ZYGMUNT JANISZEWSKI.

O realizmie i idealizmie w matematyce. [1]

W ostatnim dziesiątku lat wśród matematyków powstał spór, który podzielił ich na obozy: *realistów i idealistów.*

Pierwsze początki tego sporu datują się od powstania *Teorji mnogości* (około r. 1870). Wielkie to dzieło gienjuszu Jerzego Cantora spotkało się z ogólnym sceptycyzmem, gdyż zarówno przedmiot, jak metoda badania są tu zupełnie nowe, zasadniczo różne od znanych przedtym. Dzięki jednak swym licznym zastosowaniom w Analizie matematycznej, zdobyła sobie Teorja mnogości uznanie powszechne, lecz niezupełne. Dla byłych przeciwników Teorji mnogości, którzy teraz przyjęli część tej nauki, lecz nie przyjęli całej (t. zw. dziś *realistów*), nastał czas rewizji własnego sceptycyzmu względem niej. Zmuszeni byli sprecyzować swoje poglądy, powiedzieć jasno, czego i dlaczego nie przyjmują w teorji mnogości.

Z drugiej strony dawna nieufność do teorji Cantora odżyła, gdy odkryto *antynomje*, związane z pojęciem mnogości (t. j. pojęciem zbioru). Kwestja stała się palącą i zmusiła również zwolenników Cantora (t. zw. dziś *idealistów*) do poczynienia pewnych ograniczeń w używaniu pojęcia zbioru.

W rezultacie oba obozy musiały zastanowić się głębiej nad podstawami rozumowań matematycznych. Do odrzucenia bowiem całej Teorji mnogości antynomje zmusić już nie mogły: przez ten czas cała Analiza matematyczna ugruntowała się na niej.

Okazją do wypowiedzenia się obu stron stało się ogłoszone

---

[1]) Szkic niniejszy jest moim wykładem habilitacyjnym, wypowiedzianym 11 lipca 1913 r. na posiedzeniu Wydziału Filozoficznego uniwersytetu we Lwowie. Por. artykuł Poincaré'go w tej samej materji w jego pośmiertnych *Dernières pensées*, o tym samym charakterze informacyjnym, a który poznałem dopiero po wygłoszeniu niniejszego odczytu.

w r. 1904 twierdzenie Zermeli *„o możliwości dobrego uporządkowania każdej mnogości"* (t. zw. *Wohlordnungsatz*), którego dowód opiera się na sformułowanym po raz pierwszy przez Zermelę pewniku, t. zw. *zasadzie dowolnego wybierania* (*Auswahlprinzip*), odrzucanym przez realistów.

Za przedstawiciela realistów może być uważany Borel i poniekąd Poincaré. Po stronie idealistów stanęli dwaj z największych dziś matematyków: Hadamard i Hilbert.

U podłoża całego sporu znajduje się pytanie: „co to znaczy istnieć?" Zagadnienie nasze, to wielkie i dawne *zagadnienie istnienia.*

Na to pytanie otrzymujemy zwykle taką odpowiedź: „istnieć, w matematyce, to znaczy: być wolnym od sprzeczności".

Przyjrzyjmy się tej odpowiedzi bliżej.

Żeby „być wolnym od sprzeczności" trzeba już poniekąd „być". O czymś, co nie jest nam w żaden sposób dane, nie możemy orzec, czy jest, czy nie jest sprzecznym. To coś dane—istniejące—to jest określenie. I rzeczywiście, wszyscy rozumieją odpowiedź tę tak, że to określenie ma być wolne od sprzeczności.

„Niezawieranie sprzeczności" możemy uważać tylko za warunek konieczny istnienia w matematyce. „Wszystko, co istnieje, jest wolnym od sprzeczności"—to jest założenie, czy też pewnik. Odwrócić to zdanie i powiedzieć: „wszystko, co jest wolnym od sprzeczności, istnieje"—niema właściwie sensu (znaczenia).

Możemy z tego wyciągnąć kryterjum następujące: „definicja, której ma odpowiadać przedmiot (t. j. coś istniejącego), musi nie zawierać sprzeczności". Lecz i tego zdania odwrócić nie można. Niezawieranie sprzeczności jest warunkiem koniecznym dobroci definicji, lecz nie wystarczającym; dobra definicja musi spełniać inne jeszcze warunki, np. musi nie zawierać błędnego koła. Musi wogóle mieć sens.

Poincaré podał dwa nowe warunki, którym ma czynić zadość dobre określenie: ma być ono *predykatywne* i ma się *dać wypowiedzieć za pomocą skończonej ilości wyrazów.* Warunek predykatywności nie wchodzi bezpośrednio w ramy zajmującego nas sporu między realistami a idealistami; zaznaczę tylko, że spornym jest i on. Co do drugiego warunku, to w pierwszej chwili postawienie go musi się wydać dziwnym: nasuwa się pytanie, czy podawał kto definicje, złożone z nieskończonej ilości wyrazów? Znaczenie tego postulatu ujrzymy za chwilę.

W rozpatrywaniu powyższym odnaleźliśmy tylko jeden warunek konieczny istnienia w matematyce. Możemy jednak podać i jeden warunek wystarczający. Brzmi on: *istnieje wszystko to, co jest określone przez dobrą definicję*. Zdaniu temu można czynić zarzuty: nie posiadamy kryterjów dobroci definicji (znamy jedynie parę warunków koniecznych, lecz nie wystarczających); możemy więc przez wyrażenie „dobra definicja" rozumieć tylko taką definicję, która *coś określa*, co zdaje się znaczyć to samo, co: „której przedmiot istnieje". Warunek nasz byłby więc tautologiczny. Przypuśćmy jednak, że umiemy bezpośrednio odróżnić dobrą definicję od złej — wobec czego zarzuty postawione powyżej upadłyby.

Realiści idą krok dalej: ten warunek wystarczający istnienia uważają jednocześnie za warunek konieczny. Przez to otrzymują określenie istnienia, otrzymują odpowiedź na postawione przez nas na początku pytanie: „co to znaczy istnieć?" Odwracają więc oni zdanie: „to, co posiada definicję, istnieje" i utrzymują: „to, co istnieje, posiada definicję". Wyjmują tu oczywiście kilka pojęć pierwszych, które uważają za nie dające się określić.

Dla realistów więc *„istnieć"* (*w matematyce*) znaczy *„posiadać* (*dobrą*) *definicję"*.

Przyjrzyjmy się bliżej temu określeniu istnienia. Pomińmy wspomniane powyżej trudności, związane z pojęciem „dobrej definicji"—(z tautologiczności podanego warunku wystarczającego istnienia wynikałoby, że niniejsze określenie zawiera błędne koło). Ażeby określenie to nie zawierało innego, zupełnie wyraźnego błędnego koła — „istnieje (w matematyce) to, czego definicja istnieje" — trzeba, żeby „istnienie" po drugiej stronie zdania znaczyło co innego, niż po pierwszej, t. j. nie istnienie w matematyce. I rzeczywiście realiści rozumieją to istnienie definicji jako istnienie *zjawiska psychicznego*, jako *pomyślenie* definicji. To właśnie sprowadzenie istnienia matematycznego do zjawisk psychicznych uważają za jego wytłumaczenie.

W tym wytłumaczeniu jednak potrzebna jest poprawka. Bowiem dotychczas tylko skończona ilość definicji mogła być przez ludzi pomyślaną, a więc istniałaby tylko skończona ilość przedmiotów matematycznych. Jednak i realiści przyznają, że np. liczb całkowitych jest ilość nieskończona. Rozumieją też oni przez „definicja istnieje", że jest ona *możliwą*, *może* istnieć. Lecz „*może* istnieć" nie da się sprowadzić bez reszty do stanów psychicznych—przez co redukcja istnienia do posiadania definicji traci swą wyżej zaznaczoną wartość. I wogóle „może" nie jest jaśniejszym od „istnieć", jeżeli nawet nie sprowadza się do istnienia (matematycznego).

Idealiści nie silą się na określenie „istnienia". „Istnieć" to znaczy istnieć! Jest to pojęcie najprostsze a nie dające się sprowadzić do elementów psychicznych i nie można go objaśniać mniej jasnym, bardziej złożonym pojęciem „definicja" (domyśla się „dobra" i „możliwa").

Dla uproszczenia zagadnienia przestańmy nadawać zdaniu realistów: „istnieje"=„może być zdefinjowanym" znaczenie określenia „istnienia", a tylko rozumiejmy je jako zależność między istnieniem a posiadaniem definicji. Na tak pojęte zdanie to mogliby się zgodzić i idealiści, lecz interpretując inaczej wyraz „może".

Jesteśmy tu u jądra kwestji. Różnica między obu obozami objawia się w interpretacji tego pojęcia. Podczas gdy dla idealisty „możliwy" równoznaczneby tu było z „istniejący" (matematycznie), realiści (zgodnie ze swą tendencją ostatecznego opierania się na stanach psychicznych) rozumieją przez „możliwy"—„możliwy *dla człowieka*".

Według realistów więc istnieje to, co człowiek może zdefinjować. Teraz zrozumiałym się staje przytoczony wyżej warunek Poincaré'go: możliwa dla człowieka definicja musi się składać ze skończonej liczby wyrazów.

Trochę światła na pojmowanie istnienia przez realistów rzucą nam rozważania nad pojęciem „*wyjątku*".

Przyjmując, że w rozwoju teorji matematycznych istnieje pewna ciągłość i że istnieją pewne „naturalne" [1]) kierunki tego rozwoju, nazywamy pojęcia, znajdujące się na tej drodze rozwoju, utworzonemi w sposób „*naturalny*". Obok nich trafiają się pojęcia, zbudowane „*sztucznie*", t. j. wbrew ogólnym tendencjom

---

[1]) Nie wchodzimy w to, czy leżą one w naturze badanego przedmiotu, czy badającego podmiotu, czy wreszcie w warunkach historycznych epoki.

i potrzebom nauki. Jasnym jest, że te pojęcia, napotykane w sposób „naturalny", są znikomą częścią ogółu możliwych pojęć. Możnaby więc powiedzieć, że te „naturalne" pojęcia są *wyjątkowemi;* ogół zaś stanowiłyby pojęcia „sztuczne". Jednak, jeśli się ograniczyć do tych pojęć, o których w nauce mówimy, to przeciwnie, te „naturalne" pojęcia stanowią ogół, „sztuczne" zaś są wyjątkami.

Weźmy przykład: krzywe *wogóle* („wogóle" w znaczeniu: z pośród spotykanych w literaturze matematycznej) posiadają styczną (przynajmniej w jednym punkcie każdego—dowolnie małego—łuku). Krzywych nie posiadających nigdzie stycznej spotykamy w literaturze parę tylko: są to sztucznie zbudowane przykłady Weierstrassa, Peany, jedynie dla wykazania takich „patologicznych" (jak je nazywają zwykle matematycy) możliwości, nie grające pozatym żadnej innej roli w matematyce. Są to więc „wyjątki". Jednak wiemy, że wśród wszystkich możliwych krzywych—nawet w ciaśniejszym (realistów) rozumieniu wyrazu „możliwy" — właśnie krzywe nie posiadające stycznej są wypadkiem ogólnym, posiadające styczną zaś — wyjątkami.

Gdy będziemy kłaść nacisk, jak to czyni Borel na to istnienie przedmiotów, że tak powiem, „w praktyce" matematycznej, na rzeczywiste spotykanie ich w literaturze matematycznej i to nie w formie nieokreślonej: „jakaś liczba całkowita n", „jakaś funkcja f (x)", lecz jako indywidua zupełne określone, jak liczby 2, 7, funkcje: $3x^2$, e^x — gdy na konkretną znajomość z takiemi indywiduami będziemy kładli nacisk, to zrozumiałem będzie, że klasy przedmiotów, nie reprezentowane w literaturze matematycznej przez żadne indywiduum i z których nie umiemy na żądanie określić żadnego indywiduum, skłonni będziemy uważać za nieistniejące.

A więc zupełnie już należy — z tego punktu widzenia — odmówić istnienia tym klasom przedmiotów, o których z góry wiemy, że nigdy nie będziemy mogli poznać żadnego ich indywiduum. Więc należałoby odmówić istnienia przedmiotom, których indywidualne określenie wymagałoby nieskończonej ilości wyrazów. Jako ilustracja do tego mogą służyć słowa Borela, wypowiedziane na ostatnim kongresie międzynarodowym matematyków w Cambridge. Powiedział on, że dla niego określenie pojęcia funkcji, dane przez Riemanna, nie jest szersze od określenia, danego przez Cauchy'ego: nie znamy bowiem —

i prawdopodobnie nie poznamy — żadnego przykładu funkcji (w znaczeniu Riemanna), któraby nie była zarazem funkcją w znaczeniu Cauchy'ego. Można wprawdzie udowodnić (sprowadzając do sprzeczności założenie przeciwne), że takie funkcje istnieją; lecz co to za istnienie, na które nie możemy i — prawdopodobnie (dowodu matematycznego na to nie mamy) — nigdy nie będziemy mogli dać przykładu!

Stąd żądanie Borela: nie zajmować się żadną klasą przedmiotów, dopóki nie możemy podać *metody konstrukcji* przedmiotów tej klasy. Podanie metody konstrukcji jest dopiero—według niego—rzeczywistym dowodem istnienia. Twierdzenia zaś, dotyczące przedmiotów, których indywidualnie określić nie można, realiści nazywają metafizycznemi, twierdząc, że nie mogą one mieć żadnego wpływu na twierdzenie matematyki (takiej naturalnie, jak ją oni pojmują, t. j. zajmującej się wyłącznie przedmiotami, które można indywidualnie zdefinjować).

Wspomnieliśmy o przedmiotach matematycznych, których nie można zdefinjować za pomocą skończonej ilości wyrazów. W jaki sposób dochodzimy do pojęcia takich przedmiotów? Rozpatrujmy liczby rzeczywiste. Przedstawiamy je jako ułamki dziesiętne, składające się naogół z nieskończonej ilości cyfr. Stąd możnaby przypuszczać, że dla określenia liczby rzeczywistej trzeba naogół podać nieskończoną ilość cyfr, a więc trzeba użyć nieskończonej ilości wyrazów. Na szczęście jednak okazuje się, że dla wielu ułamków istnieje *prawo* następstwa cyfr, prawo, które da się wypowiedzieć za pomocą skończonej ilości wyrazów. Podając takie prawo, określamy wszystkie cyfry ułamka.

Zachodzi pytanie: czy takie prawo następstwa cyfr istnieje dla każdej liczby? Odpowiadamy: nie, nie dla każdej liczby istnieje takie prawo (złożone ze skończonej ilości wyrazów): istnieją liczby, których w żaden sposób za pomocą skończonej ilości wyrazów określić nie można. I to „nie można” rozumiemy w znaczeniu absolutnym; nie, że „nie można” przy dzisiejszym stanie nauki, że *my* nie możemy, lecz, że „nie można” wogóle, bo założenie przeciwne prowadzi do sprzeczności. Dowód tego twierdzenia podamy za chwilę. Zauważymy tylko przedtym, że ta odpowiedź „nie”, to twierdzenie, że istnieją liczby nie dające się określić za pomocą skończonej ilości wyrazów — jest to odpowiedź idealisty. Dla realistów liczby takie nie istnieją według definicji istnienia. Dowód zaś nasz istnienia tych liczb jest dla nich antynomją. Jest to t. zw. *antynomja Richarda.*

Richard wychodzi z założenia tego samego, co i Poincaré: istnieje to tylko, co można określić za pomocą skończonej ilości wyrazów. Otóż łatwo udowodnić, że ilość zdań, złożonych ze skończonej ilości wyrazów danego języka jest nieskończona, lecz przeliczalna[1]). A więc tymbardziej ilość liczb, określonych za pomocą takich zdań—t. j., według Richarda i realistów, wszystkich liczb—jest przeliczalna. Z drugiej jednak strony Cantor udowodnił, że ilość liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalna, t. j. większa od przeliczalnej. A więc otrzymujemy sprzeczność.

Sprzeczność ta istnieje naturalnie tylko dla realistów. Dla idealistów jest to rozumowanie tylko dowodem, że założenie realistów jest błędne, t. j. że istnieją liczby, nie dające się określić za pomocą skończonej ilości wyrazów.

Richard i Poincaré objaśniają tę antynomję za pomocą pojęcia „niepredykatywności definicji" i interpretując realistycznie twierdzenie Cantora o nieprzeliczalności zbioru liczb rzeczywistych, w co tutaj wchodzić nie możemy[2]).

Takie liczby nie dające się określić za pomocą skończonej ilości wyrazów zdają się być — jako indywidua — na zawsze wykluczone z zakresu naszego poznania. Jednak nie są one w gorszym położeniu od liczb, do których określenia potrzeba np. więcej niż miljona wyrazów: i tych indywidualnie prawdopodobnie nigdy nie poznamy.

Można je jednak badać nie jako indywidua, lecz jako elementy klasy. Określając gatunek (klasę) — określamy poczęści i składające go przedmioty. Tylko nie możemy ich odróżniać między sobą.

---

[1]) To znaczy: jest ich tyle, co wszystkich liczb naturalnych.

[2]) Niesłusznym jest zarzut, uczyniony przez niektórych antynomji Richarda, że każdą liczbę można oznaczyć jednym wyrazem: *oznaczyć*, *nazwać* można, lecz nie *określić*. Żeby liczby nazwać, trzeba już mieć daną. Przedmioty zaś matematyczne nie mogą być dane przez wrażenia zmysłowe, przez pokazanie: żeby je mieć dane, trzeba mieć ich określenie; a tego nie można określić przez wyraz „ten" i wogóle przez żaden wyraz okazjonalny (według terminologji Husserla), ani przez żadną nową nazwę, lecz za pomocą nazw już przedtym znanych. Wyjątek stanowią tylko pojęcia pierwsze, które nam są bezpośrednio dane i nie potrzebują definicji. Chybaby więc kto chciał twierdzić, że każda liczba indywidualnie może być tak samo bezpośrednio i intuicyjnie poznaną!

To przypuszcza, że można określić zbiór, nie określając uprzednio jego elementów. Tę właśnie zasadę sformułował Cantor na czele swej teorji mnogości: zbiór jest określony, gdy jest dane kryterjum należenia do zbioru.

Realiści nie przyjmują tej zasady, uważając zbiór za określony dopiero wtedy, gdy — jeśli nie można określić indywidualnie wszystkich elementów zbioru, wtedy przynajmniej — podane jest prawo konstrukcji dowolnego elementu zbioru.

Idealiści odrzucają to żądanie, lecz i oni nie przyjmują w całości zasady Cantora, stawiając pewne — różni stawiają różne — ograniczenia [1]. Do tego zmusiły ich pewne antynomje, z których tu zacytuję jedną: Russella.

Antynomja Russella polega na podziale wszystkich zbiorów na dwa rodzaje: na takie, które są swym własnym elementem i takie, które nie są swym własnym elementem.

Czy zbiory pierwszego rodzaju istnieją [2], to mogłoby być kwestjonowane; istnienie ich jednak nie jest nam do dowodu potrzebne.

Natomiast zupełnie pewnym jest istnienie zbiorów drugiego rodzaju. Takim zbiorem jest np. zbiór wszystkich punktów danej płaszczyzny: nie jest on sam punktem, a więc nie jest swym własnym elementem, należy do drugiego rodzaju. Tak samo zbiór wszystkich ludzi nie jest człowiekiem—należy do drugiego rodzaju. Więc zbiory drugiego rodzaju istnieją.

Rozpatrujmy teraz zbiór wszystkich tych zbiorów drugiego rodzaju. Oznaczmy ten zbiór przez Z.

Pytamy, czy Z jest, czy nie jest swym własnym elementem? Udowodnimy, że Z nie może ani być, ani nie być własnym elementem — rezultat sprzeczny z zasadą wykluczonego środka. Na tym polega antynomja.

Przypuśćmy najprzód, że Z jest swym własnym elementem, t. j. należy do zbiorów pierwszego rodzaju. Czyli jeden z elementów zbioru Z jest sam zbiorem Z. Ale, według definicji

---

[1]) Pewne ograniczenie teoretycznie wprowadził już sam Cantor, mówiąc o zbiorach *gotowych* i *niegotowych* i wyłączając te ostatnie ze swej teorji, lecz nie podał żadnego kryterjum do odróżnienia jednych od drugich.

[2]) Jako przykład takiego zbioru może służyć *zbiór wszystkich zbiorów*: jest on sam zbiorem, a więc swym własnym elementem.

zbioru Z, każdy jego element jest zbiorem drugiego rodzaju. A więc i Z, będące według założenia jednym z tych elementów, musiałoby być zbiorem drugiego rodzaju — więc założenie, że Z jest zbiorem pierwszego rodzaju prowadzi do sprzeczności.

Pozostaje przypuszczenie, że Z jest zbiorem drugiego rodzaju. Wtedy znajduje się sam wśród swych własnych elementów, bo te obejmują wszystkie zbiory drugiego rodzaju, t. j. posiada własność zbiorów pierwszego rodzaju, co znów jest sprzecznością.

Zbiór Z nie może więc ani być, ani nie być własnym elementem. Usunąć powstającą stąd sprzeczność z zasadą wykluczonego środka można albo ograniczając tę zasadę, albo—co na jedno wychodzi—zasadę Cantora określania zbioru.

Trudności, związanych z antynomjami, nikt zadowalająco nie rozwiązał; widać to stąd, że każdy rozwiązuje je inaczej i nie godzi się na rozwiązania innych. Wszystkie podane w tym celu teorje—np. Hilberta, Russella, Zermeli—można scharakteryzować jako środki ostrożności, zabezpieczające przed antynomjami. Lecz przed antynomjami znanemi dotychczas; nie wyjaśniają one błędu w rozumowaniach i nie dają żadnej gwarancji, że nie pojawią się — pomimo tych „środków ostrożności" — nowe antynomje [1]). Mówią one tylko: o ile ograniczymy się do pewnych form określeń i rozumowania, a będziemy unikać pewnych innych (których błędności jednak nie wykazują), to — przypuszczalnie — unikniemy antynomji. Ponieważ realiści najbardziej ograniczają zakres przedmiotów i form rozumowania, więc ich stanowisko wobec antynomji jest najkorzystniejsze. To jednak nie może decydować o wartości ich teorji.

Widzimy, że w przeciwieństwie do rozpowszechnionego mniemania o bezwzględnej oczywistości i pewności rozumowań matematycznych i tu spotykamy kwestje sporne. Nie jest to zjawisko nowe: dzieje matematyki wykazują często takie różnice poglądów. To, co jednym wydawało się w pewnej epoce ścisłym i oczywistym, drugim jednocześnie wydawało się ciemnym lub

---

[1]) Tak np. Chwistek zbudował nową antynomję, pomimo uwzględnienia w rozumowaniu wszystkich warunków ograniczających, postawionych przez Russella.

błędnym. Na szczęście, matematyka może pochwalić się tym, że rozwój jej zawsze przynosił z czasem rozstrzygnięcie tych sporów: na korzyść to jednej, to drugiej strony. I teraz możemy się spodziewać, że spór ten w łonie matematyki długo trwać nie będzie: matematyka znajdzie środki na pogodzenie matematyków przeciwnych obozów. Jednak czy również na pogodzenie ich jako filozofów? O tym wątpić należy. Różnica bowiem filozoficznych poglądów, która się objawia w tym sporze, która jest jego źródłem — jest tą odwieczną różnicą, która powodowała przez średniowiecze ciągnący się spór między nominalistami a platończykami, który ciągnie się i dziś między pozytywizmem a idealizmem.