

48 / 1980

Walenty Dudziak

JEDNOWYMIAROWE
DYNAMICZNE POLE NAPRĘŻEŃ
WYWOŁANE POLEM TEMPERATURY
I KONCENTRACJI

P. 269



WARSZAWA 1980

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 24 listopada 1980 r.
Zarejestrowana pod nr 48/1980



57113



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 130 egz. Ark.wyd. 0,4. Ark. druk. 1.
Oddano do drukarni w listopadzie 1980 r.
Nr zamówienia 771/o/80

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Walenty Dudziak
Pracownia Teorii Konsolidacji
i Termodyfuzji

JEDNOWYMIAROWE DYNAMICZNE POLE
NAPRĘŻEŃ WYWOŁANE POLEM
TEMPERATURY I KONCENTRACJI

1. Wstęp

Dynamiczne zagadnienia teorii termodyfuzji stanowią istotny problem z punktu widzenia zastosowań technicznych np. w procesach obróbki cieplno-chemicznej. Podstawy teoretyczne zostały szczegółowo omówione przez Nowackiego [1], [2].

W niniejszej pracy wyznaczono rozkład naprężeń w półprzestrzeni sprężystej $X \geq 0$ wywołanych obciążeniem termicznym i dyfuzyjnym przyłożonym do powierzchni półprzestrzeni. Zagadnienie potraktowano jako dynamiczne. Rozpatrywany problem należy do klasy zagadnień sprzężonej termodyfuzji. Jak dotąd brak prac zawierających ilościową i jakościową ocenę efektów inercji i dyfuzji oraz ich wpływu na stan ośrodka.

W szczególnym przypadku problem sprowadza się do znanego z teorii naprężeń cieplnych zagadnienia Daniłowskiej [3]. Przeprowadza się analizę jakościową i ilościową wyników pracy i porównuje z wynikami uzyskanymi przez Mura [4] dla termo-sprężystości.

2. Sformułowanie zagadnienia.

Rozważymy półprzestrzeń sprężystą $x \geq 0$, której powierzchnia $x=0$ została nagle ogrzana temperaturą Θ_0 i do której przyłożono nagle pole dyfuzji C_0 /rys. 1/. Zakładamy, że brzeg półprzestrzeni $x=0$ jest wolny od naprężeń oraz że warunki początkowe dla temperatury, koncentracji i przemieszczeń są jednorodne. Przyjmujemy, że ciało ma własności izotropowe i doskonale sprężyste, a jego parametry fizyczne nie zależą od temperatury i koncentracji.

Stan ośrodka opisuje układ równań termodyfuzji [2]

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) u_{i,ki} = \rho \partial_t^2 u_i + \gamma \Theta_{,i} + \gamma C_{,i}$$

$$(2.1) \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{\alpha_1} \partial_t \right) \Theta + \alpha_0 \partial_t C - \rho_0 \partial_t \mathcal{E} = 0,$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\alpha_2} \partial_t \right) C + \beta_0 \nabla^2 \Theta + \varepsilon_0 \nabla^2 \mathcal{E} = 0.$$

Warunki graniczne dla temperatury, koncentracji i naprężeń przyjmuje się w postaci

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta(x, t=0) = 0, \\ \Theta(x=0, t) = \Theta_0, \quad \Theta(x \rightarrow \infty, t) \rightarrow 0, \quad t > 0 \end{array} \right.$$

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} C(x, t=0) = 0, \\ C(x=0, t) = C_0, \quad C(x \rightarrow \infty, t) \rightarrow 0, \quad t > 0 \end{array} \right.$$

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11}(x=0, t) = 0, \\ \sigma_{11}(x \rightarrow \infty, t) \rightarrow 0, \quad \sigma_{22}(x \rightarrow \infty, t) \rightarrow 0, \quad t > 0 \end{array} \right.$$

3. Wyznaczenie stanu naprężenia.

Współrzędne stanu naprężenia w rozważanej półprzestrzeni sprężystej wyznaczmy w oparciu o funkcję potencjału dyfuzyjno-termosprężystego przemieszczenia $\bar{\Phi}$, która w przypadku jednowymiarowym zdefiniowana jest związkiem

$$(3.1) \quad u_1 = \frac{\partial \bar{\Phi}(x, t)}{\partial x}$$

Układ sprzężonych równań termodyfuzji przy wykorzystaniu (3.1) dla rozważanego zagędnienia przyjmie postać

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial t^2} &= m_T \Theta + m_C C, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Theta + \alpha_0 \frac{\partial C}{\partial t} - \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} &= 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial t} \right) C + \beta_0 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \varepsilon_0 \frac{\partial^4 \bar{\Phi}}{\partial x^4} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$m_T = \frac{\gamma_T}{\lambda + 2\mu}, \quad m_C = \frac{\gamma_C}{\lambda + 2\mu}, \quad k = \left[\frac{(1-D) 2\mu}{(1-2D) \xi} \right]^{1/2},$$

przy czym k jest prędkością rozchodzenia się fali dylatacyjnej w ośrodku sprężystym.

Współrzędne tensora naprężenia dla przypadku jednowymiarowego mają postać

$$(3.3) \quad \sigma_{11} = \xi \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial t^2}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \xi \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial t^2} - 2\mu \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2}.$$

Stosując do układu równań (3.2) transformację Laplace'a oraz wykonując rozprężenie względem funkcji potencjału $\bar{\Phi}$ otrzymamy podstawowe równanie, którego rozwiązanie posłużyć może do wyznaczenia temperatury, koncentracji i stanu naprężenia w ośrodku. Równanie to ma postać

$$(3.4) \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2}{dx^2} - k_1^2 P \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} - k_2^2 P \right) - \frac{P^2}{(1 + \epsilon_0 m_c) k^2} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda_1^2 P \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda_2^2 P \right) \right] \bar{\Phi} = 0,$$

gdzie

$$\left. \begin{matrix} \lambda_1^2 \\ \lambda_2^2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} + \alpha_0 \beta_0 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\kappa_1} - \frac{1}{\kappa_2} + \alpha_0 \beta_0 \right)^2 + \frac{4\alpha_0 \beta_0}{\kappa_2}} \right\},$$

(3.5)

$$\left. \begin{matrix} k_1^2 \\ k_2^2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\kappa_1'} + \frac{1}{\kappa_2'} + \alpha_0' \beta_0' \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\kappa_1'} - \frac{1}{\kappa_2'} + \alpha_0' \beta_0' \right)^2 + \frac{4\alpha_0' \beta_0'}{\kappa_2'}} \right\}.$$

przy czym pomiędzy współzrędnymi termodyfuzji zachodzą następujące związki

$$\frac{1}{\kappa_1'} = \frac{1}{\kappa_1} + \eta_0 m_T, \quad \frac{1}{\kappa_2'} = \frac{1}{\kappa_2} \frac{1}{(1 + \epsilon_0 m_c)},$$

$$\alpha_0' = \alpha_0 - \eta_0 m_c, \quad \beta_0' = \frac{(\beta_0 + \epsilon_0 m_T)}{(1 + \epsilon_0 m_c)}.$$

Rozwiązanie równania (3.4) jest skomplikowane i dlatego w niniejszej pracy zajmiemy się rozwiązaniem szczególnego przypadku równania (3.4) a mianowicie gdy $\eta_0 \equiv 0$, $\epsilon_0 \equiv 0$. Wówczas równanie potencjału ma postać

$$(3.6) \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{P^2}{k^2} \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda_1^2 P \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda_2^2 P \right) \bar{\Phi} = 0.$$

Temperatura i koncentracja dla tego przypadku zostały wyznaczone wcześniej w pracy [5] i mają postać

$$(3.7) \quad \theta(x, t) = \frac{1}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[A_1 \operatorname{erfc}\left(\frac{\lambda_1 x}{2\sqrt{t}}\right) - A_2 \operatorname{erfc}\left(\frac{\lambda_2 x}{2\sqrt{t}}\right) \right],$$

$$(3.8) \quad C(x, t) = \frac{-1}{\alpha_0 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[A_1 \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\lambda_1 x}{2\sqrt{t}}\right) - A_2 \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\lambda_2 x}{2\sqrt{t}}\right) \right]$$

gdzie

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x), \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

$$A_1 = -\left[C_0 \alpha_0 + \theta_0 \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_2}\right) \right], \quad A_2 = -\left[C_0 \alpha_0 + \theta_0 \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1}\right) \right].$$

Rozwiązanie równania (3.6) wyraża się wzorem

$$(3.9) \quad \bar{\Phi}_L = \frac{k^2}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) p^2} \left\{ \left[\frac{B_1}{(p - \lambda_1^2 k^2)} - \frac{B_2}{(p - \lambda_2^2 k^2)} \right] e^{-\frac{x}{k} p} + \right. \\ \left. - \frac{B_1}{(p - \lambda_1^2 k^2)} e^{-\lambda_1 x \sqrt{p}} - \frac{B_2}{(p - \lambda_2^2 k^2)} e^{-\lambda_2 x \sqrt{p}} \right\},$$

gdzie

$$B_i = A_i \left[m_r - \frac{m_c}{\alpha_0} \left(\lambda_i^2 - \frac{1}{\lambda_i}\right) \right], \quad i=1,2.$$

Do wyznaczenia naprężeń σ_{11} ^{wykorzystamy} pierwszy z wzorów (3.3). Po wykonaniu transformacji Laplace'a otrzymamy

$$(3.10) \quad \sigma_{11L} = \xi \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial t^2} \right\} = \xi P^2 \bar{\Phi}_L .$$

Wykonując odwrotną transformację Laplace'a, naprężenie σ_{11} wyrazi się wzorem

$$(3.11) \quad \sigma_{11}(\tau, \xi) / K^* = \left\{ G_1(\tau, \xi) \cdot H(\tau - \xi) - F_1(\tau, \xi) + \right. \\ \left. - b \left[G_2(\tau, \xi) \cdot H(\tau - \xi) - F_2(\tau, \xi) \right] \right\} ,$$

gdzie

$$G_1(\tau, \xi) = e^{-\tau - \xi} , \quad G_2(\tau, \xi) = e^{-\sigma^2(\tau - \xi)} ,$$

$$F_1(\tau, \xi) = \frac{1}{2} e^{-\tau} \left[e^{-\xi} \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) + e^{\xi} \operatorname{erfc} \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) \right] ,$$

$$F_2(\tau, \xi) = \frac{1}{2} e^{-\sigma^2 \tau} \left[e^{-\sigma^2 \xi} \operatorname{erfc} \left[\sigma \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau} \right) \right] + e^{\sigma^2 \xi} \operatorname{erfc} \left[\sigma \left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau} \right) \right] \right] ,$$

$$K^* = \frac{(2+2\mu)B_1}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} , \quad b = \frac{B_2}{B_1} , \quad \sigma^2 = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} , \quad \tilde{\tau} = \lambda_1^2 k^2 t , \quad \xi = \lambda_1^2 k x ,$$

$H(\tau - \xi)$ oznacza funkcję Heaviside'a.

Naprężenia σ_{22} wyznaczmy ze związku (3.3), który po wykonaniu transformacji Laplace'a przyjmie postać

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \sigma_{22} = \sigma_{33} &= \frac{\lambda}{k^2} \ddot{\Phi} - 2\mu m_T \Theta - 2\mu m_C C = \\ &= \frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)} \sigma_{11} - 2\mu m_T \Theta - 2\mu m_C C . \end{aligned}$$

Po wykonaniu przepisanych przekształceń naprężenie σ_{22} wyrazi się wzorem

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \sigma_{22}(\tau, \xi) &= \frac{K^*}{(\lambda + 2\mu)} \left\{ \lambda \left[G_1(\tau, \xi) H(\tau - \xi) - F_1(\tau, \xi) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - b \left[G_2(\tau, \xi) H(\tau - \xi) - F_2(\tau, \xi) \right] - 2\mu F_3(\tau, \xi) \right\} , \end{aligned}$$

gdzie

$$F_3(\tau, \xi) = \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) - b \operatorname{erfc}\left(\frac{a\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) .$$

Na powierzchni półprzestrzeni naprężenia σ_{22} mają stałą wartość wynoszącą

$$(3.14) \quad \sigma_{22}(x=0, t) = \sigma_{33}(x=0, t) = -\frac{2\mu(1-b)B_1}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} .$$

W pozostałym obszarze półprzestrzeni mają analogiczny charakter jak naprężenia σ_{11} .

Jak łatwo zauważyć rozwiązania (3.11) oraz (3.14) w szczególnym przypadku dla $\alpha_0 = \beta_0 = \frac{1}{2k_2} = 0$ przechodzą w znane rozwiązania dla termosprężystości uzyskane przez Denilowską [3]

$$(3.15) \quad \sigma_{11}(\tau, \xi) / \gamma_T \Theta_0 = G_1(\tau, \xi) H(\tau - \xi) - F_1(\tau, \xi) \cdot$$

$$(3.16) \quad \sigma_{22}(\tau, \xi) = 2m_T \Theta_0 [G_1(\tau, \xi) H(\tau - \xi) - F_1(\tau, \xi)] + \\ - 2\mu m_T \Theta_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) \cdot$$

4. Obliczenia liczbowe i analiza wyników.

Dla wykonania obliczeń liczbowych przyjęto, że ośrodek ma własności stali, natomiast czynnikiem dyfundującym jest azot. Wartości liczbowe współczynników termodyfuzji przyjęto identyczne jak w pracy [6]. W oparciu o nie obliczono stałe materiałowe występujące we wzorze na naprężenia σ_{11} określone wzorem (3.11). Z analizy wzoru (3.11) wyraźnie widać, że funkcje $F_1(\tau, \xi)$ i $F_2(\tau, \xi)$ mają charakter zmodyfikowanej fali dyfuzyjnej, która powstaje od razu w każdym punkcie półprzestrzeni. Funkcje $G_1(\tau, \xi)$ i $G_2(\tau, \xi)$ charakteryzują zmodyfikowaną falę sprężystą posuwającą się z prędkością k .

Rezultaty obliczeń liczbowych ilustrują wykresy przedstawione na rysunkach 2 i 3. Wykonano je w analogicznej formie jak wykresy w pracy [4] odniesione do teorii naprężeń cieplnych w celu przeprowadzenia analizy porównawczej.

Na rysunkach 2 i 3 przedstawiono zmianę funkcji σ_{11}/K^* w zależności od odległości $\xi = \lambda_1 k x$ dla wartości $\tau = 2_1^2 k^2 t = 1$ (rys. 2) oraz $\tau = 100$ (rys. 3). Linia przerywaną zaznaczono funkcję naprężeń $\sigma_{11}/\gamma_T \Theta_0$ dla zagadnienia termosprężystego [4]. Z wykresu przedstawionego na rys. 2 wynika, że w dowolnym punkcie półprzestrzeni sprężystej powstaje od razu naprężenie charakteryzowane członem $-K^* [F_1(\tau, \xi) - b F(\tau, \xi)]$

W chwili $\mathcal{Z} = \xi$ dochodzi do tego punktu zmodyfikowana fala sprężysta, a naprężenie σ_{11} doznaje skoku o stałą wartość K^* . Po przejściu fali sprężystej naprężenie w rozpatrywanym punkcie maleje do stałej wartości.

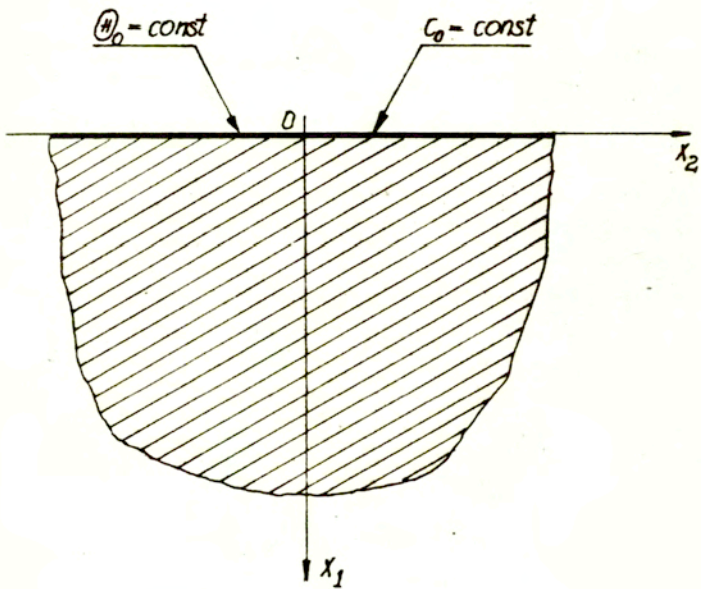
Z wykresów wykonanych dla $\mathcal{Z} = 1$ oraz $\mathcal{Z} = 100$ wynika, że czoło fali leży w punkcie $\xi = \mathcal{Z}$ a skok naprężeń ma wartość stałą wynoszącą $K^* = B_1(2+2\mu)/(2_1^2 - I_2^2)$, niezależną od odległości. W punkcietym jest również największe wartości naprężenia w dostatecznie dużej odległości od brzegu półprzestrzeni.

Cechą charakterystyczną wyników jest pojawienie się stałych naprężeń w półprzestrzeni po przejściu przez przekrój $\xi = const$, w którym nastąpił skok naprężeń.

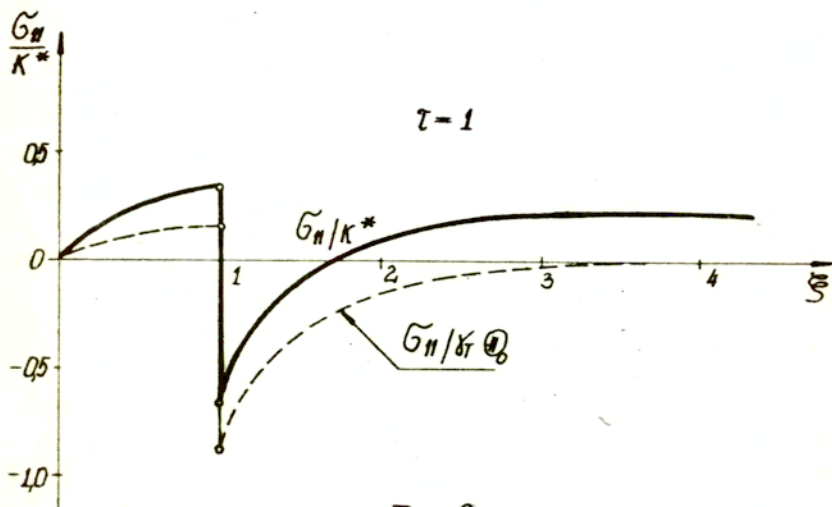
Dla skończonych wartości \mathcal{Z} oraz dla $\xi \rightarrow \infty$ naprężenie σ_{11} zanika.

Porównanie wyników uzyskanych dla termosprężystości i termodyfuzji wskazuje, że naprężenia mają ten sam charakter jakościowy, lecz różnią się ilościowo. Proces dyfuzji powoduje powstanie w ośrodku pewnych dodatkowych naprężeń, które zanikają w dostatecznie dużej odległości od brzegu.

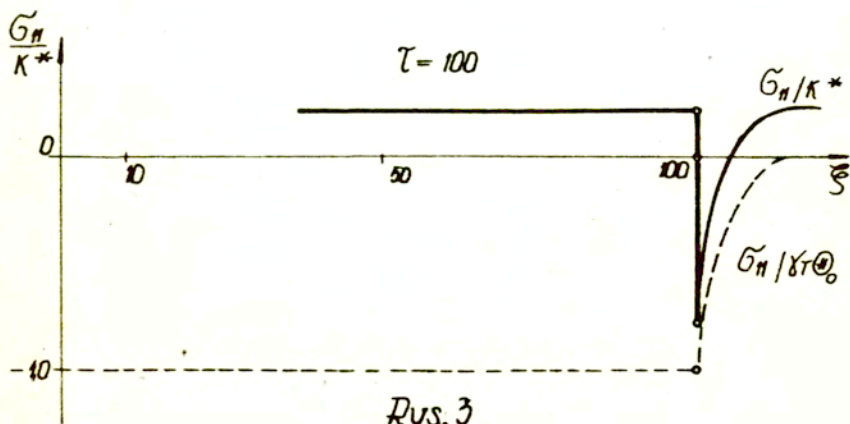
Przedstawione wyniki nie wyczerpują problemu. Istotnym będzie rozwiązanie pełnego układu równań (3.2) i określenie wpływu członów dylatacyjnych w równaniach dyfuzji i ciepła na stan naprężenia w ośrodku. Porównanie takich wyników z rezultatami niniejszej pracy może rzucić nowe światło na dynamiczne problemy termodyfuzji.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Literatura.

- [1] W. NOWACKI, Dynamical Problem of Thermodiffusion in Solids.I. Bulletin de L Academie Polonaise des Sciences, vol. XXII, No 1, 1974.
- [2] W. NOWACKI, Dynamical Problem of Thermodiffusion in Solids.II, Bulletin de L Academie Polonaise des Sciences, vol. XXII, No 3, 1974.
- [3] W.J. DANIŁOWSKAJA, Temperaturnyje napriazhenija w uprugom połuprostranstwie woznikajuszczije wsledstwie wniezapnogo nagriewa jego granicy, Prikl. Mat. Miech., vol.14, No 3, 1950.
- [4] T. MURA, Thermal Strains and Stresses in Transient State, Proc. Second Jap. Nat. Congr. Appl. Mech., 1952.
- [5] J. WERES, Naprężenia w półprzestrzeni sprężystej wywołane działaniem na brzegu stałej temperatury i stałej koncentracji, Zeszyty Naukowe PP, nr 18, 1976.
- [6] W. DUDZIAK, Wpływ członów dylatacyjnych w równaniach termodyfuzji na rozkład temperatury i koncentracji, Prace IPPT, nr 65, 1978.