515.

SUR LES COURBES APLATIES.

[From the *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, tom. LXXIV. (*Janvier—Juin*, 1872), pp. 708—712.]

En lisant la thèse de M. S. Maillard, *Recherches des caractéristiques des systèmes élémentaires des courbes planes du troisième ordre* (Paris, 1871), j'ai été conduit à quelques réflexions sur la théorie générale des courbes aplaties de M. Chasles (1).

Je considère une courbe représentée par une équation de l'ordre n, $f(x, y, k) = 0$, laquelle pour $k = 0$ se réduit à la forme $P^\alpha Q^\beta \ldots = 0$. Pour k un infiniment petit, ou disons pour $k = 0^1$, cette courbe sera ce que je nomme la pénultième de $P^\alpha Q^\beta \ldots = 0$; la courbe $P^\alpha Q^\beta \ldots = 0$ elle-même sera la courbe finale; et les courbes $P = 0$, $Q = 0, \ldots$, les facteurs. Or en menant par un point donné quelconque les tangentes à la courbe pénultième, ces tangentes approchent continuellement aux droites que voici: 1° les tangentes aux courbes $P = 0$, $Q = 0, \ldots$, respectivement; 2° les droites par les points singuliers de ces mêmes courbes respectivement; 3° les droites par les intersections de deux quelconques de ces mêmes courbes $P = 0$, $Q = 0, \ldots$, respectivement; 4° les droites par certains points situés sur l'une quelconque des mêmes courbes $P = 0$, $Q = 0, \ldots$. En ne faisant aucune supposition particulière par rapport à la courbe pénultième, cette courbe sera une courbe sans points singuliers, et ainsi de la classe $n^2 - n$: le nombre des droites 1°, 2°, 3°, 4° (en faisant attention à la multiplicité de quelques-unes de ces droites) sera donc égal à $n^2 - n$. Les droites 3° sont comptées chacune un certain nombre de fois; en supposant que pour un point d'intersection $P = 0$, $Q = 0$ quelconque ce nombre soit θ, nous dirons qu'il y a à ce point un nombre θ de *sommets fixes*. Les droites 4° sont comptées en général chacune une seule fois; les points par lesquels passent ces droites (points sur l'une quelconque des courbes $P = 0$, $Q = 0, \ldots$) seront

1 *Comptes Rendus*, t. LXIV. p. 799—805 et 1079—1081; séances des 22 avril et 27 mai 1867.

nommés *sommets libres.* Cela étant, on peut considérer la courbe pénultième comme équivalente à la courbe finale $P^\alpha Q^\beta \ldots = 0$ *plus* les sommets : il s'agit, pour un cas donné quelconque, de trouver le nombre et la distribution de ces sommets.

Je considère d'abord le cas le plus simple, celui d'une conique aplatie, pénultième de $x^2 = 0$; l'équation d'une telle conique est

$$(a,\ b,\ c,\ f,\ g,\ h \between x,\ y,\ z)^2 = 0,$$

où, en prenant $a = 1$, tous les autres coefficients seront des infiniment petits, pas en général du même ordre. Les tangentes menées à la courbe par un point donné $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ seront déterminées par l'équation

$$(bc - f^2,\ ca - g^2,\ ab - h^2,\ gh - af,\ hf - bg,\ fg - ch) \times (\gamma y - \beta z,\ \alpha z - \gamma x,\ \beta x - \alpha y)^2 = 0\,;$$

ou disons

$$(bc - f^2,\ c\ - g^2,\ \ b - h^2,\ gh - \ f,\ hf - bg,\ fg - ch) \times (\gamma y - \beta z,\ \alpha z - \gamma x,\ \beta x - \alpha y)^2 = 0.$$

En considérant pour un moment tous les coefficients comme étant des infiniment petits du même ordre, $= 0^1$, cette équation se réduit à

$$(0,\ c,\ b,\ -f,\ 0,\ 0 \between \gamma y - \beta z,\ \alpha z - \gamma x,\ \beta x - \alpha y)^2 = 0,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(c,\ -f,\ b \between \alpha z - \gamma x,\ \beta x - \alpha y)^2 = 0\,;$$

et ces tangentes coupent la droite $x = 0$ dans les deux points donnés par l'équation $(c,\ -f,\ b \between \alpha z,\ -\alpha y)^2 = 0$, c'est-à-dire $by^2 + 2fyz + cz^2 = 0$, points indépendants de la position du point donné $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$; ces points sont en effet *les intersections de la pénultième par la droite* $x = 0$.

Mais il y a là une restriction qu'on évite au moyen d'une supposition plus générale, savoir : en prenant g, h du premier, b, c, f du second ordre, ou disons $g,\ h = 0^1$, $b,\ c,\ f = 0^2$, l'équation des tangentes devient

$$(0,\ c - g^2,\ b - h^2,\ gh - f,\ 0,\ 0 \between \gamma y - \beta z,\ \alpha z - \gamma x,\ \beta x - \alpha y)^2 = 0,$$

ou

$$(c - g^2,\ gh - f,\ b - h^2 \between \alpha z - \gamma x,\ \beta x - \alpha y)^2 = 0.$$

Or, en écrivant $x = 0$, cette équation devient

$$(c - g^2,\ gh - af,\ b - h^2 \between \alpha z,\ -\alpha y)^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$by^2 + 2fyz + cz^2 - (hy + gz)^2 = 0\,;$$

nous avons ainsi, sur la droite $x = 0$, deux points indépendants de la position du point donné $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$, et qui ne sont plus les intersections de la conique par cette droite (autrement dit, ces points ne sont pas situés sur la conique) ; ces points sont en effet deux points quelconques sur cette droite. Il y a ainsi pour la conique aplatie pénultième de $x^2 = 0$ deux sommets situés à volonté sur la droite $x = 0$ (et qui ainsi ne sont pas situés sur la conique pénultième).

Je passe à un cas nouveau, celui de la courbe quartique pénultième de $x^2y^2=0$; mais pour simplifier l'analyse, au lieu d'un point quelconque (α, β, γ) je prends successivement les points $(y=0,\ z=0)$ et $(x=0,\ y=0)$. On conçoit, en effet, que s'il y a p sommets libres sur la droite $x=0$, q sommets libres sur la droite $y=0$, et r sommets fixes au point $(x=0,\ y=0)$, alors les droites par le point donné $(y=0,\ z=0)$ seront les droites par les p points, *plus* la droite $y=0$, $q+r$ fois; et de même les droites par le point donné $(x=0,\ z=0)$ seront les droites par les q points, *plus* la droite $x=0$, $p+r$ fois: de manière que le procédé donnera les nombres cherchés p, q, r.

J'écris l'équation de la pénultième sous les deux formes

$$\begin{aligned}
&x^4 . a \\
&+ 4x^3 (h,\ j \between y,\ z) \\
&+ 6x^2 (1,\ p,\ m \between y,\ z)^2 \\
&+ 4x\ (k,\ q,\ r,\ g \between y,\ z)^3 \\
&+ \quad (b,\ f,\ l,\ i,\ c \between y,\ z)^4 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&y^4 . b \\
&+ 4y^3 (k,\ f \between x,\ z) \\
&+ 6y^2 (1,\ q,\ l \between x,\ z)^2 \\
&+ 4y\ (k,\ p,\ r,\ l \between x,\ z)^3 \\
&+ \quad (a,\ j,\ m,\ g,\ c \between x,\ z)^4 = 0,
\end{aligned}$$

où le coefficient de x^2y^2 est $=6$, et tous les autres coefficients sont des infiniment petits, pas nécessairement du même ordre. Je représente ces deux équations par

$$(A,\ B,\ y^2+C,\ D,\ E \between x,\ 1)^4 = 0, \quad (A',\ B',\ x^2+C',\ D',\ E' \between y,\ 1)^4 = 0$$

respectivement.

Cela étant, on obtient l'équation des tangentes par le point $(y=0,\ z=0)$ en égalant à zéro le discriminant de la fonction quartique de x; et de même pour les tangentes par le point $(x=0,\ z=0)$: les deux équations seront

$$\begin{aligned}
0 = \ & (y^2+C)^4 . 81AE \\
&+ (y^2+C)^3 (-54AD^2 - 54B^2E) \\
&+ (y^2+C)^2 (-18A^2E^2 - 180ABDE + 36B^2D^2) \\
&+ \ldots \\
0 = \ & (x^2+C')^4 . 81A'E' \\
&+ \ldots
\end{aligned}$$

En prenant pour le moment tous les coefficients $=0^1$, chaque équation contiendra un seul terme de l'ordre le plus bas 0^2, et en négligeant les autres termes, les équations deviendront simplement

$$y^8 . AE = 0, \qquad x^8 . A'E' = 0;$$

il y a ainsi sur la droite $x=0$ quatre sommets libres donnés par l'équation $E=0$; et de même sur la droite $y=0$, quatre sommets libres donnés par l'équation $E'=0$; donc quatre sommets fixes au point $x=0$, $y=0$. Les sommets libres sur les droites $x=0$ et $y=0$ sont *les intersections de la quartique par ces deux droites respectivement.*

Mais, au contraire, prenons $b, f, l, i, c = 0^2$, les autres coefficients étant $= 0^1$. On a d'abord $A, B, D = 0^1, E = 0^2$; la première équation se réduit à

$$27Ay^6(3Ey^2 - 2D^2) = 0,$$

ce qui donne, sur la droite $x = 0$, six sommets libres déterminés par l'équation

$$3Ey^2 - 2D^2 = 0.$$

On a depuis $A' = 0^2,\ B',\ D',\ E' = 0^1$; la seconde équation est donc

$$27E'x^6(3A'x^2 - 2B'^2) = 0;$$

mais ici

$$E' = (a, j, m, g, c \between x, z)^4, = x(ax^3 + 4jx^2z + 6mxz^2 + 4gz^3),$$

à cause de $c = 0^2$; et, de plus,

$$3A'x^2 - 2B'^2 = 3bx^2 - 2(kx + fz)^2, = (3b - 2k^2)x^2,$$

à cause de $f = 0^2$; donc l'équation se réduit à

$$x^9(ax^3 + 4jx^2z + 6mxz^2 + 4gz^3) = 0,$$

et il y a sur la droite $y = 0$, trois sommets libres déterminés par l'équation

$$ax^3 + 4jx^2z + 6mxz^2 + 4gz^3 = 0.$$

Remarquons que la droite $y = 0$ rencontre la quartique dans les quatre points donnés par l'équation $E' = 0$, c'est-à-dire un point infiniment près de $(x = 0, y = 0)$ et trois autres points, lesquels sont précisément les trois sommets libres sur la droite $y = 0$. Il y a de plus trois sommets fixes au point $(x = 0, y = 0)$.

Conclusion. Il y a ainsi une courbe quartique pénultième de $x^2y^2 = 0$, avec neuf sommets libres, trois sur l'une des deux droites (disons la droite $y = 0$) et qui sont trois des intersections de la quartique par cette même droite (la quatrième intersection étant infiniment près du point $x = 0, y = 0$), six situés à volonté sur l'autre droite $x = 0$, et trois sommets fixes à l'intersection des deux droites.

On peut se figurer une telle courbe quartique: elle peut consister en trois ovales aplaties *plus* une trigonoïde (savoir, figure fermée avec trois angles saillants et trois angles réentrants) rétrécie; l'une des ovales coïncide à peu près avec la droite $y = 0$, les deux autres à peu près avec la droite $x = 0$; la trigonoïde entoure le point $x = 0,\ y = 0$, de manière que les angles réentrants, très-approchés de ce point, soient les trois sommets fixes: mais il n'est pas facile d'en faire un dessin.

Je considère le système des courbes quartiques, qui satisfont chacune aux $(14 - 1 =) 13$ conditions que voici: toucher deux droites données 1, 2 en des points donnés A, B; passer par deux points donnés C, D; toucher sept droites données 3, 4, ..., 9. Prenons $y = 0$ pour la droite AB, et $x = 0$ pour la droite CD: il y aura dans le système une courbe quartique pénultième de $x^2y^2 = 0$, laquelle compte sept fois au moins; cette courbe pénultième est censée toucher les droites 1, 2 dans les points donnés A, B, et l'une quelconque des sept droites à son intersection avec la droite $y = 0\,(AB)$; les autres six droites à leurs intersections avec la droite $x = 0\,(CD)$. Cette courbe pénultième entre donc dans la théorie des caractéristiques d'un tel système de courbes quartiques.