\varepsilon > 0$ były w powyższym rozumowaniu dowolne, to stan równowagi jest stabilny w sensie Definicji 6.3. Dowód został zakończony.

Powyższa relacja pomiędzy statecznością dynamiczną a

energetyczną uwypukla sens stabilności stanu równowagi według Definicji 6.2. Podobną relację można analogicznie udowodnić dla stateczności procesów deformacji, ale przy silnym ograniczeniu, że zaburzenie dynamiczne "nie dotarło" do granicy układu, a więc nie zakłóciło procesu przekazywania energii ze źródeł zewnętrznych do urządzenia obciążającego (t.j. $\Delta E^{obc} \equiv 0$).

Drucker [35] proponował tzw. warunek stateczności "w dużym" stanu równowagi pod "martwym" obciążeniem, który w obecnym zapisie przyjmuje postać $\dot{W}^*(\chi, t) > 0$ dla wszystkich nietrywialnych quasistatycznych procesów deformacji, startujących ze stanu równowagi. Warunek ten jest nieco słabszy od (6.14), i na ogół nie jest ani konieczny, ani dostateczny dla stabilności w sensie energetycznym bądź dynamicznym.

Warunek dostateczny dla niestabilności energetycznej stanu równowagi według Definicji 6.2 wynika z Kryterium 1 po podstawieniu $\delta E^0 = 0$, a jego konsekwencją jest Kryterium 5, podane w punkcie 4.4.2. Odpowiedni warunek konieczny dla stabilności stanu równowagi ma postać

$$(6.16) \quad \ddot{E} \equiv \ddot{W} - \ddot{W}^{obc} \equiv \ddot{W}^* \geq 0,$$

lub, w przypadku obciążenia (6.2) (oczywiście, teraz przy $\dot{c} = 0$),

$$(6.16)' \quad \int_V \dot{N}_{i,j}[\underline{w}] w_{j,i} dV \geq \int_{S_T} f_j[\underline{w}] w_j,$$

dla wszystkich pól prędkości $\underline{w} \in W$. W przypadku "martwego" obciążenia, prawa strona nierówności (6.16)' jest równa zeru. W tym przypadku, nieco mocniejszy od (6.16) warunek:

$$(6.17) \quad \int_V \dot{N}_{i,j}[\underline{w}] w_{j,i} dV > 0 \quad \text{dla wszystkich } \underline{w} \in W, \underline{w} \neq \underline{0},$$

proponował Hill [56] [57] jako warunek dostateczny dla dynamicznej stateczności stanu równowagi, ale przy pewnych dodatkowych ograniczeniach, które niełatwo poddają się weryfikacji. Podobny warunek stateczności "w małym" postaci (6.16) z ostrą nierównością dla niezerowych \dot{w} proponował Drucker [33] [34] [35], z tą różnicą, że Drucker nie rozważał stateczności w ścisłym sensie dynamicznym i nie dyskutował subtelności z tym związanych. (Należy zaznaczyć, że chodzi tu o postulat stateczności układu, w odróżnieniu od bardziej znanego postulatu Druckera stateczności materiału. Trzeba też podkreślić, że sformułowania Druckera nie są, jak wiadomo, pozbawione niejasności, z uwagi na nieuwzględnianie zmian geometrii ciała.)

Rozważmy teraz, jako szczególny przypadek, materiał sprężysto-plastyczny o gładkiej powierzchni plastyczności, o modułach w stanie granicznym określonych przez (2.31). Zakładając ciągłość zależności $\dot{\epsilon}(\epsilon)$, mamy [61]

$$(6.18) \quad L_{ijkl}^P - \mathcal{L}_{ijkl} = -\mu_{ij} \lambda_{kl},$$

gdzie μ jest pewnym tensorem symetrycznym, z założenia niezerowym. Rozważmy ciało z takiego materiału, obciążone przynajmniej w pewnej strefie (nazwanej strefą plastyczną) do granicy plastyczności, przy dowolnych warunkach brzegowych i, dla uproszczenia, przy zerowych siłach masowych. Punkt w strefie plastycznej nazwiemy regularnym, jeżeli w pewnym otoczeniu tego punktu moduły L_{ijkl}^P i \mathcal{L}_{ijkl} są gładkimi funkcjami miejsca. W punkcie 5.3 wykazaliśmy, że spełnienie, w każdym punkcie regularnym strefy plastycznej, warunku pół-silnej eliptyczności modułów plastycznych,

$$(6.19) \quad C_{ijkl}^P \nu_i \nu_k \xi_j \xi_l \geq 0 \quad \text{dla wszystkich } \xi, \nu,$$

gdzie moduły C_{ijkl}^P związane są z L_{ijkl}^P zależnością, analogiczną do (2.35), jest konieczne dla stabilności stanu równowagi w sensie energetycznym. Podamy teraz inne ograniczenie konstytutywne, które nie jest konsekwencją warunku (6.16), lecz wynika z silniejszego wymogu stabilności stanu równowagi w sensie Definicji 6.2. Zachodzi następujące twierdzenie (Petryk [153]).

Twierdzenie 6.1 Dla stabilności energetycznej (w sensie Definicji 6.2) stanu równowagi ciała z materiału sprężysto- plastycznego o gładkiej powierzchni plastyczności i dwóch wartościach modułów, spełniających (6.18), jest konieczne, aby moduły plastyczne w każdym punkcie regularnym strefy plastycznej miały postać

$$(6.19) \quad L_{ijkl}^P = L_{klij}^P = \rho_{ijkl} - \frac{1}{\epsilon} \lambda_{ij} \lambda_{kl} \quad \epsilon > 0.$$

Dowód twierdzenia został podany w pracy [153]; jest on zbyt długi, aby go tu przytaczać. Nadmienimy tylko, że postać (6.19) wynika, po uprzednim wykazaniu symetrii modułów sprężystych, ze związku (6.18) i z wyprowadzonego w toku dowodu, warunku koniecznego stabilności postaci

$$(6.20) \quad (\epsilon_{ijkl} - C_{ijkl}^P) \nu_i \nu_k \epsilon_j \epsilon_l \geq 0 \quad \text{dla wszystkich } \xi, \nu,$$

gdzie ϵ_{ijkl} są modułami sprężystymi (por. (3.35)). Wzór (6.19) pokrywa się ze wzorem (2.32); uzyskany wynik można więc krótko sformułować tak: energetyczny postulat stabilności stanu równowagi wyklucza niestowarzyszone (z gładkim warunkiem plastyczności) prawo płynięcia. Nie jest jasne, czy dla stateczności dynamicznej stanu równowagi musi zachodzić (6.19). Przebieg dowodu Twierdzenia 6.1 sugeruje, że ewentualny dowód tego przypuszczenia mógłby wynikać z rozpatrzenia propagacji

fali obciążania- odciążania, ulegającej wzmocnieniu wskutek uwalniania energii z materiału. W każdym bądź razie, należy mieć na uwadze, że rozważana tu niestabilność ma sens taki, że infinytezymalne zaburzenia powodują skończone odchylenia od stanu równowagi. Nie jest wykluczone, że te skończone odchylenia mogą być w niektórych przypadkach na tyle małe, że niestabilność może mieć w tych przypadkach niewielkie znaczenie praktyczne.

7. NIEJEDNOZNACZNOŚĆ USTALONYCH PŁASKICH PRZEPLYWÓW OŚRODKÓW IDEALNIE PLASTYCZNYCH Z BRZEGIEM SWOBODNYM

W odróżnieniu od rozdziałów poprzednich, Rozdział 7 dotyczy materiałów sztywno-idealnie plastycznych. Przyjmujemy teraz izotropowy, jednorodny, nieściśliwy model materiału sztywno-plastycznego bez wzmocnienia o stowarzyszonym prawie płynięcia, będący punktem wyjścia klasycznej teorii plastycznego płynięcia. Rozpatrywać będziemy nadal procesy quasi-statyczne, pomijając dodatkowo siły masowe. Zakładamy ponadto płaski stan odkształcenia, co pozwala na zastosowanie metody linii poślizgu do wyznaczania rozwiązań zagadnień brzegowych (warunek plastyczności jest w tym przypadku wystarczająco określony przez podanie wartości granicy plastyczności na scinanie k). Metoda linii poślizgu jest metodą klasyczną, opisaną szczegółowo w wielu monografiach, np. [51] [177] [176] [171] [86], nie zachodzi więc potrzeba jej omawiania. Skoncentrujemy się na zagadnieniu możliwej niejednoznaczności rozwiązań, przy czym badana niejednoznaczność będzie miała specyficzny charakter, odmienny od bifurkcji procesu deformacji.

W typowym zagadnieniu brzegowym rozwiązywanym metodą linii

poślizgu, kształt ciała jest zadany, a na brzegu ciała zadane są albo składowe prędkości przemieszczeń albo składowe sił powierzchniowych. Jak wykazał Hill [52], stan naprężenia (a więc i postać siatki linii poślizgu) w strefie możliwych odkształceń jest wówczas jednoznacznie określony, być może z dokładnością do wartości ciśnienia hydrostatycznego w pewnym punkcie siatki. Zasięg tej strefy może być określony [11] z jednego tzw. *kompletnego* rozwiązania, tj. rozwiązania spełniającego wszystkie warunki statyczne i kinematyczne. Pole prędkości może jednak pozostawać niejednoznacznie określone; jest to dobrze znany objaw niejednoznaczności w zagadnieniach idealnej plastyczności, a klasycznym przykładem jest zagadnienie Prandtla wciskania płaskiego gładkiego stempla w półprzestrzeń (zob. np. [176]). W pewnych przypadkach, tego typu niejednoznaczność jest pozorna i znika po rozpatrzeniu przyrostowych warunków równowagi, przy (zwykle niezbędnym) uwzględnieniu zmian geometrii [55]. Nie zawsze jednak to ma miejsce, a pozostająca niejednoznaczność rozwiązania w prędkościach ma charakter analogiczny do bifurkacji, rozważanej w Rozdziale 3.

W tym rozdziale interesować nas będzie inny rodzaj niejednoznaczności, mianowicie, niejednoznaczność rozwiązań, opisujących ustalone procesy dużych deformacji przy nieznanym z góry położeniu swobodnego brzegu ciała. Mianem procesy ustalone określamy dla uproszczenia zarówno przepływy stacjonarne jak samopodobne; w tym ostatnim przypadku zachowane jest geometryczne podobieństwo całkowitej konfiguracji w trakcie deformacji. Obydwa typy procesów ustalonych charakteryzują się tym, że jedno (kompletne) rozwiązanie zagadnienia brzegowego, rozumiane jako jedna siatka linii poślizgu wraz z odpowiednim hodografem, opisuje już w sposób ścisły cały proces (zwykle dużych) deformacji. Jeżeli całkowity kształt ciała jest z góry nieznan, to siatkę linii poślizgu i hodograf należy budować

dla warunków brzegowych nałożonych na brzegu o nieznanym położeniu, które musi dopiero zostać określone w trakcie rozwiązywania zagadnienia tak, aby warunek stacjonarności względnie podobieństwa był spełniony. Okazuje się, że ta okoliczność nie tylko komplikuje samo znajdowanie rozwiązania, ale, jak to będzie poniżej pokazane na przykładach, pociąga za sobą z reguły istnienie nieskończenie wielu rozwiązań. Fakt istnienia niejednoznacznych rozwiązań w omawianych okolicznościach nie jest nowy (por. np. [51] [106]), ale prawdopodobnie dopiero w pracy autora [147] wykazano po raz pierwszy istnienie nieskończenie wielu *kompletnych* rozwiązań dla danego zagadnienia. Powstaje otwarty problem, jak należy interpretować tego typu niejednoznaczność (zob. np. [145] [147]). Wyciągnięcie praktycznych wniosków z niejednoznacznych rozwiązań może nie być łatwe; dla celów praktycznych, w przypadku kinematycznie wymuszonego procesu można więc skorzystać z tzw. hipotezy minimum siły (w odniesieniu do klasy *kompletnych* rozwiązań).

Tylko podstawowe cechy rozwiązań będą omawiane przy prezentacji poszczególnych przykładów; bardziej szczegółową analizę zawierają prace autora [145] [146] [147] [148] [151] [156]. Wszystkie przedstawione rozwiązania są niejednoznacznie określone, a klasa rozwiązań dopuszczalnych jest zwykle ograniczona podanymi przez Hilla [53] warunkami nieprzeciążenia sztywnych naroży przy sztywno-plastycznej granicy. Wszystkie rozwiązania są kinematycznie dopuszczalne: można skonstruować hodograpy dla prędkości, a warunek nieujemności mocy dysypowanej sprawdzono przy pomocy metody Greena [43] względnie Forda [38]. Część rozwiązań jest kompletnych, a w pozostałych brakuje jedynie dowodu istnienia statycznie dopuszczalnego przedłużenia pola naprężeń w obszary sztywne, które, zważywszy na nieprzeciążenie sztywnych naroży, powinno istnieć, przynajmniej dla pewnego zakresu parametrów zagadnienia.

Rozwiązania były wyznaczane numerycznie przy wykorzystaniu metody macierzowej, zaproponowanej przez Collinsa [20] i podanej w formie szczegółowo opracowanej techniki obliczeniowej przez Dewhursta i Collinsa [31]. Metoda macierzowa budowy siatek linii poślizgu ma ścisły związek z zasadą superpozycji Hilla [63] i metodą podwójnych szeregów potęgowych Ewinga [37]; jej szczegółowy opis można znaleźć w przeglądowej pracy Collinsa [23] i monografii [86]. Przy wyznaczaniu rozwiązania dla zagadnienia toczenia walca, wykorzystano ponadto podaną przez autora [145] [146] metodę wyznaczania rozwiązań stacjonarnych z *deformującym się brzegiem swobodnym*.

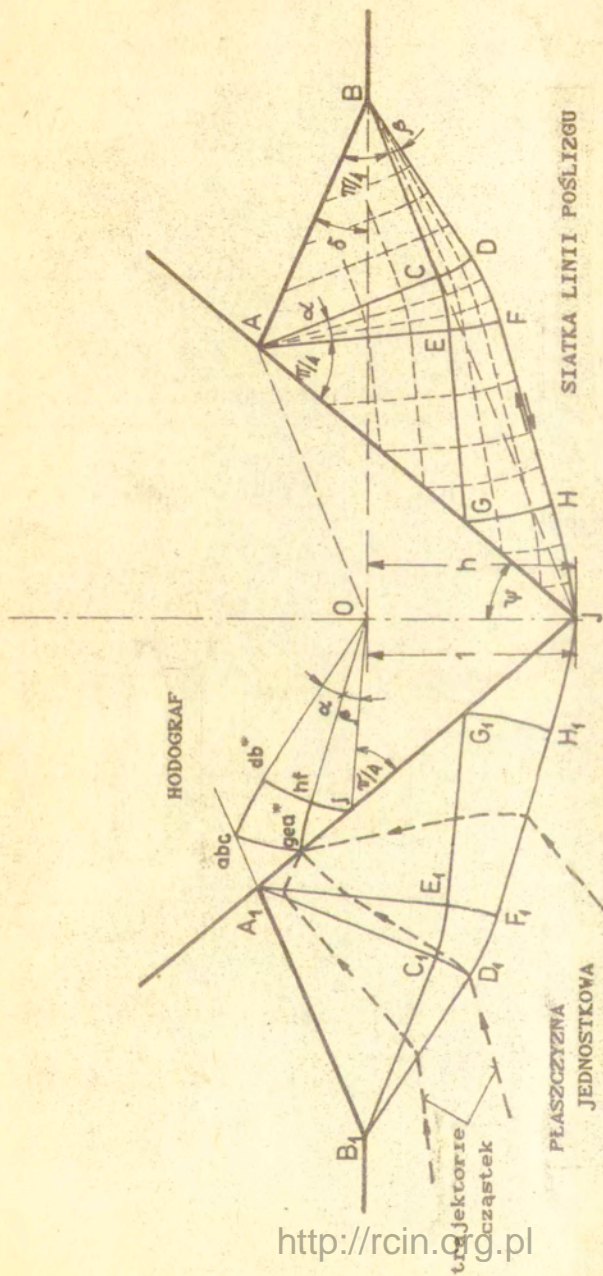
7.1 Zagadnienia samopodobne

Rozpocznijmy od samopodobnego zagadnienia wciskania sztywnego klina w sztywno-idealnie plastyczną półprzestrzeń. Klasyczne rozwiązanie w przypadku gładkiego klina przemieszczającego się w kierunku normalnym do powierzchni osrodka podane zostało przez Hilla, Lee i Tuppera [73] i było wielokrotnie cytowane jako jedyne rozwiązanie dla tego zagadnienia. Okazało się jednak [147], że rozwiązanie to stanowi jedynie szczególny przypadek niejednoznacznie określonego, kompletnego rozwiązania, przedstawionego na Rys. 6. Rozwiązanie zależy od dwóch parametrów, kątów α i β "wachlarzy" linii poślizgu, na które nałożony jest tylko jeden warunek, aby na tzw. płaszczyźnie jednostkowej brzeg A_1B_1 był trajektorią cząstek materiału. Dla zadanego kąta ψ klina, istnieje jednoparametrowa rodzina rozwiązań, parametrem której może być np. wartość kąta β . Minimalna wartość β wynosi 0, co odpowiada rozwiązaniu Hilla, Lee i Tuppera, natomiast wartość maksymalna wynika z warunku nieprzeciążenia sztywnego naroża w otoczeniu punktu B (Rys. 7). Okazuje się, że dla $2\psi < -95^\circ$ nowe rozwiązanie daje mniejszą wartość siły potrzebnej do wciśnięcia

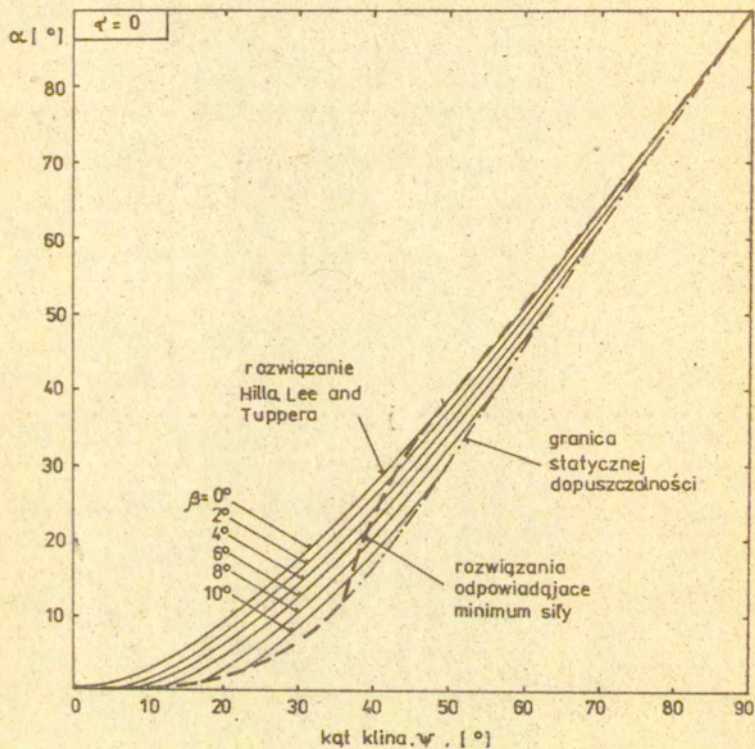
klina na zadaną głębokość niż rozwiązanie klasyczne, chociaż różnica nie przekracza 2.2%.

Gdy klin jest wciskany pod pewnym kątem w materiał, to oprócz rozwiązania analogicznego do pokazanego na Rys. 6, możliwe są rozwiązania innych typów. Na Rys. 8 pokazano schemat siatki linii poślizgu zaproponowany niezależnie przez autora [145] i Collinsa [22] dla zagadnienia ukośnego wciskania klina w materiał, odpowiadającego np. fazie wstępnej szeregu procesów obróbki skrawaniem. Rozwiązanie należy do nowej klasy rozwiązań samopodobnych, w których występuje obracający się obszar sztywny o brzegu swobodnym w kształcie spirali logarytmicznej. Rozwiązanie przedstawione na Rys. 8 jest tzw. typu pośredniego, gdyż kształt żadnej linii poślizgu w deformującym się obszarze ACDJ nie jest początkowo znany. Można wykazać [147], że przy zadanych warunkach brzegowych rozwiązanie zależy od czterech parametrów (kątów η , ζ i α oraz ciśnienia hydrostatycznego w pewnym punkcie siatki), na które nałożone są tylko trzy warunki równowagi sztywnego wióra MBDCAM: rozwiązanie jest więc niejednoznaczne. Wyznaczenie całej rodziny rozwiązań, odpowiadających tym samym warunkom brzegowym, jest możliwe przy zastosowaniu metody macierzowej. Rys. 9 ilustruje taką rodzinę rozwiązań dla zaznaczonych wartości kąta ostrza i kąta nachylenia jego trajektorii do powierzchni ośrodka przy założeniu braku tarcia na powierzchni ostrza. Pokazano w skali dwa graniczne rozwiązania tej rodziny i jedno pośrednie.

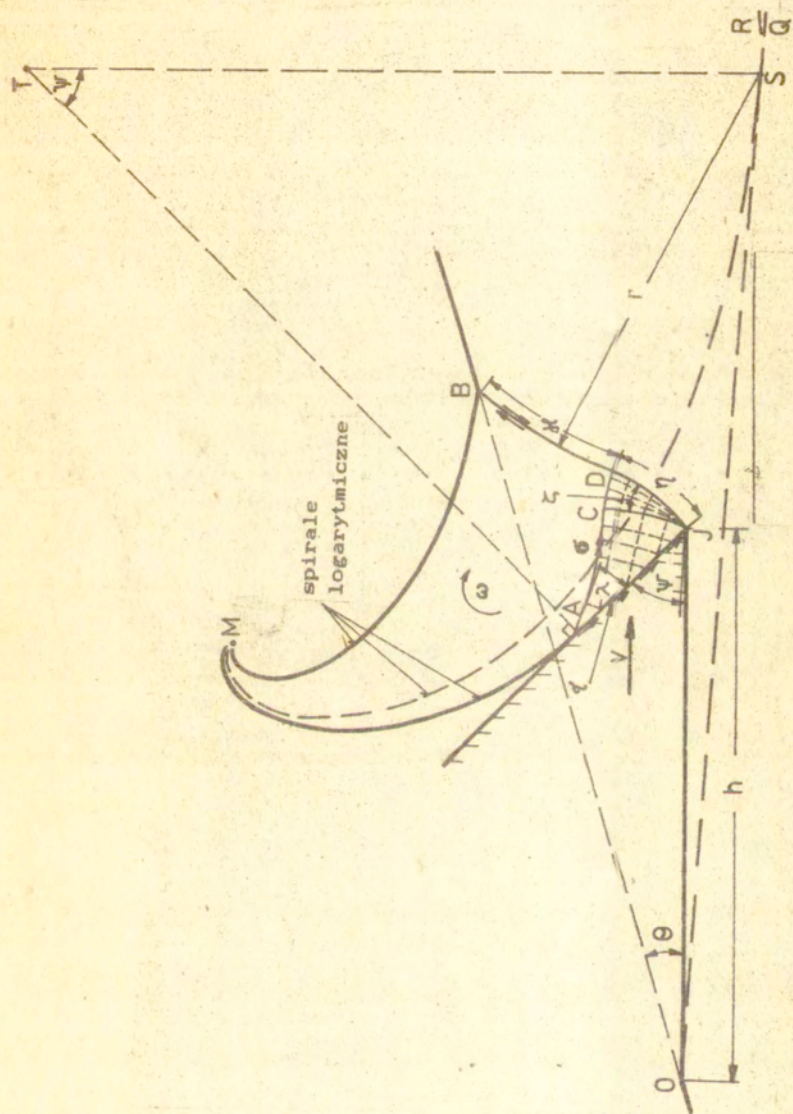
W pracy [147] dokonano analizy numerycznej rozwiązania z Rys. 8, a także rozwiązań innych typów, dla pełnego zakresu parametrów geometrycznych, zakładając różne wartości sił tarcia na powierzchni klina. Rys. 10 przedstawia zależność minimalnej wartości siły (w klasie niejednoznacznych rozwiązań) od parametrów ψ i θ dla naprężeń stycznych na powierzchni klina $\tau = 0.5 k$. Zaznaczono typ rozwiązania, z którego ta minimalna wartość siły została wyznaczona. Typ I rozwiązania odpowiada



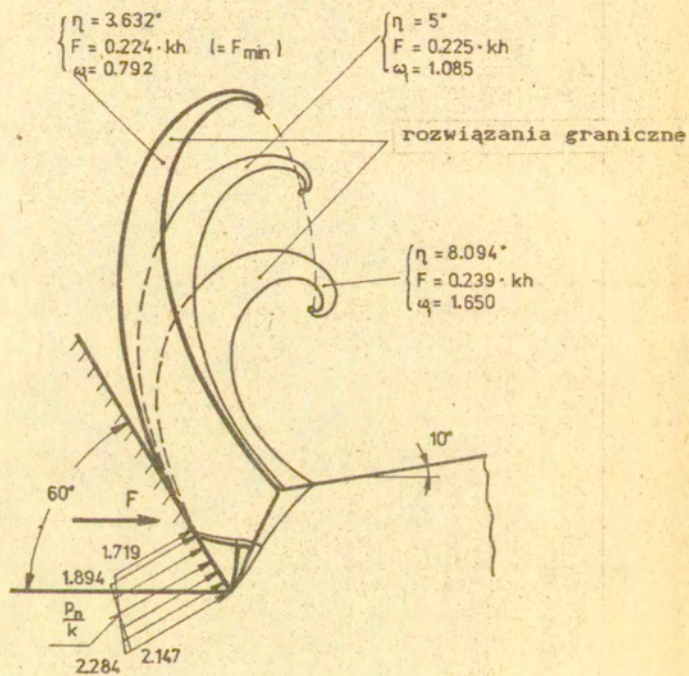
Rys. 6



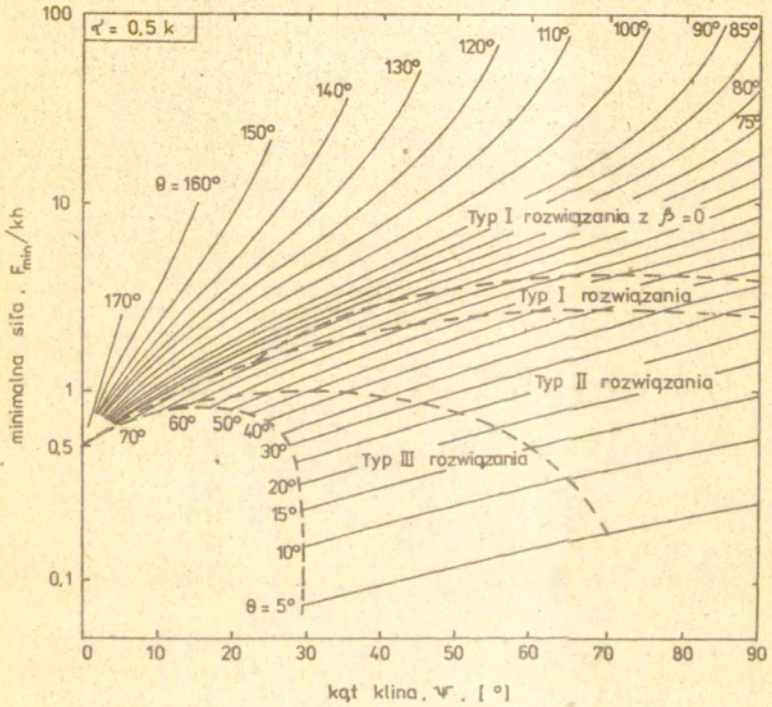
Rys. 7



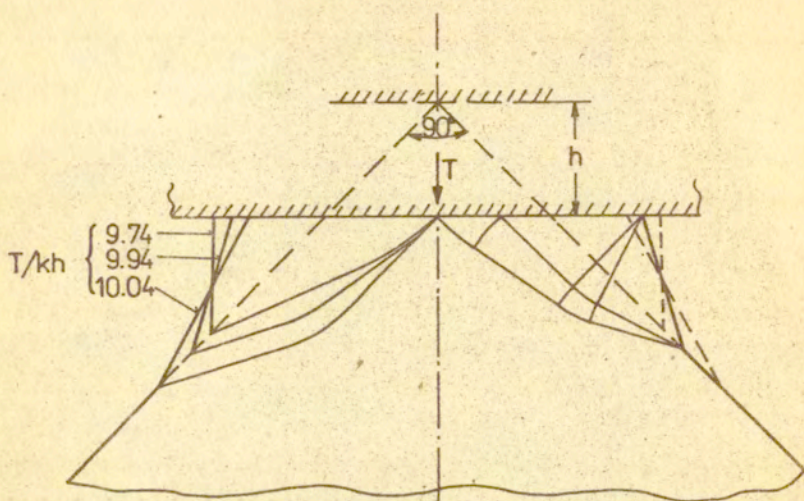
Rys. 6



Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11

połowie siatki linii poślizgu z Rys. 6 (założono, że tylko jedna strona klina jest w kontakcie z materiałem), Typ III oznacza rozwiązanie z Rys. 8, a Typ II określa rozwiązanie (nie pokazane tutaj), opisujące tworzenie się "wióra" o kształcie trójkąta.

Rozwiązania dla zagadnienia ukośnego wciskania sztywnego klina w plastyczną półprzestrzeń mogą być wykorzystane przy konstruowaniu rozwiązań dla zagadnienia zgniatania plastycznego klina sztywnym, gładkim stemplem. Przykładowe rozwiązanie, a właściwie rodzinę niejednoznacznie określonych rozwiązań, przedstawiono na Rys. 11. Rozwiązanie to stanowi uogólnienie klasycznego rozwiązania Hilla [51] i, jak widać z rysunku, daje niższą wartość siły.

7.2 Procesy stacjonarne

Rys. 12 przedstawia niejednoznacznie określone rozwiązanie dla zagadnienia skrawania warstwy płaskim nożem, opisujące tworzenie się zakrzywionego wióra. Ten typ rozwiązania został zaproponowany i przeanalizowany numerycznie przez autora [145] i niezależnie przez Dewhursta [30]. Postać siatki linii poślizgu jest identyczna jak w rozwiązaniu z Rys. 8, a więc rozwiązanie jest także typu pośredniego. Na rysunku przedstawiono w skali dwa graniczne rozwiązania i jedno pośrednie, z rodziny możliwych rozwiązań dla kąta ostrza $\psi=45^\circ$, przy braku tarcia na powierzchni narzędzia. Analogiczne rozwiązania zbudowano dla różnych wartości kąta ostrza przy uwzględnieniu sił tarcia.

Dla większych wartości kąta ostrza ψ można skonstruować, dla procesu stacjonarnego skrawania, niejednoznaczne rozwiązanie innego typu, zaproponowane przez Kudo [106] (Rys. 14). Po zbadaniu statycznej dopuszczalności rozwiązania (czego nie zrobił Kudo), można określić rodzinę kompletnych rozwiązań dla zadanego warunku tarcia i kąta ostrza. Taka rodzina rozwiązań jest przedstawiona na Rys. 13 dla gładkiego narzędzia o ujemnym kącie natarcia. Jedno ze skrajnych rozwiązań odpowiada deformacji zachodzącej tylko na pojedynczej, prostej linii nieciągłości prędkości nachylonej pod kątem 45° do powierzchni (idealnie gładkiego) narzędzia: jest to rozwiązanie typu zaproponowanego przez Lee i Shaffera [109]. Jest widoczne, że gdy kąt natarcia dąży do -45° , to grubość wióra i siła skrawania dąży w rozwiązaniu Lee i Shaffera do nieskończoności; należy podkreślić, że rozwiązanie jest pomimo to kompletne. Podobna tendencja występuje w tym rozwiązaniu również przy uwzględnieniu tarcia, dla innych krytycznych wartości kąta natarcia. Ten przykład wyraźnie wykazuje, że bez uwzględnienia

niejednoznaczności rozwiązania, można otrzymać wnioski zupełnie niezgodne z rzeczywistością.

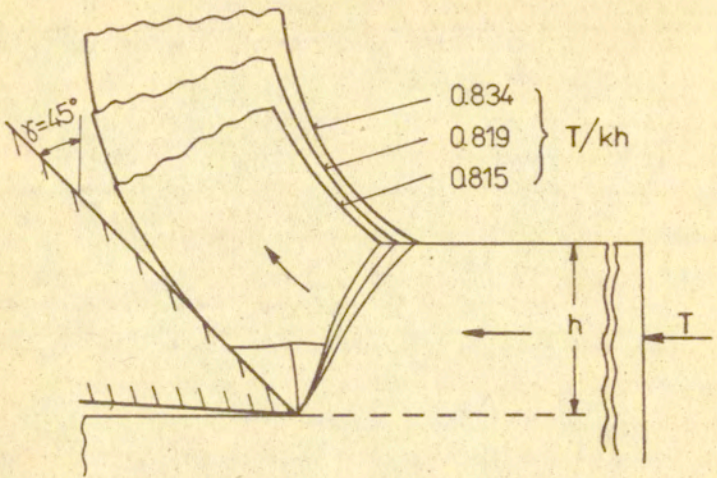
Rozpatrzmy teraz zbliżone zagadnienie przesuwania obciążonego, sztywnego klina po powierzchni plastycznego ośrodka. Głębokość, na której przemieszcza się wierzchołek klina, nie jest teraz zadawana bezpośrednio, jak w zagadnieniu skrawania, lecz wynika z rozwiązania i może być w szczególności równa zeru. To zagadnienie może służyć do modelowania zjawisk tarcia i zużycia na powierzchni kontaktu metali, gdyż odpowiada procesowi plastycznego płynięcia wokół twardej mikronierówności w kształcie klina [164] [15] [156]. Okazuje się [148] [156], że pomimo pozornej prostoty warunków brzegowych, istnieje szereg różnych typów rozwiązań, przy czym wszystkie z nich są określone niejednoznacznie. Najciekawsze z nich przedstawione jest na Rys. 14. Schemat siatki linii poślizgu pokazany jest na Rys. 14a, schemat hodografu na Rys. 14b, a mechanizm płynięcia na Rys. 14c. Jest widoczne, że warstwa materiału, ulegającego odkształceniom plastycznym, rozdziela się na dwie części: górna warstwa o grubości Δh przekształca się w wiór, a dolna o grubości h tworzy nową, odkształconą plastycznie warstwę wierzchnią ośrodka. Rozwiązanie jest niejednoznacznie określone, gdyż wartość kąta γ może być dobrana w pewnym zakresie dowolnie.

Korzystając z hipotezy minimum siły, możliwe jest zbudowanie mapy mechanizmów plastycznego płynięcia w płaszczyźnie (μ, θ) (Rys. 15) [148] [156]. θ jest tu kątem nachylenia powierzchni kontaktu klina z materiałem do powierzchni ośrodka, a μ jest współczynnikiem tarcia na powierzchni kontaktu, definiowanym jako stosunek maksymalnej dopuszczalnej wartości stycznych naprężeń kontaktowych do granicy plastyczności na ścinanie k . Na rysunku wydzielono obszary zmienności parametrów μ i θ , w których minimalną wartość siły przesuwu uzyskuje się z rozwiązania o odpowiednim,

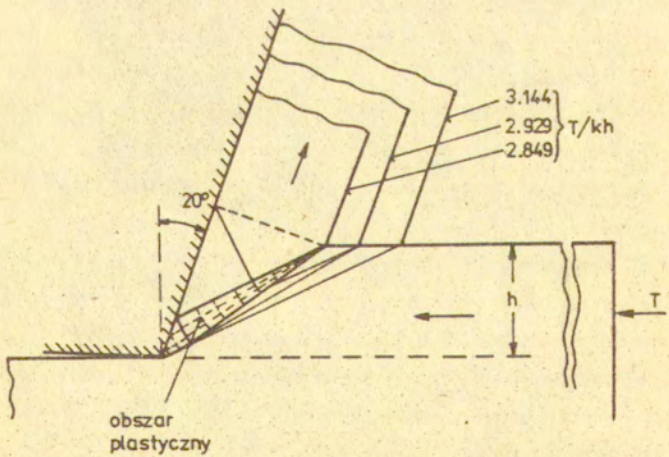
schematycznie zaznaczonym mechanizmie płynięcia.

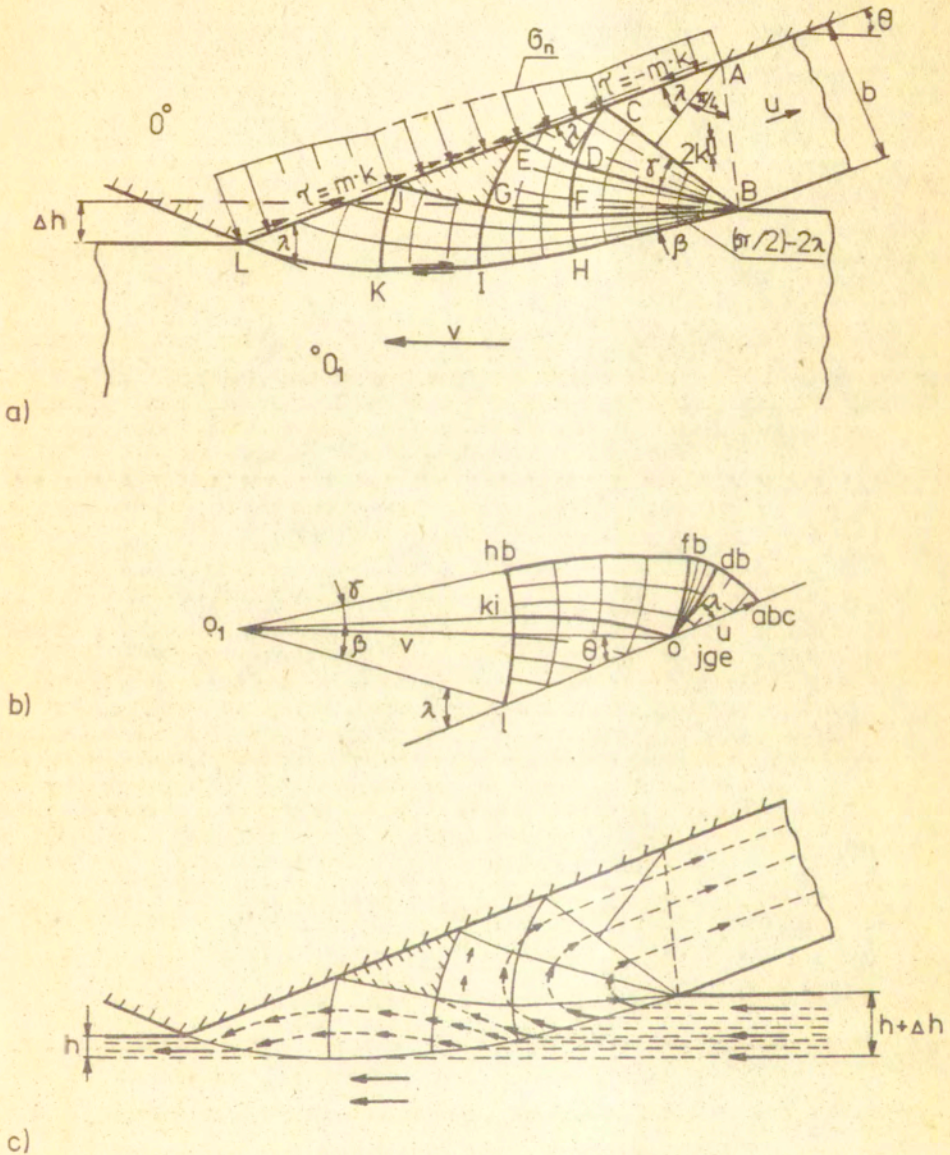
Jako ostatni przykład, rozpatrzmy rozwiązanie dla zagadnienia toczenia sztywnego, szorstkiego walca po powierzchni sztywno-idealnie plastycznej półprzestrzeni. Schemat siatki linii poślizgu i siatki hodografu przedstawiono odpowiednio na Rys. 16a i b. Rozwiązanie zostało zaproponowane przez autora w pracy [145], a rezultaty szczegółowej analizy numerycznej zamieszczono w [151]. Konstrukcję rozwiązania komplikuje fakt, że kształt brzegu swobodnego AB, ograniczającego deformujący się plastycznie obszar ABC, nie jest znany z góry. Trudność tę można jednak pokonać przy użyciu metody macierzowej Collinsa i wykorzystaniu specjalnych operatorów brzegowych [145] [146]. Jeden z tych operatorów wiąże ze sobą kształt linii hodografu bc i ac w taki sposób, że warunek stacjonarności brzegu AB jest automatycznie spełniony. Oznaczając przez $\underline{\sigma}$ reprezentację wektorową [20] [31] pewnej linii poślizgu o nieznanym kształcie, np. AC, i wykorzystując zwykle operatory metody macierzowej i wspomniane wyżej operatory brzegowe, uzyskuje się równanie macierzowe na $\underline{\sigma}$ [151] (zaznaczmy, że symbol $\underline{\sigma}$ nie ma nic wspólnego z tensorem naprężenia). Po rozwiązaniu tego równania, kształt linii AC jest już określony, a dalsza konstrukcja rozwiązania nie nastręcza trudności. Można wykazać, że rozwiązanie zależy od czterech parametrów (tj. ma cztery stopnie swobody), na które nałożone są tylko trzy warunki; rozwiązanie jest więc niejednoznacznie określone. Dla zadanych wartości obciążenia walca siłą normalną i momentem osiowym, uzyskuje się nieskończoną rodzinę rozwiązań, którą można parametryzować np. przez kąt γ "wachlarza" linii poślizgu w punkcie B. W szczególnym przypadku $\gamma = 0$, rozwiązanie sprowadza się do rozwiązania analizowanego przez Collinsa [21].

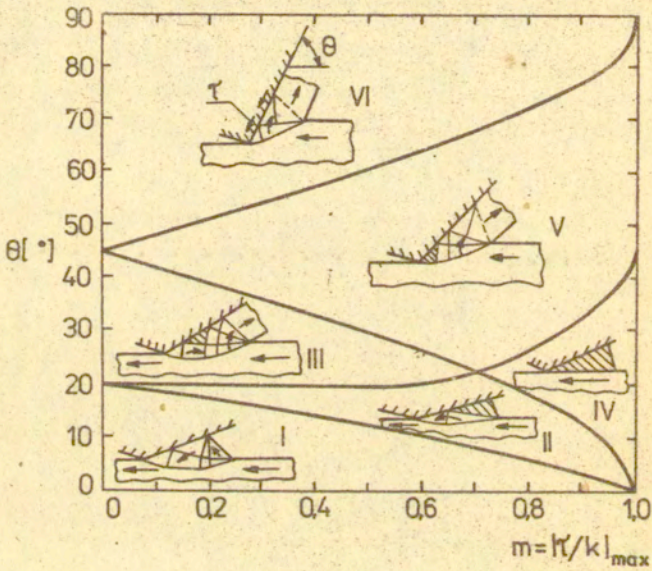
Niejednoznaczność rozwiązania w przypadku zerowego (bezwymiarowego) momentu q wygodnie jest zilustrować na



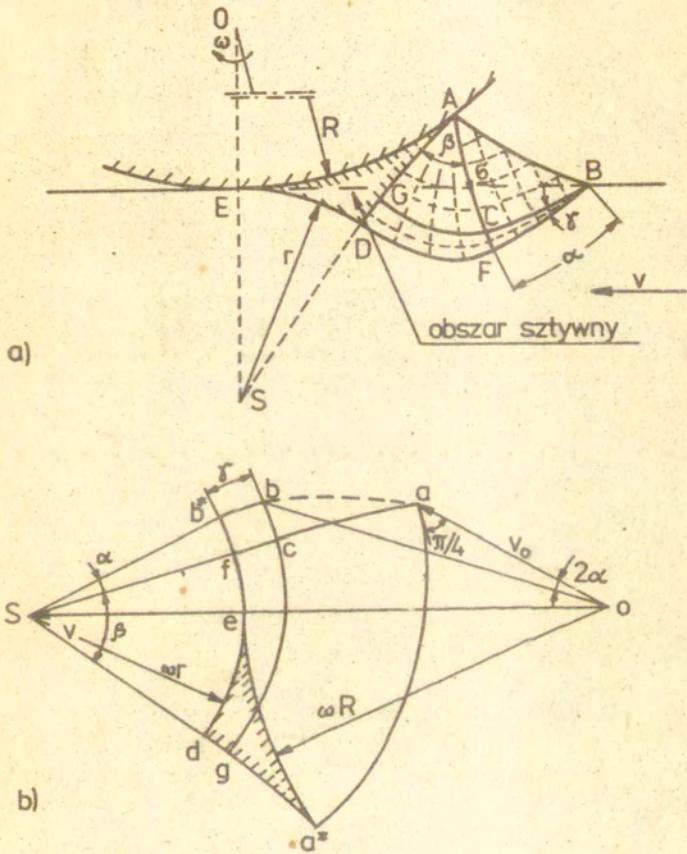
Rys. 12



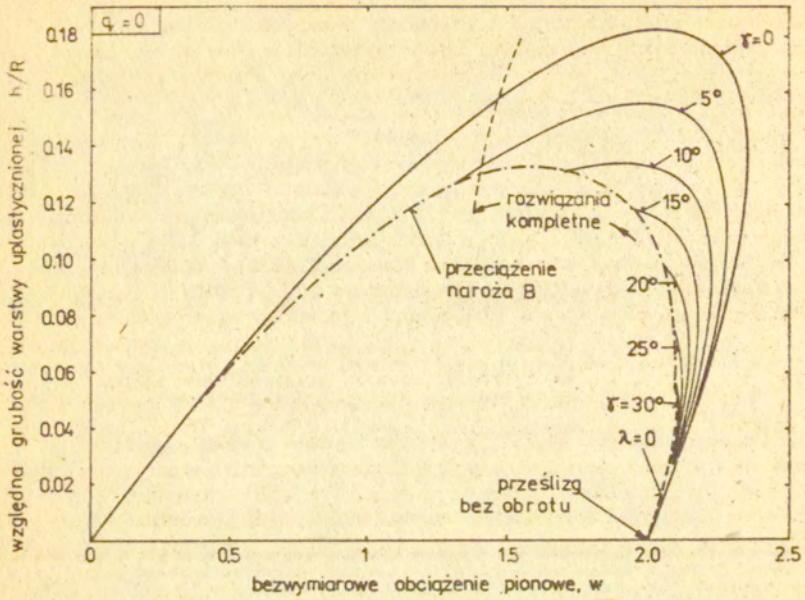




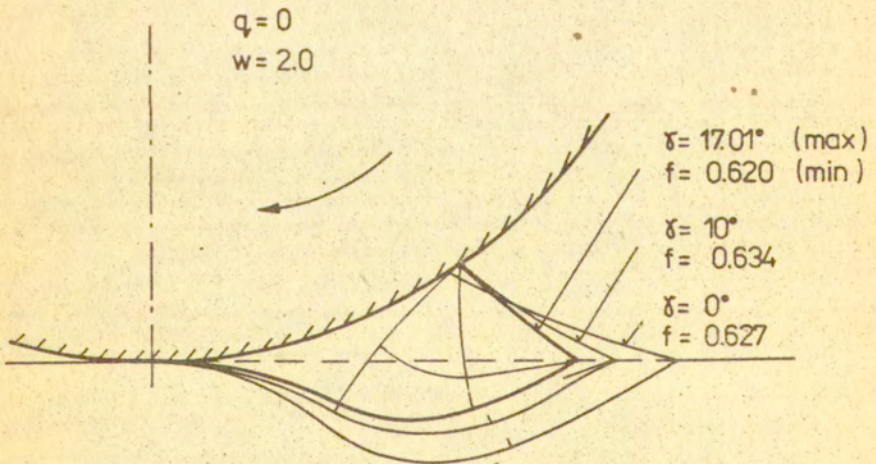
Rys. 15



Rys. 16



Rys. 17



Rys. 18

wykresie zależności grubości warstwy uplastycznionej w wyniku przetoczenia się walca (odniesionej do promienia walca R) od bezwymiarowego obciążenia normalnego $w = W/AR$, gdzie W jest siłą docisku na jednostkę długości walca (Rys. 17). Zaznaczono zakres rozwiązań, dla których wykazano [151] ich kompletność. Jest ciekawe, że dla $w = 2$ istnieją właściwie dwie rodziny (kompletnych) rozwiązań, jedna odpowiadająca ślizganiu się walca bez obrotu, a druga toczeniu (z chwilowym środkiem obrotu w punkcie S (Rys. 16a), gdy układ współrzędnych jest związany z ośrodkiem). Tę drugą rodzinę rozwiązań zilustrowano na Rys. 18, gdzie przedstawiono w skali położenie swobodnego brzegu i zasięg strefy plastycznej dla dwóch skrajnych rozwiązań tej rodziny i jednego pośredniego. Minimalna (bezwymiarowa) wartość f siły przesuwającej walec odpowiada maksymalnej możliwej wartości kąta γ ; dla większych wartości γ sztywne naroże w punkcie B byłoby przeciążone.

LITERATURA

1. ABEYRATNE R., TRIANTAFYLLIDIS N. The emergence of shear bands in plane strain. *Int. J. Solids Structures*, 17, 1113-1134, 1981.
2. ANAND L. Some experimental observations on localized shear bands in plane-strain. *Scripta Metall.*, 18, 423-427, 1984.
3. ANAND L., SPITZIG W. A. Initiation of localized shear bands in plane strain. *J. Mech. Phys. Solids*, 28, 113-128, 1980.
4. ANAND L. SPITZIG W. A. Shear band orientations in plane strain. *Acta metall.*, 30, 553-561, 1982.
5. ASARO R. J. Geometricall effects in the inhomogeneous deformation of ductile single crystals. *Acta metall.*, 27, 445-453, 1979.
6. ASARO R. J. Micromechanics of crystals and polycrystals. *Adv. Appl. Mech.*, 23, 1-115, Acad. Press, New York 1983.
7. ASARO R. J., RICE J. R. Strain localization in ductile single crystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 25, 309-338, 1977.
8. BALL J. M. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 63, 337-403, 1977.
9. BALL J. M. Constitutive inequalities and existence theorems in nonlinear elastostatics. *Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriot - Watt Symposium* (R. J. Inops, ed.), Vol. I, 187-241, Pitman 1977.
10. BALL J. M., MARDSEN J. E., Quasiconvexity at the boundary, positivity of the second variation and elastic stability. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 86, 251-277, 1984.
11. BISHOP J.F.W., GREEN A.P., HILL R. A note on the deformable region in a rigid-plastic body. *J. Mech. Phys. Solids*, 4, 256-258, 1956.

12. BRUHNS O. T. Bounds to the critical stresses in bifurcation of cylindrical specimens in the case on non-associated flow laws. *Stability in the Mechanics of Continua* (F.H. Schroeder, ed.), 46-56, Springer, Berlin 1982.
13. BRUHNS O. T. Some remarks on bifurcation in solids obeying non-associated flow laws. *Plastic Instability, Proc. Considère Memorial*, 315-324, Ecole Nat. Ponts Chauss. Press, Paris 1985.
14. CHAKRABARTY J. On uniqueness and stability in rigid/plastic solids. *Int. J. Mech. Sci.*, 11, 723-731, 1969.
15. CHALLEN J. M., OXLEY, P. L. B. An explanation of the different regimes of friction and wear using asperity deformation models. *Wear*, 53, 229-243, 1979.
16. CHAMBON R., DESRUES J. Bifurcation par localization et non linéarité incrémentale: un exemple heuristique d'analyse complète. *Plastic Instability, Proc. Considère Memorial*, 101-113, Ecole Nat. Ponts Chauss. Press, Paris 1985.
17. CHENG S.Y., ARIARATNAM S.T., DUBEY, R.N. Axisymmetric bifurcation in an elastic-plastic cylinder under axial load and lateral hydrostatic pressure. *Quart. Appl. Math.*, 29, 41-51, 1971.
18. CHRISTOFFERSEN J., HUTCHINSON J. W. A class of phenomenological corner theories of plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 27, 465-487, 1979.
19. CLIFTON R. J., DUFFY J., HARTLEY K. A., SHAWKI T. G. On critical conditions for shear band formation at high strain rates. *Scripta Metall.*, 18, 443-448, 1984.
20. COLLINS, I.F. The algebraic-geometry of slip line fields with applications to boundary value problems. *Proc. Roy. Soc. A*, 303, 317-338, 1968.

21. COLLINS I. F. On the rolling of a rigid cylinder on a rigid/perfectly plastic half-space. *J. Méc. appl.*, 2, 431-448, 1978.
22. COLLINS I. F. Integral equation formulation of slipline field problems. *Application of Numerical Methods to Forming Processes*, ASME AMD-28, 129-141, 1978.
23. COLLINS I. F. Boundary value problems in plane strain plasticity. *Mechanics of Solids, The Rodney Hill 60-th Anniversary Volume* (H.G. Hopkins, M.J. Sewell, ed.), 135-184, Pergamon Press, 1982.
24. MEQUID S.A., COLLINS I.F. On the mechanics of the oblique cutting of metal strips with knife-edged tools. *Int. J. Mech. Sci.*, 19, 361-371, 1977.
25. DAFALIAS Y. F. The plastic spin. *J. appl. Mech.*, 52, 865-871, 1985.
26. DARVE F. An incrementally nonlinear constitutive law of second order and its application to localization. *Mechanics of Engineering Materials* (C.S. Desai, R.H. Gallagher, ed.), 179-196, Wiley & Sons, 1984.
27. DARVE F., FLAVIGNE E., ROJAS E. A class of incrementally non-linear constitutive relations and applications to clays. *Comp. Geotechnics*, 2, 43-66, 1986.
28. DASHNER P. A. Invariance considerations in large strain elasto-plasticity. *J. Appl. Mech.*, 53, 55-60, 1986.
29. DESRUES J. La localisation de la déformation dans les matériaux granulaires. *Thesis*, Grenoble 1984.
30. DEWHURST P. On the non-uniqueness of the machining process. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 360, 587-610, 1978.
31. DEWHURST, P and COLLINS, I.F. A matrix technique for constructing slip-line field solutions to a class of plane strain plasticity problems. *Int. J. Num. Meth. Engng*, 7, 357-378, 1973.

322. DIETRICH L. Analysis of necking in cylindrical bar of hardening materials. *Arch. Mech.*, 32, 389-402, 1980.
333. DRUCKER D. C. A more fundamental approach to plastic stress-strain relations. *Proc. 1-st U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, 487-491, 1951.
344. DRUCKER D. C. A definition of stable inelastic material. *J. Appl. Mech.*, 26, 101-106, 1959.
355. DRUCKER D.C. On the postulate of stability of material in the mechanics of continua. *J. Méc.*, 3, 235-249, 1964.
366. DRUCKER D.C. ONAT E.T. On the concept of stability of inelastic systems. *J. Aero. Sci.*, 21, 543-548, 565, 1954.
377. EWING, D. J. F. A series-method for constructing plastic slipline fields. *J. Mech. Phys. Solids*, 15, 105-114, 1967.
388. FORD, H. *Advanced Mechanics of Materials*, Longmans Green, London 1960.
399. FORTES M. A. The stability of plastic deformation in tension. *J. Mech. Phys. Solids*, 19, 483-489, 1977.
400. GORCZYCA S., DYMEK S., RYS J., MASLANKA J., WROBEL M. Nomenclature for structural heterogenities produced by the deformation of metals. *Arch. Hutn.* 31, 23-32, 1986.
411. GOTOH M. A class of plastic constitutive equations with vertex effect. *Int. J. Solids Structures*, 21, 1101-1116, 1117-1129, 1985.
422. GRAVES L. M. The Weierstrass condition for multiple integral variation problems. *Duke Math. J.*, 5, 656-660, 1939.
433. GREEN, A. P. The plastic yielding of notched bars due to bending. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 6, 223-239, 1953.
441. GURTIN M. E. Thermodynamics and stability. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 59, 63-96, 1975.

45. HADAMARD J. Sur une question de calcul des variations. *Bull. Soc. Math. France*, 30, 253-256, 1902.
46. HADAMARD J. *Lecons sur la propagation des ondes*. Hermann, Paris 1903.
47. HART E. W. Theory of the tensile test. *Acta Metall.*, 15, 351-355, 1967.
48. HATHERLY M., MALIN A. S. Shear bands in deformed metals. *Scripta Metall.*, 18, 449-454, 1984.
49. HAVNER K. S. The theory of finite plastic deformation of crystalline solids. *Mechanics of Solids, The Rodney Hill 60-th Anniversary Volume* (H. G. Hopkins, M. J. Sewell, ed.), 265-302, Pergamon Press 1982.
50. HAVNER K. S. Comparisons of crystal hardening laws in multiple slip. *Int. J. Plasticity*, 1, 111-124, 1985.
51. HILL R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Clarendon Press, Oxford 1950.
52. HILL R. On the state of stress in a plastic-rigid body at the yield point. *Phil. Mag.*, 42, 868-875, 1951.
53. HILL, R. On the limits set by plastic yielding to the intensity of singularities of stress. *J. Mech. Phys. Solids*, 2, 278-285, 1954.
54. HILL R. New horizons in the mechanics of solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 5, 66-74, 1956.
55. HILL R. On the problem of uniqueness in the theory of a rigid-plastic solid. *J. Mech. Phys. Solids*, 5, 153-161, 302-307, 1957.
56. HILL R. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 6, 236-249, 1958.
57. Hill R. Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time. *J. Mech. Phys. Solids*, 7, 209-225, 1959.

58. HILL R. Bifurcation and uniqueness in non-linear mechanics of continua. *Problems of Continuum Mechanics, N. I. Muskhelishvili Anniversary Volume*, 155-164, SIAM, Philadelphia 1961.
59. HILL R. Acceleration waves in solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 10, 1-16, 1962.
60. HILL R. Uniqueness criteria and extremum principles in self-adjoint problems of continuum mechanics. *J. Mech. Phys. Solids*, 10, 185-194, 1962.
61. HILL R. On the classical constitutive relations for elastic/plastic solids. *Recent Progress in Applied Mechanics, The Folke Odqvist Volume* (B. Broberg, J. Hult, F. Niordson, ed.), 241-249, Almqvist & Wiksell, Stockholm 1967.
62. HILL R. The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 15, 79-95, 1967.
63. HILL R. On the vectorial superposition of Hencky - Prandtl nets. *J. Mech. Phys. Solids*, 15, 255-262, 1967.
64. HILL R. Eigenmodal deformations in elastic-plastic continua. *J. Mech. Phys. Solids*, 15, 371-386, 1967.
65. HILL R. On constitutive inequalities for simple materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 16, 229-242, 315-322, 1968.
66. HILL R. On constitutive macro-variables for heterogeneous solids at finite strain. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 326, 131-147, 1972.
67. HILL R. Aspects of invariance in solids mechanics. *Adv. Appl. Mech.*, 18, 1-75, Acad. Press, New York 1978.
68. HILL R. On intrinsic eigenstates in plasticity with generalized variables. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 93, 177-189, 1983.

69. HILL R. On macroscopic effects of heterogeneity in elastoplastic media at finite strain. *Math. Proc Camb. Phil. Soc.*, 95, 481-494, 1984.
70. HILL R. On the micro-to-macro transition in constitutive analyses of elastoplastic response at finite strain. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 98, 579-590, 1985.
71. HILL R., HAVNER K. S. Perspectives in the mechanics of elastoplastic crystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 30, 5-22, 1982.
72. HILL R., HUTCHINSON J. V. Bifurcation phenomena in the plane tension test. *J. Mech. Phys. Solids*, 23, 239-264, 1975.
73. HILL R., LEE E.H., TUPPER S.J. The theory of wedge indentation of ductile materials. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 188, 273-289, 1947.
74. HILL R., RICE J. R. Constitutive analysis of elastic-plastic crystals at arbitrary strain. *J. Mech. Phys. Solids*, 20, 401-413, 1972.
75. HILL R., RICE J.R. Elastic potentials and the structure of inelastic constitutive laws. *SIAM J. Appl. Math.*, 25, 448-461, 1973.
76. HILL R. SEWELL M.J. A general theory of inelastic column failure - I. *J. Mech. Phys. Solids*, 8, 105-111, 1960.
77. HILL R. SEWELL M.J. A general theory of inelastic column failure - II. *J. Mech. Phys. Solids*, 8, 112-118, 1960.
78. HILL R. SEWELL M.J. A general theory of inelastic column failure - III. *J. Mech. Phys. Solids*, 10, 285-300, 1962.
79. van HOVE L. Sur l'extension de la condition de Legendre du calcul des variations aux intégrales multiples à plusieurs fonctions inconnues. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.* 50, 18-23, 1947.
80. HUTCHINSON J. V. Elastic-plastic behaviour of polycrystalline metals and composites. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 319, 247-272, 1970.

81. HUTCHINSON J. W. Post-bifurcation behavior in the plastic range. *J. Mech. Phys. Solids*, 21, 163-190, 1973.
82. HUTCHINSON J. W. Plastic buckling. *Adv. Appl. Mech.*, 14, 67-144, Acad. Press, New York 1974.
83. HUTCHINSON J.W., MILES J.P. Bifurcation analysis of the onset of necking in an elastic/plastic cylinder under uniaxial tension. *J. Mech. Phys. Solids*, 22, 61-71, 1974.
84. HUTCHINSON J. W., TVERGAARD V. Shear band formation in plane strain. *J. Mech. Phys. Solids*, 17, 451-470, 1981.
85. JOHNSON C. Mathematical and Numerical Analysis of some problems in plasticity. *Res. Report No S-41296*, University of Göteborg, 1979.
86. JOHNSON W., SOWERBY R., VENTER R.D. *Plane Strain Slip-Line Fields For Metal-Deformation Processes*, Pergamon Press, Oxford 1982.
87. KLEIBER M. Perturbation approach to the incremental equations of large deformation elasto-plasticity. *Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. techn.*, 28, 75-80, 1980.
88. KLEIBER M. *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*, PWN 1984.
89. KLEIBER M. Numerical study of necking-type bifurcations in void-containing elastic-plastic materials. *Int. J. Solids Structures*, 20, 191-210, 1984.
90. KLEIBER M. On plastic localization and failure in plane strain and round void containing tensile bars. *Int. J. Plasticity*, 2, 205-221, 1986.
91. KLEIBER M, RANIECKI B. Elastic-plastic materials at finite strains. *Plasticity Today: Modelling, Methods and Applications* (A. Sawczuk, G. Bianchi, ed.), 3-46, Elsevier, London 1985.
92. KLUSZNIKOW W. D. Nowyje przedstawienia w plasticznosci i deformacjonna teoria. *PMN*, 23, 722-731, 1959.

93. KLUSZNIKOW W. D. Ustojcziwost' processa szatija idealizirowannogo uprugo-plasticzeskogo stierznia, zw. AN SSSR, *Mechanika i Maszynostrojenie*, No 6, 59-68, 1964.
94. KLUSZNIKOW W. D. Ustojcziwost' processa szatija idealizirowannoj piastinki. *MIT*, No 4, 28-36, 1966.
95. KLUSZNIKOW W. D. *Ustojcziwost' uprugo-plasticzeskich sistem*, Nauka, Moskwa 1980.
96. KNOPS R. J., PAYNE L. E. On potential wells and stability in nonlinear elasticity. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 84, 177-190, 1978.
97. KNOPS R. J., WILKES E. W. *Theory of elastic stability. Handbuch der Physik*, Vol. VIa/3 (C. Truesdell, et.), Springer, Berlin 1967.
98. KOITER W. T. Stress-strain' relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface. *Quart. Appl. Math.*, 11, 350-354, 1953.
99. KOITER W. T. General theorems for elastic-plastic solids. *Progress in Solids Mechanics*, Vol. I (I.N. Sneddon, R. Hill, ed.), 167-221, North-Holland, Amsterdam 1960.
100. KOLYMBAS D. Bifurcation analysis for sand samples with a non-linear constitutive equation. *Ing.-Archiv*, 50, 131-140, 1981.
101. KORBEL A. The real nature of shear bands - plastons? *Plastic Instability, Proc. Considère Memorial*, 325-335, Ecole Nat. Ponts Chauss. Press, Paris 1985.
102. KOSIŃSKI W. Jednoznaczność rozwiązań problemów początkowo-brzegowych w teoriach małych i dużych odkształceń niesprężystych. *Zagadnienia początkowo-brzegowe dla ośrodków dyssypatywnych (Praca zbiorowa)*, 67-87, Ossolineum 1980.
103. KOSIŃSKI W. Uniqueness theorems in dynamics of dissipative bodies with non-linear material structures. *Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics*, vol. III (R. J. Knops, ed.), 163-178, Pitman 1981.

1044. KOSIŃSKI W. On weak solutions, stability and uniqueness in dynamics of dissipative bodies. *Arch. Mech.*, 33, 319-323, 1981.
1055. KRAWIETZ A. Stabilität des Gleichgewichts mechanischer Systeme. *ZAMM*, 61, H4, T46-T47, 1981.
1066. KUDO, H. Some new slip-line field solutions for two-dimensional steady-state machining. *Int. J. Mech. Sci.*, 7, 43-55, 1965.
1077. LARSSON M., NEEDLEMAN A., TVERGAARD V., STORÅKERS B. Instability and failure of internally pressurized ductile metal cylinders. *J. Mech. Phys. Solids*, 30, 121-154, 1982.
1088. LEE E. H. Finite deformation effects in plasticity analysis. *Plasticity Today: Modelling, Methods and Applications* (A. Sawczuk, G. Bianchi, ed.), 61-74, Elsevier, London 1985.
1099. LEE, E.H. and SHAFFER, B. W. The theory of plasticity applied to a problem of machining. *J. Appl. Mech.*, 18, 405-412, 1951.
1100. LIN T. H. Physical theory of plasticity. *Adv. Appl. Mech.*, 11, 255-311, Acad. Press, New York 1971.
1111. LORET B. On the effects of plastic rotation in the finite deformation of anisotropic elastoplastic materials. *Mechanics of Materials*, 2, 287-304, 1983.
1122. LORET B. On the effects of plastic rotation on the localization of anisotropic elastoplastic solids. *Plastic Instability, Proc. Considère Memorial*, 89-100, Ecole Nat. Ponts Chauss. Press, Paris 1985.
1133. LORET B. Some macroscopic consequences of the granular structure of sand. *Proc. Int. Symp. Physical Basis and Modelling of Finite Deformation of aggregates, Jean Mandel in memoriam*, Paris 1985.

114. MANDEL J. Conditions de stabilité et postulat de Drucker. *Rheology and Soil Mechanics* (J. Kravtchenko, P.M. Sirieys, ed.), 58-67, Springer, Berlin 1966.
115. MANDEL J. Définition d'un repère privilégié pour l'étude des transformations anélastiques du polycristal. *J. Méc. théor. appl.*, 1, 7-23, 1982.
116. MALKIN I. G. *Teoria ustojczivosti dwiżenia*. Nauka, Moskwa 1966.
117. MARCINIAK Z. Stability of plastic shells under tension with kinematic boundary conditions. *Arch. Mech. Stos.*, 17, 577-592, 1965.
118. MARCINIAK Z. *Odształcenia graniczne przy tłoczeniu blach*, WNT, Warszawa 1971.
119. MARCINIAK Z., KUCZYŃSKI K. Limit strains in the processes of stretch-forming sheet metal. *Int. J. Mech. Sci.*, 2, 609-620, 1967.
120. McMEEKING R. M., RICE J. R. Finite-element formulations for problems of large elastic-plastic deformation. *Int. J. Solids Structures*, 11, 601-616, 1975.
121. MEYERS N. G. Quasi-convexity and lower semi-continuity of multiple variational integrals of any order. *Trans. Am. Math. Soc.*, 119, 125-149, 1965.
122. MELAN E. Zur Plasticität des räumlichen Kontinuums. *Ing. Arch.* 9, 116, 1938.
123. MILES J. P. Bifurcation in plastic flow under uniaxial tension. *J. Mech. Phys. Solids*, 19, 89-102, 1971.
124. MILES J. P. The initiation of necking in rectangular elastic/plastic specimens under uniaxial and biaxial tension. *J. Mech. Phys. Solids*, 23, 197-213, 1975.
125. MILES J. P. On necking phenomena and bifurcation solutions. *Arch. Mech.*, 32, 909-931, 1980.

- 126.. MOWCZAN A. A. Ustojcziwost' processow po dwum metrikam. *PMM*, 24, 988-1001, 1960.
- 127.. MORREY C.B. Quasi-convexity and lower semicontinuity of multiple integrals. *Pacific J. Math.*, 2, 25-53, 1952.
- 128.. MORREY C. B. *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*. Springer, Berlin 1966.
- 129.. NEEDLEMAN A. A numerical study of necking in circular cylindrical bars. *J. Mech. Phys. Solids*, 20, 111-127, 1972.
- 130.. NEEDLEMAN A. Bifurcation of elastic-plastic spherical shells subject to internal pressure. *J. Mech. Phys. Solids*, 23, 357-367, 1975.
- 131.. NEEDLEMAN, A. Non-normality and bifurcation in plane strain tension and compression. *J. Mech. Phys. Solids*, 27, 231-254, 1979.
- 132.. NEEDLEMAN A., RICE J. R. Limits to ductility set by plastic flow, localization. *Mechanics of Sheet Metal Forming* (D. P. Koistinen, N.-M. Wang, ed.), 237-264, Plenum, New York 1978.
- 133.. NEEDLEMAN A., TVERGAARD V. Aspects of plastic postbuckling behavior. *Mechanics of Solids, The Rodney Hill 60-th Anniversary Volume* (H.G. Hopkins, M.J. Sewell, ed.), 453-498, Pergamon Press, Oxford 1982.
- 134.. NGUYEN Q. S., Zagadnienia quasi-statyczne dla ośrodków plastycznych i lepkoplastycznych. *Zagadnienia początkowo-brzegowe dla ośrodków dyssypatywnych* (Praca zbiorowa), 89-140, Ossolineum 1980.
- 135.. NGUYEN Q.S., RADENKOVIC D. Stability of equilibrium in elastic plastic solids. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 503 (A. Dold, B. Eckmann, ed.), 403-414, Springer, Berlin 1975.
- 136.. OGDEN R. W. On stress rates in solid mechanics with application to elasticity theory. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 75, 303-319, 1974.

137. OGDEN R. W. On Eulerian and Lagrangean objectivity in continuum mechanics. *Arch. Mech.*, 36, 207-218, 1984.
138. PANAGIOTOPOULOS P.D. *Inequality Problems in Mechanics and Applications*, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart 1985.
139. PAULUN J. E., PEÇHERSKI R. Study of corotational rates for kinematic hardening in finite deformation plasticity. *Arch. Mech.*, 37, 661-677, 1985.
140. PEARSON C. E. Bifurcation criterion and plastic buckling of plates and columns. *J. Aero. Sci.*, 17, 417-424, 455, 1950.
141. PEIRCE D. Shear band bifurcations in ductile single crystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 31, 133-153, 1983.
142. PEIRCE D., ASARO R. J., NEEDLEMAN A. An analysis of nonuniform and localized deformation in ductile single crystals. *Acta Metall.*, 30, 1087-1119, 1982.
143. PERZYNA P. *Termodynamika materiałów niesprężystych*. PWN, Warszawa 1978.
144. PERZYNA P. Application of dynamical system methods to flow processes of dissipative solids. *Arch. Mech.*, 34, 523-539, 1981.
145. PETRYK H. Ustalone płaskie przepływy ośrodków idealnie plastycznych ze swobodnym brzegiem (Praca doktorska). *Prace IPPT*, 46/1977, Warszawa 1977.
146. PETRYK H. On slip-line field solutions for steady-state and self-similar problems with stress-free boundaries. *Arch. Mech.*, 31, 861-874, 1979.
147. PETRYK, H. Non-unique slip-line field solutions for the wedge indentation problem. *J. Mécanique appliquée* 4, 255-282, 1980.
148. PETRYK, H. Zagadnienie przesuwania obciążonego klina po powierzchni plastycznego ośrodka. *Prace IPPT*, 38/1981, Warszawa 1981.

- 149). PETRYK H. A consistent energy approach to defining stability of plastic deformation processes. *Stability in the Mechanics of Continua* (F.H. Schroeder, ed.), 262-272, Springer, Berlin - Heidelberg 1982.
- 150). PETRYK H. A stability postulate for quasi-static processes of plastic deformation. *Arch. Mech.*, 35, 753-756, 1983.
- 151). PETRYK H. A slip-line field analysis of the rolling contact problem at high loads. *Int. J. Mech. Sci.*, 25, 265-275, 1983.
- 152). PETRYK H. On the onset of instability in elastic-plastic solids. *Plasticity Today: Modelling, Methods and Applications* (A. Sawczuk, G. Bianchi, ed.), 429-447, Elsevier, London 1985.
- 153). PETRYK H. On stability and symmetry conditions in time-independent plasticity. *Arch. Mech.*, 37, 503-520, 1985.
- 154). PETRYK H. On energy criteria of plastic instability. *Plastic Instability, Proc. Considère Memorial*, 215-226, Ecole Nat. Ponts Chauss. Press, Paris 1985.
- 155). PETRYK H., THERMANN K. Second-order bifurcation in elastic-plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 33, 577-593, 1985.
- 156). PETRYK H. Slip-line field solutions for sliding contact. (w druku).
- 157). RANIECKI B. Uniqueness criteria in solids with non-associated plastic flow laws at finite deformations. *Bull. Polon. Acad. Sci., Sér. Sci. Techn.*, 27, 391-399, 1979.
- 158). RANIECKI B., BRUHNS O. T. Bounds to bifurcation stresses in solids with non-associated plastic flow law at finite strain. *J. Mech. Phys. Solids*, 29, 153-172, 1981.

159. RICE J. R. Continuum mechanics and thermodynamics of plasticity in relation to microscale deformation mechanisms. *Constitutive Equations in Plasticity* (A. S. Argon, ed.), 23-79, MIT Press, Cambridge, Mass. 1975.
160. RICE J. R. The localization of plastic deformation. *Theoretical and Applied Mechanics* (W. T. Koiter, ed.), 207-220, North-Holland, Amsterdam 1977.
161. RICE J. R., RUDNICKI J. W. A note on some features of the theory of localization of deformation. *Int. J. Solids Structures*, 16, 597-605, 1980.
162. ROSOCHOWSKI A. Shear band localization in ductile porous materials. *Plastic Instability, Proc. Considère Memorial*, 135-146, Ecole Nat. Ponts Chauss. Press, Paris 1985.
163. RUDNICKI J. W., RICE J. R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 23, 371-394, 1975.
164. SEGAL W. M. *Technologiczeskije zadaczi teorii plastycznosti*, Nauka i Technika, Minsk, 1977.
165. SEWELL M. J. The static perturbation technique in buckling problems. *J. Mech. Phys. Solids*, 13, 247-265, 1965.
166. SEWELL M. J. On configuration-dependent loading. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 23, 327-351, 1967.
167. SEWELL M. J. A survey of plastic buckling. *Stability* (H. H. E. Leipholz, ed.), 85-197, Univ. of Waterloo Press, Ontario 1972.
168. SEWELL M. J. A yield-surface corner lowers the buckling stress of an elastic-plastic plate under compression. *J. Mech. Phys. Solids*, 21, 19-45, 1972.
169. SHANLEY F. R. The column paradox. *J. Aero. Sci.*, 13, 678, 1946.
170. SHANLEY F. R. Inelastic column theory. *J. Aero. Sci.*, 14, 261-267, 1947.

1711. SOKOŁOWSKIJ W. W. *Teoria płaścizności*, Nauka, Moskwa 1969.
1722. STORÅKERS B. On uniqueness and stability of elastic-plastic deformation. *Arch. Mech.*, 27, 821-839, 1975.
1733. STÖREN S., RICE J. R. Localized necking in thin sheets. *J. Mech. Phys. Solids*, 23, 421-441, 1975.
1744. SUQUET P.M. Evolution problems for a class of dissipative materials. *Quart. Appl. Math.*, 8, 391-414, 1981.
1755. SWIFT H. W. Plastic instability under plane stress. *J. Mech. Phys. Solids*, 1, 1-18, 1952.
1766. SZCZEPIŃSKI, W. *Wstęp do analizy procesów obróbki płaściznej*, PWN, Warszawa 1967 (Rozszerzone wyd. ang.: *Introduction to the Mechanics of Plastic Forming of Metals*, Sijthoff and Noordhoff, The Netherlands 1979).
1777. *Teoria Płaścizności* (Praca zbiorowa pod red. W. Olszaka, P. Perzyny i A. Sawczuka), PWN, Warszawa 1965.
1788. THOMAS T. Y. *Plastic flow and fracture in solids*. Acad. Press, New York 1961.
1799. TOMITA Y., SHINDO A., KITAGAWA H. Bifurcation and post-bifurcation behaviour of internally pressurized elastic-plastic circular tubes under plane strain conditions. *Int. J. Mech. Sci.*, 23, 723-732, 1981.
1800. TRIANTAFYLIDIS N. On the bifurcation and postbifurcation analysis of elastic-plastic solids under general prebifurcation conditions. *J. Mech. Phys. Solids*, 31, 499-510, 1983.
1811. TRUESDELL C., NOLL W. *The nonlinear fields theories of mechanics*. *Handbuch der Physik* Vol. III/3 (S. Flügge, ed.), Springer, Berlin 1965.

182. TVERGAARD V. Buckling behavior of plate and shell structures. *Theoretical and Applied Mechanics* (W. T. Koiter, ed.), 233-247, North-Holland, Amsterdam 1977.
183. TVERGAARD V. Bifurcation and imperfection-sensitivity at necking instabilities. *ZAMM*, 60, T26-T34, 1980.
184. TVERGAARD V. Influence of void nucleation on ductile shear fracture at a free surface. *J. Mech. Phys. Solids*, 30, 399-425, 1982.
185. TVERGAARD V. On bifurcation and stability under elastic-plastic deformation. *Plasticity Today: Modelling, Methods and Applications* (A. Sawczuk, G. Bianchi, ed.), 377-398, Elsevier, London 1985.
186. TVERGAARD V., NEEDLEMAN A., LO K. K. Flow localization in the plane strain tensile test. *J. Mech. Phys. Solids*, 29, 115-142, 1981.
187. VARDOULAKIS I. Shear band inclination and shear modulus of sand in biaxial tests. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech*, 4, 103-119, 1980.
188. YOKOO Y., NAKAMURA T., UETANI K. The incremental perturbation method for large displacement analysis of elastic-plastic structures. *Int. J. Num. Meths. Engng*, 10, 503-525, 1976.
189. YOUNG N. J. B. Bifurcation phenomena in the plane compression test. *J. Mech. Phys. Solids*, 24, 77-91, 1976.
190. ZYCZKOWSKI M. *Obciążenia złożone w teorii plastyczności*. PWN, Warszawa 1973.

SPIS TREŚCI

11.	Wprowadzenie	4
1.1	Cel i zakres pracy	4
1.2	Charakterystyka rezultatów pracy na tle literatury	6
22.	Procesy deformacji plastycznych	13
2.1	Opis deformacji	13
2.2	Równania pola i warunki brzegowe	18
2.3	Miary odkształcenia i naprężenia	20
2.4	Związki konstytutywne	24
33.	Teoria bifurkacji dla ciał sprężysto-plastycznych	33
3.1	Zagadnienie przyrostowe w prędkościach - podstawowe elementy teorii Hilla	37
3.2	Zagadnienie przyrostowe rzędu drugiego - bifurkacja w przyspieszeniach	44
3.2.1	Związki konstytutywne rzędu drugiego	44
3.2.2	Regularne zagadnienie przyrostowe rzędu drugiego (w przyspieszeniach)	54
3.2.3	Zasada wariacyjna	58
3.2.4	Kryteria jednoznaczności	61
3.2.5	Zasada minimum dla przyspieszeń	64
3.3	Bifurkacja nieosobliwego procesu deformacji	66
3.3.1	Podstawowa nierówność konstytutywna	67
3.3.2	Styczny materiał porównawczy	74
3.3.3	Bifurkacja procesu deformacji a stan własny dla stycznego ciała porównawczego	79
44.	Energetyczne kryteria niestabilności procesów deformacji plastycznych	88
4.1	Urządzenie obciążające	89
4.2	Podstawowe kryterium niestabilności procesu deformacji	92

4.3	Zasada minimum dla prędkości	98
4.4	Moment krytyczny utraty stabilności procesu	105
4.4.1	Niestateczność typu geometrycznego	105
4.4.2	Niestateczność typu dynamicznego	112
4.4.3	Niestateczność typu lokalnego	116
4.5	Przykład: niestateczność procesu jednoosiowego rozciągania trójwymiarowej próbki z materiału ortotropowego	121
4.5.1	Sformułowanie zagadnienia	123
4.5.2	Niestateczność typu dynamicznego	126
4.5.3	Niestateczność typu geometrycznego	129
4.5.4	Niestateczność typu konstytutywnego	135
4.5.5	Niestateczność typu lokalnego	137
4.5.6	Dolne oszacowanie momentu krytycznego	138
5.	Kryteria lokalizacji odkształceń plastycznych w trójwymiarowym kontinuum	141
5.1	Bifurkacja w pasmach ścinania	144
5.2	Energetyczne kryteria lokalizacji odkształceń w pasmach ścinania	147
5.3	Kryterium lokalizacji dynamicznej	157
6.	O koncepcji stateczności quasi-statycznych procesów deformacji plastycznych i stanu równowagi	162
6.1	Stabilność procesów deformacji plastycznych w sensie energetycznym	167
6.2	Stabilność stanu równowagi w sensie energetycznym	174
7.	Niejednoznaczność ustalonych płaskich przepływów ośrodków idealnie plastycznych z brzegiem swobodnym	182
7.1	Zagadnienia samopodobne	185
7.2	Procesy stacjonarne	193
	LITERATURA	202