ZYGMUNT JANISZEWSKI

Topologie

Table des matières

1. *La topologie*, dite aussi *analysis situs*, est une science des propriétés de figures géométriques qui subsistent lorsqu'on transforme ces figures d'une manière continue et biunivoque ([1]) quelconque, c'est-à-dire lorsque la figure se tord, se dilate ou se contracte arbitrairement (sans déchirement ni collage en aucun point) ([2]). On peut songer au premier moment qu'avec des transformations si arbitraires aucune propriété de la figure ne subsiste, presque aucune de celles dont s'occupent les autres branches de la géométrie ne restant, en effet, invariante (nous pouvons transformer par exemple un triangle en un carré ou en un cercle aussi grand ou aussi petit

([1]) c'est-à-dire de telle manière qu'à tout point de la figure donnée correspond un point, et un seul, de la figure transformée (*univocité*) et qu'au couple de points s'approchant indéfiniment l'un de l'autre correspond un couple de points s'approchant aussi indéfiniment l'un de l'autre (*continuité*) et réciproquement. L'expression *biunivoque* veut dire réciproquement univoque.

([2]) Intuitivement, on peut s'imaginer comme suit l'objet de ces recherches: ayant un objet fléxible, par exemple un morceau de cordon aux bouts cousus ensemble, nous ne parlerons pas, pour décrire sa forme, de ses propriétés passagères (qu'il est un cercle, ou une ellipse, ou un triangle, ce qui dépend de la façon dont nous le disposons), mais de ses propriétés constantes et essentielles, qui ne varient pas avec les conditions dans lesquelles on l'a placé; nous dirons donc qu'il n'a pas de bouts, qu'il est une ligne fermée, qu'il est d'une telle ou autre longueur. En nous imaginant de plus qu'il est fait d'une matière capable de s'allonger et de se retracter arbitrairement (propriétés que possède en partie le caoutchouc), nous devrions renoncer même à parler de sa longueur, en nous bornant à des propriétés telles que l'absence de bouts, donc à celles qui sont précisément l'objet d'étude de la topologie. Pareillement, en parlant de la forme d'un homme, nous n'entendons par là que certaines propriétés invariantes par rapport aux transformations traitées en topologie, car l'homme que l'on veut). Cependant, après une réfléxion, il devient évident — ce que l'on peut (et naturellement, l'on doit) démontrer rigoureusement — que le segment de droite ne se laisse pas transformer ([3]) en une circonférence: il faudrait coller l'un à l'autre ses deux bouts, ce qui — comme nous venons de dire — n'est pas permis. La fermeture d'une ligne est donc l'une des propriétés invariantes dont l'étude appartient à la topologie.

2. Cette science a pris naissance assez tard, vers la moitié du XIX^{me} siècle. Le premier travail écrit dans cet ordre d'idée et en se rendant compte que l'on a à faire à une science nouvelle a été celui de Listing, datant de 1847 ([4]). On attribue d'habitude à cette date la naissance de la topologie. Cependant Euler (1707-1783) s'occupait bien avant lui de divers problèmes appartenant ici (voir plus loin, p. 276 et 277).

Presque simultanément à Listing, Riemann (1826-1866) s'est trouvé contraint par ses recherches de la théorie des fonctions analytiques à s'occuper des problèmes topologiques dans ses travaux ([5]). Leur rôle

---

assis est d'une forme différente — au sens usuel de la géometrie élémentaire — que l'homme debout et la main pliée est d'une autre forme que la main tendue (voir aussi le renvoi 19).

Ici, il nous faut trancher d'emblée un doute qui peut se présenter: notre définition de la continuité d'une transformation n'est pas tout à fait conforme à l'explication intuitive que nous lui avons donnée. Pour réaliser intuitivement la transformation continue en toute généralité, il faudrait admettre, à côté de la fléxibilité et dilatabilité de la figure, sa pénétrabilité. En la rejetant, nous n'obtenons qu'une partie de la topologie (le *connexus*), à savoir dans laquelle la figure n'est pas traitée en elle-même, mais dans son rapport au reste de l'espace et où l'on n'envisage que les transformations de la figure avec l'espace entier. C'est ainsi que la présence d'un noeud sur une ligne fermée (on obtient le modèle d'une telle ligne en faisant un noeud sur un morceau de ficelle et en unissant ses bouts; voir fig. 1) n'est pas une propriété invariante de cette ligne quand on ne la considère qu'en elle-même, mais elle est bien invariante lorsqu'on envisage cette ligne avec l'espace à 3 dimensions dans lequel elle est située.

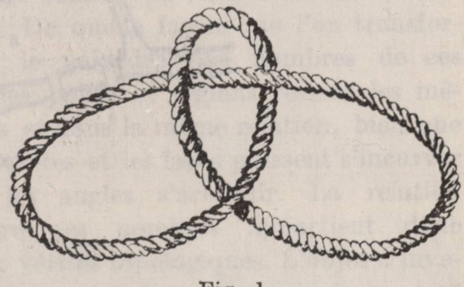

Fig. 1

([3]) Nous entendons dans ce chapitre par *transformations* toujours les transformations continues et biunivoques.

([4]) J. B. Listing, *Vorstudien zur Topologie*, Göttinger Studien 1847.

([5]) B. Riemann, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Größe* (Inaugural-Dissertation), Göttingen 1851, et *Theorie der Abelschen Functionen*, Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik 54, 1857.

historique a été important pour la topologie parce qu'ils ont montré qu'elle était liée au reste des mathématiques (à la théorie des fonctions analytiques), ce qui a été nécessaire pour attirer sur elle l'attention des mathématiciens. Malgré cela, la topologie est restée à l'écart du courant principal des mathématiques du XIX$^{\text{me}}$ siècle, car elle lui a été étrangère par ses problèmes, par ses méthodes et par la généralité de l'objet à laquelle conduisait la notion de transformation continue et biunivoque, généralité dont on ne savait alors venir à bout et qui, aujourd-hui encore, comporte de sérieuses difficultés malgré les nouvelles méthodes et notions. En conséquence, son développement était lent.

Les premières découvertes et théories sont issues des observations, engendrées par voie inductive, presque empirique, comme c'était le cas des autres branches des mathématiques qui n'étaient pas des prolongements ou ramifications des branches préexistantes, mais s'étaient formées directement sur les fondements (géométrie élémentaire et théorie des nombres par exemple). Les démonstrations des premiers auteurs (Euler, Listing, en partie Riemann et Möbius), même quand ils les donnaient, étaient tout à fait insuffisantes. Les premiers sujets traités ont été empruntés aux jeux ou aux récréations mathématiques. Un des sujets dont s'occupait Euler s'appelle *problème de 7 ponts de Königsberg*: il s'agissait de traverser d'un trait les ponts disposés comme le montre la fig. 2, en pas-

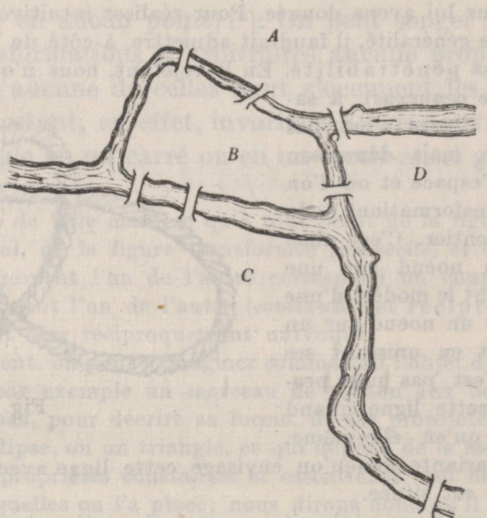

Fig. 2

sant par chacun une fois et seulement une fois. Euler a montré que c'est impossible et a donné une condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse passer d'une manière continue le long de tous les segments d'une ligne composée d'un nombre fini d'arcs reliant un nombre fini de points, sans passer par aucun arc plus d'une fois. Cette condition est qu'il n'y ait pas de points d'où sort un nombre impair d'arcs ou qu'il y en ait au plus deux. Ce problème appartient à la topologie, car la propriété d'une ligne que l'on peut parcourir ainsi le long de tous ses segments ne disparaît pas en soumettant cette ligne à des fléxions, dilatations et contractions, pourvu que les connexions entre les segments dont elle se compose restent les mêmes. Le problème de 7 ponts de Königsberg se réduit ainsi à envisager la ligne représentée par la fig. 3.

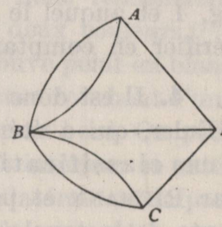

Fig. 3

3. À la topologie appartient également le *théorème d'Euler*, d'après lequel la somme du nombre s des sommets et de celui f des faces d'un polyèdre (convexe) est égale au nombre a de ses arêtes augmenté de 2:

$$s+f=a+2.$$

En effet, ce théorème ne s'applique pas qu'aux polyèdres. Il s'agit dans lui des arêtes non pas comme des lignes droites et même pas comme celles de repli — car ces propriétés peuvent disparaître aux transformations et ne sauraient donc faire l'objet de la topologie — mais comme des l i g n e s d e p a r t a g e menées sur une surface fermée (sur un polyèdre); de même, les sommets n'y sont considérés que comme des points où se rencontrent les arcs de ces lignes (qui, pour le polyèdre, sont des arêtes), et les faces sont des régions en lesquelles ces lignes coupent la surface fermée envisagée. De quelle façon que l'on transforme le polyèdre, les nombres de ces lignes, points et régions restent les mêmes et dans la même relation, bien que les arêtes et les faces puissent s'incurver et les angles s'arrondir. La relation entre ces nombres appartient donc aux vérités topologiques. L'objet d'investigation est donné ici par le rapport mutuel de trois genres de figures géométriques, à savoir: d'une surface, d'un réseau de lignes sur elle et d'un ensemble de points situés sur lui (DEHN appelle *complexus* la partie de la topologie comprenant de pareilles recherches).

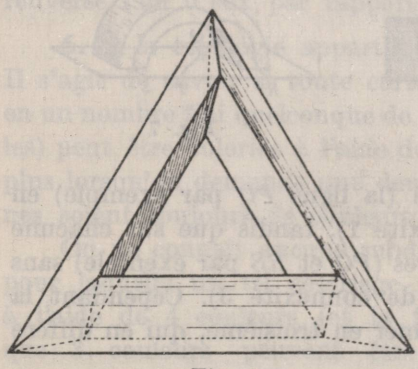
Fig. 4

Le théorème d'EULER n'est pas général. Il ne s'applique qu'aux polyèdres transformables en une sphère [6]. Cette condition est satisfaite

[6] Plus précisément: aux surfaces transformables en une s p h è r e et divisées par des arcs en régions transformables en d i s q u e de cercle.

pour tous les polyèdres convexes. Il existe pourtant des surfaces fermées qui diffèrent topologiquement de la sphère (c'est-à-dire qui ne se laissent pas transformer en elle). Tel est par exemple le polyèdre représenté à la fig. 4 et auquel le théorème d'Euler ne s'applique pas; le lecteur peut le vérifier en comptant ses sommets, arêtes et faces (7).

4. Il est donc facile de comprendre que la généralisation du théorème d'Euler, qui a été le but du principal travail de LISTING (8), l'a conduit à une classification des surfaces. La même classification a été établie par RIEMANN et par MÖBIUS (1790-1868). C'est la partie la plus importante de la topologie, vu ses applications à la théorie des fonctions analytiques, en particuliers plurivoques, que l'on classe suivant le genre des surfaces correspondantes, dites *surfaces de Riemann* (9). Ces surfaces sont classées suivant le nombre de leur bords et suivant l'ainsi dite *connexité.* La connexité d'une surface est égale au nombre maximum des coupures unissant ses bords (10) et que l'on peut y mener sans la morceler. Ces propriétés ne disparaissent pas par des transformations. Envisageons les exemples suivants:

1. la surface d'un rectangle (fig. 5),
2. la même surface avec deux trous (fig. 6),
3. la surface qui résulte de la précédente par l'union des deux trous à l'aide d'un tube (fig. 7).

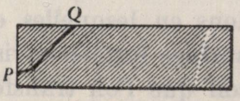

Fig. 5

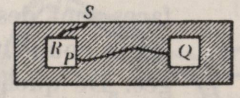

Fig. 6

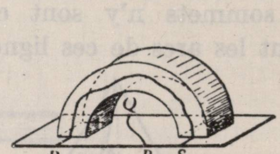

Fig. 7

À la première surface, toute coupure (la ligne PQ par exemple) en cause un morcellement (surface de connexité 1), tandis que sur chacune des deux autres on peut faire deux coupures (PQ et RS par exemple) sans qu'elles tombent en morceaux (surfaces de connexité 3). Cependant la deuxième surface ne se laisse pas transformer en troisième, qui en diffère par le nombre des bords.

(7) Notons à ce propos une oeuvre bien détaillée de la théorie des polyèdres: M. BRÜCKNER, *Vielecke und Vielfache. Theorie und Geschichte*, Leipzig 1900.

(8) J. B. LISTING, *Census räumlicher Complexe*, Göttinger Abhandlungen X, 1861 (cf. plus loin p. 285).

(9) Une *surface de Riemann* est la forme (ou, si l'on veut, la représentation intuitive) de la distribution des valeurs d'un fonction plurivoque.

(10) Si la surface n'a pas de bord, c'est-à-dire est fermée, la première coupure est une ligne fermée (c'est-à-dire transformable en circonférence).

5. Nos idées sur la classification des surfaces ont été complétées par une découverte importante de Möbius (en 1858), à savoir par celle de l'existence des *surfaces unilatérales*. Les surfaces que nous rencontrons d'habitude sont *bilatérales*: elles se laissent peindre de deux couleurs (11), blanc et rouge par exemple, de façon que tout point se trouve peint en blanc (d'un côté) et en rouge (de l'autre) sans que ces couleurs touchent l'une l'autre; pour passer d'une couleur à l'autre, il faut croiser un bord. On peut distinguer ainsi deux côtés d'un cercle (disque), les côtés intérieur et extérieur d'une sphère etc. Un tel coloriage d'une surface unilatérale est impossible: si l'on commence à y mettre le rouge par exemple, on peut la couvrir de peinture d'une manière continue sans passer par le bord et toute la surface se trouvera peinte en rouge, de sorte qu'il n'y restera pas de place

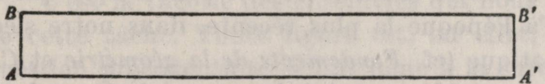

Fig. 8

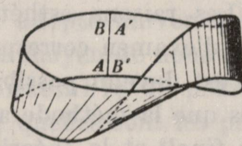

Fig. 9

pour l'autre couleur. On ne peut donc parler alors de deux côtés. Le premier exemple connu d'une telle surface a été la *bande de Möbius*. On l'obtient du rectangle $ABB'A'$ (fig. 8) en collant les segments AB et $A'B'$ de façon que le point A tombe sur B' et B sur A', c'est-à-dire après avoir renversé l'un d'eux par rapport à l'autre (fig. 9).

6. À la topologie appartient aussi l'ainsi dit *problème de 4 couleurs*. Il s'agit de savoir si toute carte (c'est-à-dire une partie du plan divisée en un nombre fini quelconque de régions partielles) peut être coloriée à l'aide de 4 couleurs au plus lorsqu'on demande que deux régions voisines soient toujours de couleurs différentes (12).

On ne connaît aucune subdivision du plan pour laquelle un tel coloriage soit impossible à l'aide de 4 couleurs (et la fig. 10 montre que 3 couleurs peuvent être insuffisantes). Il semble très probable que 4 couleurs suffisent toujours, mais on n'a pas réussi jusqu'à présent d'en trouver une démonstration (13).

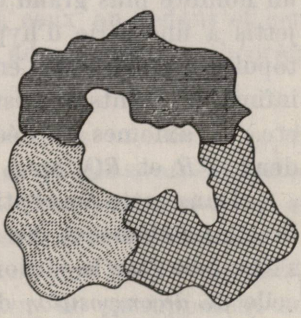
Fig. 10

(11) Nous ne donnons ici qu'une définition intuitive de la bi- et unilatéralité de surfaces. Il en existe, naturellement, une définition rigoureuse et tout à fait abstraite.

(12) Nous nous contentons également ici d'une description intuitive.

(13) On peut étudier de plus près ce problème par la lecture du travail (qui en contient aussi la littérature) de P. Wernicke, *Über den kartografischen Vierfarbensatz*, Mathematische Annalen 58, 1904, p. 413-426.

7. Plus tard, on s'est adressé à des moyens d'investigation plus rigoureux. Là où les simples procédés combinatoires ne suffisaient pas (comme dans des problèmes semblables à celui de 7 ponts), on effectuait des recherches à l'aide de la géométrie analytique avec l'appareil tout entier de l'analyse supérieure (Betti, van Dyck, Poincaré). Ces travaux ont développé la topologie très considérablement; elle doit à ce courant plus qu'aux autres. Rappelons à ce propos que Poincaré a étudié le premier, en topologie, les figures à plus de 3 dimensions. Néanmoins, ces recherches n'ont pas satisfait tout le monde, car elles n'étaient pas directes, mais procédaient par l'intermédiaire des notions étrangères à la topologie et bien plus compliquées (celle d'intégrale par exemple) que les notions topologiques proprement dites.

Les raisons esthétiques et épistémologiques exigaient que l'instrument d'examen corresponde à l'objet examiné et soit plus simple que lui. Ce n'est devenu possible qu'à l'époque la plus récente, dans notre siècle, après que la méthode axiomatique (cf. *Fondements de la géométrie* et *Chapitre final*) et la théorie des ensembles ont été devenues plus populaires. À ces deux méthodes, deux nouvelles directions de recherches sont venues correspondre; on peut considérer Dehn comme le représentant de l'une et Schoenflies comme celui de l'autre.

8. Dehn ([14]) considère comme objets premiers (c'est-à-dire indéfinissables; cf. *Fondements de la géométrie*) de la topologie le *point*, l'*arc* entre deux points ([15]) et la *calotte*, c'est-à-dire une partie de surface bornée par une ligne fermée (au sens d'une suite fermée d'arcs dont deux contigus ont toujours un bout commun) — et ainsi de suite pour les figures ayant un nombre plus grand de dimensions. Ces objets indéfinissables sont assujettis à une série d'hypothèses (*axiomes*; cf. *Fondements de la géométrie*) topologiques divisées en deux groupes: axiomes d'existence (il existe une infinité de points, il existe entre deux points une infinité d'arcs les unissants etc.) et axiomes de décomposition (tout arc PQ se laisse décomposer en deux, PR et RQ, etc.).

Dans cette conception de la topologie, on a toujours à faire à un nombre fini d'éléments. En conséquence, la notion de transformation continue s'évanouit (car la notion de continuité s'évanouit). Elle est remplacée par celle de *décomposition* des arcs, des calottes etc., appartenant à la figure,

([14]) M. Dehn und P. Heegard, *Analysis Situs*, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, volume III, fascicule 1, Leipzig 1907.

([15]) On peut admettre cette hypothèse, puisque — comme nous savons déjà — deux segments (de droites ou de courbes) sont, indépendamment des différences dans leur longueur ou courbure, aussi pareils pour la topologie que le sont pour la géométrie ordinaire deux points ou deux droites.

en deux ou plusieurs parties. La topologie devient une partie de la combinatorique, comme l'observe DEHN lui-même. Il est à souligner que ce mode de traiter le sujet a l'avantage de bien saisir les caractères topologiquement essentiels des figures géométriques et de les épurer de tous les éléments étrangers à la topologie.

9. Cependant, si l'on s'en tient à la définition de la topologie donnée au début, et si l'on veut maintenir la liaison entre cette science et le reste de la géométrie au lieu de créer une science indépendante avec des nouvelles notions premières et nouveaux axiomes, il faut bien répondre à la question quelles sont les figures qui sont des arcs, des calottes etc. En d'autres termes, il faut réduire les notions premières de la topologie à celles de la géométrie, c'est-à-dire les définir, et démontrer les nouveaux axiomes à l'aide de ceux que l'on adopte universellement.

C'est la théorie des ensembles qui nous donne moyen de nous occuper de cette tâche. Toute figure est, en effet, un ensemble de points. La question précédente se réduit donc à la suivante: quelles sont les propriétés que doit avoir un ensemble de points pour qu'il mérite d'être appelé arc, etc.

Ces recherches ont apporté un nouveau profit: elles ont établi l'existence des figures géométriques qui ne sont ni des arcs, ni des calottes etc., ni des ensembles finis de ces objets, c'est-à-dire qui ne se laissent pas réduire aux notions premières adoptées par DEHN et ne peuvent par conséquent trouver place dans sa théorie.

Le premier exemple, et en même temps le plus connu, des recherches dans ce domaine est le *théorème de Jordan* ([16]), suivant lequel toute courbe simple fermée (c'est-à-dire qui est une circonférence transformée) située sur le plan le coupe en deux ensembles de points, ceux au-dedans et ceux au-dehors d'elle. Jusqu'alors, les mathématiciens admettaient ce théorème comme évident, sans démonstration ([17]).

10. Les matières de la topologie ainsi présentées montrent qu'elle n'est pas très homogène. C'est dû probablement à ce qu'elle avait été traitée d'habitude à bâtons rompus par ses fondateurs. C'est pourquoi aussi ses diverses parties exigent des connaissances préparatoires différentes.

Les traités plus anciens n'en exigent aucune et leur lecture est facile. Parmi les nouveaux, ceux de la direction de DEHN ne présupposent non plus de connaissances spéciales et ceux de la direction de SCHOENFLIES ne demandent qu'une partie de la théorie des ensembles (dite théorie des

([16]) C. JORDAN, *Cours d'analyse*, Paris 1893, volume 1, p. 90-100.

([17]) Pour la démonstration la plus simple du théorème de Jordan, voir L. E. J. BROUWER, *Beweis des Jordanschen Kurvensatzes*, Mathematische Annalen 69, 1910, p. 169-175.

ensembles de points) et certaines connaissances des fondements de la géométrie. Néanmoins, les travaux des deux directions exigent du lecteur un entraînement mathématique considérable et une faculté de penser d'une manière abstraite. Enfin, les travaux procédant par représentation analytique demandent des connaissances assez vastes de l'analyse supérieure (intégrales curvilignes, déterminants fonctionnels et autres) et surtout du calcul intégral et de la théorie des fonctions de variable réelle.

11. Se trouvant tout près des fondements des mathématiques et ne s'appuyant que sur eux (à savoir sur la combinatorique, la théorie des ensembles et les fondements de la géométrie), la topologie n'a eu jusqu'à présent d'applications en mathématique qu'à la théorie des fonctions analytiques (surtout à l'intégrale de Cauchy et aux fonctions plurivoques: *surfaces riemanniennes*), qui est actuellement la discipline la plus développée. On peut l'expliquer par ce fait que la topologie divise les figures géométriques en classes très étendues, tandis que toutes les autres branches des mathématiques, qui sont moins développées que la théorie des fonctions analytiques, ne sont guère sorties en dehors des figures les plus simples et n'ont pas eu besoin, par conséquent, d'en faire une étude à part ([18]). D'ordinaire, on trouve dans les cours plus détaillés de la théorie des fonctions analytiques les renseignements nécessaires en matière de

([18]) En dehors du domaine de ces figures sortent les recherches récemment initiées et fort peu nombreuses sur les *courbes arbitraires*, par quoi elles s'approchent de la topologie. Elles consistent dans l'étude des classes de courbes dont une portion — par opposition aux courbes analytiques — ne définit pas la courbe entière. Dans l'analyse, les recherches aussi générales se sont développées depuis longtemps (voir le chapitre *Développements en séries*, § 5, de ce „Conseiller"). Les mieux étudiées sont les courbes fermées convexes, c'est-à-dire ne coupées par toute droite qu'en deux points au plus, car elles ont trouvé diverses applications à la théorie des nombres et à celle des fonctions par exemple. Les travaux les plus importants de ce domaine sont les suivants:

H. Brunn, *Über Ovale und Eiflächen* (Inaugural-Dissertation), München 1887, 42 pages.

H. Brunn, *Über Curven ohne Wendepunkte* (Habilitationsschrift), München 1889, 74 pages.

Ce sont les premiers travaux dans ce domaine, faciles et intéressants.

H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, Leipzig 1896 (édition posthume complétée), Leipzig 1910, 256 pages.

C'est une des oeuvres les plus importantes du grand théoricien des nombres allemand, professeur à Goettingue, décédé en 1909. Elle est consacrée en grande partie aux recherches géométriques qui nous intéressent ici. Elle est écrite d'une manière fort abstraite et fort difficile, bien qu'elle ne réclame aucune préparation spéciale. Notons que les applications de la théorie des corps convexes à celle des nombres, ce qui est l'idée fondamentale de l'oeuvre en question, se trouvent exposées d'une façon accessible dans le beau livre de Minkowski, *Diophantische Approximationen* (voir le chapitre *Théorie des nombres* de ce „Conseiller").

la topologie; dans certains cours elles sont même assez vastes (par exemple, dans les livres P. Appel et É. Goursat, *Théorie des fonctions algébriques* et C. Neumann, *Riemanns Theorie der Abelschen Integrale*), mais exposées d'habitude peu rigoureusement, à la manière des vieux auteurs.

Une théorie topologique des surfaces, construite avec rigueur et contenant des applications aux surfaces riemanniennes, est à trouver dans le livre très digne d'être lu

H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen, volume V, Leipzig 1913.

La topologie n'a pas d'application hors des mathématiques (19).

Cependant, à ceux qui cherchent dans les mathématiques le pur savoir (nous avons en vue aussi les non-mathématiciens, surtout les philosophes), on peut recommander instamment d'étudier la charpente de la topologie dans les buts de leur instruction générale. Les propriétés paradoxales de simples figures découvertes par la topologie (surfaces unilatérales par exemple) aprennent en effet comment il ne faut pas raissonner et combien le sens d'évidence repose souvent sur l'accoutumance. Aussi les recherches plus récentes, basées sur la théorie des ensembles et concernant les notions géométriques si intuitives que celle de ligne par exemple, montrent combien sont vagues ces notions et combien sont fausses les définitions que l'on en donne fréquemment.

H. Minkowski, *Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs*, dans *Gesammelte Abhandlungen von H. Minkowski*, édités par D. Hilbert, Leipzig 1911, p. 131-229.

Ce travail est plus facile à lire; autres travaux du même recueil concernent le même sujet.

A. Hurwitz, *Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier*, Annales de l'École Normale, série 3, volume 19, p. 357-408.

Ce travail exige la connaissance de la théorie des séries trigonométriques. Riche en résultats, il se distingue par son élégance; on le lit avec une véritable jouissance esthétique.

C. Juel, *Inledning i Laeren om de grafiske Kurver* (avec résumé français), Kjöbenhavn Skrift 1899, p. 1-90.

C. Juel, *Om ikke-analytiske Kurver*, ibidem 1906, p. 296-355.

Les deux travaux, écrits en danois, contiennent beaucoup de résultats. On en trouve des rapports détaillés dans Jahrbuch über Fortschritte der Mathematik 31, 1900 et 38, 1907.

(19) On peut supposer que, dans l'avenir, les sciences naturelles (descriptives avant tout) dont les objets n'ont pas de forme bien définie, mais varient entre certaines limites, emprunteront à la topologie et à la théorie des courbes abstraites (mentionnée au renvoi précédent) les méthodes de décrire et d'étudier leur forme. Jusqu'à présent, le développement assez faible de ces deux disciplines l'empèche. Il semble toutefois désirable d'y attirer l'attention des naturalistes qui cherchent de nouvelles voies.

Malheureusement, nous ne possédons de la topologie aucun exposé concis et accessible. Qui ne veut pas mettre trop de travail à l'apprendre, sera contraint de se contenter des articles encyclopédiques. Dans ce cas, on fera bien de lire l'article de H. v. Mangoldt et L. Zoretti, *Les notions de ligne et de surface* dans l'édition française de l'Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, tome III, volume 1, ou du moins le chapitre consacré à la topologie dans le livre de L. Couturat, *Les principes des mathématiques*, 1905, p. 126-142 et l'article de M. Dehn dans l'édition allemande du *Répertoire de Pascal* (voir plus loin, cette page, E. Pascal).

12. Qui cherche dans les mathématiques une récréation trouvera dans la topologie, plutôt que dans n'importe quel autre domaine des mathématiques, des problèmes et des casse-têtes intéressants (y compris les problèmes du cavalier). Nous recommandons à cet usage l'oeuvre

W. Ahrens, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, Leipzig 1901, 428 pages.

L'exposé y est accessible pour chacun et satisfait en même temps aux exigences de la science. Il s'y trouve une bibliographie bien complète. La topologie est représentée par les chapitres XI (problème du cavalier) et XVI-XIX.

13. Il n'y a non plus de manuels de topologie (à part ceux mentionnés au § 11 et qui ne contiennent que la topologie des surfaces). Un tout est exposé dans le travail

M. Dehn et P. Heegard, *Analysis situs*, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, volume III, fascicule 1, Leipzig 1907.

Ce travail est très difficile. Sa lecture exige un entraînement considérable dans les raisonnements abstraits. De plus, ce n'est pas une exposé, mais plutôt un recueil des résultats.

Clair, mais très bref (21 pages) est l'article de M. Dehn intitulé *Topologie* dans l'oeuvre

E. Pascal, *Repertorium der höheren Mathematik*, II^{me} édition allemande, volume II, partie 1: *Grundlagen und ebene Geometrie*, Leipzig et Berlin 1910. L'original français et autres éditions allemandes (pas plus que l'édition polonaise de S. Dickstein) ne contiennent pas cet article; le chapitre sur la topologie n'apporte qu'une série des définitions et résultats avec une vaste littérature.

Tous les travaux précédents ne contiennent rien sur la partie de la topologie que nous avons liée au nom de Schoenflies; pour cette partie, voir

A. Schoenflies, *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, 2^{me} partie, Leipzig 1908, 431 pages.

On peut considérer comme appartenant à la topologie toutes les matières de ce volume excepté deux premiers chapitres et le dernier, donc les pages 72-263. Ce livre est écrit d'une manière très difficile. Sa méthode satisfait à toutes les exigences de la rigueur, mais il n'est pas dépourvu d'erreurs causées par l'application trop peu soigneuse de cette méthode par suite de l'énorme quantité des matières traitées. C'est pourquoi il faut le confronter avec l'article

L. E. J. BROUWER, *Zur Analysis situs*, Mathematische Annalen 68, 1910, p. 422-434,

où ces erreurs sont discutées, et avec la réponse

A. SCHOENFLIES, *Bemerkung zu dem Aufsatz des Herrn L. E. J. Brouwer*, ibidem. p. 435-444.

Le livre de SCHOENFLIES ne rend pas compte des résultats les plus récents. Il faut les chercher dans l'article précité de MANGOLDT et ZORETTI. Nous recommandons de comparer cet article aux chapitres 19-23 du travail

F. ENRIQUES, *Principes de la géometrie*

contenu dans le même fascicule de cette encyclopédie (dans l'édition allemande c'est le même fascicule que celui contenant l'article précité de DEHN et HEEGARD). On trouve dans tous ces travaux la bibliographie du sujet.

Parmi les oeuvres plus anciennes, n'ayant déjà qu'une importance plutôt historique, sont à mentionner les suivantes:

J. B. LISTING, *Census räumlicher Complexe*, Göttinger Abhandlungen X, 1861, Göttinger Nachrichten 1867.

A. F. MÖBIUS, *Theorie der elementaren Verwandschaft*, Berichte über die Verhandlungen der K. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Mathematisch-physikalische Klasse, 15, 1863, p. 18-57, réimprimé dans *Gesammelte Werke von A. F. Möbius*, édités par F. KLEIN, Leipzig 1886, volume 2, p. 435-471.

A. F. MÖBIUS, *Zur Theorie der Polyeder und der Elementarverwandschaft* (Nachlass), ibidem, p. 519-559.

Les travaux suivants appartiennent aux plus importants:

W. VAN DYCK, *Beiträge zur Analysis situs: I. Ein- und zweidimensionale Mannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen 32, 1888, p. 457-512, *II. Mannigfaligkeiten von n Dimensionen*, ibidem 37, 1890, p. 273-316.

H. POINCARÉ, *Analysis situs*, Journal de l'École Polytechnique, série 2, cahier 1, Paris 1895.

H. POINCARÉ, *Complément à l'Analysis situs*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 13, 1899, p. 285-343.

H. Poincaré, *Second complément à l'Analysis situs*, Proceedings of the London Mathematical Society 32, 1900, p. 277-308.

H. Poincaré, *Troisième complément à l'Analysis situs*, Bulletin de la Société Mathématique de France, 1901, p. 49-70.

H. Poincaré, *Quatrième complément à l'Analysis situs*, Journal des Mathématiques pures et appliquées (Journal de Liouville) 8, 1902, p. 169-214.

H. Poincaré, *Cinquième complément à l'Analysis situs*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 17, 1904, p. 45-110.

Les plus importants sont: le premier travail et le premier et cinquième compléments. Aussi, les deux derniers auteurs énoncent-ils beaucoup de théorèmes fondamentaux sans démonstrations, ne faisant appel qu'à leur évidence géométrique.
