



S 364 [15]

Z Pracowni Meteorologicznej
przy Tow. Nauk. Warsz.

Prace
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego.

III. — Wydział nauk matematycznych i przyrodniczych.

Travaux de la Société des Sciences de Varsovie.

III. Classe des sciences mathématiques et naturelles.

N^o 15.

W. POGORZELSKI.

Badania teoretyczne ilości ciepła, otrzymywanych na kuli ziemskiej, z uwzględnieniem strat promieniowania w atmosferze.

Recherches théoriques sur les quantités de chaleur reçues par la terre en tenant compte des pertes du rayonnement dans l'atmosphère.



Wydane z zapomogi Kasy pomocy dla osób pracujących na polu naukowym imienia Dr. Med. Józefa Mianowskiego.

WARSZAWA.

NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO.

Skład główny w księgarni E. WENDE i S-ka (T. Hiż i A. Turkuł).

1916.

Dodatek do „Sprawozdań z posiedzeń” T. N. W.

Travaux
de la
SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE VARSOVIE.
III. — Classe des sciences mathématiques et naturelles.
No 15. — 1916.

W. Pogorzelski: Recherches théoriques sur les quantités de chaleur reçues par la terre en tenant compte des pertes du rayonnement dans l'atmosphère.

Druk. i Lit. JANA COTTY w Warszawie, Kapucyńska 7.

Prace
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego.

III. — Wydział nauk matematycznych i przyrodniczych.

Travaux de la Société des Sciences de Varsovie.

III. Classe des sciences mathématiques et naturelles.

Nr 15.

W. POGORZELSKI.

Badania teoretyczne ilości ciepła, otrzymywanych na kuli ziemskiej, z uwzględnieniem strat promieniowania w atmosferze.

Recherches théoriques sur les quantités de chaleur reçues par la terre, en tenant compte des pertes du rayonnement dans l'atmosphère.

(Z Pracowni Meteorologicznej przy Tow. Nauk. Warsz.).



CBGiOŚ
ul. Twarda 51/55



Wa510005587

Wydane z zapomogi Kasy pomocy dla osób, pracujących na polu naukowym imienia Dr. Med. Józefa Mianowskiego.

WARSZAWA.

NAKŁADEM TOWARZYSTWA NAUKOWEGO WARSZAWSKIEGO.

Skład główny w księgarni E. WENDE i S-ka (T. Hiż i A. Turkuł).

1916.

Dodatek do „Sprawozdań z posiedzeń” T. N. W.

Klimatologia

Travaux
de la
SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE VARSOVIE.
III. — Classe des sciences mathématiques et naturelles.
№ 15. — 1916.

W. Pogorzelski: Recherches théoriques sur les quantités de
chaleur reçues par la terre, en tenant compte des pertes
du rayonnement dans l'atmosphère.



Druk. i Lit. JANA COTTY. w Warszawie, Kapucyńska 7.

W. Pogorzelski:

Badania teoretyczne ilości ciepła, otrzymywanych na kuli ziemskiej, z uwzględnieniem strat promieniowania w atmosferze.

(Z Pracowni Meteorologicznej przy Tow. Nauk. Warsz.).

Przedstawił Wł. G o r c z y ń s k i.

I. Rozważania ogólne.

Badania niniejsze były tematem licznych rozpraw, z których ważniejsze, wraz z dziełami, odnoszącemi się do przedmiotu insolacyi, podane są poniżej w wykazie bibliograficznym.

Obliczenia ilości ciepła, których będziemy dokonywali jedynie przy pomocy teoretycznych rozumowań, przeprowadzimy najpierw w założeniu, iż całkowita ilość energii promienistej dochodzi do powierzchni ziemi, lub, co na jedno wychodzi, dla jednostki powierzchni poziomej, położonej na granicy atmosfery. Biorąc następnie za podstawę prawo Lambert'a, które jest jednym z prostszych wyrażań dla strat promieniowania w atmosferze, dojdziemy do nowych wyrażań ilości ciepła.

Następnym przedmiotem rozważań będzie przeprowadzenie podobnych rachunków, jak również i krytyka poprzednich rezultatów, oparte na wynikach badań w dziedzinie spektrobolometry.

Jeśli przez h oznaczymy wysokość słońca, przez r odległość środka słońca od ziemi, to ilość ciepła dq , jaką otrzyma jednostka powierzchni ziemi w czasie dt , wyrazi się wzorem:

$$(1) \quad dq = \frac{C}{r^2} \sin h \cdot dt$$

Stała C będzie wyrażała ilość ciepła, otrzymaną w jednostce odległości przez jednostkę powierzchni, prostopadłej do promieni słońca. Wielkość $\frac{C}{r^2}$ będzie równa ilości ciepła, otrzymanego na granicy atmosfery; jest to tak zwana stała słoneczna, która ulega zresztą drobnym wahaniom z powodu zmienności r .

Dla odległości średniej od słońca, według pomiarów W. Gorczyńskiego ¹⁾, wartość stałej słonecznej wynosi 2,05 kal. gr. cm.²/min.; w rachunkach następnych przyjmować będziemy dla stałej słonecznej wartości 2 kal. gr.

Ilość ciepła, którą otrzyma w ciągu dnia jednostka powierzchni ziemi o danem położeniu geograficznym, obliczyć można, całkując (1) w granicach, odpowiadających wschodowi i zachodowi słońca. Ilość dzienna ciepła będzie zatem pewną funkcją długości słońca; należy jednak zauważyć, iż długość będzie się tu zmieniała z jednego dnia na drugi w sposób nieciągły, gdyż z chwilą nadejścia nocy, gdy ciepło już nie dochodzi, długość słońca zmienia się w dalszym ciągu. Weźmy teraz pod uwagę ilość ciepła, otrzymaną w dłuższym przeciągu czasu, odpowiadającego długościom słońca (\odot_1 , \odot_2); jedyną ścisłą i bezpośrednią metodą będzie zsumowanie ilości ciepła dla wszystkich poszczególnych dni, zawartych w okresie (\odot_1 , \odot_2). Oznaczmy więc przez $f(\tau)$ natężenie promieniowania, gdzie τ jest kątem godzinnym słońca, otrzymamy dla ilości ciepła wyrażenie następujące:

$$(2) \quad Q_{\odot_1}^{\odot_2} = \sum_{\odot_1}^{\odot_2} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} f(\tau) d\tau$$

τ_0 będzie połową łuku dziennego słońca.

Powyższy rachunek upraszcza się przez wprowadzenie pojęcia ilości średniej ciepła, sprowadza się bowiem do całkowania. Metoda ta przedstawioną będzie w rozdziale następnym.

¹⁾ W. Gorczyński: O wartości stałej słonecznej, według pomiarów dokonanych sposobem ekranów absorbcyjnych w Ursynowie. (Sprawozdania Tow. Nauk. Warsz., 1909 r.).

2. Ilości ciepła dla równika i bieguna.

Jak wynika z poprzedniego, ilość dzienna ciepła będzie:

$$(1) \quad Q_j = \frac{2C}{r^2} \int_0^{\tau_0} \text{Sin } h \cdot dt$$

Oznaczywszy przez φ — szerokość geograficzną danego miejsca, przez δ — zбочenie słońca, mamy z trójkąta paralaktycznego:

$$(2) \quad \text{Sin } h = \text{Sin } \varphi \cdot \text{Sin } \delta + \text{Cos } \varphi \cdot \text{Cos } \delta \cdot \text{Cos } \tau$$

jeśli wyrazimy czas w sekundach, a kąt godzinny w radianach, będzie:

$$t = \mu \tau, \text{ gdzie } \mu = \frac{86164}{2\pi}, \text{ gdyż doba gwiazdowa}$$

zawiera 86164 sek. śr.; wstawivszy (2) w wyrażenie (1), otrzymamy po scałkowaniu:

$$(3) \quad Q_j = \frac{2C\mu}{r^2} (\text{Sin } \varphi \cdot \text{Sin } \delta \cdot \tau_0 + \text{Cos } \varphi \cdot \text{Cos } \delta \cdot \text{Sin } \tau_0)$$

τ_0 obliczymy z (2), podstawivjąc $h = 0$, będzie mianowicie:

$$(4) \quad \text{Cos } \tau_0 = -\text{tg } \varphi \cdot \text{tg } \delta.$$

Dla równika $\varphi = 0$, $\tau_0 = \frac{\pi}{2}$, zatem dzienna ilość ciepła będzie w tym przypadku:

$$(5) \quad Q_0 = \frac{2C\mu}{r^2} \text{Cos } \delta.$$

Dla bieguna zaś, zważywszy, iż $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\tau_0 = \pi$:

$$(6) \quad Q_p = \frac{2C\mu}{r^2} \pi \cdot \text{Sin } \delta.$$

Dla natężenia promieniowania mamy wzór:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{C}{r^2} (\text{Sin } \varphi \cdot \text{Sin } \delta + \text{Cos } \varphi \cdot \text{Cos } \delta \cdot \text{Cos } \tau)$$

dla równika zatem:

$$\left. \frac{dQ}{dt} \right|_{\varphi=0} = \frac{C}{r^2} \cos \delta \cdot \cos \tau$$

a dla bieguna:

$$\left. \frac{dQ}{dt} \right|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{C}{r^2} \sin \delta$$

wynika stąd ciekawy związek między natężeniem promieniowania dla danej szerokości φ i promieniowaniem na równiku i biegunie:

$$(7) \quad \frac{dQ}{dt} = \left. \frac{dQ}{dt} \right|_{\varphi=0} \cdot \sin \varphi + \left. \frac{dQ}{dt} \right|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} \cdot \cos \varphi$$

Przez całkowanie dochodzimy stąd do związku między ilościami ciepła:

$$(8) \quad Q_{\varphi} = Q_{\varphi=0} \cdot \sin \varphi + Q_{\varphi=\frac{\pi}{2}} \cdot \cos \varphi$$

Q —oznaczają odpowiednie ilości ciepła, otrzymane w tym samym przeciągu czasu. Oczywiście, iż taki związek nie będzie zachodził pomiędzy ilościami dziennymi ciepła.

Posługując się wzorem (3), można obliczyć ilości dzienne ciepła dla różnych szerokości geograficznych i dla różnych położeń słońca; następująca tabliczka przedstawia rezultaty tych rachunków, przyjęto tam $\frac{2C_{\mu}}{r^2} = 1000$.

Dla półkuli południowej, t. j. dla $\varphi < 0$, liczby tabl. I są słuszne pod warunkiem jednakże, aby δ brać ze znakiem odwrotnym.

Tabliczka I pozwala dla każdego położenia słońca znaleźć odpowiednią ilość ciepła; jeśli położenie słońca jest wyznaczone nie przez zboczenie, lecz przez długość \odot , to δ można obliczyć ze wzoru:

$$(9) \quad \sin \odot = \sin \varepsilon \cdot \sin \delta,$$

gdzie ε jest nachyleniem ekliptyki ($\varepsilon = 23^{\circ}27'31''$, 0).

Tab. I. Tablica ilości dziennych ciepła na granicy atmosfery.
Table de valeurs diurnes de la chaleur à la limite de l'atmosphère.

	Szerokości geogr. — latitudes géographiques									
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
+e°	917,4	1014,7	1086,7	1132,2	1151,8	1149,4	1137,2	1175,1	1231,5	1250,5
+22°	927,2	1017,6	1082,0	1119,1	1129,7	1117,3	1092,2	1105,9	1159,0	1176,9
+20°	939,7	1020,6	1074,5	1100,5	1099,0	1073,3	1032,0	1009,7	1058,2	1074,5
+16°	961,3	1023,1	1056,3	1069,4	1036,1	986,0	916,2	844,3	852,8	865,9
+12°	978,1	1020,7	1033,6	1016,8	971,2	899,2	805,4	700,3	643,2	653,2
+8°	990,3	1013,5	1006,5	969,7	904,4	821,9	699,2	569,7	445,3	437,2
+4°	997,6	1001,5	975,2	919,4	836,0	727,4	597,3	450,5	295,0	219,1
0	1000,0	984,8	939,7	866,0	766,0	642,8	500,0	242,0	173,6	0
-4°	997,6	963,4	900,2	809,8	695,1	559,5	407,5	344,5	79,1	0
-8°	990,3	937,6	857,0	751,1	623,3	478,0	320,6	158,8	14,7	0
-12°	978,1	907,3	810,2	690,2	551,3	398,9	239,8	86,4	0	0
-16°	961,3	872,7	760,1	627,4	479,5	322,7	166,3	30,6	0	0
-20°	939,7	834,0	707,0	563,2	408,3	250,2	101,5	0	0	0
-22°	927,2	813,2	679,4	530,7	373,2	215,7	73,0	0	0	0
-e°	917,4	797,5	659,0	506,9	348,0	191,5	54,3	0	0	0

Aby ilości dzienne otrzymać w kaloryach, trzeba liczby powyższe mnożyć przez $\frac{1}{1000} \frac{2C_{\mu}}{r^2}$; co się tyczy stałej $\frac{2C_{\mu}}{r^2}$, jest to ilość ciepła, jaką odbierze w dniu porównania wiosennego lub jesiennego cm.² pow. ziemi na równiku, wynika to z (5). Przyjąwszy stałą słoneczną równą 2 kal. gr., zredukowaną do średniej odległości od słońca, mamy

$$(10) \quad \log \frac{2C_{\mu}}{r^2} = 2,96105$$

Gdy chodzi o większą ścisłość, można uwzględnić zmianę r , mnożąc wartość znalezioną wyżej przez stosunek

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 = \left[\frac{1 + e \cdot \cos(\odot - \omega)}{1 - e^2}\right]^2,$$

gdzie e — mimośród równy 0,0168, ω — długość perihelium.

Powyższy stosunek obliczać też można z szeregu:

$$(11) \quad \left(\frac{a}{r}\right)^2 = 1,00014 + 0,03660 \cdot \text{Cos } \xi + 0,00071 \cdot \text{Cos } 2\xi + \\ + 0,00002 \cdot \text{Cos } 3\xi + \dots$$

ξ — jest to anomalia średnia; $\xi = n(t - t_0)$.

Aby obliczyć ilość ciepła, otrzymaną w dłuższym przeciągu czasu przez cm^2 na biegunie, wyjdźmy z wyrażenia:

$$(12) \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{C}{r^2} \text{Sin } \delta = \frac{C}{r^2} \text{Sin } \varepsilon \cdot \text{Sin } \odot;$$

Zmienna t daje się łatwo wyrugować przy pomocy znanej równości z kinematyki dla ruchu środkowego (prawo pól):

$$(13) \quad r^2 \frac{d\odot}{dt} = c$$

c — jest to t. zw. stała pól.

Otrzymujemy zatem:

$$(14) \quad \frac{dQ}{d\odot} = \frac{C}{c} \text{Sin } \varepsilon \cdot \text{Sin } \odot$$

stąd, drogą całkowania, dochodzimy do ilości ciepła, odpowiadającej okresowi czasu (\odot_0 , \odot):

$$(15) \quad Q_{\odot_0}^{\odot} = \frac{C}{c} \text{Sin } \varepsilon (\text{Cos } \odot_0 - \text{Cos } \odot)$$

Jeśli szukamy ilości dziennej, to wyrażenie powyższe z powodu drobnej wtedy różnicy $\odot - \odot_0$ redukuje się do (6).

Kładąc w (15) $\odot_0 = 0$, t. j. licząc ilość ciepła od porównania wiosennego, będziemy mieli:

$$(16) \quad Q_{\odot} = 2 \frac{C}{c} \text{Sin } \varepsilon \cdot \text{Sin}^2 \frac{\odot}{2}$$

Stąd dla ilości rocznej ciepła, otrzymanej na biegunie (w ciągu $1/2$ roku), wypada wzór:

$$(17) \quad Q_r = 2 \frac{C}{c} \text{Sin } \varepsilon = 0,79620 \dots \frac{C}{c};$$

jeśli chcemy wyrazić Q_r w kaloryach, wypadnie wziąć dla $\frac{C}{c}$ wartość, daną przez:

$$(18) \quad \log \frac{C}{c} = 5,23453$$

otrzymujemy zatem w kaloryach gr.:

$$(17') \quad Q_r = 136626 \text{ kal. gr. (cm.}^2\text{)};$$

zwracamy uwagę, iż jest to ilość, otrzymana na granicy atmosfery.

Przejdźmy teraz do przypadku $\varphi = 0$, t. j. do równika.

Zadanie jest tu trudniejsze z powodu zmiany dnia i nocy. Ilość dzienną ciepła obliczać można ze wzoru (5).

Co się zaś tyczy ilości, otrzymanej w dłuższym przeciągu czasu, postaramy się uczynić ją funkcją ciągłą długości słońca i prostszą do obliczania, aniżeli metoda wskazana w rozdziale poprzednim. Weźmy w tym celu pod uwagę, zamiast ilości ciepła, którą otrzyma cm.^2 , ilość ciepła, którą odbierze pas szerokości 1 cm. , rozciągnięty wzdłuż całego obwodu równika. Oznaczmy tę ilość ciepła przez W ; będzie to ciepło, otrzymane przez oświetloną połowę równika. Oczywiście W będzie zależało tylko od położenia słońca i będzie funkcją ciągłą \odot , gdyż ruch dzienny ziemi nie zmienia kształtu części oświetlonej, będzie on tylko powodował jednostajny rozkład ilości ciepła W wzdłuż całego pasa równikowego, którą to ilość w razie nie istnienia ruchu wiorowego otrzymałaby tylko połowa równika. Wynika stąd, że jeśli W podzielimy przez obwód równika, to będziemy mieli średnią ilość ciepła, jaką otrzyma każdy cm.^2 powierzchni ziemi na równiku w danym przeciągu czasu. Zrozumiałem jest, iż owa ilość średnia nie będzie ściśle odpowiadała rzeczywistości, zawsze będą pewne drobne różnice dla dwóch miejsc na równiku; różnice te będą tem mniej znaczące, im większą ilość obrotów wykonała ziemia w danym przeciągu czasu. Teoretycznie rzecz biorąc, gdyby ziemia obracała się nieskończenie prędko, każdy cm.^2 otrzymałby jednakową ilość ciepła i równą ściśle ilości średniej, określonej powyżej. Następująca interpretacja wyjaśni najlepiej pojęcie średniej ilości ciepła.

Przypuśćmy mianowicie, iż na powyższy pas równikowy pada pewna ciecz w takiej ilości, iż na każdy cm.^2 pada tyle cm.^3 , ile kaloryi gr. odbiera dana jednostka powierzchni od słońca; przypuszczamy następnie, iż owa ciecz rozlewa się tylko wzdłuż pasa równikowego i dzieje się to nadzwyczaj szybko, tak że powierzchnia tej cieczy wszędzie będzie na jednakowej wysokości nad ziemią. Łatwo zauważyć, iż owa wysokość nad ziemią będzie właśnie równa średniej ilości ciepła, jaką otrzyma każdy cm.^2 (jeśli jeden cm. odpowiada 1 kal. gr.).

Aby obliczyć W , trzeba najpierw znać ilość ciepła dW , którą odbierze równik w czasie dt ; powierzchnia $d\sigma$ odbiera ilość ciepła $\frac{C}{r^2} \text{Sin } h \cdot dt \cdot d\sigma$, należy więc wziąć sumę podobnych wyrazów i rozciągnąć ją na oświetloną część równika. Oznaczmy przez λ łuk równika, zawarty między danym elementem $d\sigma$ i miejscem na równiku, dla którego słońce przechodzi przez południk; widać, iż λ będzie kątem godzinnym, mamy więc:

$$(19) \quad \begin{cases} \text{Sin } h = \cos \delta \cdot \cos \lambda \\ d\sigma = R d\lambda \end{cases}$$

R — promień ziemi w cm. , λ w radianach.

Będzie zatem:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{CR \cos \delta}{r^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \text{Cos } \lambda \cdot d\lambda;$$

to jest:

$$(20) \quad \frac{dW}{dt} = \frac{2CR}{r^2} \cos \delta;$$

Jeśli przez dQ oznaczymy przyrost średniej ilości ciepła, czyli w naszej interpretacji przyrost wysokości cieczy w czasie dt , to będzie:

$$(21) \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2\pi R} \cdot \frac{dW}{dt}$$

zatem:
$$\frac{dQ}{dt} = \frac{C}{\pi r^2} \cos \delta \quad (22)$$

Wyrugowawszy zmienną t , przy pomocy (13), mamy:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dW}{d\odot} = \frac{C}{c} 2R \cdot \cos \delta \\ \frac{dQ}{d\odot} = \frac{1}{\pi} \frac{C}{c} \cdot \cos \delta \end{array} \right.$$

Zauważywszy, że $\cos \delta = \sqrt{1 - \sin^2 \epsilon \cdot \sin^2 \odot}$,
otrzymamy średnią ilość ciepła w postaci całki eliptycznej nast.:

$$(24) \quad Q = \frac{1}{\pi} \frac{C}{c} \int_{\odot_0}^{\odot} \sqrt{1 - \sin^2 \epsilon \cdot \sin^2 \odot} \cdot d\odot$$

Kładąc $\odot = 0$ i $\odot = \frac{\pi}{2}$, mamy dla ilości rocznej wyrażenie:

$$(25) \quad Q_r = \frac{4}{\pi} \frac{C}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \epsilon \cdot \sin^2 \odot} \cdot d\odot$$

Jest to znana całka eliptyczna zupełna 2-go rodzaju o module $\sin \epsilon$; oznaczają ją przez $E(\theta)$.

Wartości $\log E(\theta)$, dla kąta modułu w odstępach 0,01, podaje prof. Witkowski w „Tablicach Matematyczno-Fizycznych“. Mamy:

$$Q_r = \frac{4}{\pi} \frac{C}{c} E(\epsilon) = \frac{4}{\pi} \frac{C}{c} E(23^\circ 27' 31,0'')$$

po obliczeniu wypada:

$$(26) \quad Q_r = 1,9182 \cdot \frac{C}{c}$$

w kaloryach zaś:

$$(27) \quad Q_r = 329170 \text{ kal. gr. na cm.}^2$$

Jeśli teraz obliczymy Q_r , sumując ilości dla poszczególnych dni (posługując się tabliczką w rozdz. I), to otrzymamy:

$$Q_r = 332640 \text{ kal. gr.}$$

zaledwie o 1% różną od poprzedniej; różnicę tę można zresztą raczej przypisać niedokładnościom metody sumowań.

Doszliśmy zatem do rezultatów, które dowodzą słuszności metody wyżej opisanej. Wartość (25) można przedstawić w postaci szeregu, mamy mianowicie:

$$\sqrt{1 - \sin^2 \epsilon \cdot \sin^2 \odot} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon \cdot \sin^2 \odot - \frac{1}{8} \sin^4 \epsilon \cdot \sin^4 \odot + \dots$$

$$- \frac{3}{48} \sin^6 \epsilon \cdot \sin^6 \odot - \dots - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (m-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots m} \sin^m \epsilon \cdot \sin^m \odot +$$

$$- \dots$$

Ponieważ zaś:

$$(28) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \odot \cdot d\odot = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots m)^2} \cdot \frac{\pi}{2} : m \text{ — parzyste}$$

zatem:

$$(29) Q_r = 2 \frac{C}{c} \left[1 - \frac{1}{4} \sin^2 \epsilon - \frac{3}{64} \sin^4 \epsilon - \frac{5}{256} \sin^6 \epsilon - \dots + \right.$$

$$\left. - \frac{m! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (m-3)}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots m)^3} \sin^m \epsilon + \dots \right]$$

Postaramy się teraz przedstawić wzór (16) w postaci szeregu Fouriera, któryby pozwalał dla każdego przeciągu czasu obliczać odpowiednią ilość ciepła; przyjmiemy $\odot_0 = 0$. Podobnie, jak poprzednio, mamy rozwinięcie:

$$\frac{dQ}{d\odot} = \frac{1}{\pi} \frac{C}{c} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon \cdot \sin^2 \odot - \frac{1}{8} \sin^4 \epsilon \cdot \sin^4 \odot - \dots \right)$$

szereg ten przekształcimy, zmieniając potęgi wstaw przez dostawy wielokrotności łuków; weźmy najpierw szereg ogólny:

$$(30) S = a_0 + a_1 \sin^2 x + a_2 \sin^4 x + \dots + a_m \cdot \sin^{2m} x + \dots$$

mamy, jak wiadomo:

$$\begin{aligned}
 \text{(31)} \quad \left\{ \begin{aligned}
 \sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \\
 \sin^4 x &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \\
 \sin^6 x &= \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos 2x + \frac{3}{16} \cos 4x - \frac{1}{32} \cos 6x \\
 \sin^8 x &= \frac{35}{128} - \frac{7}{16} \cos 2x + \frac{7}{32} \cos 4x - \frac{1}{16} \cos 6x + \frac{1}{128} \cos 8x \\
 \sin^{10} x &= \frac{63}{256} - \frac{49}{256} \cos 2x + \frac{15}{64} \cos 4x - \frac{157}{512} \cos 6x + \\
 &\quad + \frac{5}{256} \cos 8x - \frac{1}{512} \cos 10x \\
 \sin^{12} x &= \frac{231}{1024} - \frac{99}{256} \cos 2x + \frac{495}{2048} \cos 4x - \frac{55}{512} \cos 6x + \\
 &\quad + \frac{33}{1024} \cos 8x - \frac{3}{512} \cos 10x + \frac{1}{2048} \cos 12x ;
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Podstawiając te wyrażenia w (31), otrzymujemy szereg Fouriera:

$$(32) \quad S = A_0 + A_1 \cos 2x + A_2 \cos 4x + A_3 \cos 6x + \dots$$

współczynniki A_0, A_1, A_2, \dots dane są przez szeregi następujące:

$$\begin{aligned}
 \text{(33)} \quad \left\{ \begin{aligned}
 A_0 &= a_0 + \frac{1}{2} a_1 + \frac{3}{8} a_2 + \frac{5}{16} a_3 + \frac{35}{128} a_4 + \frac{63}{256} a_5 + \dots + \\
 &\quad + \frac{m!}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots m)^2} a_{\frac{m}{2}} \\
 A_1 &= -\frac{1}{2} a_1 - \frac{1}{2} a_2 - \frac{15}{32} a_3 - \frac{7}{16} a_4 - \frac{49}{256} a_5 - \dots \\
 A_2 &= \frac{1}{8} a_2 + \frac{3}{16} a_3 + \frac{7}{32} a_4 + \frac{15}{64} a_5 + \dots \\
 A_3 &= -\frac{1}{32} a_3 - \frac{1}{16} a_4 - \frac{157}{512} a_5 - \dots \\
 A_4 &= \frac{1}{128} a_4 + \frac{5}{256} a_{10} + \dots \\
 &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

naturalnie, iż powyższe przekształcenie wymaga pewnych warunków co do zbieżności szeregu (31), którymi się zresztą tu nie będziemy zajmowali. Stosując powyższe wzory do rozwinięcia $\frac{dQ}{d\odot}$, mamy:

$$(34) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ}{d\odot} = \frac{1}{\pi} \frac{C}{c} (A_0 + A_1 \cos 2\odot + A_2 \cos 4\odot + \dots) \\ A_0 = 1 - \frac{1}{4} \sin^2 \varepsilon - \frac{3}{64} \sin^4 \varepsilon - \frac{15}{768} \sin^6 \varepsilon - \dots \\ A_1 = \frac{1}{4} \sin^2 \varepsilon + \frac{1}{16} \sin^4 \varepsilon + \frac{15}{512} \sin^6 \varepsilon + \dots \\ A_2 = -\frac{1}{64} \sin^4 \varepsilon - \frac{3}{256} \sin^6 \varepsilon - \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

Po podstawieniu danych liczbowych, wynika:

$$(35) \frac{dQ}{d\odot} = \frac{C}{c} (0,30530 + 0,01313 \cos 2\odot - 0,00014 \cdot \cos 4\odot + \dots)$$

Całkując, otrzymujemy szukaną ilość ciepła w postaci szeregu:

$$(36) Q = \frac{C}{c} (0,30530 \cdot \odot + 0,00656 \cdot \sin 2\odot - 0,00003 \cdot \sin 4\odot + \dots)$$

Kładąc $\odot = 2\pi$, mamy ilość roczną zgodną z (26):

$$Q_r = 1,91824 \cdot \frac{C}{c}$$

Jeśli znamy przeciąg czasu, odpowiadający okresowi ($0, \odot$), to długość \odot , potrzebną we wzorze (36), otrzymujemy bądź z tablic, podających dla każdego dnia roku długość słońca i zbowrozenie, bądź też rozwiązujemy tak zwane zadanie Keplera. Szukamy przedewszystkiem anomalii średniej ξ :

$$\xi = n (t - t_0);$$

$$n = \frac{2\pi}{T}, \quad t_0 \text{ — czas przejścia przez perigeum.}$$

Następnie obliczamy anomalię mimośrodową E ze wzoru:

$$(37) \quad E - e \cdot \sin E = \xi$$

stąd anomalia prawdziwa ν otrzymuje się na mocy wzoru:

$$(38) \quad \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{E}{2}$$

Jeśli $\bar{\omega}$ jest długością perigeum, to $\odot = \bar{\omega} + \nu$.

Można zresztą odrazu obliczać anomalię prawdziwą przy pomocy szeregu:

$$(39) \quad \nu = \xi + \left(2e - \frac{e^2}{4}\right) \cdot \sin \xi + \frac{5}{4}e^2 \cdot \sin 2\xi + \frac{13}{12}e^3 \cdot \sin 3\xi + \dots$$

podstawiając $e = 0,0168$, mamy stąd:

$$(40) \quad \odot = \bar{\omega} + \xi + 0,033599 \cdot \sin \xi + 0,000353 \cdot \sin 2\xi + \\ + 0,00005 \cdot \sin 3\xi + \dots$$

Posługując się tym wzorem, możnaby też wyrazić Q w postaci szeregu:

$$Q = A_0 + A\xi + A_1 \sin \xi + B_1 \cdot \cos \xi + A_2 \cdot \sin 2\xi + \dots$$

pozwalającego bezpośrednio obliczać Q , znając odpowiedni przeciąg czasu ¹⁾.

III. Obliczenie ilości ciepła dla jakiegokolwiek szerokości geograficznej φ .

Obliczenie ilości dziennej ciepła podane było w rozdziale I-ym. Przystąpimy więc odrazu do obliczenia ilości średniej, postępując w ten sam sposób, jak poprzednio. Weźmy więc pod uwagę pas szerokości 1 cm., rozłożony wzdłuż całego obwodu danego równoleżnika. Jeśli, podobnie jak poprzednio, oznaczymy przez λ łuk równoleżnika, zawarty między punktem rozważanym i punktem, dla którego słońce przechodzi przez południk, to będzie:

¹⁾ Angot. Distribution de la chaleur sur la surface du globe. Annales du Bureau Central Météorol. Paris, Année 1883.

$$(1) \quad \begin{cases} \sin \lambda = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \lambda \\ d\sigma = R \cdot \cos \varphi \cdot d\lambda \end{cases}$$

Biorąc teraz całkę wzdłuż oświetlonej części równoleżnika, mamy:

$$(2) \quad \frac{dW}{dt} = \frac{2C}{r^2} \int_0^{\lambda_0} (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \lambda) R \cdot \cos \varphi \cdot d\lambda$$

W — ma to samo znaczenie co poprzednio, λ_0 jest połową oświetlonego łuku równoleżnika, daną przez wzór:

$$(3) \quad \cos \lambda_0 = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta ;$$

λ_0 jest oczywiście równe połowie łuku dziennego słońca. Z (2) otrzymujemy:

$$(4) \quad \frac{dW}{dt} = \frac{2C \cdot R \cdot \cos \varphi}{r^2} (\sin \varphi \cdot \sin \delta \cdot \lambda_0 + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \sin \lambda_0)$$

Zadanie, jak widzimy, jest bardziej złożone od poprzedniego, a to z powodu zmienności λ_0 , które dla równika było równe stałe $\frac{\pi}{2}$. Zauważymy, iż natężenie średnie promieniowania będzie:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2\pi R \cdot \cos \varphi} \cdot \frac{dW}{dt}$$

otrzymujemy:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{C}{\pi r^2} (\sin \varphi \cdot \sin \delta \cdot \lambda_0 + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \sin \lambda_0)$$

lub

$$(5) \quad \frac{dQ}{d\odot} = \frac{1}{\pi} \frac{C}{c} (\sin \varphi \cdot \sin \delta \cdot \lambda_0 + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \sin \lambda_0)$$

podstawiając $\sin \delta = \sin \varepsilon \cdot \sin \odot$, wypadnie po przekształceniu:

$$(6) \quad \frac{dQ}{d\odot} = \frac{\cos \varphi}{\pi} \frac{C}{c} (\operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \varepsilon \cdot \sin \odot \cdot \lambda_0 + \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varepsilon}{\cos^2 \varphi} \cdot \sin^2 \odot})$$

Zadanie sprowadza się teraz do rozwinięcia wyrażenia poprzedniego. Drugi wyraz dwumianu w nawiasie rozwija się tak, jak w rozdziale poprzednim; aby rozwinąć pierwszy wyraz, trzeba będzie znaleźć rozwinięcie λ_0 . Oznaczmy:

$S = \text{Tg} \varphi \cdot \text{Sin} \varepsilon \cdot \text{Sin} \odot \lambda_0$, ponieważ $\text{Cos} \lambda_0 = -\text{tg} \varphi \cdot \text{tg} \delta$, mamy więc:

$$\lambda_0 = \frac{\pi}{2} + \text{arc Sin} (\text{tg} \varphi \cdot \text{tg} \delta).$$

Stosując zaś rozwinięcie:

$$(7) \quad \text{arc Sin } x = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{10} x^5 + \frac{5}{112} x^7 + \frac{35}{1152} x^9 + \\ + \frac{63}{2816} x^{11} + \dots$$

otrzymamy:

$$\lambda_0 = \frac{\pi}{2} + (\text{tg} \varphi \cdot \text{tg} \delta) + \frac{1}{6} (\text{tg} \varphi \cdot \text{tg} \delta)^3 + \frac{3}{10} (\text{tg} \varphi \cdot \text{tg} \delta)^5 + \dots$$

założywszy dla skrócenia $\alpha = \text{sin} \varepsilon \cdot \text{sin} \odot$, mamy też:

$$\text{tg} \delta = \frac{\text{Sin} \varepsilon \cdot \text{Sin} \odot}{\sqrt{1 - \text{Sin}^2 \varepsilon \cdot \text{Sin}^2 \odot}} = \alpha + \frac{1}{2} \alpha^3 + \frac{3}{2} \alpha^5 + \frac{5}{16} \alpha^7 + \\ + \frac{35}{128} \alpha^9 + \frac{63}{256} \alpha^{11} + \dots$$

Zatem:

$$\lambda_0 = \frac{\pi}{2} + \text{tg} \varphi \left(\alpha + \frac{1}{2} \alpha^3 + \frac{3}{2} \alpha^5 + \frac{5}{16} \alpha^7 + \frac{35}{128} \alpha^9 + \frac{63}{256} \alpha^{11} + \dots \right) + \\ + \frac{1}{6} \text{tg}^3 \varphi \cdot \left(\alpha^3 + \frac{3}{2} \alpha^5 + \frac{21}{4} \alpha^7 + \frac{89}{16} \alpha^9 + \frac{1081}{128} \alpha^{11} + \dots \right) + \\ + \frac{3}{10} \text{tg}^5 \varphi \cdot \left(\alpha^5 + \frac{5}{2} \alpha^7 + 10 \alpha^9 + \frac{285}{16} \alpha^{11} + \dots \right) + \\ + \frac{5}{112} \text{tg}^7 \varphi \cdot \left(\alpha^7 + \frac{7}{2} \alpha^9 + \frac{63}{4} \alpha^{11} + \dots \right) + \\ + \frac{35}{1152} \text{tg}^9 \varphi \cdot \left(\alpha^9 + \frac{9}{2} \alpha^{11} + \dots \right) + \frac{63}{2816} (\alpha^{11} + \dots) + \dots$$

porządkując zaś według potęg α , będziemy mieli:

$$(8) \quad \lambda = \frac{\pi}{2} + \alpha \operatorname{tg} \varphi + \alpha^3 \cdot \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \varphi \right) + \\ + \alpha^5 \left(\frac{3}{2} \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^3 \varphi + \frac{3}{10} \operatorname{tg}^5 \varphi \right) + \dots$$

Podstawivszy to rozwinięcie w wyrażenie na S, mamy:

$$(9) \quad S = \lambda_0 \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi = a_1 \operatorname{Sin} \odot + a_2 \operatorname{Sin}^2 \odot + a_3 \cdot \operatorname{Sin}^4 \odot + a_4 \cdot \operatorname{Sin}^6 \odot + \dots$$

współczynniki $a_1, a_2, a_3 \dots$ są następujące:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{Sin} \varepsilon \\ a_2 = \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \operatorname{Sin}^2 \varepsilon \\ a_3 = \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \varphi \right) \cdot \operatorname{Sin}^4 \varepsilon \\ a_4 = \left(\frac{3}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 \varphi + \frac{3}{10} \operatorname{tg}^6 \varphi \right) \cdot \operatorname{Sin}^6 \varepsilon \\ a_5 = \left(\frac{5}{16} \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{7}{8} \operatorname{tg}^4 \varphi + \frac{3}{4} \operatorname{tg}^6 \varphi + \frac{5}{112} \operatorname{tg}^8 \varphi \right) \cdot \operatorname{Sin}^8 \varepsilon \\ a_6 = \left(\frac{35}{128} \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{89}{96} \operatorname{tg}^4 \varphi + 3 \operatorname{tg}^6 \varphi + \frac{5}{32} \operatorname{tg}^8 \varphi + \right. \\ \left. + \frac{35}{1152} \operatorname{tg}^{10} \varphi \right) \cdot \operatorname{Sin}^{10} \varepsilon \\ \dots \end{array} \right.$$

z (9) wynika rozwinięcie Fourier'a:

$$(11) \quad S = A_0 + A_1 \cdot \operatorname{Sin} \odot + A_2 \cdot \operatorname{Cos} 2 \odot + A_4 \cdot \operatorname{Cos} 4 \odot + \dots$$

$A_1 = a_1$ zaś współczynniki A_0, A_2, A_4 i t. d. otrzymamy, posługując się wzorami (33) rozdz. II. Mamy też następujące rozwinięcie:

$$(12) \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varepsilon}{\cos^2 \varphi}} \cdot \sin^2 \odot = B_0 + B_2 \cdot \cos 2 \odot + B_4 \cdot \cos 4 \odot + \\ + B_6 \cdot \cos 6 \odot + \dots$$

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} B_0 = 1 - \frac{1}{4} \frac{\sin^2 \varepsilon}{\cos^2 \varphi} - \frac{3}{64} \frac{\sin^4 \varepsilon}{\cos^4 \varphi} - \frac{15}{768} \frac{\sin^6 \varepsilon}{\cos^6 \varphi} - \dots \\ B_2 = \frac{1}{4} \frac{\sin^2 \varepsilon}{\cos^2 \varphi} + \frac{1}{16} \frac{\sin^4 \varepsilon}{\cos^4 \varphi} + \frac{15}{512} \frac{\sin^6 \varepsilon}{\cos^6 \varphi} + \dots \\ B_4 = -\frac{1}{64} \frac{\sin^4 \varepsilon}{\cos^4 \varphi} - \frac{3}{256} \frac{\sin^6 \varepsilon}{\cos^6 \varphi} - \dots \\ B_6 = \frac{1}{512} \frac{\sin^6 \varepsilon}{\cos^6 \varphi} + \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

Wypada stąd rozwinięcie szukane:

$$(14) \frac{dQ}{d\odot} = \frac{\cos \varphi}{\pi} \frac{C}{c} \left[(A_0 + B_0) + A_1 \cdot \sin \odot + (A_2 + B_2) \cos 2 \odot + \right. \\ \left. + (A_4 + B_4) \cos 4 \odot + (A_6 + B_6) \cdot \cos 6 \odot + \dots \right];$$

t. j. rozwinięcie kształtu:

$$(15) \frac{dQ}{d\odot} = \frac{C}{c} (M_0 + M_1 \cdot \sin \odot + M_2 \cos 2 \odot + M_4 \cdot \cos 4 \odot + \dots)$$

godnem jest uwagi, iż dla szerokości $-\varphi$, otrzymamy te same współczynniki $M_0 M_2 M_3 \dots$, za wyjątkiem M_1 , które zmieni znak na odwrotny, będzie mianowicie:

$$(16) \left(\frac{dQ}{d\odot} \right)_{-\varphi} = \frac{C}{c} (M_0 - M_1 \cdot \sin \odot + M_2 \cdot \cos 2 \odot + M_4 \cdot \cos 4 \odot + \dots)$$

Rozwinięcie to będzie słuszne też dla szerokości φ podczas miesięcy zimowych pod warunkiem, że \odot oznaczać będzie wtedy kąt liczony od punktu jesiennego --- . Jest to zrozumiałem też z tego powodu, że położenie słońca względem równoleżnika φ przy długości \odot , jest takie same, jak dla szerokości $-\varphi$, gdy długość wynosi $\pi + \odot$.

Jeśli liczyć będziemy ilość ciepła od punktu wiosennego, to z (15) wypada wzór dla Q:

$$(17) \quad Q = \frac{C}{c} (M_1 + M_0 \odot - M_1 \text{Cos} \odot + \frac{M_2}{2} \text{Sin} 2 \odot + \\ + \frac{M_4}{4} \text{Sin} 4 \odot + \dots)$$

Oznaczmy przez $Q_{+\varepsilon}$ ilość ciepła odebraną w okresie, gdy słońce jest w półkuli północnej, a przez $Q_{-\varepsilon}$ gdy w południowej, będzie zatem:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q_{+\varepsilon} = \frac{C}{c} (\pi M_0 + 2 M_1) \\ Q_{-\varepsilon} = \frac{C}{c} (\pi M_0 + 2 M_1) \end{array} \right.$$

Wypadnie też zauważyć, iż ilość ciepła, otrzymana w ćwiartce $(\odot = 0, \odot = \frac{\pi}{2})$ równa jest ilości ciepła, odpowiadającej ćwiartce $(\odot = \pi, \odot = \frac{3}{2} \pi)$, to samo stosuje się i do pozostałych ćwiartek. Dla rocznej ilości ciepła będziemy mieli wzór:

$$Q_r = \frac{C}{c} \cdot 2\pi M_0 = \frac{C}{c} 2 \text{Cos} \varphi (A_0 + B_0)$$

czyli:

$$(19) \quad Q_r = 2 \frac{C}{c} \text{Cos} \varphi \left[\left(+ \frac{1}{2} a_2 + \frac{3}{8} a_3 + \frac{15}{16} a_4 + \dots \right) + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\text{Sin}^2 \varepsilon}{\text{Cos}^2 \varphi} - \frac{3}{64} \frac{\text{Sin}^4 \varepsilon}{\text{Cos}^4 \varphi} - \dots \right) \right]$$

Z (18) wynika również ciekawy związek:

$$Q_{+\varepsilon} - Q_{-\varepsilon} = \frac{C}{c} 4 M_1$$

t. j.:

$$(20) \quad Q_{+\varepsilon} - Q_{-\varepsilon} = 2 \frac{C}{c} \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varepsilon.$$

Do wyników naszych zastosujemy dane liczbowe dla Warszawy; będzie zatem $\varphi = 52^{\circ},22$. Wypadają następujące wartości współczynników:

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \log a_1 = \bar{1},90673 \quad ; \quad a_1 = 0,8067 \\ \log a_2 = \bar{1},40122 \quad ; \quad a_2 = 0,2519 \\ \log a_3 = \bar{2},51182 \quad ; \quad a_3 = 0,0325 \\ \log a_4 = \bar{2},26002 \quad ; \quad a_4 = 0,0182 \\ \log a_5 = \bar{3},62880 \quad ; \quad a_5 = 0,0043 \end{array} \right.$$

Na zasadzie tych wartości, otrzymujemy współczynniki:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0 = 0,1449; \quad A_1 = 0,8067; \quad A_2 = -0,1526 \\ A_4 = 0,0062; \quad A_6 = -0,0003 \text{ i t. d.} \end{array} \right.$$

Ze wzorów (13) otrzymujemy jeszcze:

$$(22 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_0 = 0,8844; \quad B_2 = 0,1187; \\ B_4 = 0,0040; \quad B_6 = 0,0001. \end{array} \right.$$

Podstawiając we wzór (14) wartości powyższe, mamy rozwinięcie:

$$(23) \quad \frac{dQ}{d\odot} = \frac{C}{c} (0,2007 + 0,1573 \cdot \sin \odot - 0,0066 \cdot \cos 2\odot + \\ + 0,0004 \cdot \cos 4\odot + \dots)$$

Całkując, otrzymujemy szereg, przedstawiający średnią ilość ciepła dla Warszawy:

$$(24) \quad Q = \frac{C}{c} (0,1573 + 0,2007 \cdot \odot - 0,1573 \cdot \cos \odot - \\ - 0,033 \cdot \sin 2\odot + 0,0001 \cdot \sin 4\odot + \dots)$$

wynika stąd:

$$Q_{+\varepsilon} = 0,9451 \frac{C}{c}; \quad Q_{-\varepsilon} = 0,3159 \cdot \frac{C}{c};$$

zaś ilość roczna:

$$Q_r = 1,2610 \cdot \frac{C}{c};$$

W kaloryach kgr. będziemy mieli:

$$(25) \quad \begin{cases} Q_{+\varepsilon} = 162,20 \text{ kal. kg.}; & Q_{-\varepsilon} = 54,21 \text{ kal. kg.} \\ Q_r = 216,41 \text{ kal. kg.} \end{cases}$$

Zobaczymy teraz, iż szereg (23) wiąże się w prosty sposób z ilością dzienną ciepła, którą oznaczyliśmy przez Q_j .

Przy obliczaniu Q_j za pomocą wzoru (3) rozdz. 2-go, przyjmowaliśmy zboczenie δ lub długość \odot słońca za stałe w ciągu dnia i równe wartości współrzędnych słońca w południe każdego dnia. Q_j będzie więc funkcją \odot ; postaramy się rozwinąć ją na szereg. Tego rodzaju zagadnieniem zajmował się Angot¹⁾; metoda przez niego używana, w celu odnalezienia rozwinięcia dla Q_j , ma jednak charakter empiryczny.

Zauważmy teraz, iż przy obliczaniu Q_j mamy całkę identyczną z całką, jaka występuje w wyrażeniu ilości średniej ciepła. Jest mianowicie:

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ}{dt} = \frac{C}{\pi r^2} \int_0^{\lambda_0} (\sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \lambda) d\lambda; \\ \hspace{15em} \cos \lambda = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta. \\ \\ Q_j = \frac{2C\mu}{r^2} \int_0^{\tau_0} (\sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \tau) d\tau; \\ \hspace{15em} \cos \tau_0 = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta. \end{array} \right.$$

wynika natychmiast stąd związek:

$$(27) \quad Q_j = 2\pi\mu \cdot \frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi C\mu}{r^2} \frac{dQ}{d\odot}$$

¹⁾ Angot (l. c.).

Rozwinięcie dla Q_j otrzymać można zatem z rozwinięcia (23), mnożąc każdy wyraz szeregu przez $\frac{2\pi C\mu}{r^2}$. Dzięki zatem tej okoliczności zadanie o rozwinięciu ilości średniej jest jednocześnie zadaniem o rozwinięciu ilości Q_j , traktowanem przez Ango't'a. Należy jednak pamiętać, iż w szeregu, wyrażającym $\frac{dQ}{dt}$, długość \odot zmienia się w sposób ciągły, co nie zachodzi znowuż w rozwinięciu ilości dziennej. Biorąc za r średnią odległość ziemi od słońca, mamy $\log \frac{2\pi C\mu}{r^2} = 3,72652$; posługując się tą wartością, otrzymamy z (23) rozwinięcie ilości dziennej dla Warszawy:

$$(28) \quad Q_j = 0,001 \frac{C}{c} (3,443 + 2,698 \cdot \sin \odot - 0,113 \cdot \cos 2 \odot + \\ + 0,007 \cdot \cos 4 \odot + \dots).$$

Możnaby też, na zasadzie rozwinięć (40) rozdz. 2-go, przedstawić Q i Q_j przez szeregi trygonometryczne anomalii średniej ξ .

Obliczenia powyższe stosować można dla wszystkich równoleżników, leżących poniżej koła biegunowego, t. j. dla szerokości $\varphi \leq 90^\circ - \varepsilon = 66^\circ 33'$. Dla miejscowości pasa biegunowego, rozumowanie poprzednie jest dopuszczalne wtedy, gdy słońce oświetla tylko część równoleżnika, t. j. istnieje zmiana dnia i nocy; dla okresu czasu zaś, gdy słońce nie zachodzi wcale, trzeba będzie rachunki przeprowadzić inaczej, niż poprzednio; będą one zresztą prostsze z powodu niezmienności $\lambda_n = \pi$.

Rozpocniemy od rozwinięcia ilości dziennej:

$$(29) \quad Q_j = \frac{2C\mu}{r^2} \pi \cdot \sin \varphi \cdot \sin \delta$$

godniem jest uwagi, iż $Q_j = Q_p \cdot \sin \varphi$, Q_p ilość dzienna dla biegunu. Rozwinięcie Q_j redukuje się w danym przypadku do jednego wyrazu, mamy mianowicie:

$$(30) \quad Q_j = \frac{2C\mu}{r^2} \pi \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varepsilon \cdot \sin \odot$$

wzór ten stosować należy od chwili, gdy $\delta = 90^\circ - \varphi$ do chwili, gdy δ , zmniejszając się, znów osiągnie tę samą wartość, t. j. w granicach:

$$(31) \quad \arcsin \left| \frac{\cos \varphi}{\sin \varepsilon} \right| \leq \odot \leq \pi - \arcsin \left| \frac{\cos \varphi}{\sin \varepsilon} \right|$$

Według (27) będziemy mieli:

$$\frac{dQ}{d\odot} \equiv \frac{C}{c} \sin \varphi \cdot \sin \varepsilon \cdot \sin \odot$$

Jeśli oznaczymy przez Q' ilość ciepła liczoną od chwili, gdy $\odot = \odot_0 = \arcsin \left| \frac{\cos \varphi}{\sin \varepsilon} \right|$, to będzie:

$$(32) \quad Q' = \frac{C}{c} \sin \varphi \cdot \sin \varepsilon \cdot (\cos \odot_0 - \cos \odot);$$

wypada stąd ilość ciepła, jaką otrzyma dany cm^2 w okresie czasu, gdy słońce jest nad horyzontem:

$$(33) \quad Q'_c = \frac{2C}{c} \sin \varphi \cdot \sin \varepsilon \cdot \cos \odot_0.$$

Oznaczmy teraz przez $F(\odot)$ funkcję, przedstawiającą średnią ilość ciepła dla miejscowości pasa biegunowego, liczoną od $\odot = 0$. Funkcja ta będzie się różnie wyrażała zależnie od położenia słońca. Gdy \odot zmienia się od 0 do \odot_0 , istnieje zmiana dnia i nocy, jesteśmy zatem w warunkach zadania poprzedzającego; gdy \odot zmienia się od \odot_0 do $\pi - \odot_0$, funkcja schodzi się z funkcją $Q' + q$, gdzie q jest ciepłem otrzymanem w przedziale $(0, \odot_0)$; dla \odot zawartego w granicach od $\pi - \odot_0$ do $\pi + \odot_0$, $F(\odot)$ wyrazi się przez funkcję, którą otrzymamy, dodając do funkcji dla okresu $(0, \odot_0)$ stałą $Q'_c + q$; wreszcie dla

$$\pi + \odot < \odot < 2\pi - \odot_0,$$

$F(\odot)$ jest stałą, bo słońce jest wtedy poniżej horyzontu i dla przedziału $(2\pi - \odot_0, 0)$ podobnie jak dla $(0, \odot_0)$. $F(\odot)$ przedstawia się zatem, w 3-ch swoich fazach zmienności, przez różne szeregi; możliwe jest jednak znalezienie szeregu, któryby odpowiadał jej zmienności dla całego roku.

IV. Straty promieniowania w atmosferze.

Powyższe rachunki przeprowadzone były w tem założeniu, że promieniowanie słońca nie ulega zmniejszeniu przy przejściu przez warstwę atmosfery ziemskiej. Porównanie rezultatów otrzymanych z doświadczalnymi wskazuje na znaczny wpływ atmosfery na natężenie promieniowania i to tym większy, im słońce jest bliżej horyzontu, co się tłumaczy większą grubością warstwy absorbującej energię promieniowania. Rachunki, które mamy obecnie na celu, będą niejako drugim przybliżeniem rachunków insolacyjnych; będziemy się tu starali uwzględnić tylko najważniejsze czynności absorbujące, i ująć ich wpływ w możliwie prostą formę matematyczną. Dokładne uwzględnienie absorbcyi jest niezmiernie złożone i może być jedynie empirycznie traktowane. W powietrzu suchem głównym czynnikiem, który zmniejsza natężenie promieniowania jest dyfuzya, czyli rozpraszanie się światła; obecność pary wodnej w powietrzu również znacznie osłabia promieniowanie.

Oznaczmy przez q_0 pierwotne natężenie promieniowania, przez q natężenie po przejściu drogi σ w ośrodku jednorodnym; według prawa B o u g u e r'a natężenie będzie malało z postępem geometrycznym, t. j.:

$$(1) \quad q = q_0 \cdot e^{-k\sigma}$$

$k > 1$ jest to pewna stała, zależna od ośrodka. Jeśli wzór (1) zastosujemy do natężenia promieniowania słońca, przypuszczając jednorodność powietrza i nie uwzględniając kulistości ziemi, będziemy mieli:

$$(2) \quad q = q_0 \cdot p^{\frac{1}{\sin h}}$$

h — wysokość słońca, p — współczynnik transmisyi, wyrażający, jaka część energii zostaje absorbowaną przy pionowym padaniu promieni. Wzór (2) wyraża tak zwane prawo L a m b e r t'a. Ponieważ będziemy się nim posługiwali w następnych rachunkach, jako jednym z prostszych wyrażen dla strat promieniowania, trzeba uzasadnić jego stosowalność do ośrodka niejednorodnego, jakim jest powietrze. Współczynnik k nie będzie wielkością stałą, lecz

będzie się zmniejszał wraz z wzrostem wysokości H nad poziomem, a to z powodu malenia gęstości. Weźmy więc pod uwagę warstwę powietrza nieskończenie cienką dH , wzór (1) zastosowany do tej warstwy da nam:

$$(3) \quad dq = -K(H) \cdot q \cdot d\sigma$$

lecz, jeśli przypuścimy, iż droga promieni jest prostolinjową, można przyjąć

$$\sigma = \frac{H}{\sin h}; \quad d\sigma = \frac{dH}{\sin h}$$

zatem:

$$dq = -\frac{K(H)}{\sin h} q dH$$

wynika stąd:

$$\text{Log}_e \left(\frac{q}{q_0} \right) = -\frac{1}{\sin h} \int_0^H K(H) \cdot dH$$

całkowanie należy rozciągnąć do granic atmosfery; q_0 będzie promieniowaniem na granicy atmosfery, równe, jak wiadomo, około 2 kal. gr., cm^2 , min.

Jeśli założymy:

$$(4) \quad p = e^{-\int_0^H K(H) \cdot dH}$$

wynika wzór Lambert'a:

$$(5) \quad q = q_0 \cdot p^{\frac{1}{\sin h}}$$

zatem wzór (2) słuszny jest i dla ośrodka niejednorodnego, pod warunkiem, aby p brać ze wzoru (4).

Wzór (5) był wyprowadzony w przypuszczeniu, iż droga promieni słonecznych w atmosferze jest prostolinjową, nie uwzględnialiśmy następnie kulistości ziemi; tego rodzaju przypuszczenie było dopuszczalne dla wysokości słońca bliskich 90° , dla wysokości jednak niewielkich požądaniem jest wyprowadzenie wzoru ściślejzego, w którymby powyższe dwie okoliczności były

uwzględnione. Weźmy więc pod uwagę element $d\sigma$ krzywej refrakcji i przyjmijmy, iż $K = a\rho$, ρ — gęstość powietrza, będzie zatem:

$$\text{Log.} \left(\frac{q}{q_0} \right) = -a \int_0^H \rho \, d\sigma$$

jeśli teraz złożymy:

$$(6) \quad p = e^{-a \int_0^H \rho \, dH} \quad ; \quad m = \frac{\int_0^H \rho \, d\sigma}{\int_0^H \rho \, dH}$$

to będzie:

$$(7) \quad q = q_0 \cdot p^m \quad ; \quad (p \leq 1; m \geq 1)$$

m będzie pewną funkcją wysokości h , która dla $h = 90^\circ$ staje się 1; m jest długością drogi atmosferycznej. Wzór (7) jest wzorem ogólnym dla straty promieniowania, wzór Lambert'a jest tylko jego szczególnym przypadkiem, jeśli będziemy przyjmować $m = \frac{1}{\text{Sin } h}$.

Całe zadanie sprowadza się teraz do obliczenia funkcji m . Oznaczmy przez i , kąt między styczną do krzywej refrakcji i do danej warstwy powietrza. Niech z oznacza pozorną odległość zenitalną słońca, μ średni współczynnik załamania dla danej warstwy, R — promień ziemi; jak wiadomo:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} (R + H) \mu \cdot \text{Sin } i = \text{Const.} = R\mu_0 \cdot \text{Sin } z \\ d\sigma = \frac{dH}{\text{Cos } i} \end{array} \right.$$

Wynika na zasadzie tego następujące wyrażenie dla drogi atmosferycznej:

$$(9) \quad m = \int_0^H \frac{1}{\rho \cdot dH} \int_0^H \frac{\rho \, dH}{\sqrt{1 - \left(\frac{R\mu_0}{(R+H)\mu} \right)^2 \text{Sin}^2 z}}$$

Z powyższego otrzymać można m w założeniu iż $\mu - \mu_0$ czyli przyjmując drogę za prostolinjową.

Posługując się rozwinięciami na szeregi, otrzymujemy wtedy wyrażenie następujące:

$$(10) \quad m = \sec z - \sec z \cdot \operatorname{tg}^2 z \frac{\int_0^H \rho H dH}{R \int_0^H \rho dH} + \frac{3}{2} \sec^3 z \cdot \operatorname{tg}^2 z \frac{\int_0^H \rho H^2 dH}{R^2 \int_0^H \rho dH}$$

podane przez Lambert'a. Całki w wyrażeniu powyższem można obliczyć po przyjęciu pewnych hipotez co do zmiany gęstości ρ powietrza z wysokością H .

Przyjmijmy np., iż gęstość ρ maleje według postępu geometrycznego t. j. $\rho = \rho_0 \cdot e^{-\alpha H}$, którą to hipotezę stosować można ściśle w razie równowagi izotermicznej; ponieważ

$$g \cdot \int_0^H \rho dH = \text{ciężarowi słupa pow.} = p_0, \text{ zatem: } \alpha = \frac{g\rho_0}{p_0} = \frac{L}{L_0}, \quad L_0$$

będzie wysokością jednorodnego słupa powietrza o gęstości ρ_0 , który wywiera to samo ciśnienie p_0 . Wstawiwszy wyrażenie na ρ we wzór (10) i wykonawszy całkowania do granic atmosfery, będziemy mieli:

$$(11) \quad m = \sec z - \frac{1}{2} \frac{L_0}{R} \sec z \cdot \operatorname{tg}^2 z + (L_0 - \frac{1}{3} R \operatorname{Cos}^2 z) \frac{L_0 \operatorname{tg}^2 z}{2R^2 \operatorname{Cos}^3 z}$$

Nie uwzględniając kulistości ziemi, otrzymaliśmy poprzednio $m = \frac{1}{\operatorname{Sin} h} = \sec z$; widzimy z (11), iż błąd wten sposób

popołniony będzie mniejszy od $\frac{1}{1200} \sec z \cdot \operatorname{tg}^2 z$, gdyż $L_0 = 10 \text{ km.}$,

np. dla $h = 10^\circ$, biorąc $m = \frac{1}{\operatorname{Sin} h} = 5,76$, popołniamy błąd mniej

szy od $\frac{1}{6}$. dla $h = 45^\circ$ błąd jest mniejszy od $\frac{1}{800}$, zatem nie-

wielki. Dlatego też w następnych rachunkach będziemy zawsze brali

$m = \frac{1}{\operatorname{Sin} h}$ dla jakiegokolwiek wysokości, bo chociaż dla $h < 10^\circ$

błąd już nie jest zbyt mały, to jednak natężenie promieniowania jest wtedy na tyle słabe, iż przy obliczaniu całkowitej ilości

dziennej ciepła błąd ten nie ma żadnego znaczenia. Dotąd, jakkolwiek braliśmy pod uwagę kulistość ziemi i niejednorodność powietrza, to jednak nie uwzględnialiśmy skutku tej niejednorodności t. j. skrzywienia drogi promieni słonecznych. Jednym z ciekawszych wyrażeń dla m , uwzględniających refrakcję, jest wzór Laplace'a, którego wyprowadzeniem zajmiemy się obecnie. Weźmy pod uwagę łuk M_0M drogi krzywoliniowej promienia; z rysunku widać iż:

$$\text{Refr.} = \int_{M_0}^M du, \text{ gdzie } u \text{ oznacza kąt,}$$

który tworzy styczna z prostą prostopadłą w punkcie M_0 . Na mocy związków:

$$(12) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} i = r \frac{d\theta}{dr}; & r\mu \sin i = R \cdot \mu_0 \sin z; & du = di + dt \\ r = R + H \end{cases}$$

otrzymujemy: $\frac{dr}{r} + \frac{d\mu}{\mu} \operatorname{Cotg} i \cdot di = 0$

stąd: $\frac{d\mu}{\mu} = -\operatorname{Cotg} i \cdot di$;

$$du = -\frac{\frac{R\mu_0}{r\mu}}{\sqrt{1 - \left(\frac{R\mu_0}{r\mu}\right)^2 \cdot \sin^2 z}} \cdot \frac{d\mu}{\mu}$$

Wynika stąd podstawowy wzór refrakcyi:

$$(13) \quad \text{Refr.} = \int_1^{\mu_0} \frac{\frac{R\mu_0}{r\mu}}{\sqrt{1 - \left(\frac{R\mu_0}{r\mu}\right)^2 \cdot \sin^2 z}} \cdot \frac{d\mu}{\mu}$$

Granicą dolną jest 1, gdyż dla próżni $\mu = 1$.

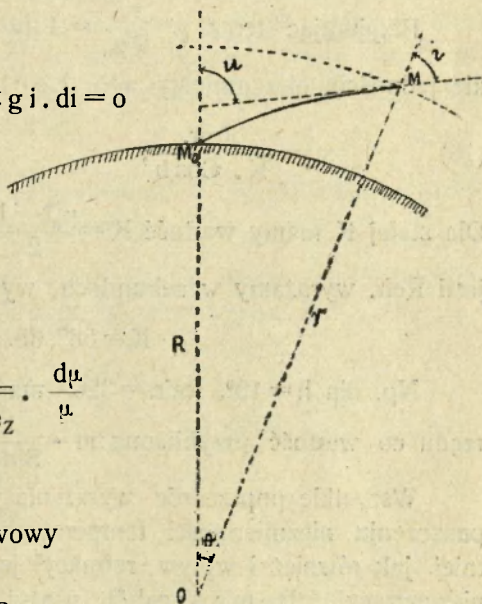


Fig. 1.

Przyjmijmy teraz według Laplace'a:

$$\mu^2 = 1 + 2c\rho$$

c — pewna stała, mamy $\mu d\mu = c d\rho$, $\rho dH = -L_0 d\rho$; $\int_0^H \rho dH = \rho_0 L_0$;

podstawivszy te wartości we wzór (9) otrzymujemy:

$$(14) \quad m = \frac{1}{c\rho_0} \int_1^{\mu_0} \frac{\mu d\mu}{\sqrt{1 - \left(\frac{R\mu_0}{r\mu}\right)^2 \cdot \text{Sin}^2 z}};$$

z porównania (14) z (13) wynika:

$$(15) \quad dm = \frac{1}{c\rho_0} \frac{d(\text{Refr.})}{\text{Sin} z} \mu^2 \frac{r\mu}{R\mu_0}$$

Przyjmując teraz $\mu^2 \frac{r\mu}{R\mu_0} = 1$ (w rzeczywistości bardzo blizkie jedności), otrzymujemy wzór Laplace'a¹⁾.

$$(16) \quad m = \frac{\text{Refr.}}{K \cdot \text{Cos} h};$$

Dla stałej K mamy wartość $K = \frac{u_0^2 - 1}{2}$

jeśli Refr. wyrażamy w sekundach, wypadnie przyjąć:

$$K = 58'', 36.$$

Np. dla $h = 10^\circ$, Refr. = 320'' mamy $m = 5,63$, tego samego rzędu co wartość przybliżona $m = \frac{1}{\text{Sin} h} = 5,76$.

Wszystkie poprzednie wyrażenia wyprowadzone są w przypuszczeniu niezmienności temperatury, zresztą wpływ tej ostatniej, jak również i wpływ refrakcyi jest w naszych rachunkach nieznaczący. Bemporad²⁾ ułożył tablice wartości m dla każdej wysokości, biorąc pod uwagę zmiany temperatury i dokładniej uwzględniając refrakcyę promieni.

¹⁾ P. S. Laplace: Mécanique Celeste IV. Chap. 3. Paris 1805.

²⁾ Bemporad. Zur Theorie der Extinktion des Lichtes in der Erdatmosphäre. (Mitteilungen der Grossherz. Sternw. zu Heidelberg).

Co się tyczy prawa Bouguer'a, wyrażonego we wzorze:

$$q = q_0 \cdot p^m \quad \text{lub} \quad \log q = a - b m$$

nie jest ono ściśle w zastosowaniu obecnem. Bemporad¹⁾ proponuje przyjąć:

$$\log q = a - b m^\alpha$$

gdzie współczynniki wyznaczyć należy doświadczalnie.

Bartoli podaje też następujący wzór empiryczny:

$$q = q_0 \cdot m^{-\alpha}$$

Na zakończenie naszych rozważań ogólnych wypadnie nadmienić, iż miały one charakter mało precyzyjny, a to choćby dlatego, iż samo pochłanianie braliśmy zbyt ogólnie, nie wdając się w analizę oddzielnych części widma, dla których przepuszczalność powietrza jest niejednakowa; przyjęcie więc stałego współczynnika transmisji p nie odpowiada rzeczywistości; rachunki oparte na tem przypuszczeniu będą więc tylko przybliżeniem rachunków insolacyjnych, których większą lub mniejszą dokładność będziemy mogli ocenić w ostatnim rozdziale.

V. Obliczenie ilości ciepła dla równika z uwzględnieniem strat promieniowania.

Opierając się na prawie Lambert'a, możemy napisać dla natężenia promieniowania następujące wyrażenie:

$$(1) \quad \frac{dQ_j}{dt} = \frac{C}{r^2} \sin h p^{\frac{1}{\sin h}}$$

Zauważywszy, iż dla równika $\sin h = \cos \delta \cdot \cos \tau$, otrzymujemy dla ilości dziennej wyrażenie:

$$(2) \quad Q_j = \frac{2C_0}{r^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \delta \cdot \cos \tau \cdot p^{\frac{1}{\cos \delta \cdot \cos \tau}} \cdot d\tau ;$$

¹⁾ Bemporad. L'Assorbimento selettivo della radiazione solare nell'atmosfera terrestre (Reale Accademia dei Lincei). Roma 1908.

zaś dla natężenia promieniowania średniego:

$$(3) \quad \frac{dQ}{d\odot} = \frac{1}{\pi} \frac{C}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Cos } \delta \cdot \text{Cos } \lambda \cdot p^{\frac{1}{\text{Cos } \delta \cdot \text{Cos } \lambda}} \cdot d\lambda$$

λ ma to samo znaczenie co poprzednio.

Całki powyższe można obliczać jedynie metodami przybliżonemi. W ten sposób postępował Angot (l. c.); otrzymawszy szereg wartości dla Q_j dla różnych pór roku, szukał następnie rozwinięcia Fouriera metodą empiryczną, co zresztą dało rezultaty zadawalające. Naszym celem będzie dojść do rozwinięcia Q_j lub $\frac{dQ}{d\odot}$ przy pomocy metod analitycznych. Wprowadzając do (3) zmienną \odot , mamy:

$$(4) \quad \frac{dQ}{d\odot} = \frac{1}{\pi} \frac{C}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Sec } \lambda}{\sqrt{1 - \text{Sin}^2 \varepsilon \cdot \text{Sin}^2 \odot}} \cdot \frac{1}{1 - \text{Sin}^2 \varepsilon \cdot \text{Sin}^2 \odot \cdot p} \cdot \text{Cos } \lambda \cdot d\lambda$$

Cała trudność zadania polega teraz, jak widzimy, na rozwinięciu funkcji

$$\frac{\text{Sec } \lambda}{\sqrt{1 - \text{Sin}^2 \varepsilon \cdot \text{Sin}^2 \odot}}$$

na szereg. Załóżmy:

$$(5) \quad x = \text{Sin } \varepsilon \cdot \text{Sin } \odot; \quad \alpha = \text{Sec } \lambda \cdot \log_e \frac{1}{p}$$

Mamy zatem rozwinąć na szereg Taylora funkcję:

$$(6) \quad y = e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}}}; \quad \alpha > 0.$$

Dla $x=0$ funkcja ta, jak również i wszystkie jej pochodne, jest ciągłą; warunki konieczne rozwijalności na szereg Tay-

lora są więc spełnione. Punkty $x = \pm 1$ są dla niej punktami krytycznymi; wewnątrz koła o promieniu 1 niema żadnych punktów szczególnych, a ponieważ funkcya (6) jest parzystą, winien więc istnieć szereg kształtu:

$$(7) \quad e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}}} = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + a_3 x^6 + a_4 x^8 + \dots; |x| < 1$$

zbieżny dla $|x| < 1$ i któryby w kole danym przedstawił funkcję (6). Aby dowieść iż szereg (7) będzie przedstawiał daną funkcję, należałoby najpierw wyszukać wyrażenia dla reszty szeregu Taylor'a, odpowiadającego funkcji (6) i następnie dowieść, iż reszta ta dąży do zera. Przy sposobności wypadnie nadmienić, iż sam fakt zbieżności szeregu (7) nie dowodziłby jeszcze, iż granicą tego szeregu będzie funkcya (6), wystarczy choćby wziąć pod uwagę funkcję $f(x) = \sin x + e^{-\frac{1}{x^2}}$, której rozwinięcie, jak łatwo się przekonać, będzie identyczne z rozwinięciem $\sin x$, będzie zatem zbieżne, a nie będzie jednak jego granicą $f(x)$ lecz $\sin x$. Granicę dla reszty szeregu (7) znajdziemy przy pomocy teorii funkcyj zmiennej zespolonej. Mamy więc funkcję:

$$(8) \quad f(z) = e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1-z^2}}}$$

holomorficzną dla $|z| \leq 1$. Całkując następnie obie strony tożsamości:

$$\frac{f(z)}{z-x} = \frac{f(z)}{z} + x \frac{f(z)}{z^2} + z^2 \frac{f(z)}{z^3} + \dots + x^n \frac{f(z)}{z^{n+1}} + x^{n+1} \cdot \frac{f(z)}{z^{n+1}(z-x)}$$

wzdłuż koła C o promieniu jedność (z — punkt bieżący na okręgu, x — punkt stały wewnątrz koła), mamy:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) \cdot dz}{z^{n+1}(z-x)}$$

Mamy zatem wyrażenie dla reszty:

$$(9) \quad \bar{R}_n = \frac{x^{n+1}}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) \cdot dz}{z^{n+1}(z-x)}$$

Dowodziemy teraz, iż R_n zmierza do zera, gdy n dąży do nieskończoności. Wiadomo, iż moduł całki funkcji danej, wziętej wzdłuż krzywej C , jest mniejszy od iloczynu z długości łuku C przez największą wartość modułu funkcji danej na łuku C , będzie zatem:

$$(10) \quad |R_n| = \frac{|x|^{n+1}}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(z) \cdot dz}{z^{n+1}(z-x)} \right| < |x|^{n+1} \cdot \text{Max} \left| \frac{f(z)}{z^{n+1}(z-x)} \right|$$

Jeśli zauważymy, iż $|z|=1$; $|z-x| > 1-|x|$, mamy:

$$(11) \quad |R_n| < \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \cdot \text{Max} |f(z)|$$

Należy obliczyć moduł funkcji $f(z)$, założywszy $z = \xi + i\eta$, ξ i η współrzędne punktów koła zbieżności, otrzymamy:

$$f(z) = e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1-z^2}}} = e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{2\eta^2 - 2i\eta}}} = e^{P(\eta) + iQ(\eta)}$$

stąd:

$$(12) \quad |f(z)| = e^{P(\eta)} = e^{-\frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\eta^2 + \sqrt{\eta^2 + \eta^4}}{\eta^2 + \eta^4}}}$$

$$|f(z)| = e^{-\frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{1}{1+\eta^2} + \frac{1}{\eta\sqrt{1+\eta^2}}}}$$

zatem, dla $\eta = 1$, mamy:

$$(13) \quad \text{Max} \left| e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1-z^2}}} \right| = e^{-\frac{\alpha}{4} \sqrt{2+2\sqrt{2}}}$$

otrzymujemy stąd następującą granicę dla reszty:

$$(14) \quad |R_n| < \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} e^{-\frac{\alpha}{4} \sqrt{2+2\sqrt{2}}}$$

ponieważ $|x| < 1$, oczywiście więc jest, iż dla wszystkich punktów wewnątrz koła zbieżności będzie:

$$\lim |R_n| = 0.$$

Dowiedliśmy zatem, iż szereg (7) jest zbieżny i jego gra-

nicą będzie $e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}}}$.

Granica (14) dla reszty posiada dla nas ważne znaczenie praktyczne, pozwala bowiem ocenić wielkość błędu popełnionego.

Przejdźmy teraz do obliczania współczynników a_n szeregu (7); możnaby posługiwać się wzorem $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, sposób ten jednak nastrocza wiele trudności natury praktycznej w obliczaniu pochodnych; użyjemy tu innego prostszego sposobu. Dla ułatwienia będziemy szukali współczynników rozwinięcia:

$e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}}}$, które będą te same co i dla $e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}}}$, mamy zatem:

$$y = e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}}} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$\text{stad: } \frac{dy}{dx} = -e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}}} \cdot \frac{\alpha}{2\sqrt{(1-x)^3}} = -\frac{1}{2} \alpha y (1-x)^{-\frac{3}{2}} =$$

$$= -\frac{\alpha}{2} \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \right) \left(1 + \frac{3}{2} x + \frac{15}{8} x^2 + \frac{35}{16} x^3 + \frac{315}{128} x^4 + \right. \\ \left. + \frac{693}{256} x^5 + \frac{3003}{1024} x^6 + \frac{45045}{14336} x^7 + \frac{765765}{229376} x^8 + \dots \right)$$

Jeśli pomnożymy dwa ostatnie szeregi i przyrównamy współczynnik przy jednakowych potęgach zmiennej x ze współczynnikami rozwinięcia:

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots$$

to będziemy mieli:

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} a_0 = e^{-\alpha}; a_1 = -\frac{1}{2} \alpha a_0; a_2 = -\frac{1}{4} \alpha \left(\frac{3}{2} a_0 + a_1 \right) \\ a_3 = -\frac{1}{6} \alpha \left(\frac{15}{8} a_0 + \frac{3}{2} a_1 + a_2 \right) \\ a_4 = -\frac{1}{8} \alpha \left(\frac{35}{16} a_0 + \frac{15}{8} a_1 + \frac{3}{2} a_2 + a_3 \right) \\ a_5 = -\frac{1}{10} \alpha \left(\frac{315}{128} a_0 + \frac{35}{16} a_1 + \frac{15}{8} a_2 + \frac{3}{2} a_3 + a_4 \right) \\ a_6 = -\frac{1}{12} \alpha \left(\frac{693}{256} a_0 + \frac{315}{128} a_1 + \frac{35}{16} a_2 + \frac{15}{8} a_3 + \frac{3}{2} a_4 + a_5 \right) \\ a_7 = -\frac{1}{14} \alpha \left(\frac{3003}{1024} a_0 + \frac{693}{256} a_1 + \frac{316}{128} a_2 + \frac{35}{16} a_3 + \frac{15}{8} a_4 + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} a_5 + a_6 \right) \\ \dots \end{array} \right.$$

Jeśli teraz kolejno, poczynając od a_0 , wstawimy wartości współczynników w następane, to otrzymamy wyrażenia dla a_n w postaci wielomianów stopnia $n-1$ względem α , będzie mianowicie:

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} a_0 = e^{-\alpha} \\ a_1 = -\frac{1}{2} \alpha e^{-\alpha} \\ a_2 = -\frac{\alpha e^{-\alpha}}{8} (3 - \alpha) \\ a_3 = -\frac{\alpha e^{-\alpha}}{48} (15 - 9\alpha + \alpha^2) \\ a_4 = -\frac{\alpha e^{-\alpha}}{384} (105 - 87\alpha + 18\alpha^2 - \alpha^3) \\ a_5 = -\frac{\alpha e^{-\alpha}}{3840} (945 - 975\alpha + 285\alpha^2 - 30\alpha^3 + \alpha^4) \\ a_6 = -\frac{\alpha e^{-\alpha}}{138240} (23562 - 37935\alpha + 14040\alpha^2 - 2115\alpha^3 + \\ + 135\alpha^4 - 3\alpha^5) \\ \dots \end{array} \right.$$

Stosując otrzymane rozwinięcie do (4), mamy, jeśli:

$$x = \sin \epsilon \cdot \sin \odot; \alpha = \sec \lambda \cdot \log_e \frac{1}{p}$$

$$\frac{\pi c}{C} \frac{dQ}{d\odot} = \sqrt{1 - \sin^2 \epsilon \cdot \sin^2 \odot} \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} a_0 \cdot \cos \lambda \cdot d\lambda + \right. \\ \left. \sin^2 \epsilon \cdot \sin^2 \odot \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} a_1 \cos \lambda \cdot d\lambda + \sin^4 \epsilon \cdot \sin^4 \odot \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} a_2 \cdot \cos \lambda \cdot d\lambda + \right. \\ \left. \sin^6 \epsilon \cdot \sin^6 \odot \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} a_3 \cos \lambda \cdot d\lambda + \dots \right)$$

rozwijając pierwiastek i mnożąc szeregi, otrzymamy ostatecznie szereg:

$$(18) \quad \frac{\pi c}{C} \frac{dQ}{d\odot} = \gamma_0 + \gamma_1 \sin^2 \odot + \gamma_2 \cdot \sin^4 \odot + \gamma_3 \cdot \sin^6 \odot + \dots$$

gdzie założono:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 = I_0 \\ \gamma_1 = -\frac{\sin^2 \epsilon}{2} (I_0 + I_1) \\ \gamma_2 = -\frac{\sin^4 \epsilon}{8} (I_0 + I_1 + I_2) \\ \gamma_3 = -\frac{\sin^6 \epsilon}{48} (3 I_0 + 12 I_1 - 15 I_2 - I_3) \\ \gamma_4 = -\frac{\sin^8 \epsilon}{384} (15 I_0 + 15 I_1 - 45 I_2 + 14 I_3 - I_4) \\ \dots \end{array} \right.$$

Wielkości $I_0 I_1 I_2 \dots$ są dane przez całki następujące:

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} p^{\sec \lambda} \cdot \cos \lambda \cdot d\lambda; I_1 = \log_e \frac{1}{p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p^{\sec \lambda} \cdot d\lambda \\ I_2 = \log_e \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec \lambda \cdot p^{\sec \lambda} \cdot d\lambda \dots; I_m = \log_e^m \frac{1}{p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^{m-1} \lambda \cdot p^{\sec \lambda} \cdot d\lambda; \end{array} \right.$$

Z (18), dochodzimy znanym sposobem do rozwinięcia Fourier'a:

$$(21) \quad \frac{dQ}{d\odot} = \frac{1}{\pi} \frac{C}{c} (A_0 + A_1 \cdot \text{Cos } 2\odot + A_2 \cdot \text{Cos } 4\odot + \dots)$$

współczynniki mają wartości następujące:

$$(22) \quad \begin{cases} A_0 = \gamma_0 + \frac{1}{2} \gamma_1 + \frac{3}{8} \gamma_2 + \frac{5}{16} \gamma_3 + \frac{35}{128} \gamma_4 + \dots \\ A_1 = -\frac{1}{2} \gamma_1 - \frac{1}{2} \gamma_2 - \frac{15}{32} \gamma_3 - \frac{7}{16} \gamma_4 - \dots \\ A_2 = \frac{1}{8} \gamma_2 + \frac{3}{16} \gamma_3 + \frac{7}{32} \gamma_4 + \dots \\ \dots \end{cases}$$

otrzymane ze wzoru (33) rozdziału 2-go.

Z szeregu (21) otrzymujemy natychmiast ilość dzienną ciepła, podobnie bowiem jak w rozdziałach poprzednich mamy:

$$Q_i = \frac{2\pi c\mu}{r^2} \frac{dQ}{d\odot}$$

c — stała pól; $\mu = \frac{86164}{2\pi}$, zatem:

$$(23) \quad Q_i = \frac{2C\mu}{r^2} (A_0 + A_1 \cdot \text{Cos } 2\odot + A_2 \cdot \text{Cos } 4\odot + \dots)$$

Całkując teraz szereg (21) dochodzimy do wyrażenia średniej ilości ciepła, jaką odbierze cm^2 powierzchni równika w okresie czasu $(0, \odot)$:

$$(24) \quad Q = \frac{1}{\pi} \frac{C}{c} \left(A_0 \cdot \odot + \frac{A_1}{2} \text{Sin } 2\odot + \frac{A_2}{4} \text{Sin } 4\odot + \dots \right)$$

należy pamiętać, iż wzór powyższy wyprowadzony jest w założeniu, iż współczynnik p jest stały wzdłuż całego równika (w rzeczywistości waha się między 0,7 i 0,8).

Z (24) wynika ilość roczna:

$$(25) \quad Q_r = \gamma_0 + \frac{1}{2} \gamma_1 + \frac{3}{8} \gamma_2 + \frac{5}{16} \gamma_3 + \frac{35}{128} \gamma_4 + \frac{63}{256} \gamma_5 + \frac{221}{1024} \gamma_6 + \dots$$

Aby sprawdzić rezultaty otrzymane, szukajmy na co się zamieni wyrażenie (25) w przypadku $p = 1$, t. j. w przypadku rozważanym w rozdziale 2-im, gdy całkowita ilość ciepła dochodzi do danej jednostki powierzchni.

Przedewszystkiem widzimy, iż dla $p = 1$, wyrażenia I_m stają się nieoznaczone:

$$(I_m)_{p=1} = \left| \log_e^m \frac{1}{p} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^{m-1} \lambda \cdot p^{\sec \lambda} \cdot d\lambda \right|_{p=1} = 0 \cdot \infty$$

gdyż $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^{m-1} \lambda \cdot d\lambda = \infty$. Zadanie sprowadza się więc do znalezienia wartości funkcji:

$$F_m(z) = \log_e^m z \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^{m-1} \lambda \cdot z^{\sec \lambda} \cdot d\lambda = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^{m-1} \lambda \cdot z^{\sec \lambda} \cdot d\lambda}{(\log_e z)^{-m}} = \frac{\infty}{\infty}$$

dla $z = 1$. Według znanej zasady $F(1)$ będzie równe stosunkowi pochodnych, dla $z = 1$, licznika i mianownika, zatem:

$$F_m(1) = \left| \frac{\frac{d}{dx} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^{m-1} \lambda \cdot z^{\sec \lambda} \cdot d\lambda}{\frac{d}{dz} (\log_e z)^{-m}} \right|_{z=1} = \left| \frac{-\frac{1}{z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^m \lambda \cdot z^{\sec \lambda} \cdot d\lambda}{-m \cdot \log_e^{-m-1} z \cdot \frac{1}{z}} \right|_{z=1}$$

$$F_m(1) = \left| \frac{1}{m} \log_e^{m+1} z \right|_{z=1} \cdot F_{m+1}(1)$$

Wynika stąd, iż $F_1 = F_2 = F_3 = \dots = 0$,

z wyjątkiem: $F_0(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \lambda \cdot d\lambda = 1$;

zatem: $I_1 = 1$; $I_2 = I_3 = I_4 = \dots = 0$;

Będzie zatem według (19):

$$\gamma_0 = 1; \gamma_1 = -\frac{1}{2} \sin^2 \epsilon; \gamma_2 = -\frac{1}{8} \sin^4 \epsilon \text{ i t. d.}$$

stąd w przypadku $p = 1$ otrzymujemy:

$$Q_r = \frac{2C}{c} \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 \varepsilon - \frac{3}{64} \sin^4 \varepsilon - \frac{5}{256} \sin^6 \varepsilon - \dots \right)$$

szereg ten jest identyczny z szeregiem (29), otrzymanym w rozdziale 2-im; potwierdza to słuszność szeregu (25).

Przejdźmy teraz do danych liczbowych. Przyjmijmy np. $p = 0,8$. Trzeba będzie najpierw obliczyć wartości całek $I_0, I_1, I_2 \dots$ danych przez (25); można tutaj użyć bądź metody graficznej, bądź też stosować rozwinięcie (7). Będziemy mieli np. dla I_0 szereg następujący ($\sin \lambda = \mu$):

$$I_0 = \int_0^1 p \sqrt{1-\mu^2} \cdot d\mu = a_0' + \frac{1}{3} a_1' + \frac{1}{5} a_2' + \frac{1}{7} a_3' + \dots$$

a_0', a_1', a_2', \dots są to współczynniki rozwinięcia (7), otrzymane ze wzorów (16) lub (17), jeżeli w nich podstawić $p = 0,8$. Będziemy mieli: $a_0' = p = 0,8$; $a_1' = -0,0892$; $a_2' = -0,06196$; $a_3' = -0,0485$; $a_4' = -0,0403$; $a_5' = -0,0345$; $a_6' = -0,0203$; i t. d. Stąd wypada: $I_0 = 0,7270$.

Dla I_1 i I_2 wypada z rachunku graficznego:

$$I_1 = 0,2204; I_2 = 0,0825;$$

poprzestaniemy w naszych rachunkach na tych 3 wartościach, dokładność bowiem będzie wystarczająca. Wstawiając otrzymane wartości we wzory (19), będziemy mieli:

$$\gamma_0 = 0,7270; \gamma_1 = -0,0730; \gamma_2 = -0,0031;$$

Stąd na zasadzie (22):

$$A_0 = 0,6894; A_1 = 0,0380; A_2 = -0,0004;$$

zatem, dla pochodnej średniej ilości ciepła, w przypuszczeniu $p = 0,8$, otrzymujemy następujące wyrażenie:

$$(26) \quad \frac{dQ}{d\odot} = \frac{1}{\pi} \frac{C}{c} (0,6894 + 0,0380 \cdot \text{Cos } 2\odot - 0,0004 \cdot \text{Cos } 4\odot + \dots$$

stąd, według (23), ilość dzienna ciepła będzie:

$$(27) \quad Q_j = \frac{2C}{r^2} \ddot{r} (0,6894 + 0,0380 \cdot \text{Cos } 2 \odot - 0,0004 \cdot \text{Cos } 4 \odot + \dots).$$

Jak już wspominaliśmy, Angot (l. c.) dochodzi do wyrażen ilości dziennych przez szeregi przy pomocy metod interpolacyjnych, otrzymuje on w ten sposób dla $p=0,8$, szereg tego samego kształtu: $Q_j = 689,6 + 39,1 \cdot \text{Cos } 2 \odot - 0,4 \cdot \text{Cos } 4 \odot$, gdzie przyjęto $\frac{2C\mu}{r^2} = 1000$; widzimy zatem, iż różni się on niewiele od (27); drobne różnice współczynników należy przypisać niedokładnościom rachunków.

Z (26) otrzymujemy wreszcie dla ilości średniej szereg:

$$Q = \frac{C}{c} (0,21944 \cdot \odot + 0,00604 \cdot \text{Sin } 2 \odot - 0,00003 \cdot \text{Sin } 4 \odot - \dots)$$

kładąc $\odot = 2\pi$, mamy ilość ciepła, otrzymaną na równiku w ciągu roku: $Q_r = 1,3788 \cdot \frac{C}{c} = 236,610 \text{ kal. kg. cm}^2$. Angot otrzymuje metodą sumowań 236,1 kal. kg.

6. Obliczenia dla bieguna z uwzględnieniem strat promieniowania.

Wyrażenie dla ilości dziennej otrzymujemy natychmiast z uwagi, iż na biegunie wysokość słońca w ciągu jednego dnia, trwającego 24 godziny, można przyjąć za stałą i równą $h = \delta$, będzie zatem:

$$(1) \quad Q_j = \frac{2C\mu\pi}{r^2} \text{Sin } \delta \cdot p^{\frac{1}{\text{Sin } \delta}}; \delta - \text{zбочenie słońca}$$

lub też:

$$(1') \quad Q_j = \frac{2C\mu\pi}{r^2} \text{Sin } \varepsilon \text{Sin } \odot \cdot p^{\text{Cos } \varepsilon \cdot \text{Cos } \odot};$$

Ruch dzienny słońca niema żadnego wpływu na usłonecznienie na biegunie, tak iż nie trzeba wprowadzać pojęcia ilości

średniej ciepła; ilość ciepła, odpowiadająca okresowi $(0, \odot)$, będzie daną przez całkę:

$$(2) \quad Q = \frac{C}{c} \int_0^{\odot} \text{Sin } \varepsilon \cdot \text{Sin } \odot \cdot p^{\text{Cos } \varepsilon \cdot \text{Cos } \odot} d \odot;$$

zaś ilość roczna:

$$Q_r = \frac{2C}{c} \int_0^{\pi} \text{Sin } \varepsilon \cdot \text{Sin } \odot \cdot p^{\text{Cos } \varepsilon \cdot \text{Cos } \odot} d \odot;$$

gdyż biegun północny (resp. południowy) oświetlony jest w okresie $(0, \pi)$ (resp. $(\pi, 2\pi)$).

Przy pomocy przybliżonych kwadratur, można będzie z (2) obliczać Q dla każdego \odot . Postaramy się jednakże, podobnie jak poprzednio, podać Q w postaci szeregu Fourier'a; trzeba będzie rozwinąć:

$$p^{\frac{1}{\text{Sin } \varepsilon \cdot \text{Sin } \odot}} = e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1 - \text{Cos}^2 \odot}}}; \alpha = \frac{1}{\text{Sin } \varepsilon} \log_e \frac{1}{p};$$

Według rozdziału poprzedniego będzie:

$$(4) \quad e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1 - \text{Cos}^2 \odot}}} = a_0 + a_1 \cdot \text{Cos}^2 \odot + a_2 \cdot \text{Cos}^4 \odot + a_3 \cdot \text{Cos}^6 \odot + \dots$$

Zanim wyprowadzimy rozwinięcie dla $\frac{dQ}{d \odot}$, zauważmy, iż z (4) otrzymać można zaraz rozwinięcie ilości rocznej, jest mianowicie:

$$\begin{aligned} Q_r &= \frac{2C}{c} \text{Sin } \varepsilon \int_0^{\pi} (a_0 + a_1 \text{Cos}^2 \odot + a_2 \text{Cos}^4 \odot + \dots) d(\text{Cos } \odot) = \\ &= \frac{2C}{c} \text{Sin } \varepsilon \int_0^1 (a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \dots) dx; \end{aligned}$$

Zatem

$$(5) \quad Q_r = \frac{2C}{c} \sin \varepsilon \left(a_0 + \frac{\bar{a}_1}{3} + \frac{\bar{a}_2}{5} + \frac{\bar{a}_3}{7} + \frac{\bar{a}_4}{9} + \dots \right)$$

wyraża się więc w prosty sposób przez współczynniki rozwinięcia (4).

Z (4) wynika, po zastąpieniu potęg przez wielokrotności łuku:

$$(6) \quad e = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \odot}} = \beta_0 + \beta_1 \cdot \cos 2 \odot + \beta_2 \cdot \cos 4 \odot + \beta_3 \cdot \cos 6 \odot + \dots$$

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots$, otrzymamy ze wzorów rozdziału 2-go, zastępując x przez $\frac{\pi}{2} - x$. Mnożąc (6) przez $\frac{C}{c} \sin \varepsilon \cdot \sin \odot$ i stosując tożsamość:

$$\sin \odot \cdot \cos m \odot = \frac{1}{2} \sin (m+1) \odot - \frac{1}{2} \sin (m-1) \odot$$

otrzymujemy wyrażenie dla pochodnej:

$$(7) \quad \frac{dQ}{d\odot} = \frac{C}{c} \sin \varepsilon \left[\left(\beta_0 - \frac{\beta_1}{2} \right) \sin \odot + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \sin 3 \odot + \right. \\ \left. + \frac{\beta_2 - \beta_3}{2} \sin 5 \odot + \dots \right]$$

po scałkowaniu zaś:

$$Q = \frac{C}{c} \sin \varepsilon \left[\left(\beta_0 - \frac{\beta_1}{3} - \frac{\beta_2}{15} - \frac{\beta_3}{35} + \dots \right) \cos \odot + \right. \\ \left. - \frac{\beta_1 - \beta_2}{6} \cos 3 \odot - \frac{\beta_2 - \beta_3}{10} \cos 5 \odot + \dots \right];$$

t. j. kształtu:

$$(8) \quad Q = \frac{C}{c} \sin \varepsilon (A_0 + A_1 \cos \odot + A_2 \cdot \cos 3 \odot + A_3 \cdot \cos 5 \odot + \dots)$$

Współczynniki $A_0 A_1 A_2 \dots$ mają wartości następujące:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0 = a_0 + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{5} + \frac{a_3}{7} + \dots \\ A_1 = -a_0 - \frac{1}{4} a_1 - \frac{1}{8} a_2 - \frac{5}{64} a_3 - \frac{7}{128} a_4 - \dots \\ A_2 = -\frac{1}{12} a_1 - \frac{1}{16} a_2 - \frac{3}{64} a_3 - \frac{7}{192} a_4 + \frac{11}{1536} a_5 - \dots \\ A_3 = -\frac{1}{80} a_2 - \frac{1}{64} a_3 - \frac{1}{64} a_4 + \frac{37}{5120} a_5 - \dots \\ A_4 = -\frac{1}{448} a_3 - \frac{1}{256} a_4 - \frac{21}{1024} a_5 - \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

Łatwo sprawdzić iż otrzymana stąd ilość roczna

$$Q_4 = \frac{2C}{c} \text{Sin } \varepsilon A_0$$

będzie zgodną z (5). Zastosujmy teraz dane liczbowe; przyjmujemy, jak poprzednio, $p = 0,8$; będzie więc

$$\alpha = \frac{1}{\text{Sin } \varepsilon} \log_e \frac{1}{p} = 0,5605.$$

Posługując się wzorami (16) rozdz. poprzedniego, otrzymamy kolejno:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \log (+ a_0) = \bar{1},75656; \quad a_0 = + 0,57090 \\ \log (- a_1) = \bar{1},20414; \quad a_1 = - 0,16001 \\ \log (- a_2) = \bar{2},98937; \quad a_2 = - 0,09758 \\ \log (- a_3) = \bar{2},83548; \quad a_3 = - 0,06846 \\ \log (- a_4) = \bar{2},71122; \quad a_4 = - 0,05143 \\ \log (- a_5) = \bar{2},60463; \quad a_5 = - 0,04023 \\ \log (- a_6) = \bar{2},52023; \quad a_6 = - 0,03313 \\ \log (- a_7) = \bar{2},34209; \quad a_7 = - 0,02198 \\ \log (- a_8) = \bar{2},32689; \quad a_8 = - 0,02122 \\ \log (- a_9) = \bar{2},22667; \quad a_9 = - 0,01685 \end{array} \right.$$

Współczynniki a_n maleją bardzo wolno, tak iż w następnych rachunkach trzeba będzie użyć większą ich liczbę aniżeli w (10). Aby sprawdzić wartości (10), zastosujemy rozwinięcie dla

$$e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}}}$$

przy $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, będzie zatem:

$$e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}}} = e^{-\frac{\alpha}{2}\sqrt{6}} - a_0 + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{9} + \frac{a_3}{27} + \frac{a_4}{81} + \frac{a_5}{243} + \dots$$

podstawiając (10), otrzymujemy $e^{-\frac{\alpha}{2}\sqrt{6}} = 0,503327$.

Aby obliczyć granicę błędu, zauważmy iż składa się on z dwóch części: błędu, wynikającego z odrzucenia części dziesiętnych i następnie błędu podanego przez granicę reszty

$$|R_n| < \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} e^{-\frac{\alpha}{2}\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$$

w danym przypadku $n=22$, gdyż wyraz 11-ty nie wpływa na szóstą cyfrę, zatem $|R_n| < 0,000003$, błąd zaś całkowity będzie $< 0,000013$; rzeczywiście, wartość dokładnie obliczona jest

$$e^{-\frac{\alpha}{2}\sqrt{6}} = 0,503325,$$

różni się więc tylko 5-ą cyfrą od wartości powyższej.

Mając wartości (10), otrzymamy ostatecznie rozwinięcie dla bieguna:

$$(11) \quad Q = \frac{C}{c} (0,18691 - 0,20117 \cdot \text{Cos } \odot + 0,01137 \cdot \text{Cos } 3 \odot + \\ + 0,00221 \cdot \text{Cos } 5 \odot + 0,00039 \cdot \text{Cos } 7 \odot + 0,00020 \cdot \text{Cos } 9 \odot + \\ + 0,00007 \cdot \text{Cos } 11 \odot + 0,00002 \cdot \text{Cos } 13 \odot + \dots)$$

Dla bieguna południowego rozwinięcie będzie to samo, pod warunkiem, iż za \odot należy brać $\odot - \pi$. Podstawiając w (11) $\odot = \pi$, otrzymujemy ilość roczną ciepła.

$$(12) \quad Q = \frac{C}{c} \cdot 0,37382 = 64,150 \cdot \text{kal. kg. } 1 \text{ cm}^2.$$

Rozwinięcie ilości dziennej ciepła:

$$Q_j = \frac{2\pi c\mu}{r^2} \frac{dQ}{d\odot}$$

będzie zatem:

$$(13) \quad Q_j = \frac{2 C \mu}{r^2} (0,632 \cdot \sin \odot - 0,1072 \cdot \sin 3 \odot - 0,0347 \cdot \sin 5 \odot + \\ - 0,0136 \cdot \sin 7 \odot - 0,0057 \cdot \sin 9 \odot - \dots).$$

7. Obliczenia dla jakiegokolwiek szerokości φ z uwzględnieniem strat promieniowania.

W przypadku rozważanym, stosując wzór (1) rozdziału (5), mamy dla ilości dziennej wyrażenie:

$$(1) \quad Q_j = \frac{2 C \mu}{r^2} \int_0^{\tau_0} (\sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \tau) \cdot \frac{1}{\sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \tau} \cdot d\tau$$

zaś dla pochodnej ilości średniej ciepła:

$$(2) \quad \frac{dQ}{d\odot} = \frac{1}{\pi} \frac{C}{c} \int_0^{\lambda_0} (\sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cos \lambda) \cdot \frac{1}{\sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \lambda} \cdot d\lambda$$

$$\cos \lambda_0 = \cos \tau_0 = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta.$$

Z (2) wynika ilość ciepła, odpowiadająca okresowi (O, \odot) :

$$(3) \quad Q = \frac{1}{\pi} \frac{C}{c} \int_0^{\odot} \int_0^{\lambda_0} (\sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \lambda) \frac{1}{\rho} \frac{1}{\sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \lambda} d\lambda \cdot d\odot.$$

Podobnie jak poprzednio będziemy się starali rozwinąć (2) na szereg Fouriera. Postępowanie jednak w taki sposób, jak poprzednio, t. j. za pośrednictwem szeregu Taylora, chociaż teoretycznie możliwe, nastrocza jednak prawie że niepokonalne trudności natury praktycznej; trzeba będzie więc użyć innego sposobu. Angot, w podobnych przypadkach, używa metod interpolacji peryodycznej, co daje zresztą rezultaty zadawalające; my postąpimy tu drogą odmienną, oprzemy się mianowicie na teorii szeregów trygonometrycznych. Wiadomo, iż każda funkcja może być w danym przedziale (a, b) przedstawioną przez szereg trygonometryczny, pod warunkiem, aby w tym przedziale posiadała punkty nieciągłości pierwszego rodzaju; są to warunki wystarczające (lecz nie konieczne), znane pod nazwą warunków Dirichleta. Jeżeli zatem mamy funkcję $F(x)$, to w przedziale (a, b) , może być ona przedstawioną przez szereg trygonometryczny łuku $t = \frac{\pi}{b-a}(2x - a - b)$ (przedziałowi a, b zmiennej x odpowiada przedział $-\pi, \pi$ zmiennej t):

$$(4) \quad F(x) = \Phi(t) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos t + b_1 \sin t) + (a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t) + \dots$$

współczynniki a_0, a_1, b_1, a_2, b_2 i t. d. dane są przez wzory:

$$(5) \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Phi(t) \cdot dt; \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos mt \cdot \Phi(t) \cdot dt;$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin mt \cdot \Phi(t) \cdot dt;$$

Nie wdając się w szczegóły, nadmienimy jeszcze, iż rozwinięcie (4), przedstawiałoby funkcję $F(x)$ na całym obszarze jej zmienności tylko wtedy, gdyby $F(x)$ była funkcją peryodyczną o peryodzie równym $(b - a)$.

Zastosujmy powyższe wzory do rozwinięcia funkcji $\frac{dQ}{d\odot}$, o peryodzie równym 2π . Funkcja $\frac{dQ}{d\odot}$ posiada tę własność, iż przybiera wartości równe dla położzeń słońca symetrycznych względem linii „rak—koziorożec“; wyraża się to jak następuje:

$$(6) \quad \left(\frac{dQ}{d\odot}\right)_{\odot} = \left(\frac{dQ}{d\odot}\right)_{\pi - \odot}$$

łatwo dowieść na zasadzie tego, iż współczynniki a_{2m+1} i b_{2m} , t. j. współczynniki wstaw ze wskaźnikami nieparzystymi i współczynniki wstaw ze wskaźnikami parzystymi będą równe zeru; oprócz tego, ze względu na symetrię, wyrażoną przez (6), całkowanie wystarczy rozciągnąć na mniejszy przedział $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$; będziemy mieli więc:

$$(7) \quad \frac{dQ}{d\odot} = \frac{a_0}{2} + b_1 \cdot \sin \odot + a_2 \cdot \cos 2\odot + b_3 \cdot \sin 3\odot + \\ + a_4 \cdot \cos 4\odot + \dots$$

wartości współczynników zaś:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{dQ}{d\odot} \cdot d\odot; b_1 = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{dQ}{d\odot} \cdot \sin \odot \cdot d\odot; a_2 = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{dQ}{d\odot} \cos 2\odot \cdot d\odot \end{aligned} \right.$$

$$(8) \left\{ \begin{aligned} b_{2m+1} &= \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{dQ}{d\odot} \cdot \text{Sin}(2m+1)\odot \cdot d\odot; a_{2m} = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{dQ}{d\odot} \cdot \text{Cos} 2m\odot \cdot d\odot; b_{2m} = a_{2m+1} = 0 \end{aligned} \right.$$

Wyznaczenie rozwinięcia (7) sprowadza się zatem do wyznaczenia, drogą przybliżonych kwadratur, całek (8).

W tym celu kreślimy najpierw krzywą, przedstawiającą w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ funkcję $\frac{dQ}{d\odot}$; trzeba będzie więc wyznaczyć możliwie wielką liczbę punktów tej krzywej, czyli obliczyć dla danej szerokości φ szereg wartości $\frac{dQ}{d\odot}$ dla różnych \odot lub δ ($\text{Sin } \odot = \text{Sin } \varepsilon \cdot \text{Sin } \delta$). Obliczeń tych dokonał A n g o t (właściwie dla ilości dziennej Q_j , która tylko czynnikiem różni się od $\frac{dQ}{d\odot}$), stosując kwadratury przybliżone do całki (1) lub (2). Oto rezultaty tych rachunków dla różnych szerokości geograficznych i różnych zbroceń słońca δ , ($p=0,7$): (por. Tablicę na str. 50).

Jeśli liczby powyższe pomnożymy przez $\frac{1}{1000} \frac{C}{c}$, to otrzymamy odpowiednie wartości dla $\frac{dQ}{d\odot}$, jeśli zaś pomnożymy przez $\frac{2C_{\mu}}{r^2} \cdot \frac{1}{1000}$ to będziemy mieli ilości dzienne Q_j . Mając szereg wartości dla $\frac{dQ}{d\odot}$, wykreślamy odpowiednią krzywą i stąd szereg krzywych, których rzędne powstały od pomnożenia rzędnych krzywej $\frac{dQ}{d\odot}$ odpowiednio przez $\text{Sin } \odot$, $\text{Cos } 2\odot$, i t. d.;

Tablica Q_j lub $\frac{dQ}{d\odot}$ dla współczynnika transmisji $p = 0,7$.

Table Q_j ou $\frac{dQ}{d\odot}$ pour le coefficient de transmission $p = 0,7$.

		Szerokość geogr. φ . — Latitudes géogr. φ .									
		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Zboczenie słońca — δ — declinaison du soleil.	+ ϵ	536	609	660	683	682	654	604	542	514	511
	+ 22°	544	613	657	675	667	632	575	506	462	454
	+ 20°	556	616	653	662	646	603	536	460	393	379
	+ 16°	575	621	641	634	601	541	461	363	269	237
	+ 12°	590	621	626	602	554	481	387	279	171	118
	+ 8°	601	617	606	568	606	421	318	206	98	34
	+ 4°	607	609	582	532	456	362	253	142	45	1
	0	609	596	556	491	405	303	194	89	14	0
	- 4°	607	580	526	448	354	248	140	47	2	0
	- 8°	601	559	492	405	303	195	94	19	0	0
	- 12°	590	534	455	361	254	147	55	4	0	0
	- 16°	575	506	416	314	205	104	27	0	0	0
	- 20°	556	474	375	268	159	66	8	0	0	0
	- 22°	544	457	353	245	136	50	3	0	0	0
	- ϵ^0	536	444	357	228	120	40	1	0	0	0

zmierzyszy pola krzywych otrzymanych, będziemy mogli obliczyć wartości współczynników szeregu (7) ze wzorów (8).

Dla Warszawy ($\varphi = 52^{\circ},22$) np. otrzymujemy następujące szeregi dla $p = 0,7$ i $p = 0,8$:

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} p = 0,8; Q_j = \frac{2C\mu}{r^2} (0,3842 + 0,3735 \cdot \sin \odot - 0,0261 \cdot \cos 2\odot + \\ \quad + 0,0045 \cdot \sin 3\odot + 0,0012 \cdot \cos 4\odot + \dots) \\ p = 0,7; Q_j = \frac{2C\mu}{r^2} (0,3072 + 0,3105 \cdot \sin \odot - 0,0289 \cdot \cos 2\odot + \\ \quad + 0,0046 \cdot \sin 3\odot + 0,0008 \cdot \cos 4\odot + \dots) \end{array} \right.$$

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} p=0,8; \frac{dQ}{d\odot} = \frac{C}{c} (0,1223 + 0,1187 \cdot \sin \odot - 0,0083 \cdot \cos 2\odot + \\ \quad + 0,0013 \cdot \sin 3\odot + 0,0004 \cdot \sin 4\odot + \dots) \\ p=0,7; \frac{dQ}{d\odot} = \frac{C}{c} (0,0978 + 0,0988 \cdot \sin \odot - 0,0092 \cdot \cos 2\odot + \\ \quad + 0,0015 \cdot \sin 3\odot + 0,0003 \cdot \cos 4\odot + \dots) \end{array} \right.$$

Całkując (10), otrzymujemy wyrażenie dla ilości średniej Q:

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} p=0,8; Q = \frac{C}{c} (0,11918 + 0,1223 \cdot \odot - 0,1187 \cdot \cos \odot + \\ \quad - 0,00415 \cdot \sin 2\odot - 0,00048 \cdot \cos 3\odot + 0,00009 \cdot \sin 4\odot + \dots) \\ p=0,7; Q = \frac{C}{c} (0,09927 + 0,0978 \cdot \odot - 0,09880 \cdot \cos \odot - \\ \quad - 0,00460 \cdot \sin 2\odot - 0,00047 \cdot \cos 3\odot + 0,00007 \cdot \sin 4\odot \dots). \end{array} \right.$$

Jeśli oznaczymy przez $Q_{+\epsilon}$ ilość ciepła, odpowiadającą okresowi, gdy słońce jest w półkuli północnej, $Q_{-\epsilon}$ gdy w południowej, przez Q_r zaś roczną ilość ciepła, to, zakładając w szeregach powyższych $\odot = \pi$ i $\odot = 2\pi$, otrzymamy dla $p=0,8$:

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} p=0,8; Q_{+\epsilon} = 0,6226 \cdot \frac{C}{c} = 106,840 \text{ kal. kg.} \\ \quad Q_{-\epsilon} = 0,1458 \cdot \frac{C}{c} = 25,020 \text{ kal. kg.} \\ \quad Q_r = 0,7684 \cdot \frac{C}{c} = 131,860 \text{ kal. kg.} \end{array} \right.$$

Dla współczynnika zaś $p=0,7$:

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} p=0,7; Q_{+\epsilon} = 0,5058 \cdot \frac{C}{c} = 86,800 \text{ kal. kg.} \\ \quad Q_{-\epsilon} = 0,1087 \cdot \frac{C}{c} = 18,660 \text{ kal. kg.} \\ \quad Q_r = 0,6145 \cdot \frac{C}{c} = 105,460 \text{ kal. kg.} \end{array} \right.$$

Porównyując wartość Q_r dla $p=0,8$ z wartościami, otrzymanymi dla Warszawy doświadczalnie, widzimy, iż wartość ta jest zbyt duża; wartość $Q_r = 105,46$ kal. kg. dla $p=0,7$ jest natomiast jedną z rzędu tych, którą zwykle otrzymuje się drogą doświadczalną; widzimy zatem iż średni współczynnik transmisji dla Warszawy jest raczej bliższy 0,7 niż 0,8. Oczywiście, iż wartość 0,7 słuszną może być tylko dla większego przeciągu czasu, wogóle bowiem p ulega w ciągu roku znacznym wahaniom i dla mniejszych przeciągów czasu (np. dla miesiąca) rezultaty otrzymane przy $p=0,7$ nie będą zadawalające; dla miesięcy zimowych np., jak później się przekonamy, należałoby dla p brać wartości bliższe 0,8.

Jeszcze raz zaznaczamy, iż powyższe rachunki, jakkolwiek mogą przy odpowiednio dobranym p , dać rezultaty zgodne z rzeczywistością, to jednak z powodu zbyt ogólnikowego traktowania są tylko pierwszym przybliżeniem rachunków insolacyjnych.

Szeregi trygonometryczne, przedstawiające ilości dzienne Q_j lub $\frac{dQ}{d\varphi}$, mogą służyć do badania przebiegu insolacji dla danej szerokości φ . Tak np. położenia słońca, dla których ilość dzienna Q_j jest największą lub najmniejszą, otrzymuje się łatwo, przyrównyując do zera pochodną odpowiedniego szeregu dla Q_j . Zauważmy przedewszystkiem, iż dla miejscowości strefy gorącej słońce jest dwa razy w zenicie w ciągu roku, należy zatem spodziewać się tutaj dwóch Maximów i dwóch Minimów dla natężenia średniego promieniowania lub dla Q_j . Rzeczywiście, biorąc pochodną szeregu znalezionej dla równika, mamy następujący rozkład dla Maximów i Minimów:

	$p = 1$		$p = 0,8$		$p = 0,7$	
	\odot	Q_j	\odot	Q_j	\odot	Q_j
1 Max.	65°20'	1010	68°10'	737	69°10'	617
1 Min.	170°10'	888	169°50'	629	169°40'	517
2 Max.	273°10'	998	270°20'	726	269°10'	607
2 Min.	347°0'	948	347°30'	672	347°50'	552

Dla miejscowości strefy umiarkowanej, będziemy mieli oczywiście tylko jedno Maximum, odpowiadające najwyższemu położeniu słońca, t. j. dla $\odot = \frac{\pi}{2}$ i jedno Minimum dla najniższego położenia słońca, t. j. dla $\odot = \frac{3}{2}\pi$ i to niezależnie od wartości współczynnika p (należy zwrócić uwagę, iż te położenia Max. i Min. nie będą odpowiadały rzeczywistości, gdyż są otrzymane w założeniu, iż p jest stałe w ciągu całego roku).

Ciekawe jest wreszcie porównanie ilości ciepła, otrzymanych tego samego dnia pod różnymi szerokościami geograficznymi.

W dniu porównania wiosennego ($\delta = 0$), największą ilość ciepła otrzyma równik; w miarę oddalania się od równika Q_j będzie stale malało; jest to zrozumiałe jeśli zauważymy, iż dla $\delta = 0$ długość dnia jest wtedy wszędzie jednakową, zatem na ilość Q_j wpływa tylko wysokość słońca. W miarę jak δ wzrasta i słońce oddala się od równika, maximum zmienia też swe położenie, oddala się jednak od równika prędzej, aniżeli słońce; tłumaczy się to wpływem na wartość Q_j dwóch czynników, wysokości słońca i długości dnia; w miarę oddalania się od położenia, gdzie słońce jest w zenicie, wysokość słońca zmniejsza się, lecz zato wzrasta długość dnia, ten ostatni czynnik początkowo przeważa i wpływa na znaczne przesunięcie położenia Maximum.

Następująca tabliczka najlepiej przedstawi tę właściwość Max. Q_j (zбочenie słońca równa się też szerokości, gdzie słońce jest w zenicie, φ odpowiednia szerokość, dla której zachodzi Maximum Q_j):

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta = 8^\circ; \quad \varphi = 12^\circ 30' \\ \delta = 16^\circ; \quad \varphi = 26^\circ 30' \\ \delta = \varepsilon; \quad \varphi = 43^\circ 30' \end{array} \right.$$

φ — otrzymano, kreśląc dla danych δ krzywą przebiegu Q_j dla różnych szerokości i szukając punktu najwyższego.

Co się tyczy ilości rocznej Q_r , jest ona największą dla równika i stale maleje w miarę oddalania się od równika ku biegunom. Następująca tabliczka przedstawia wartości Q_r (ilość

średnią) dla różnych szerokości φ i dla $p = 1; 0,8; 0,7$ (obliczenia według metod poprzednich):

Tablica wartości rocznych ciepła.
Table de valeurs annuelles de la chaleur.

φ	$p = 1$	$p = 0,8$	$p = 0,7$
0°	1,9182	1,3788	1,1458
10°	1,8916	1,3540	1,1230
20°	1,8132	1,2790	1,0544
30°	1,6858	1,1624	0,9466
40°	1,5154	1,0078	0,8060
50°	1,3116	0,8282	0,6488
60°	1,0910	0,6474	0,4940
70°	0,8855	0,4827	0,3558
80°	0,8002	0,3921	0,2690
90°	0,7962	0,3738	0,2397

Liczby powyższej tablicy należy pomnożyć przez $\frac{C}{c}$
($\log \frac{C}{c} = 5,23453$).

8. Całkowita ilość ciepła otrzymana przez ziemię.

W rachunkach obecnych przyjmiemy, iż ziemia jest ściśle kulistą. Łatwo zauważyć, iż wtedy obliczenie będzie można przeprowadzić tak, jakgdyby nie istniał ruch wirowy ziemi i jej ruch koło słońca, oba bowiem te ruchy nie wpływają wcale na kształt oświetlonej części, która będzie zawsze powierzchnią półkuli. Oznaczmy przez W całkowitą ilość ciepła, jaką odbierze ziemia; jeśli zastosujemy prawo *L a m b e r t'a*, przyjmując pewien średni współczynnik p , to będzie:

$$(1) \quad \frac{dW}{d\odot} = \frac{C}{c} \iint_s \sin h \cdot p^{\frac{1}{\sin h}} \cdot d\sigma$$

całka rozciągnięta jest na oświetloną część ziemi. Oznaczmy przez λ, φ — współrzędne biegunowe, wyznaczające położenie punktu na kuli, będziemy mieli:

$$(2) \quad d\sigma = R^2 \cos \varphi \, d\varphi \cdot d\lambda; \quad \sin h = \cos \varphi \cdot \cos \lambda$$

gdzie R oznacza promień ziemi.

Zatem

$$(3) \quad W' = \frac{dW}{d\odot} = \frac{4CR^2}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p^{\sec\varphi \cdot \sec\lambda} \cdot \cos^2\varphi \cdot \cos\lambda \cdot d\lambda \cdot d\varphi;$$

stąd

$$(4) \quad W = W' (\odot - \odot_0)$$

całkowita ilość ciepła, jaką odbierze kula ziemską w danym przeciągu czasu, jest proporcjonalna do łuku jaki opisał promień wodzący ziemi w tym czasie.

Zatem w ciągu roku ziemia odbierze ilość ciepła:

$$(5) \quad W_r = \frac{8\pi CR^2}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p^{\sec\varphi \cdot \sec\lambda} \cdot \cos^2\varphi \cdot \cos\lambda \cdot d\lambda \cdot d\varphi$$

Dzieląc przez $4\pi R^2$, będziemy mieli średnią ilość ciepła, jaką otrzyma w ciągu roku cm^2 powierzchni ziemi:

$$(6) \quad Q_\mu = \frac{2C}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p^{\sec\varphi \cdot \sec\lambda} \cdot \cos^2\varphi \cdot \cos\lambda \cdot d\lambda \cdot d\varphi;$$

w przypadku $p = 1$, t. j. gdy obliczamy dla powierzchni, leżącej na granicy atmosfery, będzie:

$$(7) \quad Q_\mu = \frac{2C}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \cdot \cos\lambda \cdot d\lambda \cdot d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{C}{c};$$

to jest:

$$(7') \quad Q_\mu = 1,5708 \cdot \frac{C}{c} = 269,5 \text{ kal. kg.}$$

Można obliczyć stąd, iż ilość ciepła otrzymana od słońca w ciągu roku zdolna jest stopić warstwę lodu grubości 33,7 metra, pokrywającą powierzchnię ziemi. Wartość (7) można otrzymać też łatwo bez żadnego całkowania. Zauważmy mianowicie, iż całkowitą ilość ciepła, wysłaną przez słońce ku ziemi, otrzymamy, mnożąc stałą słoneczną przez powierzchnię przekroju walca, opisanego na kuli ziemskiej; będzie zatem:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{C}{r^2} \pi R^2;$$

dla średniej ilości Q_μ otrzymamy więc:

$$\frac{dQ_\mu}{dt} = \frac{1}{4\pi R^2} \frac{C}{r^2} \pi D^2 = \frac{1}{4} \frac{C}{r^2}; \quad Q_\nu = \frac{1}{4} \frac{C}{c} \odot = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{C}{c}$$

wartość zgodną z (7).

Przystąpmy teraz do obliczeń, uwzględniając stratę promieniowania w atmosferze. Zadanie polega na znalezieniu wartości całki podwójnej (6), rozciągniętej na powierzchnię kwadratu, którego bok wynosi $\frac{\pi}{2}$; można tego dokonać bądź przy pomocy przybliżonych kubatur, bądź też przy pomocy rozwinięć na szeregi.

Zacniemy więc od rozwinięcia na szereg, według wzorów rozdziałów poprzednich, funkcji:

$$(8) \quad F(\varphi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \lambda \cdot p^{\frac{1}{\cos \varphi \cdot \cos \lambda}} \cdot d\lambda$$

zakładając:
$$\alpha = \frac{\log_e \frac{1}{p}}{\cos \lambda}$$

mamy:
$$F(\varphi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \lambda \cdot e^{-\frac{\alpha}{\cos \varphi}} \cdot d\lambda$$

jak wiadomo:

$$e^{-\frac{\alpha}{\cos \varphi}} = e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1-\sin^2 \varphi}}} = a_0 + a_1 \cdot \sin^2 \varphi + a_2 \sin^4 \varphi + a_3 \sin^6 \varphi + \dots$$

współczynniki a_0, a_1, a_2 i t. d. są pewnymi funkcjami λ , danymi przez wzory (17) rozdziału 5-go. Będzie zatem:

$$(9) \quad F(\varphi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a_0 \cdot \cos \lambda \cdot d\lambda + \sin^2 \varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} a_1 \cdot \cos \lambda \cdot d\lambda + \\ + \sin^4 \varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} a_2 \cdot \cos \lambda \cdot d\lambda + \dots$$

jeśli, podobnie jak w rozdziale 5-ym, założymy:

$$(10) \quad I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \lambda \cdot p^{\frac{1}{\cos \lambda}} \cdot d\lambda; \quad I_1 = \log_e \frac{1}{p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p^{\frac{1}{\cos \lambda}} \cdot d\lambda;$$

$$I_m = \log_e^m \frac{1}{p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^{m-1} \lambda \cdot p^{\sec \lambda} \cdot d\lambda$$

to otrzymamy:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a_0 \cos \lambda \cdot d\lambda = I_0; & \gamma_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a_1 \cos \lambda \cdot d\lambda = -\frac{1}{2} I_1; \\ & & \gamma_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a_2 \cos \lambda \cdot d\lambda = -\frac{3}{8} I_1 + \frac{1}{8} I_2; \\ \gamma_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a_3 \cos \lambda \cdot d\lambda = -\frac{5}{16} I_1 + \frac{3}{16} I_2 - \frac{1}{48} I_3; \\ \gamma_4 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a_4 \cos \lambda \cdot d\lambda = -\frac{35}{128} I_1 + \frac{29}{128} I_2 - \frac{3}{64} I_3 + \frac{1}{384} I_4; \\ \gamma_5 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a_5 \cos \lambda \cdot d\lambda = -\frac{63}{256} I_1 + \frac{65}{256} I_2 - \frac{57}{256} I_3 + \frac{1}{128} I_4 - \\ & & & \quad - \frac{1}{3849} I_5; \\ & \dots \end{aligned} \right.$$

Obliczywszy zatem współczynniki $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \dots$, dojdziemy do rozwinięcia:

$$(12) \quad F(\varphi) = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot \sin^2\varphi + \gamma_2 \cdot \sin^4\varphi + \gamma_3 \cdot \sin^6\varphi + \dots$$

Wypada stąd:

$$\frac{dW}{d\odot} = \frac{4CR^2}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\varphi) F(\varphi) \cdot d\varphi$$

to jest:

$$\frac{dW}{d\odot} = \frac{4CR^2}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\gamma_0 + (\gamma_1 - \gamma_0) \sin^2\varphi + (\gamma_2 - \gamma_1) \cdot \sin^4\varphi + (\gamma_3 - \gamma_2) + \dots] d\varphi$$

Posługując się wzorem:

$$\int_0^{\frac{\pi}{k}} \sin^m \varphi \cdot d\varphi = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots m)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

otrzymamy rozwinięcie:

$$\frac{dW}{d\odot} = \frac{2C\pi R^2}{c} \left[\gamma_0 + \frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_0) + \frac{3}{8}(\gamma_2 - \gamma_1) + \frac{5}{16}(\gamma_3 - \gamma_2) + \frac{35}{128}(\gamma_4 - \gamma_3) + \frac{63}{256}(\gamma_5 - \gamma_4) + \frac{231}{1024}(\gamma_6 - \gamma_5) + \dots \right]$$

albo też:

$$(13) \quad \frac{dW}{d\odot} = \frac{2C\pi R^2}{c} \left(\frac{1}{2} \gamma_0 + \frac{1}{8} \gamma_1 + \frac{1}{16} \gamma_2 + \frac{5}{128} \gamma_3 + \frac{7}{256} \gamma_4 + \frac{21}{1024} \gamma_5 + \frac{236}{14336} \gamma_6 + \dots \right)$$

otrzymamy zatem dla całkowitej ilości rocznej, szereg:

$$(14) \quad W_r = \frac{4\pi^2 R^2 C}{c} \left(\frac{1}{2} \gamma_0 + \frac{1}{8} \gamma_1 + \frac{1}{16} \gamma_2 + \frac{5}{128} \gamma_3 + \right. \\ \left. + \frac{7}{256} \gamma_4 + \frac{21}{1024} \gamma_5 + \dots \right)$$

dzieląc zaś przez $4\pi R^2$, mamy ilość średnią dla 1 cm.^2 :

$$(15) \quad Q_\mu = \pi \frac{C}{c} \left(\frac{1}{2} \gamma_0 + \frac{1}{8} \gamma_1 + \frac{1}{16} \gamma_2 + \frac{5}{128} \gamma_3 + \frac{7}{256} \gamma_4 + \right. \\ \left. + \frac{21}{1024} \gamma_5 + \frac{231}{14336} \gamma_6 + \dots \right)$$

dla $p - 1$ wiemy, iż $I_0 = 1$ zaś $I_1 = I_2 = \dots = I_m = 0$, wypada zatem $\gamma_0 = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = 0$, a więc $Q_\mu = \frac{\pi}{2} \frac{C}{c}$, jak być powinno. Zastosujemy teraz dane liczbowe; jeśli $p = 0,8$, mamy z rozdziału 5-go: $I_0 = 0,7270$; $i_1 = 0,2204$; $I_2 = 0,0825$ i t. d.; stąd według (11):

$$\gamma_0 = 0,7270; \gamma_1 = -0,1102; \gamma_2 = -0,0723; \gamma_3 = -0,0538; \\ \gamma_4 = -0,0425; \gamma_5 = -0,0372; \text{ i t. d.}$$

Wstawiając te wartości w (15), otrzymamy ilość średnią ciepła, jaka dochodzi do ziemi w ciągu roku jeśli $p = 0,8$:

$$(15) \quad Q_\mu = 1,0716 \cdot \frac{C}{c} = 183 \text{ kal. kg. (} p = 0,8 \text{);}$$

Jeśli przyjąć $p = 0,7$, wypada wtedy:

$$(17) \quad Q_\mu = 0,8662 \cdot \frac{C}{c} = 148,6 \text{ kal. kg. (} p = 0,7 \text{);}$$

Ponieważ p waha się zwykle między 0,7 i 0,8 można więc przyjąć za średnią ilość ciepła, która dochodzi do cm.^2 w ciągu roku liczbę 165 kal. kg.; porównywując z wartością (7') widzimy, iż 104 kal. kg. czyli średnio 38% ciepła zostaje absorbowane przez atmosferę. Jak widać z tabliczki wartości rocznych ciepła rozdziału poprzedniego, ilość średnia ciepła odpowiada mniej więcej szerokości 36° .

9. Zastosowanie badań spektrolometrycznych.

W niniejszym rozdziale rozważać będziemy natężenie promieniowania słonecznego oraz wpływ atmosfery, posługując się wynikami w dziedzinie badań nad rozkładem energii drgań w widmie słonecznym. Póki nie braliśmy pod rachubę wpływu atmosfery, rozważanie oddzielnych części widma było zbyteczne, prawo bowiem $\sin u$ 'a i kwadratów odległości, stosowane w tym przypadku, słuszne było dla wszystkich rodzajów drgań. Z chwilą jednak, gdy w naszych rachunkach zaczynamy liczyć się z czynnikiem absorbującym energię drgań widma słonecznego, stosowanie ogólne praw Bouguer'a i Lambert'a do całego widma, przyjmując pewien średni współczynnik transmisji, bez poprzedniego uzasadnienia, jest niedopuszczalne. Pomijając będziemy tę okoliczność, iż sama długość drogi atmosferycznej m , jest zależna od długości fali; trzeba jednak uwzględnić, iż atmosfera absorbuje w różnym stopniu różne rodzaje drgań, czyli, iż współczynnik transmisji jest zależny od długości fali. Rozważmy bliżej ową stratę promieniowania w atmosferze. Stratę tę powoduje wiele czynników; po pierwsze istnieje tak zwana absorbcya właściwa, tutaj energia absorbowana zmienia swą postać, bądź przemieniając się w energię cieplną, bądź też w chemiczną, wielkość tego rodzaju absorbcyi zależy w wielkim stopniu od ilości pary wodnej w powietrzu. Drugą przyczyną straty energii jest to tak zwana dyfuzya czyli rozpraszanie się światła w atmosferze; ten rodzaj straty różni się od poprzedniego właściwością, iż energia stracona nie zmienia tu swej postaci; zresztą energia promieni rozproszonych nie jest całkowicie stracona, część ich bowiem dochodzi do ziemi, dzięki czemu widzimy przedmioty nieoświetlone bezpośrednio. Znaleziono, iż działanie chemiczne promieni rozproszonych jest równe 0,4 intensywności działania promieni bezpośrednich.

Według powyższego, jeśli oznaczymy przez e_λ , energię drgań λ , a przez e'_λ energię po przejściu atmosfery, to będzie, na zasadzie prawa Bouguer'a:

$$(1) \quad e'_\lambda = e_\lambda \cdot e^{-(\alpha+\beta)m}$$

współczynnik α odpowiada absorbcyi właściwej, której główną przyczyną jest para wodna, β zaś jest współczynnikiem rozproszenia.

Według R a g l e i g h'a, β jest odwrotnie proporcjonalne do 4-ej potęgi długości fali, wyrażenie przez niego otrzymane jest następujące:

$$(2) \quad \beta = \frac{32\pi^3(\mu - 1)^3}{3N} \cdot \frac{1}{\lambda^4}$$

N — liczba cząsteczek powietrza w cm^3 , μ — stała refrakcji.

Wzór ten jest zgodny z rzeczywistością przynajmniej o tyle, iż β maleje, gdy zwiększa się λ ; powietrze rozprasza bardziej promienie o krótkiej długości fali, a więc niebiesko-fioletowe, niż czerwone i infra-czerwone; tem zresztą tłumaczyć można błękit nieba.

Opierając się na właściwości, iż promienie infra-czerwone w małym stopniu podlegają dyfuzji, R a d a u (Actinometrie) podaje wzór dla energii promieniowania na powierzchni ziemi; dzieli on mianowicie widma słoneczne na dwie części; dla jednej, zawierającej drgania infra-czerwone, przyjmuje współczynnik transmisji $p = 1$ dla reszty zaś drgań $p = \frac{2}{3}$; na zasadzie tego pisze R a d a u dla natężenia promieniowania Q :

$$Q = A_0 + A_1 \left(\frac{2}{3}\right)^m$$

Dokładne poznanie praw absorbcyi i dyfuzji energii słonecznej, jest ważne w kwestyi znalezienia tak zwanej stałej słonecznej, t. j. ilości ciepła, jaką odbiera cm^2 powierzchni na granicy atmosfery; dokładna bowiem znajomość absorbcyi pozwoliłaby ściśle z wartości obserwowanej dla natężenia promieniowania znaleźć jego wartość na granicy atmosfery, to jest stałą słoneczną.

Z przyrządów, służących do pomiarów natężenia promieniowania, zasługuje na uwagę pyrheliometr systemu A n g s t r o m'a. Przyrząd ten posiada dwie cienkie blaszki platynowe, z których jedną wystawia się na działanie promieni słonecznych; powstała stąd różnica temperatur powoduje prąd, który kompensujemy, przepuszczając przez drugą blaszkę prąd z ogniwa, aż do wyrównania różnicy temperatur; z natężenia prądu kompensacyjnego można sądzić o wartości natężenia promieniowania.

Jak już wspominaliśmy, stała słoneczna jest to całkowita energia widma słonecznego na granicy atmosfery; jeśli więc

$e_\lambda d\lambda$ będzie energią drgań, zawartych między λ i $\lambda + d\lambda$, to pole krzywej, przedstawiającej rozkład energii w widmie ciągłym, czyli e_λ , będzie właśnie ową stałą słoneczną; pole zaś krzywej, odpowiadającej przebiegowi e'_λ , t. j. energii widma na powierzchni ziemi będzie wyrażało energię promieniowania obserwowaną. Jeśli więc, mając krzywą energii obserwowanej wykreślimy (posługując się wartościami współczynników transmisji, otrzymanymi doświadczalnie dla różnych λ) krzywą przebiegu energii dla widma na granicy atmosfery, to stosunek pól tych dwóch krzywych, będzie wyrażał stosunek między stałą słoneczną i natężeniem obserwowanem skąd otrzymać można wartość tej stałej. Badania nad rozkładem energii w widmie słonecznym prowadzili ostatniemi czasy *Abbot* i *Fowle* w *Washingtonie*¹⁾. W niniejszej tabelce podajemy w skróceniu ich rezultaty, t. j. wartości e_λ (przypominamy, iż $e_\lambda \cdot d\lambda$ będzie energią drgań λ) na granicy atmosfery i współczynniki transmisji p dla powietrza suchego (znaczy tylko wpływ dyfuzji):

λ	0 μ ,30	0 μ ,35	0 μ ,40	0 μ ,45	0 μ ,50	0 μ ,60	0 μ ,80	1 μ ,0	1 μ ,3	1 μ ,6	2 μ ,0	2 μ ,5
e_λ	0,539	2,684	1,338	6,057	6,062	5,042	2,665	1,657	0,898	0,532	0,247	0,043
p_λ	0,4	0,4	0,54	0,64	0,7	0,76	0,86	0,9	0,97	0,97	0,9	0,9

Należy zauważyć, iż obchodzą nas tylko wartości proporcjonalne do e_λ .

Na fig. 2 przedstawiono rozkład energii widma na granicy atmosfery, jak również i widma na powierzchni ziemi (dla powietrza suchego) przy różnych wysokościach słońca. Widać z rysunku, iż położenie *Max. e_λ* zmienia się zależnie od większej lub mniejszej absorbcyi powietrza.

Położenie *Max. e_λ* , gra ważną rolę w teorii promieniowania ciał czarnych; według *Wien'a*, jeśli T — jest temperaturą bezwzględną ciała czarnego, zaś λ_m — długością wysyłanej fali o największej energii, to mamy:

$$(3) \quad \lambda_m \cdot T = \text{Const.} = * 2930$$

¹⁾ *Abbot* i *Fowle*: *Annals of the Astrophysical Observatory of the Smithsonian Institution*. *Washington*, 1907 i 1908.

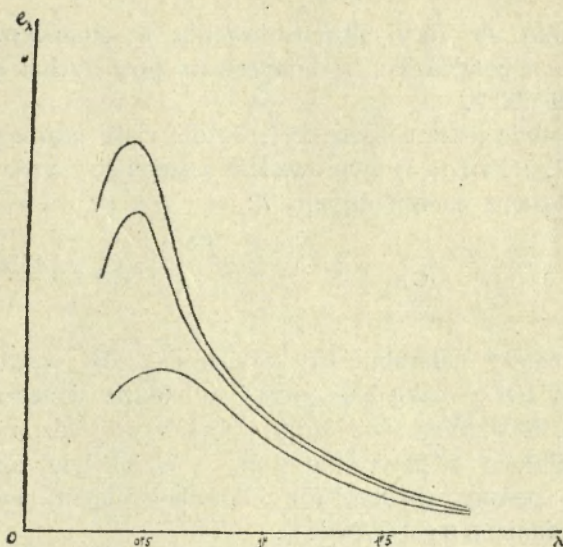


Fig. 2.

Prawo to, zastosowane do widma słonecznego, da pewne pojęcie o temperaturze słońca; w widmie obserwowanym na powierzchni ziemi λ_m leży zwykle między $0\mu,5$ i $0\mu,6$, zależne od wysokości słońca; z rezultatów *Abbott'a* i *Fowler'a* sądzić należy, iż dla widma na granicy atmosfery $\lambda_m = 0\mu,47$, co daje dla temperatury słońca wartość $T = 6230^\circ$. Porównajmy tą wartość z wartością, którą otrzymamy przy pomocy prawa *Stefan'a*; prawo *Stefan'a* głosi, iż ilość ciepła, jaka w jednostce czasu wypromieniowuje przez 1 cm.^2 powierzchni ciała czarnego o temperaturze bezwzględnej T jest proporcjonalną do 4-ej potęgi temperatury T , zatem:

$$(4) \quad E = \sigma T^4; \quad \sigma = 76,8 \cdot 10^{-12}$$

prawo to zostało potwierdzone teoretycznie przez *Boltzmann'a*. Jeśli T jest temperaturą słońca, to będzie (r — promień słońca):

$$\frac{\sigma T^4 r^2}{r^2} = \text{stałej słonecznej} = 2 \text{ kal. gr. min.}$$

wypada stąd: $T = 5880^\circ$ — tego samego rzędu co poprzednia. Naturalnie, iż znaleziona temperatura jest najmniejszą, jaką słońce może posiadać, albowiem w rachunkach powyższych nie

uwzględniono absorbcyi promieniowania w atmosferze słońca; można zatem powiedzieć, iż temperatura powierzchni słońca jest większa od 6000°.

Wypadnie jeszcze zaznaczyć, iż dla ciała czarnego o temperaturze T , Planck¹⁾ wyprowadził następujący wzór teoretyczny dla natężenia energii drgania λ :

$$(5) \quad e_{\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5} \frac{1}{\frac{C_2}{e^{\lambda T}} - 1}; \quad C_1 = 5,29 \cdot 10^5; \quad C_2 = 14550;$$

Nie należy naturalnie się spodziewać, aby rozkład energii (5) zgodny był z rozkładem energii w widmie słonecznym, a to z powodu, iż warunki, pod którymi był wyprowadzony wzór (5), nie są spełnione w przypadku słońca. W każdym razie, trzeba zaznaczyć pewną zgodność (5) z doświadczeniem, wykazującą to choćby badania Angströma²⁾.

Rozkład energii (5) zgodny jest również prawem Wien'a i Stefana. Otrzymujemy mianowicie, przyrównywując do zera:

$$\frac{de_{\lambda}}{d\lambda} = 0, \quad \text{iz } \lambda_m \cdot T = f(c_1 c_2) = \text{const.};$$

dowodzi to też, iż Max. e_{λ} jest odwrotnie proporcjonalne do 5-ej potęgi długości fali λ_m . Aby z (5) wyprowadzić prawo Stefana, zauważmy, iż energia całkowita widma będzie:

$$Q = \int_0^{\infty} \frac{C_1}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{\frac{C_2}{e^{\lambda T}} - 1}$$

kładąc zaś $e^{\frac{C_2}{\lambda T}} = \frac{1}{z}$ mamy:

$$Q = \int_0^1 \frac{C_1 T^4}{C_2^4} \frac{\text{Log}^3 z dz}{z - 1} = T^4 \cdot \frac{C_1}{C_2^4} \int_0^1 \frac{\text{Log}^3 z dz}{z - 1}$$

¹⁾ Planck: Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung. Leipzig, 1906.

²⁾ K. Angström: Energie dans le spectre visible d'étalon Hefner.

zatem:

$$Q = \sigma T^4; \quad \sigma = \frac{C_1}{C_2^4} \int_0^\infty \frac{\text{Log}^3 z \, dz}{z-1} = 3,40 \frac{C_1}{C_2^4}$$

t. j. znane prawo Stefan'a.

Niektórzy z autorów starają się wynaleźć wzory empiryczne dla wpływu dyfuzji. Ciekawe są wyniki Angstrom'a w tym kierunku¹⁾; oparte one są na pojęciu widma fikcyjnego, którego wszystkie drgania mają jednakową energię; w tym celu zastępuje się λ przez $\varphi(x)$, tak aby $e_\lambda \cdot d\lambda = A \cdot dx$; następnie Angstrom przyjmuje wzór empiryczny dla współczynnika transmisji: $p = ax^b$. W ten sposób dochodzi Angstrom do wyrażenia wpływu dyfuzji:

$$q = q_0 \cdot \frac{p^{m\delta}}{1 + nm\delta}$$

q_0 — stała słoneczna, p — średni współczynnik transmisji, n i δ — pewne stałe, wyznaczalne doświadczalnie:

$$p = 0,93; \quad n = 0,26$$

można więc napisać:

$$(6) \quad q = q_0 \cdot \frac{(0,93)^{m\delta}}{1 + 0,26 \cdot m\delta}$$

δ — jest to pewna stała, która zależy od większej lub mniejszej intensywności dyfuzji, można ją nazwać „gęstością dyfuzji“. Dla energii W , absorbowanej przez parę wodną w powietrzu o ciśnieniu f^{mm} , Angstrom podaje następujący wzór, otrzymany na podstawie wielkiej liczby doświadczeń:

$$(7) \quad W = q_0 \cdot 0,1 \cdot (0,85)^{m\delta} \cdot (fm)^{0,275}$$

stosując (6) i (7), będziemy mieli dla całkowitej energii, która dochodzi do ziemi, wyrażenie:

$$Q = q_0 \cdot \left[\frac{(0,93)^{m\delta}}{1 + 0,26 \cdot m\delta} - 0,1 \cdot (0,85)^{m\delta} \cdot (fm)^{0,275} \right];$$

Wyrażenie to można stosować do wyznaczenia stałej słonecznej²⁾.

¹⁾ Angstrom. Méthode nouvelle pour l'étude de la radiation solaire. Upsala.

²⁾ W. Gorczyński (l. c.).

Przystąpmy teraz do obliczeń, będących celem niniejszego rozdziału, mianowicie do znalezienia rocznych ilości ciepła dla Warszawy. Oczywiście, iż w tym przypadku już nie będziemy wprowadzali pojęcia ilości średniej ciepła, lecz użyjemy metody sumowań. Dla wpływu dyfuzji będziemy stosowali wartości podane przez Abbot'a i Fowle'a, zaś dla wpływu pary wodnej weźmiemy wyrażenie (7). Naturalnie, iż wartości p dla powietrza suchego nie będą zupełnie słuszne dla Warszawy, otrzymane były bowiem dla Washingtonu.

Na mocy powyższego trzeba będzie znaleźć szereg wartości dla natężenia promieniowania (nie uwzględniając wpływu pary wodnej) dla różnych wysokości słońca.

Wykreślamy w tym celu krzywą e_λ przebiegu energii w widmie na granicy atmosfery i szereg krzywych $p^m e_\lambda$, przedstawiających przebieg energii widma po przejściu drogi atmosferycznej m . Obliczamy następnie pola, odpowiadające tym krzywym w granicach od λ (około $0^{\mu},4$) do λ możliwie wielkiego; będziemy mieli zatem dla natężenia promieniowania q , wyraz następujący:

$$(8) \quad q = q_0 \cdot \frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} p^m e_\lambda \, d\lambda}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} e^\lambda \cdot d\lambda}$$

Otrzymamy w ten sposób szereg wartości żądanych:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{lll} h = 90^\circ; & m = 1,00; & q = 0,818 \cdot q_0 \\ h = 80^\circ; & m = 1,02; & q = 0,810 \cdot q_0 \\ h = 70^\circ; & m = 1,06; & q = 0,800 \cdot q_0 \\ h = 60^\circ; & m = 1,15; & q = 0,786 \cdot q_0 \\ h = 50^\circ; & m = 1,30; & q = 0,773 \cdot q_0 \\ h = 40^\circ; & m = 1,55; & q = 0,760 \cdot q_0 \\ h = 30^\circ; & m = 2,00; & q = 0,714 \cdot q_0 \\ h = 20^\circ; & m = 2,90; & q = 0,635 \cdot q_0 \\ h = 10^\circ; & m = 5,6; & q = 0,432 \cdot q_0 \end{array} \right.$$

Mając wartości (9) otrzymamy krzywą przebiegu natężenia q dla różnych wysokości słońca h . Posługując się tą krzywą, można będzie znaleźć dla q szereg trygonometryczny:

$$(10) \quad \frac{1}{q_0} = A_0 + A_1 \cos 2h + A_2 \cos 4h + A_3 \cos 6h + \dots$$

współczynniki otrzymamy, jak wiadomo, z kwadratur:

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{q}{q_0} dh; \quad A_m = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{q}{q_0} \cos 2mh \cdot dh;$$

Mnożąc szereg (10) przez $\sin h$, będziemy mieli wyrażenie dla składowych pionowych natężenia promieniowania:

$$\frac{\sin h \cdot q}{q_0} = \frac{1}{q_0} q_h = \left(A_0 - \frac{A_1}{2} \right) \sin h + \frac{A_1 - A_2}{2} \sin 3h + \dots$$

to jest:

$$(11) \quad \frac{1}{q_0} q_h = 0,790 \cdot \sin h - 0,035 \cdot \sin 3h - 0,008 \cdot \sin 5h - \\ - 0,001 \cdot \sin 7h - \dots$$

Ciekawe będzie porównanie tego rozwinięcia z rozwinięciem, które otrzymamy dla wyrażenia Angström'a, kładąc $\delta = 0,7$; $p = 0,93$, mamy:

$$\frac{p^{m_0}}{1 + 0,26 \cdot m\delta} \sin h = 0,797 \cdot \sin h - 0,047 \cdot \sin 3h - \\ - 0,010 \cdot \sin 5h - \dots$$

Stratę promieniowania wskutek pary wodnej, będziemy obliczać według wzoru (7), stosowalnego w granicach $5 < fm < 30$. Postępując, jak poprzednio, otrzymamy rozwinięcie:

$$\sin h \cdot m^{0,275} \cdot 0,9^m = 0,923 \cdot \sin h + 0,027 \cdot \sin 3h + 0,005 \cdot \sin 5h + \\ + 0,001 \cdot \sin 7h$$

łącząc ten szereg z (11), będziemy mieli wyrażenie ogólne dla natężenia promieniowania słońca, gdy jego wysokość wynosi h i gdy ciśnienie pary wodnej jest f :

$$(12) \quad \frac{1}{q_0} Q = (0,790 - 0,092 \cdot f^{0,275}) \cdot \sin h - (0,035 + 0,0027 \cdot f^{0,275}) \\ \cdot \sin 3h + \\ - (0,008 + (0,0005 \cdot f^{0,275})) \cdot 5h - (0,001 + 0,0001 \cdot f^{0,275}) \cdot \sin 7h - \dots$$

W następującej tabliczce, będziemy mogli porównać natężenie promieniowania obliczone z (12) z wartością otrzymaną doświadczalnie:

		Q	
		Obl.	Dośw.
		(kal. gr.)	(kal. gr.)
1912 r.	4/IV ; 12 ^h .26 p. ; m = 1,46 ; f = 5,0 ^{mm} ;	0,87	0,82
	16/ I ; 12 ^h .25 p. ; m = 3,45 ; f = 1,7 ^{mm} ;	0,28	0,24
	4/VI ; 10 ^h .48 a. ; m = 1,18 ; f = 10,7 ^{mm} ;	1,04	0,87
	23/VIII ; 12 ^h . ; m = 1,31 ; f = 9,6 ^{mm} ;	0,88	0,76
	19/VI ; 10 ^h . 4 a. ; m = 1,23 ; f = 7, ^{mm} ;	0,98	0,96
	4/IV ; 11 ^h . a. ; m = 1, 5 ; f = 3,3 ^{mm} ;	0,82	0,89

Możemy teraz przystąpić do obliczeń ilości dziennych ciepła. W tym celu trzeba obliczyć pole, odpowiadające krzywej, której odcięte są kątami godzinnymi słońca, a rzędne natężeniami (9). Ponieważ mamy tabliczkę wartości natężenia g dla wysokości h , trzeba więc podać metodę wyznaczania dla każdego kąta godzinnego słońca odpowiednią jego wysokość. Bardzo prostą jest następująca metoda graficzna, podana przez Doleżalą.

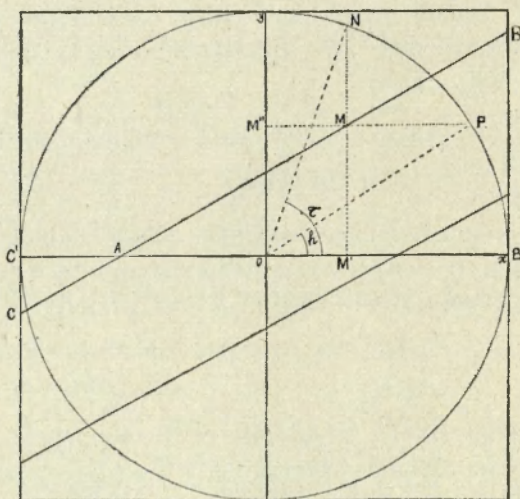


Fig. 3.

Załóżmy we wzorze $\sin h = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \tau$;

$$\sin h = y; \quad \cos \tau = x;$$

$$\begin{aligned} \sin \varphi \cdot \sin \delta &= n \\ \cos \varphi \cdot \cos \delta &= m \end{aligned}$$

otrzymamy wtedy linię prostą:

$$y = m x + n$$

której wykreślenie nie nastęrcza trudności, jeśli zauważymy, iż:

$$B B' = m + n = \text{Cos}(\varphi + \delta); \quad (O B' = 1)$$

$$(C C') = m - n = \text{Cos}(\varphi - \delta);$$

Dla każdego więc dnia, t. j. dla każdego δ , otrzymamy odpowiednią prostą, której część nad osią x-ów będzie odpowiadać łukowi dziennemu słońca, zaś część poniżej osi x-ów łukowi nocnemu; punkt przecięcia się A odpowiada zachodowi i wschodowi słońca i daje jednocześnie wartość kąta godzinnego przy zachodzie lub wschodzie słońca: $\text{Cos} \tau_0 = -(\overline{OA})$. Łatwo zrozumieć, iż dniu porównania wiosennego lub jesiennego odpowiada prosta, przechodząca przez O; gdy słońce jest w półkuli północnej, to punkt A leży na lewo od O, gdy zaś w południowej to na prawo. Otrzymawszy szereg takich prostych, nietrudno dla wszystkich dni odszukać wartości wysokości, a stąd i natężenia promieniowania, gdy zna się kąt godzinny; wystarczy zresztą zauważyć iż $\angle NOB' = \tau$ zaś $\angle POB' = h$.

Mając pole, otrzymane według wskazań powyższych, odejmujemy od niego pole, przedstawiające energię absorbowaną przez parę wodną; dochodzimy w ten sposób do ilości dziennej ciepła poszukiwanej. Biorąc dla ciśnienia f wartości z roku 1910, otrzymamy metodą sumowań następujące wartości insolacyjne dla poszczególnych miesięcy (dla Warszawy).

Styczeń	2,0 kal. kg. ;	Lipiec	16,4 kal. kg.
Luty	3,9 „ ;	Sierpień	14,0 „
Marzec	7,9 „ ;	Wrzesień	9,8 „
Kwiecień	12,0 „ ;	Październik	5,8 „
Maj	15,6 „ ;	Listopad	2,5 „
Czerwiec	17,1 „ ;	Grudzień	1,4 „

Wypada stąd ilość roczna Q_r i odpowiednie ilości $Q_{+\varepsilon}$ i $Q_{-\varepsilon}$:

$$(13) \quad \begin{cases} Q_r = 108,4 \text{ kal. kg. } 1 \text{ cm}^2 \\ Q_{+\varepsilon} = 85,6 \text{ kal. kg.} \\ Q_{-\varepsilon} = 22,8 \text{ kal. kg.} \end{cases}$$

Na zakończenie rozprawy niniejszej poddamy krytyce poprzednie metody traktowania absorbcyi powietrza. Przekonamy się teraz jak niesłuszne było tam przyjęcie pewnego stałego współczynnika p ; będzie on bowiem w rzeczywistości pewną funkcją wysokości słońca h , zależną też od wilgotności powietrza. Jeśli q jest natężeniem promieniowania, to dla współczynnika p_u , który będzie można nazwać średnim współczynnikiem transmisji dla całego widma, otrzymamy:

$$q = q_0 \cdot p_u^m; \text{ stąd: } p_u = \left(\frac{q}{q_0} \right)^{\frac{1}{m}}$$

posługując się powyższemi wartościami q , otrzymamy następujące wartości dla p_u przy różnej wilgotności f :

Tablica wartości średnich współczynników transmisji.

h	$f = 0^{\text{mm}}$	$f = 2^{\text{mm}}$	$f = 8^{\text{mm}}$
80°	0,818	0,710	0,656
60°	0,811	0,711	0,657
40°	0,839	0,754	0,709
30°	0,845	0,773	0,741
20°	0,857	0,796	0,762
10°	0,860	0,811	0,790

Widzimy, iż współczynniki wzrastają w miarę zbliżania się do horyzontu, znaczy to że dla wysokości mniejszych strata energii na jednostkę długości drogi m jest mniejszą niż dla wysokości większych. Łatwo będzie na zasadzie tego wytłumaczyć pewne niezgodności rezultatów rozdziałów poprzednich z doświadczeniem. Jakkolwiek przyjęcie $p = 0,7$ doprowadziło w rozdziale 7-ym dla ilości rocznej Q_r do wyników zadawalających, to jednak dla okresów czasu mniejszych istnieć będzie pewna niezgodność z rzeczywistością; tyczy się to mianowicie stosunków

$\frac{Q_{+\varepsilon}}{Q_{-\varepsilon}}$, mamy bowiem:

$$p = 1; \quad \frac{Q_{+\varepsilon}}{Q_{-\varepsilon}} = 2,99$$

$$p = 0,8; \frac{Q_{+\varepsilon}}{Q_{-\varepsilon}} = \frac{105,8}{25,0} = 4,27$$

$$p = 0,7; \frac{Q_{+\varepsilon}}{Q_{-\varepsilon}} = \frac{86,8}{18,7} = 4,65$$

według zaś metod spektrolometrycznych wypada:

$$\frac{Q_{+\varepsilon}}{Q_{-\varepsilon}} = \frac{85,6}{22,8} = 3,75$$

liczba ta jest najbardziej zbliżoną do liczby otrzymanej ze średnich pomiarów w r. 1905—1910:

$$\frac{Q_{+\varepsilon}}{Q_{-\varepsilon}} = 3,60$$

Główną przyczyną tej niezgodności jest to, iż przyjęto dla współczynnika p tę samą wartość w zimie co i w lecie, wskutek czego $Q_{-\varepsilon}$ było za małe, a zatem $\frac{Q_{+\varepsilon}}{Q_{-\varepsilon}}$ za duże w porównaniu z doświadczeniem. W zimie bowiem, mamy dwie przyczyny, które wpływają na powiększenie współczynnika p ; po pierwsze absorbcyja pary wodnej jest mniejszą (średnio wtedy $f = 2^{\text{mm}}$) powtórę zaś, wysokość słońca jest niewielka, co, jak widzimy, z tabliczki średnich współczynników transmisji, również wpływa na powiększenie współczynnika p . Ostatecznie zatem, chcąc prowadzić rachunki insolacyjne według metod rozdziałów poprzednich należałoby dla miesięcy zimowych przyjmować p raczej bliższe 0,8 dla miesięcy letnich zaś brać p mniej więcej w granicach 0,66 i 0,75. Wogóle zaś wypadnie zaznaczyć, że ścisłą metodą może być tylko stosowanie badań spektrolometrycznych.

Recherches théoriques sur les quantités de chaleur, reçues par la terre, en tenant compte des pertes du rayonnement dans l'atmosphère.

I. Considérations générales.

En premier lieu de nos recherches théoriques nous allons faire le calcul en supposant que toute la quantité d'énergie que le soleil nous envoie arrive à la surface de la terre, autrement dit nous ferons le calcul pour la surface horizontale à la limite de l'atmosphère. Après cela nous allons modifier le calcul d'insolation, en tenant compte de l'absorption dans l'atmosphère et en prenant comme base la plus simple expression pour les pertes du rayonnement, notamment la loi de Lambert. A la fin de nos études nous nous basons sur les résultats des recherches dans la spectrobolométrie.

En désignant par h la hauteur du soleil, r — distance du soleil à la terre, nous avons pour la quantité dq de la chaleur, reçue dans le temps dt , l'expression:

$$(1) \quad dq = \frac{C}{r^2} \sin h \cdot dt$$

C c'est une constante telle que $\frac{C}{r^2}$ exprime la quantité de la chaleur reçue dans l'unité de temps à la limite de l'atmosphère; $\frac{C}{r^2}$ réduit à la distance moyenne s'appelle „constante solaire“, sa valeur est, d'après les mesures de M. G o r c z y ń s k i, égale à 2,05 gr. cal. min. 1 cm². La quantité diurne de la chaleur on obtiendra en intégrant (1) dans les limites relatives au lever et coucher du soleil. Cette quantité, que nous calculerons en considérant les coordonnées du soleil constantes pendant la journée, sera une fonc-

tion évidemment discontinue de ces coordonnées car la longitude du soleil ou son déclinaison changent brusquement de jour en jour. Pour calculer la chaleur reçue dans l'intervalle plus grand de temps, correspondant aux longitudes du soleil (\odot_1, \odot_2), il n'ya qu'à faire la somme de quantités de la chaleur pour les journées particulières, de telle sorte qu'on peut écrire:

$$(2) \quad Q_{\odot_1}^{\odot_2} = \sum_{\odot_1}^{\odot_2} \int_{-\tau_0}^{\tau_0} f(\tau) d\tau$$

$f(\tau)$ — intensité du rayonnement, τ_0 la moitié de l'arc diurne du soleil. Nous allons dans les chapitres suivants simplifier le calcul (2) à l'aide de la conception de la valeur moyenne de la chaleur.

II. Quantité de chaleur pour l'équateur et les pôles.

On a pour la quantité diurne Q_j l'expression:

$$(1) \quad Q_j = \frac{2C}{r^2} \int_0^{\tau_0} \text{Sin } h \cdot dt$$

si φ exprime la latitude géogr. du lieu, δ — déclinaison du soleil, τ — l'angle horaire, on a d'après l'égalité connue:

$$(2) \quad \text{Sin } h = \text{Sin } \varphi \cdot \text{Sin } \delta + \text{Cos } \varphi \cdot \text{Cos } \delta \cdot \text{Cos } \tau$$

en remarquant aussi que:

$$t = \mu\tau, \text{ ou } \mu = \frac{86164}{2\pi} \text{ puisque la journée stellaire}$$

a 86164 sec. moyennes, on aura donc:

$$(3) \quad Q_j = \frac{2C\mu}{r^2} (\text{Sin } \varphi \cdot \text{Sin } \delta \cdot \tau_0 + \text{Cos } \varphi \cdot \text{Cos } \delta \cdot \text{Sin } \tau_0)$$

τ_0 nous calculerons en égalant dans (2) $h = 0$; il en sera:

$$(4) \quad \text{Cos } \tau_0 = -\text{tg } \varphi \cdot \text{tg } \delta.$$

Pour l'équateur $\varphi = 0$, $\tau_0 = \frac{\pi}{2}$, par conséquent, la quantité diurne sera:

$$(5) \quad Q_0 = \frac{2C_u}{r^2} \cos \delta.$$

et pour les pôles: $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\tau_0 = \pi$, donc:

$$(6) \quad Q_p = \frac{2C_u}{r^2} \pi \cdot \sin \delta.$$

En se servant de la formule (3) on a aussi construit la table des valeurs de Q_j pour les différentes latitudes et les époques de l'année (chapitre 2-me du texte polonais). Pour avoir les quantités Q_j en gr. calories il n'y a qu'à multiplier les nombres de cette table par $\frac{1}{1000} \frac{2C_u}{r^2}$ tel que:

$$\log \frac{2C_u}{r^2} = 2,96105$$

cette valeur est donnée pour valeur moyenne de r ; si l'on désire l'exactitude plus grande il faut appliquer la formule:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 = \left[\frac{1 + e \cdot \cos(\odot - \bar{\omega})}{1 - e^2} \right]^2,$$

$e = 0,0168$; $\bar{\omega}$ — longitude du perihélium, ou bien:

$$(7) \quad \left(\frac{a}{r}\right)^2 = 1,00014 + 0,03660 \cdot \cos \xi + 0,00071 \cdot \cos 2\xi + \dots$$

ξ — l'anomalie moyenne.

Calculons maintenant les quantités de chaleur, reçues dans les intervalles plus grandes de l'année sur le pôle. On a:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{C}{r^2} \sin \delta$$

mais en remarquant qu'entre la longitude \odot et la déclinaison δ existe une relation $\sin \delta = \sin \varepsilon \cdot \sin \odot$ (ε — inclinaison de l'écliptique, égale à $23^\circ 27' 30''$) on a:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{C}{r^2} \sin \varepsilon \cdot \sin \odot$$

D'après l'égalité connue de cinématique:

$$r^2 \frac{d\odot}{dt} = c \text{ (constante des aires)}$$

$$\text{donc: } \frac{dQ}{d\odot} = \frac{C}{c} \text{ Sin } \varepsilon \cdot \text{Sin } \odot ;$$

par conséquent l'expression voulue pour le pôle sera:

$$(8) \quad Q_{\odot_0}^{\odot} = \frac{C}{c} \text{ Sin } \varepsilon (\text{Cos } \odot_0 - \text{Cos } \odot)$$

en prenant pour l'origine l'équinoxe $\odot_0 = 0$, on a alors:

$$(9) \quad Q_{\odot} = 2 \frac{C}{c} \text{ Sin } \varepsilon \cdot \text{Sin}^2 \frac{\odot}{2}$$

De là résulte la quantité annuelle Q_r reçue à la limite de l'atmosphère en substituant $\odot = 2\pi$:

$$Q_r = 2 \frac{C}{c} \text{ Sin } \varepsilon = 0,79620 \cdot \frac{C}{c};$$

ou bien en calories:

$$Q_r = 136,626 \text{ kal. kg.}$$

en remarquant que:

$$\log \frac{C}{c} = 5,23453$$

Considérons maintenant le cas de l'équateur. Au lieu de faire les sommes de la chaleur indiquées par (2) du chap. 1 nous allons calculer la chaleur moyenne, indiquée dans la suite. Considérons pour cela la quantité de chaleur reçue par une bande de 1 cm. de largeur située tout le long du périmètre de l'équateur. Désignons cette quantité par W ; ce sera la chaleur, reçue à l'intermédiaire de la moitié éclairée de l'équateur; il est évident que W ne dépendra que de la position du soleil et sera une fonction continue de leurs coordonnées. Si l'on divisera la quantité W par le périmètre on aura par conséquent la quantité moyenne de la chaleur reçue par l'unité de surface de l'équateur dans l'époque correspondante. Nous allons calculer W ; on a, en désignant par λ , l'arc compris entre le point considéré et le point où le soleil passe par le méridien

$$(10) \quad \begin{cases} \text{Sin } h = \cos \delta \cdot \cos \lambda \\ d\sigma = R d\lambda; \quad R - \text{rayon de la terre} \end{cases}$$

on a donc:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{C}{r} \int_{\text{eq}} \text{Sin } h \cdot d\sigma = \frac{C}{r^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \text{Cos } \delta \cdot \cos \lambda \cdot R d\lambda$$

de là:
$$\frac{dW}{dt} = \frac{2CR}{r^2} \cos \delta;$$

en désignant par Q la quantité moyenne:

$$Q = \frac{1}{2\pi R} W$$

Il en sera:
$$\frac{dQ}{dt} = \frac{C}{\pi r^2} \cos \delta \quad (11)$$

en éliminant t d'après l'égalité $r^2 \frac{d\odot}{dt} = c$ on a:

$$(12) \quad \frac{dQ}{d\odot} = \frac{1}{\pi} \frac{C}{c} \cdot \text{Cos } \delta$$

mais: $\text{Sin } \delta = \sin \varepsilon \cdot \sin \odot$; $\cos \delta = \sqrt{1 - \text{Sin}^2 \varepsilon \cdot \text{Sin}^2 \odot}$;
on aura finalement la quantité cherchée:

$$(13) \quad Q = \frac{1}{\pi} \frac{C}{c} \int_{\odot_0}^{\odot} \sqrt{1 - \text{Sin}^2 \varepsilon \cdot \text{Sin}^2 \odot} \cdot d\odot$$

en posant $\odot = 0$; $\odot = \frac{\pi}{2}$, nous arrivons à la quantité annuelle, reçue à l'équateur à la limite de l'atmosphère:

$$(14) \quad Q_r = \frac{4}{\pi} \frac{C}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \text{Sin}^2 \varepsilon \cdot \text{Sin}^2 \odot} \cdot d\odot$$

C. — à. — d. intégrale elliptique complète de 2-me espèce, que l'on désigne habituellement par E (ε).

En se servant de la table des valeurs de cette intégrale („Tablice Matem.-Fiz.“ du Prof. Witkowski) nous avons:

$$(15) \quad Q_r = \frac{4}{\pi} \frac{C}{c} E (23^{\circ}27') = 1,9182 \frac{C}{c}$$

ou en calories: $Q_r = 329,170 \text{ kal. gr. / cm.}^2$; cette valeur est bien acceptable si nous la comparons avec la valeur, obtenue par la méthode des sommes:

$$Q_r = 332,640 \text{ kal. gr.}$$

cela confirme nos méthodes.

On pourra aussi représenter la quantité (13) par une série trigonométrique. En effet d'après la formule de Newton:

$$(16) \quad \frac{dQ}{d\odot} = \frac{1}{\pi} \frac{C}{c} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon \cdot \sin^2 \odot - \frac{1}{8} \sin^4 \varepsilon \cdot \sin^4 \odot - \dots \right)$$

il n'y a qu'à transformer cette série. Considérons plus généralement:

$$(17) \quad S = a_0 + a_1 \sin^2 x + a_2 \sin^4 x + a_3 \sin^6 x + \dots$$

on a:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \\ \sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \\ \sin^6 x = \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos 2x + \frac{3}{16} \cos 4x - \frac{1}{32} \cos 6x \\ \dots \end{array} \right.$$

en substituant ces valeurs dans (17), on aura:

$$(19) \quad S = A_0 + A_1 \cos 2x + A_2 \cos 4x + \dots$$

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0 = a_0 + \frac{1}{2} a_1 + \frac{3}{8} a_2 + \frac{5}{16} a_3 + \dots \\ A_1 = -\frac{1}{2} a_1 - \frac{1}{2} a_2 - \frac{15}{32} a_3 - \dots \\ A_2 = \frac{1}{8} a_2 + \frac{3}{16} a_3 + \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

(regardez la formule 33 du chap. 2-me du texte polonais).

A l'aide de (20) nous aurons pour (16) le développement de Fourier:

$$(21) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ}{d\odot} = \frac{1}{\pi} \frac{C}{c} (A_0 + A_1 \cos 2\odot + A_2 \cos 4\odot + \dots) \\ A_0 = 1 - \frac{1}{4} \sin^2 \varepsilon - \frac{3}{64} \sin^4 \varepsilon \dots \\ A_1 = \frac{1}{4} \sin^2 \varepsilon + \frac{1}{16} \sin^4 \varepsilon + \dots \\ A_2 = \dots - \frac{1}{64} \sin^4 \varepsilon - \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

en appliquant les données numériques:

$$(22) \frac{dQ}{d\odot} = \frac{C}{c} (0,30530 + 0,01313 \cos 2\odot - 0,00014 \cdot \cos 4\odot + \dots)$$

et en intégrant on aura la série voulue:

$$(23) Q = \frac{C}{c} (0,30530 \cdot \odot + 0,00656 \cdot \sin 2\odot - 0,00003 \cdot \sin 4\odot + \dots)$$

en posant $\odot = 2\pi$, nous aurons une quantité concordante avec (15)

$$Q_r = 1,91824 \cdot \frac{C}{c}$$

III. Recherches des quantités de la chaleur pour une latitude quelconque φ .

Nous allons commencer tout de suite le calcul de la quantité moyenne de la chaleur dont la définition du paragraphe précédent s'applique aussi dans le cas actuel. Nous considérons donc une bande de 1 cm. de largeur, étendue tout le long d'une parallèle. Si λ a même signification que précédemment, nous aurons de même:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \lambda = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \lambda. \\ d\sigma = R \cdot \cos \varphi \cdot d\lambda. \end{array} \right.$$

En prenant l'intégrale étendue le long de la partie éclairée de la parallèle :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2C}{r^2} \int_0^{\lambda_0} (\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \lambda) R \cdot \cos \varphi \cdot d\lambda.$$

où $\cos \lambda_0 = -\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta$
 λ — c'est d'ailleurs l'angle horaire. On a, en intégrant :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2C \cdot R \cdot \cos \varphi}{r^2} (\sin \varphi \cdot \sin \delta \cdot \lambda_0 + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \sin \lambda_0);$$

pour la quantité moyenne Q nous avons de même :

$$Q = \frac{1}{2\pi R \cdot \cos \varphi} \cdot W$$

puisque $2\pi R \cdot \cos \varphi$ est le périmètre de la parallèle.

Nous arrivons donc à la formule :

$$(2) \quad \frac{dQ}{d\odot} = \frac{1}{\pi} \frac{C}{c} (\sin \varphi \cdot \sin \delta \cdot \lambda_0 + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \sin \lambda_0)$$

en remarquant que $\sin \delta = \sin \varepsilon \cdot \sin \odot$, nous aurons finalement :

$$(3) \quad \frac{dQ}{d\odot} = \frac{\cos \varphi}{\pi} \frac{C}{c} (\operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \varepsilon \cdot \sin \odot \cdot \lambda_0 + \\ + \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \varepsilon}{\cos^2 \varphi} \cdot \sin^2 \odot}).$$

Cette expression laisse aussi se développer en série de Fourier. Il faut se servir du développement :

$$\lambda_0 = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc} \sin (\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta) = \\ = \frac{\pi}{2} + (\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta) + \frac{1}{6} (\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \delta)^3 + \dots$$

nous avons ainsi :

$$\lambda_0 = \frac{\pi}{2} + \sin \varepsilon \cdot \sin \odot \operatorname{tg} \varphi + \sin^3 \varepsilon \cdot \sin^3 \odot \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \varphi \right) + \\ + \sin^5 \varepsilon \cdot \sin^5 \odot \left(\frac{3}{2} \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^3 \varphi + \frac{3}{10} \operatorname{tg}^5 \varphi \right) + \dots$$

de là nous obtiendrons :

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{Sin} \varepsilon \cdot \operatorname{Sin} \odot \cdot \lambda_0 = a_1 \cdot \operatorname{Sin} \odot + a_2 \cdot \operatorname{Sin}^2 \odot + a_3 \cdot \operatorname{Sin}^3 \odot + \dots$$

$$a_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{Sin} \varepsilon$$

$$a_2 = \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \operatorname{Sin}^2 \varepsilon$$

$$a_3 = \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \varphi \right) \cdot \operatorname{Sin}^4 \varepsilon$$

.....

(formules 10 du Chap. III du texte polonais).

Le développement de $\sqrt{1 - \frac{\operatorname{Sin}^2 \varepsilon}{\operatorname{Cos}^2 \varphi} \cdot \operatorname{Sin}^2 \odot}$ s'obtiendra comme dans le chapitre 2 (formule 13 Chap. III du texte pol.) De cette façon nous aurons le développement :

$$(4) \quad \frac{dQ}{d\odot} = \frac{C}{c} (M_0 + M_1 \cdot \operatorname{Sin} \odot + M_2 \operatorname{Cos} 2 \odot + M_4 \cdot \operatorname{Cos} 4 \odot + \dots)$$

et en intégrant :

$$(5) \quad Q = \frac{C}{c} (M_1 + M_0 \odot - M_1 \operatorname{Cos} \odot + \frac{M_2}{2} \operatorname{Sin} 2 \odot + \frac{M_4}{4} \operatorname{Sin} 4 \odot + \dots)$$

Désignant par $Q_{+\varepsilon}$ la chaleur correspondante à la position du soleil dans l'hémisphère Nord et $Q_{-\varepsilon}$ dans l'hémisphère Sud, on a :

$$(6) \quad \begin{cases} Q_{+\varepsilon} = \frac{C}{c} (\pi M_0 + 2 M_1) \\ Q_{-\varepsilon} = \frac{C}{c} (\pi M_0 - 2 M_1) \end{cases}$$

et la quantité annuelle :

$$Q_r = \frac{C}{c} \cdot 2\pi M_0 ;$$

ou

$$(7) \quad Q_r = 2 \frac{C}{c} \cos \varphi \left[\left(\frac{1}{2} a_2 + \frac{3}{8} a_3 + \frac{15}{16} a_4 + \dots \right) + \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\sin^2 \varepsilon}{\cos^2 \varphi} - \frac{3}{64} \frac{\sin^4 \varepsilon}{\cos^4 \varphi} - \dots \right) \right]$$

De (6) résulte la relation intéressante:

$$Q_{+\varepsilon} - Q_{-\varepsilon} = \frac{C}{c} 4 M_1$$

c. — à. — d.

$$(8) \quad Q_{+\varepsilon} - Q_{-\varepsilon} = 2 \frac{C}{c} \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varepsilon.$$

En appliquant ces résultats pour Varsovie ($\varphi = 52^{\circ}, 22$) (regardez les formules 21 et 22 Chap. 4 du texte pol.) nous aurons:

$$(9) \quad \frac{dQ}{d\odot} = \frac{C}{c} (0,2007 + 0,1573 \cdot \sin \odot - 0,0066 \cdot \cos 2\odot + \dots)$$

$$(10) \quad Q = \frac{C}{c} (0,1573 + 0,2007 \cdot \odot - 0,1573 \cdot \cos \odot - 0,0033 \cdot \sin 2\odot + \dots)$$

de là:

$$(11) \quad \begin{cases} Q_{+\varepsilon} = 0,9451 \cdot \frac{C}{c} = 162,2 \text{ cal. kg.} \\ Q_{-\varepsilon} = 0,3159 \cdot \frac{C}{c} = 54,2 \text{ ,,} \\ Q_r = 1,2610 \cdot \frac{C}{c} = 216,4 \text{ ,,} \end{cases}$$

Il y a une relation simple entre la dérivée $\frac{dQ}{d\odot}$ et la quantité diurne Q_j de la chaleur.

En effet dans l'une et dans l'autre nous avons les mêmes intégrations à effectuer:

$$\frac{dQ}{d\odot} = \frac{C}{\pi c} \int_0^{\tau_0} (\sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \lambda) \cdot d\lambda$$

$$Q_j = \frac{2C\mu}{r^2} \int_0^{\tau_0} (\sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \tau) \cdot d\tau$$

il résulte de là la relation fondamentale :

$$(12) \quad Q_j = 2\pi\mu \frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi C\mu}{r^2} \frac{dQ}{d\odot}$$

il faut remarquer seulement que pour $\frac{dQ}{d\odot}$ \odot varie d'une façon continue ce qui n'a pas lieu dans le cas de Q_j . On déduira donc facilement de la série (9) l'expression suivante de la chaleur diurne pour Varsovie :

$$(13) \quad Q_j = 0,001 \frac{C}{c} (3,443 + 2,698 \cdot \text{Sin } \odot - 0,113 \cdot \text{Cos } 2 \odot + \\ + 0,007 \cdot \text{Cos } 4 \odot + \dots);$$

Tous les calculs précédents sont applicables pour $\varphi \leq 90^\circ - \varepsilon = 66^\circ 33'$; pour φ plus grande que cette valeur, c. à. d. pour la zone polaire, il faudrait faire le calcul séparément pour les différentes époques de l'année.

IV. Les pertes du rayonnement dans l'atmosphère.

Pour tenir compte de l'absorption dans l'atmosphère nous allons prendre comme loi exprimant la perte de l'énergie, la loi de Lambert :

$$q = q_0 \cdot p^{\frac{1}{\text{Sin } h}}$$

q_0 — constante solaire, h — hauteur du soleil.

La loi de Lambert n'est qu'approximative pour l'atmosphère; nous allons l'établir. On a, en effet, d'après la loi de Bouguer pour l'intensité q du rayonnement, après la traversée d'une couche σ homogène :

$$(1) \quad q = q_0 \cdot e^{-k\sigma}$$

k — constante spécifique. Puisque l'atmosphère n'est pas homogène on ne pourra appliquer (1) que pour une couche infiniment mince; on a alors pour la perte — dq de la chaleur dans cette couche l'expression :

$$(2) \quad dq = -K(H) \cdot q \cdot d\sigma$$

K sera maintenant une fonction de l'altitude H .

En supposant que le chemin parcouru par les rayons lumineux est rectiligne on a: $\sigma = \frac{H}{\sin h}$, par conséquent:

$$dq = - \frac{K(H)}{\sin h} q dH;$$

de là:

$$\text{Log}_e \left(\frac{q}{q_0} \right) = - \frac{1}{\sin h} \int_0^H K(H) \cdot dH$$

H est aussi grand que possible; q — rayonnement à la limite de l'atmosphère égal à 2 cal. gr. min. En posant:

$$(3) \quad p = e^{- \int_0^H K(H) \cdot dH}$$

nous aurons la loi de Lambert:

$$(4) \quad q = q_0 \cdot p^{\frac{1}{\sin h}}$$

h — s'appelle le „coefficient de transmission“.

Nous allons maintenant généraliser la formule (4), en supposant que le chemin des rayons lumineux est curviligne et en tenant compte de la sphéricité de la terre; en admettant que $K = a\rho$ ρ — densité de la couche à la hauteur H on a:

$$\text{Log}_e \left(\frac{q}{q_0} \right) = - a \int_0^H \rho d\sigma$$

posons:

$$(5) \quad p = e^{-a \int_0^H \rho dH} \quad ; \quad m = \frac{\int_0^H \rho d\sigma}{\int_0^H \rho dH}$$

il en sera:

$$(6) \quad q = q_0 \cdot p^m \quad ; \quad (p \leq 1; m \geq 1)$$

m qui pour $h=0$ se réduit à 1 s'appelle „la masse atmosphérique traversée“; m , comme l'on verra, diffère d'ailleurs peu de $\frac{1}{\sin h}$. Il n'y a qu'à calculer m ; d'après la formule de réfraction $(R+H)\mu \cdot \sin i = \text{Const.}$ i l'angle d'incidence pour la couche considérée, μ — indice de réfraction. On aura:

$$(7) \quad m = \int_0^H \frac{1}{\rho \cdot dH} \int_0^H \frac{\rho \, dH}{\sqrt{1 - \left(\frac{R\mu_0}{(R+H)\mu}\right)^2 \sin^2 z}}$$

en supposant que le chemin est rectiligne ($\mu = \mu_0$), on a pour m la série suivante:

$$m = \sec z - \sec z \cdot \text{tg}^2 z \frac{\int_0^H \rho \, H \, dH}{R \int_0^H \rho \, dH} + \dots$$

si l'on admet que ρ diminue dans une progression géométrique, il sera:

$$(8) \quad m = \sec z - \frac{1}{2} \frac{l_0}{R} \sec z \cdot \text{tg}^2 z + \left(l_0 - \frac{1}{3} R \text{Cos}^2 z\right) \frac{l_0 \text{tg}^2 z}{2R^2 \text{Cos}^3 z}$$

l_0 — hauteur de l'atmosphère, supposée homogène et de densité ρ_0 . On voit que l'expression (8) de m pour la distance zénitale pas grande diffère très peu de $\frac{1}{\sin h}$; dans le calcul suivant nous

prenons toujours $m = \frac{1}{\sin h}$. Il y a aussi à noter la formule de Laplace:

$$m = \frac{\text{Refr.}}{K \cdot \text{Cos } h}$$

que l'on pourra établir facilement en prenant les formules de la réfraction astronomique.

V. Calcul de la quantité de chaleur pour l'équateur en tenant compte de l'absorption atmosphérique.

En nous basant sur la loi de Lambert nous aurons:

$$dq = \frac{C}{r^2} \sin h p \frac{1}{\sin h}$$

en remarquant que pour l'équateur $\sin h = \cos \delta \cdot \cos \tau$, on a la quantité diurne de la chaleur:

$$(1) \quad Q_j = \frac{2Cp}{r^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \delta \cdot \cos \tau \cdot p \frac{1}{\cos \delta \cdot \cos \tau} \cdot d\tau$$

et pour la dérivée de la quantité moyenne Q:

$$(2) \quad \frac{dQ}{d\odot} = \frac{1}{\pi} \frac{C}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \delta \cdot \cos \lambda \cdot p \frac{1}{\cos \varepsilon \cdot \cos \lambda} \cdot d\lambda$$

De même comme Mr. Angot nous allons chercher le développement de Q_j ou $\frac{dQ}{d\odot}$ en série de Fourier, seulement au lieu d'utiliser la méthode d'interpolation d'Angot nous allons reprendre la question théoriquement. L'expression (2) pourra s'écrire aussi:

$$(4) \quad \frac{dQ}{d\odot} = \frac{1}{\pi} \frac{C}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Sec } \lambda}{\sqrt{1 - \text{Sin}^2 \varepsilon \cdot \text{Sin}^2 \odot}} \cdot p \cdot \cos \lambda \cdot d\lambda$$

Toute la difficulté du problème consiste dans le développement de la fonction $\frac{\text{Sec } \lambda}{\sqrt{1 - \text{Sin}^2 \varepsilon \cdot \text{Sin}^2 \odot}}$, ou, en posant $x =$

$$\text{Sin } \varepsilon \cdot \text{Sin } \odot; \quad \alpha = \text{Sec } \lambda \cdot \log_e \frac{1}{p} :$$

$$(4) \quad y = e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}}}; \quad \alpha > 0.$$

c'est une fonction holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon 1; nous démontrerons que la fonction (4) sera représentée par une série de Taylor:

$$(5) \quad e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}}} = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + a_3 x^6 + \dots$$

on a en effet, d'après la théorie générale de fonctions analytiques, l'expression suivante de la rente:

$$(6) \quad R_n = \frac{x^{n+1}}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) \cdot dz}{z^{n+1} (z-x)}$$

x — point intérieur du cercle dans le cas actuel $f(z) = e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1-z^2}}}$

Le module de l'intégrale le long d'une courbe est moindre que le produit de maximum de la fonction par la longueur de cette courbe, par conséquent:

$$|R_n| < \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \text{Max} \left| e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1-z^2}}} \right| \text{ puisque } (z) = 1.$$

On trouvera facilement que pour le cercle de convergence: ($z = \xi + i \eta$):

$$\begin{aligned} \text{Max} \left| e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1-z^2}}} \right| &= \text{Max} e^{-\frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{1}{1+\eta^2} + \frac{1}{\eta \sqrt{1-\eta^2}}}} \\ &= e^{-\frac{\alpha}{4} \sqrt{2+2\sqrt{2}}}; \end{aligned}$$

on a donc la limite cherchée:

$$(7) \quad |R_n| < \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} e^{-\frac{\alpha}{4} \sqrt{2+2\sqrt{2}}}$$

puisque $|x| < 1$, $|R_n|$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini,

donc la série (5) est convergente, ce qui fallait démontrer. Il faut maintenant reprendre le calcul des coefficients $a_0 a_1 a_2 a_3 \dots$

Nous ferons cela de la manière suivante; considérons pour la simplicité le développement:

$$y = e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1-x}}} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{de là: } \frac{dy}{dx} &= -e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1-x}}} \cdot \frac{\alpha}{2\sqrt{(1-x)^3}} = -\frac{1}{2} \alpha y (1-x)^{-\frac{3}{2}} = \\ &= -\frac{\alpha}{2} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \left(1 + \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 + \frac{35}{16}x^3 + \frac{315}{128}x^4 + \dots\right) \end{aligned}$$

en multipliant les 2 dernières séries et comparant avec la série:

$$\text{on aura: } \frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

$$(8) \quad \begin{cases} a_0 = e^{-\alpha}; a_1 = -\frac{1}{2} \alpha a_0, a_2 = -\frac{1}{4} \alpha \left(\frac{3}{2} a_0 + a_1\right) \\ a_3 = -\frac{1}{6} \alpha \left(\frac{15}{8} a_0 + \frac{3}{2} a_1 + a_2\right) \\ \dots \end{cases}$$

(regardez la formule 16 du Chap. 5 du texte pol.). Les formules (8) permettent de calculer les coefficients, on déduit de là:

$$(9) \quad \begin{cases} a_0 = e^{-\alpha} \\ a_1 = -\frac{1}{2} \alpha e^{-\alpha} \\ a_2 = -\frac{\alpha e^{-\alpha}}{8} (3 - \alpha) \\ \dots \end{cases}$$

formules 17 du texte pol.)

En appliquant le développement considéré, on a:

$$\begin{aligned} \frac{\pi c}{C} \frac{dQ}{d\odot} &= \sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon} \cdot \sin^2 \odot \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} a_0 \cdot \cos \lambda \cdot d\lambda + \right. \\ &\left. \sin^2 \varepsilon \cdot \sin^2 \odot \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} a_1 \cos \lambda \cdot d\lambda + \sin^4 \varepsilon \cdot \sin^4 \odot \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} a_2 \cdot \cos \lambda \cdot d\lambda + \dots \right) \end{aligned}$$

nous arrivons finalement au développement:

$$(10) \quad \frac{\pi c}{C} \frac{dQ}{d\odot} = \gamma_0 + \gamma_1 \sin^2 \odot + \gamma_2 \cdot \sin^4 \odot + \gamma_3 \cdot \sin^6 \odot + \dots$$

ou on a posé:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 = I_0 \\ \gamma_1 = -\frac{\sin^2 \varepsilon}{2} (I_0 + I_1) \\ \gamma_2 = -\frac{\sin^2 \varepsilon}{8} (I_0 + I_1 + I_2) \\ \dots \end{array} \right.$$

(formules 19 du texte pol.)

les quantités I sont données par les intégrales:

$$(12) \quad I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} p^{\sec \lambda} \cdot \cos \cdot d\lambda; \quad I_m = \log^m \frac{1}{p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^{m-1} \lambda \cdot p^{\sec \lambda} \cdot d\lambda;$$

de (10) on déduit facilement le développement de Fourier:

$$(13) \quad \frac{dQ}{d\odot} = \frac{1}{\pi} \frac{C}{c} (A_0 + A_1 \cdot \cos 2\odot + A_2 \cdot \cos 4\odot + \dots)$$

les coefficients sont les suivants:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0 = \gamma_0 + \frac{1}{2} \gamma_1 + \frac{3}{8} \gamma_2 + \frac{5}{16} \gamma_3 + \dots \\ A_1 = -\frac{1}{2} \gamma_1 - \frac{1}{2} \gamma_2 - \frac{15}{32} \gamma_3 - \frac{7}{16} \gamma_4 - \dots \\ A_2 = \frac{1}{8} \gamma_2 + \frac{3}{16} \gamma_3 + \frac{7}{32} \gamma_4 + \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

Quant au développement de Q_j on a d'après la formule

$$Q_j = \frac{2\pi c\mu}{r^2} \frac{dQ}{d\odot}:$$

$$(15) \quad Q_j = \frac{2C\mu}{r^2} (A_0 + A_1 \cdot \cos 2\odot + A_2 \cdot \cos 4\odot + \dots)$$

en intégrant (13) nous arriverons à la série cherchée:

$$(16) \quad Q = \frac{1}{\pi} \frac{C}{c} \left(A_0 \cdot \odot + \frac{A_1}{2} \sin 2\odot + \frac{A_2}{4} \cdot \sin 4\odot + \dots \right)$$

qui représente la quantité moyenne de la chaleur reçue dans l'intervalle $(0, \odot)$; pour la quantité annuelle de la chaleur on aura l'expression en posant $\odot = 2\pi$ dans (16), donc:

$$(17) \quad Q_r = \frac{2C}{c} \left(\gamma_0 + \frac{1}{2} \gamma_1 + \frac{3}{8} \gamma_2 + \frac{5}{16} \gamma_3 + \frac{35}{128} \gamma_4 + \dots \right)$$

Comme exemple numérique prenons $p = 0,8$, alors:

$$I_0 = 0,7270; \quad I_1 = 0,2204; \quad I_2 = 0,0825$$

de là: $\gamma_0 = 0,7270; \quad \gamma_1 = -0,0730; \quad \gamma_2 = -0,0031;$

alors nous avons

$$\frac{dQ}{d\odot} = \frac{1}{\pi} \frac{C}{c} (0,6894 + 0,0380 \cdot \cos 2\odot - 0,0004 \cdot \cos 4\odot + \dots)$$

$$Q_j = \frac{2C}{r^2} (0,6894 + 0,0380 \cdot \cos 2\odot - 0,0004 \cdot \cos 4\odot + \dots)$$

On a aussi:

$$Q = \frac{C}{c} (0,21944 \cdot \odot + 0,00604 \cdot \sin 2\odot - 0,00003 \cdot \sin 4\odot - \dots)$$

de là on aura la quantité annuelle:

$$Q_r = 1,3788 \cdot \frac{C}{c} = 236,610 \text{ cal. kg. cm}^2$$

Mr. Angot a obtenu pour la méthode des sommes 236,1 cal. kg.

VI. Calcul de la quantité de chaleur pour le pôle.

Ici on n'a pas besoin de la conception de la chaleur moyenne, puisque le mouvement diurne n'influe pas sur l'insolation. Pour la quantité diurne on a tout de suite l'expression:

$$(1) \quad Q_j = \frac{2C \mu \pi}{r^2} \sin \delta \cdot p \sin \delta; \quad \delta \text{ — inclinaison du soleil.}$$

et pour la chaleur reçue dans l'intervalle correspondante $(0, \odot)$:

$$(2) \quad Q = \frac{C}{c} \int_0^{\odot} \text{Sin } \varepsilon \cdot \text{Sin } \odot \cdot p^{\text{Cos } \varepsilon \cdot \text{Cos } \odot} \cdot d \odot$$

il n'y a qu'à développer cette quantité par les formules du chapitre précédent; on a:

$$p^{\text{Cos } \varepsilon \cdot \text{Cos } \odot} = e^{\frac{\alpha}{\sqrt{1 - \text{Cos}^2 \odot}}} = a_0 + a_1 \text{Cos}^2 \odot + a_2 \text{Cos}^4 \odot + \dots$$

en posant $\alpha = \frac{1}{\text{Sin } \varepsilon} \log_e \frac{1}{p}$.

Il faut remarquer qu'on déduira tout de suite la quantité annuelle:

$$Q_r = \frac{2C}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{Sin } \varepsilon \cdot (a_0 + a_1 \text{Cos}^2 \odot + \dots) \cdot d(\text{Cos } \odot)$$

donc:

$$(3) \quad Q_r = \frac{2C}{c} \text{Sin } \varepsilon \left(a_0 + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{5} + \frac{a_3}{7} + \dots \right)$$

pour avoir le développement de Fourier, on trouvera:

$$p^{\text{Cos } \varepsilon \cdot \text{Cos } \odot} = \beta_0 + \beta_1 \cdot \text{Cos } 2 \odot + \beta_2 \cdot \text{Cos } 4 \odot + \beta_3 \cdot \text{Cos } 6 \odot + \dots$$

par suite:

$$(4) \quad \frac{dQ}{d\odot} = \frac{C}{c} \text{Sin } \varepsilon \left[\left(\beta_0 - \frac{\beta_1}{2} \right) \text{Sin } \odot + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \text{Sin } 3 \odot + \dots \right]$$

et en intégrant:

$$(5) \quad Q = \frac{C}{c} \text{Sin } \varepsilon (A_0 + A_1 \cdot \text{Cos } \odot + A_2 \text{Cos } 3 \odot + A_3 \cdot \text{Cos } 5 \odot + \dots)$$

$A_0 A_1 \dots$ sont donnés par les formules (9) du texte polonais. On appliquera les résultats pour $p = 0,8$; les valeurs de $a_0 a_1 a_2$ sont données par la formule (10) du texte polonais; nous aurons:

$$Q = \frac{C}{c} (0,18691 - 0,20117 \cdot \text{Cos } \odot + 0,01137 \cdot \text{Cos } 3 \odot + 0,00221 \cdot \text{Cos } 5 \odot + 0,00039 \cdot \text{Cos } 7 \odot + \dots)$$

d'où résulte la quantité annuelle: $Q_r = \frac{C}{c} \cdot 0,37382 = 64,15 \text{ cal. kg.}$

VII. Calcul des sommes de la chaleur pour une latitude quelconque φ en tenant compte des pertes de la chaleur.

En appliquant les formules précédentes, nous aurons l'expression suivante:

$$(1) \quad Q_j = \frac{2 \bar{C} \mu}{r^2} \int_0^{\tau_0} (\sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \tau) \cdot p \frac{1}{\sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \tau} d\tau$$

et pour la quantité moyenne Q:

$$(2) \quad Q = \frac{i \bar{C}}{\pi c} \int_0^{\lambda_0} \int_0^{\tau_0} (\sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \lambda) \cdot p \frac{1}{\sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \lambda} d\lambda d\tau$$

De même que précédemment nous allons chercher les développements de Fourier pour (1) et (2). Mais la méthode précédente, qui s'appuie sur le développement de Taylor, présente dans le cas actuel une difficulté considérable; nous utilisons une autre méthode en nous appuyant sur la théorie des séries trigonométriques. En effet chaque fonction satisfaisante aux conditions de Dirichlet, peut être développée dans l'intervalle (a, b) en série:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(x) = \Phi(t) = \frac{a}{2} (a_1 \cos t + b_1 \sin t) + (a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t) + \dots \\ t = \frac{\pi}{b-a} (ax - a - b); \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Phi(t) \cdot dt; \\ a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos m t \cdot \Phi(t) \cdot dt; \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin m t \cdot \Phi(t) \cdot dt \end{array} \right.$$

Appliquons (3) à la fonction périodique $\frac{dQ}{d\tau}$.

Si l'on remarque que $\left(\frac{dQ}{d\odot}\right)_{\odot} = \left(\frac{dQ}{d\odot}\right)_{\pi-\odot}$

on aura :

$$(4) \quad \frac{dQ}{d\odot} = \frac{a_0}{2} + b_1 \cdot \text{Sin } \odot + a_2 \cdot \text{Cos} 2 \odot + b_3 \cdot \text{Sin} 3 \odot + a_4 \cdot \text{Cos} 4 \odot + \dots$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{dQ}{d\odot} \cdot d\odot; \quad b_1 = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{dQ}{d\odot} \cdot \text{Sin } \odot \cdot d\odot;$$

$$a_2 = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{dQ}{d\odot} \cdot \text{Cos} 2 \odot \cdot d\odot; \quad b_{2m} = a_{2m+1} = 0;$$

Il faut donc obtenir une série des valeurs de $\frac{dQ}{d\odot}$ à l'aide de la quadrature approchée; de là on construira les courbes $\frac{dQ}{d\odot}$, $\frac{dQ}{d\odot} \cdot \text{Sin } \odot$ etc. et l'on trouvera graphiquement les coefficients a_0 , b_1 , a_2 etc. (regardez la table de valeurs de $\frac{dQ}{d\odot}$, texte polonais). De telle façon on trouvera les développements voulus de Q_j , $\frac{dQ}{d\odot}$ et de Q donnés pour $p=0,8$ et $p=0,7$ dans le chapitre 7 du texte polonais (formules 9, 10, 11, 12, 13). On a conclu que la valeur $p=8,7$ donne en moyenne pour Varsovie des résultats du même ordre que les valeurs observées. Il y a à traiter aussi une question intéressante du maximum et du minimum du rayonnement sous une même latitude φ . Pour l'équateur, comme pour toutes les latitudes dans la zone torride, il y a évidemment 2 maximum et 2 minimum du rayonnement qui sont donnés pour l'équateur dans le texte pol. Considérons maintenant la répar-

tition de Q_j ou $\frac{dQ}{d\odot}$ pour les même δ et pour les différentes latitudes; il faut remarquer que le maximum du rayonnement n'aura lieu que pour les latitudes qui ont le soleil au zénite mais il est déplacé vers la direction de jours croissants; on trouvera graphiquement la position suivante du maximum:

$$(5) \quad \begin{cases} \delta = 8^\circ; & \varphi_m = 12^\circ 30' \\ \delta = 16^\circ; & \varphi_m = 26^\circ 30' \\ \delta = \varepsilon; & \varphi_m = 43^\circ 30' \end{cases}$$

VIII. Quantité totale de la chaleur reçue par la terre.

Dans le cas considéré le mouvement diurne et annuel de la terre nous n'intéresse pas puisque ces deux mouvements n'ont aucune influence sur la partie éclairée de la terre. Si W sera la quantité totale reçue par la terre on a:

$$(1) \quad \frac{dW}{d\odot} = \frac{C}{c} \iint_S \sin h \cdot p^{\frac{1}{\sinh}} \cdot d\sigma$$

Pour calculer l'intégrale de surface (1), nous utilisons les coordonnées géographiques λ, φ ; on a alors:

$$d\sigma = R^2 \cos \varphi \cdot d\varphi \cdot d\lambda \cdot \sin h = \cos \varphi \cdot \cos \lambda$$

$$(2) \quad W' = \frac{dW}{d\odot} = \frac{4CR^2}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p^{\sec \varphi \cdot \sec \lambda} \cdot \cos^2 \varphi \cdot \cos \lambda \cdot d\lambda \cdot d\varphi$$

de là: $W = W' (\odot - \odot_0)$

c - à - d. les quantités de chaleur sont proportionnelles aux accroissements de la longitude \odot .

Pour la quantité annuelle on aura:

$$(3) \quad W = \frac{8\pi CR^2}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p^{\sec \varphi \cdot \sec \lambda} \cdot \cos^2 \varphi \cdot \cos \lambda \cdot d\lambda \cdot d\varphi$$

en divisant par $4\pi R^2$ on aura la quantité moyenne reçue par cm^2 . Pour $p = 1$, c. - à - d à la limite de l'atmosphère on a:

$$W = \frac{8\pi CR^2}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \cdot \cos\lambda \cdot d\lambda d\varphi = 2\pi^2 R^2 \frac{C}{c}$$

et la quantité moyenne sera

$$(4) \quad (p = 1) \quad Q_\mu = \frac{\pi}{2} \frac{C}{c} = 1,5708 \frac{C}{c} = 269,5 \text{ kal. kg.}$$

Pour calculer Q_μ dans le cas général, considérons la fonction:

$$(5) \quad F(\varphi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\lambda \cdot p^{\frac{1}{\cos\varphi \cdot \cos\lambda}} \cdot d\lambda;$$

en posant: $\alpha = \sec\lambda \cdot \log_e \frac{1}{p}$;

et utilisant le développement comme pour $e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}}}$ on arrivera au développement:

$$F(\varphi) = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot \sin^2\varphi + \gamma_2 \cdot \sin^4\varphi + \dots$$

Les coefficients γ sont donnés par la formule (11) du texte pol. On aura ainsi pour W_r annuelle et Q_μ annuelle la série suivante:

$$(6) \quad W_r = \frac{4\pi^2 R^2 C}{c} \left(\frac{1}{2} \gamma_0 + \frac{1}{8} \gamma_1 + \frac{1}{16} \gamma_2 + \frac{5}{128} \gamma_3 + \dots \right)$$

$$(7) \quad Q_\mu = \pi \frac{C}{c} \left(\frac{1}{2} \gamma_0 + \frac{1}{8} \gamma_1 + \frac{1}{16} \gamma_2 + \frac{5}{128} \gamma_3 + \dots \right)$$

On a ainsi:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = 0,8; \quad Q_\mu = 1,0716 \cdot \frac{C}{c} = 183 \text{ cal. kg.} \\ p = 0,7; \quad Q_\mu = 0,8662 \cdot \frac{C}{c} = 148,6 \text{ cal. kg.} \end{array} \right.$$

puisque en vérité p est compris entre 0,8 et 0,7, on pourra dire que 38% de la chaleur est perdue dans l'atmosphère.

IX. Applications de recherches spectrobolométriques.

Comme nous montrent les études du spectre solaire, l'admission du p constant pour tout le spectre, comme on a fait jus-

qu'ici est inadmissible. Les pertes du rayonnement dans l'atmosphère sont dues principalement à la diffusion des rayons par les particules et à l'absorption de la chaleur par la vapeur d'eau. L'intensité de la diffusion dépend de la longueur d'onde; l'air diffuse plus intensivement les vibrations bleu-violettes que les rouges et infra-rouges. Rayleigh a aussi donné une formule pour le coefficient de diffusion: $K = \frac{\beta}{\lambda^4}$ où λ est la longueur d'onde.

La constante solaire c'est l'énergie totale du spectre à la limite de l'atmosphère; si donc $e_{\lambda} \cdot d\lambda$ sera l'énergie des vibrations comprises entre λ et $\lambda + d\lambda$, alors l'aire de la courbe représentative de e_{λ} sera égale à la constante solaire. De même si nous allons tracer la courbe e'_{λ} représentative de l'énergie du spectre observé à la terre, alors l'aire correspondante représentera l'énergie reçue par l'unité de surface. Les valeurs de e_{λ} nous allons prendre d'après les mesures de Abbot et Fowle, de même que les coefficients de transmission p pour les différentes longueurs d'onde (les valeurs suivantes de p sont valables seulement pour l'air sec):

λ	0 μ ,30	0 μ ,35	0 μ ,40	0 μ ,45	0 μ ,50	0 μ ,60	0 μ ,80	1 μ ,0	1 μ ,3	1 μ ,6	2 μ ,0
e_{λ}	0,539	2,684	1,338	6,027	6,062	5,042	2,665	1,657	0,898	0,532	0,247
p_{λ}	0,4	0,4	0,54	0,64	0,7	0,76	0,86	0,9	0,97	0,97	0,9

d'après ces valeurs on construira les courbes e_{λ} et e'_{λ} pour le chemin traversé m ; on a:

$$(1) \quad e'_{\lambda} = p \lambda^m \cdot e_{\lambda}$$

Si on désigne par q_0 la constante solaire, par q l'intensité du rayonnement, nous aurons:

$$(2) \quad q = q_0 \cdot \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p \lambda^m \cdot e_{\lambda} \cdot d\lambda}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e_{\lambda} \cdot d\lambda}$$

Les figures correspondantes on trouvera dans le texte polonais.

D'après la formule (2) on a trouvé une série des valeurs des composantes normales d'intensité du rayonnement q_h ($q_h = q \cdot \sin h$) pour les différentes valeurs de h (formule 9 du texte pol.) On a aussi développé q en série de Fourier suivante:

$$(3) \quad \frac{1}{q_0} q_h = 0,790 \cdot \sin h - 0,035 \cdot \sin 3 h - 0,008 \cdot \sin 5 h + \\ - 0,001 \cdot \sin 7 h - \dots$$

Mais dans (3) on a tenu compte seulement de la diffusion (l'air sec); le terme correspondant à l'absorption de la vapeur d'eau peut être pris empiriquement (d'après Angström) égal à:

$$q_0 \cdot 0,1 \cdot (0,85)^{m \delta} (f_m)^{0,275}$$

f — tension de la vapeur d'eau, δ — densité de la diffusion. On aura le développement suivant:

$$\sin h m^{0,275} \cdot 0,9^m = 0,923 \cdot \sin h + 0,027 \cdot \sin 3 h + 0,005 \cdot \sin 5 h + \\ + 0,001 \cdot \sin 7 h + \dots$$

ce développement, joint avec (3), nous donnera l'expression suivante de la composante normale du rayonnement solaire, y compris l'absorption de la vapeur d'eau et de la diffusion:

$$(4) \quad \frac{1}{q_0} Q_h = (0,790 - 0,092 \cdot f^{0,275}) \cdot \sin h - (0,035 + 0,0027 \\ \cdot f^{0,275}) \times \sin 3 h + \\ - (0,008 + 0,0005 \cdot f^{0,275}) \sin 5 h - (0,001 + 0,0001 \cdot f^{0,275}) \cdot \sin 7 h - \dots$$

Les valeurs calculées d'après (4) sont assez bien concordantes avec celles données expérimentalement.

En se servant de la série de q_h on calculera les sommes de la chaleur pour les jours particuliers et de là pour les mois. Voici les résultats pour les valeurs mensuelles:

Janvier	2,0 cal. kg.	Juillet	16,4 cal. kg.
Février	3,9 „	Août	14,0 „
Mars	7,9 „	Septembre	9,8 „
Avril	12,0 „	Octobre	5,8 „
Mai	15,6 „	Novembre	2,5 „
Juin	17,1 „	Décembre	1,4 „

pour la quantité annuelle Q_r et pour $Q_{+\varepsilon}$ et $Q_{-\varepsilon}$ on aura:

$$Q_r = 108,4 \text{ cal. kg.}$$

$$Q_{+\varepsilon} = 85,6 \text{ cal. kg.}; \quad Q_{-\varepsilon} = 22,8 \text{ cal. kg.}$$

Nous pouvons maintenant critiquer la précision de la loi

de Lambert; on doit en effet avoir $p = \left[\frac{q}{q_0} \right]^{\frac{1}{m}}$; mais appliquant les valeurs précédentes de q on trouve p variable, notamment croissant avec m ; la table suivante donne les valeurs de $\left(\frac{q}{q_0} \right)^{\frac{1}{m}}$ que l'on pourra appeler les „coefficients moyens de transmission“.

h	$f = 0^{\text{mm}}$	$f = 2^{\text{mm}}$	$f = 8^{\text{mm}}$
90° . .	0,818	0,710	0,656
60° . .	0,811	0,711	0,657
40° . .	0,839	0,754	0,709
30° . .	0,845	0,773	0,741
20° . .	0,857	0,796	0,762
10° . .	0,860	0,811	0,790

La colonne $f = 2^{\text{mm}}$ est ordinairement applicable en hiver et la colonne $f = 8^{\text{mm}}$ en été, puisque alors il y a plus de la vapeur d'eau dans l'atmosphère. Maintenant on peut bien expliquer quelques inconvénients qui résultent de l'application de la loi de Lambert; par exemple on trouve que le rapport $\frac{Q_{+\varepsilon}}{Q_{-\varepsilon}}$ est toujours trop fort pour les différentes valeurs de p ; cela résulte de ce qu'on a pris le même p en hiver qu'en été, malgré qu'en été le soleil est plus haut et est plus grand tandis qu'en hiver il en est au contraire et par conséquent, d'après la table précédente, les valeurs de p en été sont inférieures à celles en hiver. On peut dire qu'en moyen il est plus naturel d'appliquer en été pour p les valeurs voisines de 0,7 et en hiver de 0,8.

LITERATURA. — BIBLIOGRAPHIE.

- Angot. Distribution de la chaleur à la surface du globe. Annales du Bureau Central Météorologique, année 1883.
- Abbot and Fowle. Annals of the Astrophysical Observatory of the Smithsonian Institution. Washington, 1907 i 1908.
- W. Gorczyński. O wartości stałej słonecznej według pomiarów, dokonanych sposobem ekranów absorbujących w Ursynowie (Sprawozd. Tow. Naukowego Warsz., r. 1909).
- „ Sur la marche annuelle de l'intensité du rayonnement solaire à Varsovie et sur la théorie des appareils employés (p. 202, 1906).
- Hopfner. Untersuchung über die Bestrahlung der Erde durch die Sonne mit Berücksichtigung der Absorption der Wärmestrahlen durch atmosphärische Luft nach dem Lambert Gesetze.
- Angström. Nouvelle méthode pour l'étude de la radiation solaire.
- „ Étude du spectre visible de l'étalon Hefner.
- Lindholm. Extinction du rayonnement solaire dans l'atmosphère terrestre.
- Zenker. Die Verteilung der Wärme auf der Erdoberfläche.
- Planck. Über die Theorie der Wärmestrahlung

SPIS ROZDZIAŁÓW.

	Str.
I. Rozważania ogólne	3— 5
II. Ilości ciepła dla równika i bieguna	5—15
III. Obliczenie ilości ciepła dla jakiegokolwiek szerokości geogr. φ .	15—25
IV. Straty promieniowania w atmosferze	25—31
V. Obliczenie ilości ciepła dla równika z uwzględnieniem strat promieniowania	31—40
VI. Obliczenia dla bieguna z uwzględnieniem strat promieniowania .	41— 46
VII. Obliczenia dla jakiegokolwiek szerokości φ z uwzględnieniem strat promieniowania	46—54
VIII. Całkowita ilość ciepła otrzymana przez ziemię	54—60
IX. Zastosowanie badań spektrolometrycznych	60— 71
Literatura	99

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages
I. Considérations générales	72—73
II. Quantité de chaleur pour l'équateur et les pôles	73—78
III. Recherches des quantités de chaleur pour une latitude quelconque φ	78—82
IV. Les pertes du rayonnement dans l'atmosphère	83—85
V. Calcul de la quantité de chaleur pour l'équateur en tenant compte de l'absorption atmosphérique	86—90
VI. Calcul de la quantité de chaleur pour le pôle	90—91
VII. Calcul des sommes de la chaleur pour une latitude quelcon- que φ en tenant compte de l'absorption	92—94
VIII. Quantité totale de la chaleur reçue par la terre	94—95
IX. Application de recherches spectrobolométriques	95—98
Bibliographie	99

1916.

DO NABYCIA WE WSZYSTKICH KSIĘGARNIACH NASTĘPUJĄCE DZIEŁA

wydane z zapomogi Kasy Pomocy dla osób pracujących na polu naukowym im. D-ra Med. JÓZEFA MIANOWSKIEGO, lub ofiarowane na rzecz Kasy.

NAUKI PRZYRODNICZE.

Berdau Feliks dr. Flora Tatr, Pienin i Beskidu Zachodniego, 1890, VI + 827 + 55	3 —
Braun Juljan. Badania w dziedzinie azotowych związków organicznych i ich pochodnych (1900 — 1908), 1908, VII — 238.	1 —
Chmielewski Z. Podręcznik analizy chemiczno-rolniczej 1905, 169.	1 —
Dyakowski B. Zarys metodyki elementarnego kursu historii naturalnej. Wyd. W. Jezierski. 1909, 38.	— 30
Dzieje myśli. Tom I zes. 1. O rozwoju metod badań naukowych. Wiedza ludów pierwotnych. Dzieje astronomii. Rys rozwoju fizyki. W opr. Wł. Heinricha, Ludwika Krzywickiego, Stanisława Kramsztyka i Ludwika Brunera, 1907. XXXI + 296, z 82 ilustracjami w tekście	1 50
— Tom I zes. 2. Rozwój historyczny pojęć chemicznych. Szkic ewolucji pojęć w mineralogii. Zarys rozwoju matematyki: a) rozwój matematyki do końca XVI w., b) zarys rozwoju geometrii w starożytności, wiekach średnich i w epoce odrodzenia, c) rozwój matematyki od początku w. XVII. W opr. Leona Marchlewskiego, Józefa Siomy, Michała Feldbluma, Władysława Smosarskiego i Stefana Kwietniewskiego, 1911, 279, z 33 ilustr.	1 50
— Tom II zes. 1. Historia ogólnej nauki o ziemi (geografii — geologii). Dzieje nauk biologicznych. Dzieje antropologii. Dopełnienie do historii fizyki. W opr. Wacława Nałkowskiego, Józefa Nusbauma, Ludwika Krzywickiego i L. Brunera. 1907, 471, 40 ilustracji w tekście, 2 tablice	2 —
— Tom II zes. 2. Dzieje psychologii. Dzieje językoznawstwa. W opr. S. Loria i J. Baudouina de Courtenay. Warszawa, 1909, str. 302	1 50
Faraday M. Dzieje świecy przekład M. i St. Kalinowskich. Str. XXIII + 105, 1914.	— 50
Filipowicz Kazimierz dr. Wiadomości początkowe z botaniki (podług dzieła d-ra Le Maout: „Leçons élémentaires de botanique“) z 194 drzeworytami w tekście, 1884, III + 225 + II (kart.)	— 25

- Grzybowski J. prof.** Przeglądowa mapa geologiczna ziem polskich z tekstem objaśniającym z trzema przekrojami, pod red. prof. J. Morozewicza, wyd. Zyg. Weyberg. 1912, 139, 1 mapa kol. 1 —
- Guenther Konrad.** Zagadnienia życia w świetle darwinizmu. Z upoważ. autora spolszczyli Ad. Kudelski i Kazimierz Kulwieć. 1906, XIX + 425 2 —
- Holleman A. F. prof.** Podręcznik chemii nieorganicznej, z 3 niem. wyd. przeł., według 7 wyd. niem. poprawił K. Jabłczyński wyd. 2. 1910, X + 410 + 1 1 50
- Jędrzejewicz J.** Kosmografia. Wyd. 2 oprac. przez d-ra M. Ernsta z 246 fig. w tekście i 11 tabl. 1907, XVI — 442 3 —
- Klein P.** Meteorologia ogólna. Przełożył R. Merecki. Warszawa. 1915 1 80
- Kołodziejczyk January.** Stosunki florystyczne jeziora Świtezi. . . — 50
- Kontkiewicz S.** Krótki podręcznik mineralogii. 1907, V + 226 + 3 tabl. (Karton) 1 —
- Kozłowski Wł. M.** Zasady przyrodoznawstwa w świetle teorii poznania. 1905, 311 1 —
- Kulwieć Kazimierz.** Chrząszcze polskie. Klucz do określania owadów tęgopokrywych, dla użytku młodzieży, amatorów i ogrodników. 1907, 227. — 60
- Loth E.** Wskazówki do badań antropol. na człowieku żywym. 1914 — 75
- Malinowski Edmund dr.** Świat roślin. O kształtach roślin, powstawaniu gatunków, krążeniu soków w roślinach. 1912, VI + 2 nlb 145 + 2 nlb + 108 rys. + 2 tabl. barwne — 30
- Mendel G.** Badania nad mieszańcami roślin. przełoż. W. Wolska. 1915, II + 67 — 50
- Merczyng H.** Teorya prądu elektrycznego. Zarys zasadniczych praw ustalonego i nieustalonego prądu elektrycznego i towarzyszących mu zakłóceń magnetycznych. Podstawy elektromagnetycznej teoryi światła. 1905, IX + 92 — 75
- Merecki R.** Klimatologia ziem polskich. Warszawa. 1915 1 80
- Miłobędzki Tadeusz.** Szkoła analizy jakościowej. 1910, VIII — 271. (Karton) 1 20
- Mohn H.** Zasady meteorologii, przełożył St. Kramsztyk. 1888, XVI + 218 + VI, z 45 drzeworytami i 25 tablicami litografowanymi. 1 —
- Neumayr M. prof.** Dzieje ziemi, w opr. prof. d-ra Wiktora Uhliga:
I. Geologia ogólna. Wyd. 2 pod red. J. Morozewicza, opracował K. Koziorowski, z dopełn. M. Limanowskiego. 1912, XX + 837, mapa barwna, 16 tabl. 300 rys. w tekście. 4 —
II. Geologia opisowa, przeł. z 2 niem. wyd. J. Lewiński i K. Koziorowski; dopełnienia poczynili: K. Bohdanowicz i J. Grzybowski. Wydał J. Morozewicz. 1908, XVI + 674 + 343 rys. w tekście, 2 mapy barwne, 9 tabl. (1 kolor.) 4 —
- Nusbaum Józef dr.** Zasady anatomii porównawczej.
I. Wiadomości wstępne i anatomia porównawcza zwierząt bezkręgowych; 211 rys. w tekście, oraz 5 tablic litografowanych. 1899, III + 744 + XXI.
II. Anatomia porównawcza zwierząt kręgowych z 134 drzewor. 1903, X + 552 4 —
- Nusbaum J. dr.** Zootomia praktyczna. Wyd. staraniem d-ra Jana Tura, z 100 drzeworytami. 1908, VIII + 263 2 —
- Pamiętnik Fyzjograficzny**, wydany staraniem E. Dziewulskiego i B. Znatowicza:
Tom III. Dział I. Meteorologia i hydrografia. II. Geologia z chemią. III. Botanika i zoologia. IV. Antropologia. V. Misc-

- lanea. 1883, 536 + 2 + 2 + 13 tab., rys. lit., 21 drzewor. w tekście;
 V. Dział I, II, III, IV, V. 1885, 4 nlb. 113 + 76 + 233 + 74 + 111 + 4.
 VIII. Dział I, II, III, IV, V. 1888, 2 nlb. + XIX + 19 + 155 + 389 + 17 + 33 + 4 nlb.; 27 tabl. rys. lit. i drzew. w tekście;
 Wydawcy: A. Słóarski i Br. Znatowicz.
 IX. Dział I, II, III, IV. 1889 2 nlb. + XIX + 235 + 45 + 11 + 295 + 77 + IV, 24 tabl. rys. lit. i drzewor. w tekście.
 X. Dział I, II, III, IV. 1890. 2 nlb. + XXI + 202 + 75 + 437 + 2 nlb. + 20 + II + II, 29 tabl. rys. lit. i drzewor. w tekście.
 XI. Dział I, II, III. 1891, 8 + 18 + 186 + 162 + 133 + II + II 14 tabl. rys. lit. i drzewor. w tekście.
 XII. Dział I, II, III, IV. 1892. 17 + 214 + 235 + 23 + II + II + 12 tabl. rys. lit. i drzewor. w tekście.
 XIII. Dział I, II, III. 1895, 19 + 152 + 231 + I + I + 7 tabl. rys. lit.
 XIV. Dział I, II, III. 1896, 23 + 151 + 30 + 228 + I + I + 7 tabl. rys. lit.
 Wydawcy: W. Wróblewski i Br. Znatowicz.
 XV. Dział I, II, III, IV. 1898, 19 + 183 + 285 + 39 + I + I + 4 mapy + 3 tabl. lit.
 XVI. Dział I, II, III. 1900. 13 + 139 + 13 + 44 + 208.
 XVII. Dział I, II, III, IV. 1902, 16 + 134 + 144 + 104 + 22 + I + I + 1 mapa i tabl. lit.
 XVIII. Dział I, II, III, IV, V. 1904, 61 + 193 + 147 + 104 + 24 + 42 + I + I.
 XIX. Dział I, II, III, IV. 1907, 79 + 183 + 59 + 82 + 7 + I + I.
- Pamiętnik Fyzjograficzny**, wyd. star. E. Dziewulskiego i B. Znatowicza:
 XX. Meteorologia i Miscelanea 1910, XLI + 203 + 46, tom 7 50
 Wydawcy: K. Kulwieć i K. Stołyhwo.
 XXI. Dział I, II, III, IV, V. 1913, IX + XV + 155 + 30 + 25 + 117 + 48 + 41 + 4 mapy + 19 rys. + 24 tabl. fot.
 XXII. Dział I, II, III, IV, V. 1914 IX + XV + 155 + 30 + 25 + 117 + 48 + 41 + 4 mapy + 19 rys. + 24 tabl. fot.
- Pogorzelski W.** Badania teoretyczne ilości ciepła, otrzymywanych na kuli ziemskiej, z uwzględnieniem strat promieniowania w atmosferze — 50
- Pol G.** Słownik łacińsko-polski nazw gatunk. roślin, (12+17), 1904, 59 — 50
- Pożaryski M.** Podstawy naukowe elektrotechniki łącznie z zasadami pomiarów, 1915, X + 415, z 427 rys. w tekście 2 40
- Siemiradzki J.** Gąbczaki jurajskie ziem polskich (Paleontologia ziem polskich pod red. J. Lewińskiego № 1), 1913, 49 + tabl. VIII. 1 50
- Silberstein Ludwik.** Elektryczność i magnetyzm. I. 1908, VIII + 366 3 50
 II. 1910, 304 3 — III. cz. I, 193, 173 . . . 1 80
- Słownik Geograficzny** Królestwa Polskiego i innych krajów słowiańskich. Komplet 60 —
- Strasburger E. dr., Jost L. dr., Schenk K. dr., Karsten G. dr.** Podręcznik botaniki dla szkół wyższych. Z XI wyd. niem. przełożyli Jadwiga i Karol Szejnbockowie. Zeszyt I. 1913, 160. Zeszyt II. 1914, 161—320. Zeszyt III. 1915 3 —
- Świat i człowiek.** Zeszyt I, wyd. 2. Pojęcie rozwoju. Wszczęświat i jego rozwój. Rozwój ziemi, opr. I. Waserberg, S. Kramsztyk, W. Nałkowski, 1908, XVI + 215 + 82 ilustr. + 3 t. kolor. . . 1 35
 Zeszyt II, wyd. 2. Rozwój życia organicznego. Genealogia roślin. Genealogia zwierząt. Pochodzenie człowieka. Rozwój człowieka, opr. J. Nusbaum, Z. Wóycicki, J. Eismond, K. Stołyhwo, L. Krzywicki, 1912, 321 + 73 ilustr. + 1 tabl. . . 1 60

Zeszyt III, wyd. 2. Rozwój kultury. Rozwój mowy. Rozwój stosunków gospodarczych. W opr. L. Krzywickiego i K. Appela. Warszawa 1912, str. 356 + 65 ilustr.	1 80
Zeszyt IV, wyd. 2. Rozwój społeczny. Rozwój psychiczny. Rozwój w dziejach sztuki. Znaczenie rozwoju. W opr. L. Krzywickiego, M. Borowskiego, Wł. Tatarkiewicza i F. Znanieckiego. Warszawa, 1913, str. 355 + 5 ilustr.	2 —
Szokalski W. T. Początek i rozwój umysłowości w przyrodzie, 1885, VIII + 468.	— 60
Tombeck D. i Gouard E. Chemia przemysłowa, przełożył J. Harabaszewski. 1915, XI + 422	1 80
Warming E. Zbiorowiska roślinne. Zarys ekologicznej geografii roślin. Z wydania niem. E. Knoblauch'a przeł. z upow. autora E. Strumpf i J. Trzebiński. 1900, XV + 450.	1 50
Witkowski Aug. prof. Uniw. Jagiellońskiego. Zasady fizyki. Tom I, wyd. 3. (Fizyka ogólna. Dynamiczne własności materii. Akustyka). 1908, XV + 536 + 205 fig.	2 —
Tom I, wydanie 4-te, 1915.	2 40
Tom II, wyd. 2 (Ciepło. Fizyka cząsteczkowa. Promieniowanie). 1908, X + 651 + 285 fig. + 2 tabl. kolor.	2 40
Tom III. (Elektryczność i magnetyzm). 1914, IX + 1 nbl. + 656 + 326 fig.	2 40
W. K. Rzeki i jeziora, tekst objaśniający do mapy hydrograf. dawnej Słowiańszczyzny, część półn.-zachodnia. 1883, II + 125 + 1 nbl. — 5	
Wóycicki Zygmunt. Obrazy roślinności Królestwa Polskiego. Zeszyt I. Roślinność niziny Ciecchocińskiej. 1911, 12 nbl. + tabl. 10 + 20 str. nbl. objaśnień	1 —
Zeszyt II. Roślinność wyżyny Kielecko-Sandomierskiej. 1912, 36 + 10 tabl.	1 —
Zeszyt III. Roślinność wyżyny Kielecko-Sandomierskiej 1912, 32 + 10 tabl.	1 —
Zeszyt IV. Roślinność Ojcowa. 1913, 32 + 10 tabl.	1 —
Zeszyt V. Roślinność Ojcowa. 1913, 39 + 10 tabl.	1 —
Zeszyt VI. Roślinność Ojcowa. 1913, 26 + 10 tabl.	1 —
Zeszyt VII. Roślinność okolic Częstochowy i Olsztyna. 1914, 31 + 11 tabl.	1 —



