ZYGMUNT JANISZEWSKI

Introduction générale

Table des matières

1. Les mathématiques occupent parmi les sciences un poste tout à fait particulier. C'est (du moins à l'heure qu'il est) la seule science imposant avec nécessité la foi en ses résultats et ne faisant jamais appel à l'expérience dans ses démonstrations [1].

Envisageons sur un exemple, dans lequel il s'agit de déterminer la longueur de la circonférence, en quoi diffère la recherche expérimentale de la recherche mathématique quant à la méthode, l'objet et le résultat.

La recherche expérimentale consiste à mesurer aussi exactement que possible les contours des cercles matériels confectionnés des matériaux variés et ayant des diamètres différents. On constate que, dans les limites de la précision des expériences, le rapport de la longueur du

---

[1] Nous n'adoptons ici — autant que c'est possible — aucune attitude philosophique. Nous ne voulons pas trancher la question si cette différence entre les mathématiques et les autres sciences est absolue ou n'est qu'une différence de degré. Nous décrivons uniquement les caractères des mathématiques tels qu'ils se présentent à nous directement, sans nous engager dans une analyse philosophique ou une critique de nos données d'observation. Nous voulons dire seulement que les vérités mathématiques s'imposent avec une nécessité telle que nous ne pouvons pas accepter comme vraies des propositions qui les contredisent et que, pour les justifier, nous n'avons pas besoin de faire appel à des expériences conscientes (ce sont précisément les caractères que les mathématiques sont seules à les posséder). Par cela, nous ne nous

contour à celle du diamètre est le même pour tous les cercles mesurés. On en conclut que, d'une façon générale, tous les cercles ont la même propriété, sans que nous puissions toutefois en être absolument sûrs.

Le mathématicien procède autrement: il donne d'abord une définition rigoureuse de la circonférence et, à l'aide du raisonnement seul, ne mesurant rien, pour ainsi dire „les yeux clos", il déduit de cette définition la constance du rapport entre contour et diamètre comme une propriété nécessaire de la circonférence; il est évident que le résultat ainsi obtenu est absolument certain.

Supposons qu'un incrédule veuille vérifier la validité de ce théorème en traçant des circonférences et en les soumettant au mesurage. Supposons que son résultat diffère de celui de l'évaluation mathématique. Qu'est-ce que nous en dirons ? Nous dirons simplement qu'il a mal dessiné ou mal mesuré et que si la figure tracée ne possède pas la propriété affirmée, elle n'est pas une circonférence.

Cette différence entre la méthode, entre la nature même des recherches mathématiques et expérimentales résulte de celle entre leurs objets d'étude, car ce n'est qu'en apparence que ces objets sont les mêmes. Les cercles, matériel et mathématique, sont en réalité deux choses différentes; la relation entre elles consiste en ce que le premier cercle possède, approximativement, certains caractères du second. Le cercle matériel est un objet que nous pouvons connaître par intermédiaire de nos sens, tandis que le cercle mathématique est le produit d'un acte conscient de notre intelligence.

Prenons un autre exemple. Jetons dans une tirelire 3 sous et puis encore 5 sous. Combien de sous avons nous jeté dans la tirelire ? La méthode empirique est de la briser et de compter la monnaie. Cependant, chacun préfèrera la méthode mathématique: sans regarder dans la tirelire, „les yeux clos", il fera l'addition de 3 et 5. Il fera cette opération dans l'esprit, aussi en verra-t-il dans l'esprit le résultat 8. Il n'aura aucun doute que ce résultat est conforme à la réalité; une vérification empirique (pourvu qu'il se souvienne bien de ce qu'il avait jeté) sera reconnue par tout le

---

trouvons pas en désaccord avec aucune opinion philosophique sur les mathématiques, en particulier avec celles des empiristes, car nous n'excluons ni le doute possible au sujet des vérités mathématiques du point de vue métaphysique ou épistémologique, ni l'affirmation que les notions et axiomes mathématiques proviennent de l'expérience (cf. le chapitre *Problèmes philosophiques des mathématiques* de ce „Conseiller").

Nous n'affirmons ici non plus qu'aucune autre science ne peut justifier ses résultats avec une certitude absolue et par une voie qui n'est pas expérimentale. Nous constatons seulement qu'aucune ne l'a fait jusqu'à présent ou, au moins, que les tentatives de le faire n'ont pas été universellement reconnues. Ainsi, on a cherché par exemple de présenter sous la forme d'une science apodictique ou aprioristique la métaphysique, la morale (SPINOZA) et la mécanique (DESCARTES, EULER).

monde superflue, même déraisonnable. Et même si quelqu'un, ayant brisé la tirelire, compte les sous et n'en trouve que 7 par exemple, notre foi en le résultat du raisonnement mathématique ne s'en trouverait point ébranlée: nous dirions sans hésiter qu'un sou ait dû tomber dehors ou qu'une autre chose se soit passée, mais nous n'avouerons jamais que $3 + 5$ ne font pas 8. C'est un fait interne que celui de pouvoir effectuer une investigation mathématique dans notre esprit et ressentir la contrainte d'une foi absolue en le résultat de cette investigation (²). Nous constatons ce fait sans le discuter ici.

Or cette faculté de découvrir les vérités dans l'esprit et l'impuissance de se les imaginer autres sont deux traits les plus caractéristiques des vérités mathématiques (³). Le meilleur critérium pour distinguer la science mathématique des autres sciences est donné, en effet, par son caractère déductif, présupposant le caractère abstrait de son objet d'investigation et entraînant la certitude absolue de ses résultats. C'est le meilleur critérium pour aujourd'hui, mais il n'est pas tout à fait bon, car il donne une définition un peu trop vaste.

Il est vrai que les sciences expérimentales font également l'usage plus ou moins étendu de la déduction et qu'elles parviennent par cette voie à de divers résultats. Mais elles se basent alors sur des résultats acquis au préalable par la voie d'expérience. Par contre, les

---

(²) La possibilité théorique d'une divergence entre le résultat mathématique et celui d'une expérience s'explique encore ici par la même raison, à savoir que l'objet de l'investigation mathématique et expérimentale n'a pas été le même. Le théorème mathématique concerne la somme mathématique de 3 sous et 5 sous (à vrai dire, en mathématiques il est question des nombres abstraits 3, 5 et 8, et non pas de „3 sous mis dans une tirelire"; mais nous savons par la logique que tout ce qui est vrai pour les notions générales l'est également pour les objets particuliers qui tombent sous elles), tandis que nous vérifions expérimentalement combien y a-t-il de sous mis dans la tirelire. Or mettre des objets dans un endroit, les unir physiquement, n'est pas une addition mathématique, mais seulement une action qui correspond à l'addition, si l'on adopte l'hypothèse physique que les objets considérés ne changent pas en s'unissant. Nous sommes si habitués à cette hypothèse que nous ne nous rendons même pas compte de son usage. Il est cependant facile d'indiquer des exemples où elle ne s'avère pas, par exemple en faisant tomber dans un vase des gouttes de mercure au lieu des sous, ou bien en y versant 1 litre d'eau et 1 litre d'alcool. La mathématique dit seulement que nous y avons versé 2 litres. Aussi, c'est tout ce qui est absolument certain (abstraction faite d'une erreur possible). Y a-t-il cependant en effet 2 litres dans le vase ? Les mathématiques ne peuvent rien décréter à ce sujet. C'est bien à l'expérience qu'il faut s'adresser pour avoir la réponse à cette question; et l'expérience nous enseignera qu'il y a dans le vase moins que 2 litres de liquide.

(³) Ce fait est indépendant de toute explication empiriste que l'on voudrait lui ajouter (cf. le chapitre *Problèmes philosophiques des mathématiques* de ce „Conseiller").

mathématiques se servent exclusivement du raisonnement, sans s'adresser à l'expérience ([4]).

2. Le caractère déductif de la science mathématique n'est pourtant que celui de sa forme, bien qu'il soit essentiel et qu'il résulte des propriétés les plus profondes de cette science. Reste donc la question: quelle est la teneur des mathématiques, quel est l'objet dont elles s'occupent? La réponse usuelle est que les mathématiques sont une science des grandeurs ou des nombres. Cette définition n'est pas exacte. Elle est trop étroite.

Mais ne cherchons pas à épuiser la teneur de la science mathématique par une proposition, par une définition. Cette science se développe, elle vît, son domaine s'élargit et nous n'en pouvons pas fixer d'avance les limites. Nous la connaîtrons mieux en apprenant la voie de son développement.

La science mathématique a débuté en effet par l'étude des nombres ([5]). Malgré leur simplicité, les notions de nombres sont déjà une abstraction: nous les étudions en faisant abstraction des objets dont ils sont des nombres. On parlait d'abord des nombres individuels: 3, 5, 6, ... Plus tard, on a remarqué — et on ne s'en est rendu parfaitement compte qu'aux temps modernes — que les propriétés les plus intéressantes des nombres sont celles qui sont générales, c'est-à-dire celles de tous les nombres ([6]). On peut donc connaître ces propriétés en faisant abstraction des propriétés individuelles des nombres, c'est-à-dire de ce que ce sont précisément les nombres 3, 5 ou 6 et non pas autres. Grâce à cela nous pouvons les désigner tous à l'aide d'un même symbole, à l'aide de la lettre a par exemple. Qu'est-ce qui reste alors d'un nombre? Qu'est-ce qui reste du nombre 2 lorsqu'on fait abstraction de sa propriété qu'il est bien le nombre 2 et pas 3 ou 7? Il en reste que c'est un *nombre quelconque.* En désignant les nombres d'une façon générale par les lettres $a, b, c, \ldots$ sans se soucier quels sont les nombres particuliers qu'elles représentent — ces nombres étant quelconques — nous nous élevons au second gardin de l'abstraction. L'exemple en peut être fourni par le théorème

$$a \times b = b \times a.$$

([4]) Pour la question des doutes possibles concernant les origines et la nature des axiomes mathématiques, cf. les chapitres *Fondements de la géométrie* et *Problèmes philosophiques des mathématiques.*

([5]) À savoir des nombres entiers positifs. Ce n'est que plus tard que l'on a introduit les fractions, les nombres irrationnels, négatifs, imaginaires etc. (transfinis, idéaux par exemple), en s'éloignant ainsi de plus en plus de la notion primitive de nombre, le premier objet des mathématiques. On s'en est éloigné davantage au cours du développement qui va être présenté.

([6]) Au moins de tous les nombres d'un genre donné. Des restrictions analogues sont à sous-entendre également dans la suite.

Les vérités comme celle qui vient d'être exprimée par la formule peuvent être regardées aussi bien comme des propriétés des nombres que comme celles des opérations (ici de la multiplication). Nous pouvons donc traiter également les dernières comme l'objet des investigations mathématiques.

L'opération est une chose plus abstraite que le nombre. En considérant une opération donnée, la multiplication par exemple, nous faisons abstraction des nombres (donnés) avec lesquels elle est effectuée. La multiplication est la même opération pour 2 par 5 que pour 3 par 7. On peut la représenter par $a \times b$. En passant des opérations particulières, comme addition ou multiplication, à l'*opération en général*, nous montons le gradin de l'abstraction supérieur au précédent. Une notion apparentée à celle d'opération est la notion de fonction (7). Elle est particulièrement importante, domine toute les mathématiques supérieures de nos jours et en constitue peut-être la teneur principale (elle commence d'ailleurs à pénétrer également dans les mathématiques élémentaires). Dans l'étude des fonctions, nous faisons aussi abstraction des caractères individuels d'une fonction donnée et examinons d'habitude, plus généralement, certains genres de fonctions. Et nous fixons encore l'abstraction faite en désignant les fonctions par une lettre et en opérant avec cette lettre sans demander quelle fonction (du genre donné) est représentée par elle.

Ici, nous cesserons de suivre la science mathématique dans son ascension audacieuse vers les hauteurs de l'abstraction de plus en plus vertigineuses. De l'endroit où nous sommes, notre oeil n'y atteindra plus les chemins (8).

Nous avons vu comment de nouvelles notions viennent s'ajouter aux mathématiques au cours de leur développement et en deviennent objets d'investigation. Elles s'y ajoutent également grâce à d'autres directions de leur développement. Une notion des plus importantes et qui a été incorporée récemment au domaine de l'investigation mathématique est celle d'*ensemble* (en mathématiques, on dit aussi *classe*, *famille*, ...) de n'importe quels objets. Elle est plus élémentaire que la notion de nombre, car ce n'est qu'à un ensemble d'objets que l'on peut appliquer la question: combien ? en quel nombre ? On peut donc considérer le nombre comme une

(7) Le lecteur en trouvera une explication élémentaire au Degré II, § 16, et une définition rigoureuse abstraite dans le chapitre *Théorie des fonctions de variable réelle*, § 1.

(8) Il n'est donc pas étonnant que l'étude des mathématiques est si difficile pour beaucoup de gens. Bien qu'au début l'objet en soit simple et tout le monde le comprenne facilement — un, deux, trois, ... — cet objet devient bientôt, grâce à l'abstraction et au façonnage mathématique, si fin et si compliqué qu'il faut être doué d'une faculté spéciale — que j'appellerais *imagination intellectuelle* — pour pouvoir le reconstruire, le retenir dans l'esprit et le manier.

propriété de l'ensemble. Cette notion est devenue la base des recherches sur les fonctions en tant que sur les correspondances entre les éléments de deux ensembles de nombres (⁹), et on peut la considérer aussi comme fondamentale en géométrie (à laquelle nous allons nous adresser tout à l'heure), l'espace et toutes les figures géométriques étant des ensembles de points. C'est pourquoi l'éminent philosophe des mathématiques, COUTURAT, a écrit: „S'il y a une idée première et fondamentale en Mathématiques, ce n'est donc pas l'idée de nombre, mais bien celle d'ensemble" [10].

Simultanément aux premières recherches sur les nombres, qui constituent le domaine le plus ancien des mathématiques, la géométrie a commencé à se développer expérimentalement. Après la pénétration de la géométrie expérimentale égyptienne dans le Grèce, on s'est aperçu que l'on peut la traiter par la méthode déductive, que l'expérience est superflue et qu'en s'appuyant sur quelques faits évidents (les *axiomes*), toutes les autres vérités géométriques s'en laissent déduire rigoureusement et démontrer avec une certitude absolue. La géométrie est devenue ainsi une partie des mathématiques, bien que son objet ait été, à ce stade de son développement (la géométrie grècque étant en principe notre géométrie élémentaire d'école), tout a fait différent de l'objet initial: des nombres.

Cependant la science mathématique n'a pas supporté cette dualité d'objet. Bien qu'elle s'occupe, comme nous avons vu, de divers objets, ces objets sont liés entre eux par des relations très étroites et appartiennent au même genre, celui de raison pure [11]. Les mathématiques ont donc dû éliminer l'élément étranger à elles-mêmes et à leur méthode déductive, cet élément étant représenté par l'objet de la géométrie: l'espace (même idéalisé) et par ses fondements: les axiomes.

On a effectué d'abord l'union de ces deux domaines en subordonnant la géométrie à l'analyse mathématique [12] (géométrie analytique). Plus récemment, la géométrie a trouvé toutefois son propre chemin: nouant des liaisons intimes avec l'analyse, elle a su sauvegarder sa particularité. On y est parvenu grâce à la méthode dite *axiomatique*, c'est-à-dire en considérant les axiomes comme des définitions et les objets géométri-

---

(⁹) Cf. le chapitre *Théorie des fonctions de variable réelle*.

(¹⁰) L. COUTURAT, *Les principes des Mathématiques*, Paris 1905, p. 211.

(¹¹) Certains esprits ne seront pas d'accord à refuser à l'espace la nature purement rationnelle (tels les rationnalistes et les néokantistes par exemple), mais ils seront certainement d'accord à confirmer que l'espace et les notions d'analyse sont des objets de deux genres bien différents.

(¹²) Il s'agit de l'analyse au sens large, en y faisant entrer toutes les parties des mathématiques qui ne sont pas la géométrie, donc l'arithmétique théorique, la théorie des nombres, l'algèbre et le calcul infinitésimal (cf. la Table, p. 236). Au sens plus strict, nous n'entendons par l'analyse que le calcul infinitésimal.

ques comme des constructions mentales définies uniquement par les axiomes adoptés. L'application de cette méthode ne s'est pas borné à la géométrie. On a commencé à traiter de la même façon l'analyse (en définissant ses objets, les nombres par exemple, comme ce qui satisfait à un certain groupe d'axiomes et en la traitant comme une théorie des calculs formels) ([13]). Cette métamorphose de la géométrie a introduit une nouvelle difficulté dans le problème de définir le domaine et l'objet des mathématiques: au même titre que la géométrie, il semble possible leur faire appartenir n'importe quelle théorie purement déductive. Nous voilà donc revenus à la première définition (trop vaste). Ne désirant pas prolonger la recherche des frontières si fines des mathématiques, nous nous contenterons de cette définition, qui est plus vaste, mais aussi plus claire et convient mieux aux buts de ce „Conseiller". Nous ferons donc entrer dans les mathématiques deux sciences voisines: le calcul des probabilités et la logistique.

Le calcul des probabilités est d'ailleurs considéré habituellement comme faisant partie des mathématiques, bien qu'il soit plus plausible de le regarder comme une science distincte, car son objet, la probabilité, est une notion étrangère aux mathématiques proprement dites. La logistique, c'est-à-dire la logique mathématique, est souvent classée, elle aussi, parmi les disciplines mathématiques et la question d'une différence essentielle entre mathématique et logique donne même lieu à des contestations. Ainsi par exemple l'éminent philosophe contemporain, HUSSERL, écrit: „Personne ne peut interdire aux mathématiciens de s'emparer de tout ce qu'il faut façonner d'après la forme et la méthode mathématique. Seul qui ignore les mathématiques comme une science moderne, notamment les mathématiques formelles, et qui les juge uniquement selon Euclide et Adam Riese, peut persister dans le préjugé commun d'après lequel l'essentiel en mathématiques réside dans le nombre et dans la quantité. Ce n'est pas le mathématicien, mais bien le philosophe qui franchit les frontières naturelles de sa sphère légale, quand il s'oppose aux théories „mathématisantes" de la logique et ne veut pas rendre ses pupilles temporaires à leurs parents naturels" ([14]).

([13]) Pour l'explication du dernier passage, voir plus loin: sur la différence entre la géométrie et l'analyse — l'explication de la Table, p. 236; sur la méthode axiomatique et la conception actuelle de la géométrie mathématique — le chapitre *Fondements de la géométrie*; sur le rôle de la méthode mathématique en tant que le degré le plus élevé du processus d'abstraction décrit plus haut — le *Chapitre final*; sur le rapport de la géométrie à l'espace (physique ou psychologique) — le chapitre *Problèmes philosophiques des mathématiques*; enfin, sur la conception purement formelle de l'analyse du point de vue philosophique (nominaliste) — *ibidem*.

([14]) E. HUSSERL, *Logische Untersuchungen*, I, Halle 1922, p. 252-253.

La Table p. 236 et les explications qui l'accompagnent peuvent servir à mieux caractériser les mathématiques et à orienter le lecteur en ce qui concerne le terrain de recherches actuel et la subdivision de cette science. Ici, nous n'ajouterons donc que quelques mots, pour caractériser les problèmes des mathématiques et pour compléter les considérations que précèdent.

3. Plus d'un s'imagine probablement que le mathématicien est constamment occupé du calcul et entouré des nombres qu'il ajoute ou multiplie (et peut-être même que les mathématiques supérieures consistent à s'occuper des nombres plus élevés!). Que s'étonnent donc ceux qui pensent ainsi à ce que l'on ne rencontre dans les livres mathématiques presque jamais d'autres nombres que 1, 2, 3, 4 et 5. On pourrait dire que 5 est le plus grand nombre connu par le mathématicien ([15]).

Comment ce fait étrange est-il possible, cela s'explique par la tendance des mathématiques à l'abstraction et à la généralité (tendance discutée plus haut), et par la propriété suivante de cette science: ce qui intéresse les mathématiques n'est pas *grandeur*, mais *qualité* ([16]).

Voyons quelles sont les questions que les mathématiques se posent aujourd'hui. On demande le plus souvent si un objet mathématique (nombre, équation, fonction, figure géométrique etc.) possède ou non une propriété donnée, et on pose cette question de façon à pouvoir y répondre „oui" ou „non". On demande par exemple si un ensemble possède un nombre fini ou une infinité d'éléments (comme l'ensemble des racines d'une équation ou celui des points singuliers d'une fonction), ou bien si une chose existe ou n'existe pas (comme un diviseur

([15]) C'est en accord (et sûrement en rapport) avec ce fait psychologique que nous ne connaissons directement, en vérité, que les quelques premiers nombres dont 5 est probablement le plus grand: par un effort considérable, nous distinguons peut-être sans compter et sans aucun autre moyen (comme l'ordination des objets donnés, même dans l'esprit, en une figure dont la forme nous est connue, celle par exemple des points sur une carte à jouer) si l'ensemble donné contient 4 ou 5 objets, mais il y a lieu à douter si c'est possible pour des nombres plus élevés.

Ce que nous venons de dire dans le texte peut nous expliquer aussi un fait de la psychologie des mathématiciens: maints mathématiciens éminents ont été de très mauvais compteurs, „ne sachant pas l'addition". Il y a eu parmi eux Newton, Poisson, Kummer (voir W. Ahrens, *Scherz und Ernst in der Mathematik*, Leipzig 1904).

([16]) Nous l'entendons au sens général. Il arrive parfois, en effet, qu'il faut calculer une grandeur, mais l'on ne considère d'habitude ce calcul que comme un moyen pour répondre à une autre question qui est qualitative. En outre, nous ne l'entendons qu'en ce qui concerne les mathématiques pures proprement dites et qui se trouvent sur le plus haut degré de leur développement. Les mathématiques se présentent bien autrement à ceux qui s'en occupent en vue des applications, et autrement encore à ceux qui en apprennent les débuts (surtout au Degré I) et ne peuvent pas s'élever sur les hauteurs de l'abstraction.

commun de deux nombres entiers ou une racine de l'équation donnée), mais on n'en demande point la grandeur exacte [17]. On la désigne même par un signe général, par la lettre a par exemple, et même alors que cette grandeur est bien déterminée et que nous pouvons l'évaluer.

Lorsqu'il s'agit en particulier d'examiner un nombre (la racine d'une équation par exemple), nous ne demandons en général pas s'il est contenu entre 10 et 20 ou s'il dépasse 1000; sa grandeur nous est indifférente. Nous demandons quelles sont ses propriétés, quel est le genre auquel il appartient. Et nous ne classons les nombres en genres d'après leur grandeur, mais bien autrement, de sorte que les nombres qui ne diffèrent que très peu par leur grandeur se trouvent rangés dans des genres différents, tandis que les nombres très différents quant à leur grandeur peuvent appartenir au même genre.

Le premier classement en genres est celui en nombres entiers et non entiers. Ces deux genres de nombres ont des propriétés fort différentes, et il ne nous servira à rien de savoir par exemple que le nombre examiné a est inférieur à 2,1 et supérieur à 1,9, puisque cela ne nous renseignera point si c'est le nombre 2, donc un entier, ou un nombre distinct de 2, donc non-entier (en vertu des inégalités précédentes); alors, si peu qu'il ne diffère de 2, il en diffère plus considérablement par ses propriétés que le nombre 1000 par exemple.

Cela nous explique l'importance et le besoin de l'*exactitude mathématique* des résultats (à distinguer du besoin, évident par lui-même, de la *rigueur* des démonstrations). Cela nous explique en même temps pourquoi les mathématiques ne se contentent pas des résultats approchés et pourquoi l'évaluation des approximations exactes au sens des physiciens est sans aucune valeur pour les mathématiciens.

C'est plus manifeste encore dans le classement en nombres rationnels (c'est-à-dire nombres entiers et fractions) et irrationnels. Pour constater que le nombre donné n'est pas un entier (jamais pour constater qu'il l'est !), il suffit souvent d'en connaître une approximation: si $a > 2$ et $a < 3$ par exemple, a n'est pas un entier. Par contre, pour trancher la question

---

[17] L'exemple de l'équation nous fera mieux saisir la nature des problèmes mathématiques. Ainsi, après avoir répondu par l'affirmative aux questions si les racines existent et s'il y en a un nombre fini, on se pose parfois la question combien y en a-t-il. Mais leur nombre ne nous intéresse d'habitude que lorsqu'il est petit (1, 2, 3); en cas contraire, nous ne cherchons que sa relation avec d'autres nombres (d'ordinaire indéterminés) que contient cette équation. Dans le cas d'équation algébrique, on démontre par exemple que le nombre des racines est égal au degré de l'équation. Par contre, on ne demande presque jamais quelle est la grandeur des racines, mais bien quelle est leur relation avec les autres nombres intervenant dans le problème ou quel est leur genre (nous y reviendrons dans la suite). On pourrait continuer à suivre cette tendance, ce qui expliquerait les écarts apparents d'elle-même.

si le nombre donné est rationnel ou irrationnel, aucune approximation ne peut suffire, car il se trouve entre deux nombres quelconques une infinité de nombre rationnels et une autre de nombres irrationnels.

On se contente dans certaines recherches mathématiques d'avoir des inégalités, mais ce n'est qu'une exception apparente de ce que nous venons d'observer. En fait, il n'est pas question dans de tels cas des approximations, pas plus que de la grandeur du nombre examiné, mais bien d'une propriété de ce nombre, du classement des nombres en deux genres (ici en ceux qui sont inférieurs à lui et ceux qui lui sont au moins égaux), de sorte que nous puissions répondre „oui" ou „non" à la question posée. Par exemple, une progression géométrique

$$1+a+a^2+a^3+\dots$$

étant donnée (dont la somme est égale à $1/(1-a)$ lorsque $|a|<1$ et qui est divergente lorsque $|a|\geqslant 1$, de sorte que l'on ne peut alors parler dutout de la somme de cette progression), le seul renseignement qui nous intéresse est celui auquel des deux genres de nombres appartient le nombre $|a|$: aux inférieurs ou aux non-inférieurs à 1. Et nous rangeons dans un même de ces deux genres les nombres 1 et 1000000, mais dans les genres différents les nombres 1 et 0,999999 (d'une façon générale, tous ceux qui sont dépassés par 1 aussi peu que l'on veut). Par conséquent, aucune estimation approchée de la grandeur n'est ici suffisante pour effectuer complètement le classement dont il est question.

Pour éviter des malentendus, notons encore ceci: en mathématiques, il s'agit souvent des approximations, mais elles sont une chose tout à fait différente des approximations au sens commun. La notion *mathématique* d'approximation peut servir d'exemple de la perfection et de la finesse mathématique (telles sont les notions de limite et d'approximation du nombre irrationnel par des nombres rationnels).

4. La question suivante s'impose souvent aux non-mathématiciens: à quel but sert le grand édifice de la science abstraite que sont les mathématiques ? Alors, on indique d'habitude les applications comme la raison d'être des mathématiques, et notamment le développement technique, qui n'a été possible que grâce aux mathématiques modernes. Cette réponse perd sa valeur lorsqu'on songe comment est petite la partie des mathématiques qui a des applications, pendant que la majeure partie attend à être appliquée et „elle l'attend en vain" suivant l'expresssion de Pringsheim ([18]).

([18]) A. Pringsheim, *Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik*, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 13, 1904, p. 357-382, en particulier p. 380; traduction russe dans Wiestnik Znaniia, 1904, n^{os} 7 et 12. C'est un intéressant discours contenant une réfutation des objections faites à la mathématique par W. Hamilton et A. Schopenhauer.

Bien que nous ne puissions affirmer d'aucune théorie mathématique qu'elle ne trouve jamais d'applications, vouloir justifier la raison d'être de ces théories par des applications si peu probables – dit PRINGSHEIM – serait la même chose que motiver la demande des fonds pour une expédition polaire par des avantages de commerce qui pourraient en résulter. La justification est donc à chercher ailleurs – comme en témoignent les aveux concordants de divers mathématiciens – à savoir dans les mathématiques mêmes. POINCARÉ le met au point comme suit: „Si nous travaillons, c'est moins pour obtenir ces résultats positifs, auxquels le vulgaire nous croit uniquement attachés, que pour ressentir cette émotion esthétique et la communiquer à ceux qui sont capables de l'éprouver" ([19]) et il l'exprime plus nettement encore dans un de ses livres en disant: „... je n'hésite pas à dire que les mathématiques méritent d'être cultivées pour elles-mêmes et que les théories qui ne peuvent être appliquées à la physique doivent l'être comme les autres" ([20]).

En se posant la question, où faut-il donc chercher le but véritable de nos tendances, on avouera que c'est avant tout dans la Vérité et la Beauté; or les mathématiques satisfont justement à ces besoins supérieurs de l'âme.

La vérité que nous offre la science mathématique porte directement non pas sur des objets matériels, mais sur nos constructions intellectuelles. A-t-elle pour cela une moindre valeur? Les lois de nos pensées, de notre monde intérieur sont-elles moins intéressantes que celles du monde extérieur?

La science mathématique ainsi conçue est souvent comparée au jeu d'échecs et appelée dédaigneusement un jouet. Son objet est qualifié une chimère. Or ces comparaisons ne sont pas justes. La théorie du jeu d'échecs n'est pas une science, mais point parce que son objet a été imaginé par nous, ni parce que ce jeu est une construction de l'esprit (tout comme le sont les objets mathématiques). Le domaine des faits matériels contient, lui aussi, des vérités sans valeur scientifique (le poids exact de cette table par exemple) et des ensembles de vérités qui ne constituent pas une science. La raison pour laquelle la théorie du jeu d'échecs n'est pas une science est que son objet n'est ni général, ni enchaîné avec les autres. D'une façon générale, la valeur d'une vérité est plus grande lorsque cette vérité élargit ou approfondit nos connaissances, c'est-à-dire lorsqu'elle est générale et se rattache au reste de nos connaissances.

Or ce sont les caractères dont les vérités mathématiques jouissent au plus haut degré.

([19]) H. POINCARÉ, *Notice sur Halphen*, Journal de l'École Polytechnique, 1890, cahier 60, p. 143.

([20]) H. POINCARÉ, *La valeur de la science*, Paris 1920, p. 139; cf. W. AHRENS, *Scherz und Ernst in der Mathematik*, Leipzig 1904. Nous puisons de ce livre la plupart des lieux cités ici.

Pas moins, sinon davantage, la beauté est le but pour lequel on cultive les mathématiques. On en trouve maintes preuves dans les énonciations de divers mathématiciens. Voici comment MITTAG-LEFFLER caractérise une oeuvre mathématique: „La meilleure oeuvre du mathématicien est celle qui est une oeuvre d'art, d'art sublime, parfait et limpide comme une pensée abstraite" ([21]). Il est vrai que c'est à peine une poignée d'individus qui le ressentit ainsi, mais „il n'y a pas lieu de s'en étonner" — écrit GAUSS dans une lettre à Sophie Germain ([22]) — „le charme de cette science subtile ne se révèle en toute beauté qu'à ceux qui ont le courage de l'explorer jusqu'au fond" ([23]).

Il est, bien entendu, impossible de faire voir cette beauté à qui ne l'a jamais éprouvée lui-même; il doit alors croire au témoignage des autres et se contenter d'apprendre qu'elle peut être comparée le mieux à celle de la musique ou de l'architecture (à l'harmonie des sons ou des lignes) ([24]).

A la question, à quoi bon peuvent servir ces théories mathématiques abstraites, ces „jouets", nous répondrons donc aussi par une question: à quoi bon servent les symphonies ? Est-ce que la musique serait également appellée un jouet ? ([25])

([21]) M. G. MITTAG-LEFFLER, *Sophie Kowalewsky*, Acta Mathematica 16, 1892--1893, p. 388-389.

([22]) S. GERMAIN, *Oeuvres philosophiques*, Paris 1896, p. 275.

([23]) GAUSS le dit surtout de la théorie des nombres.

([24]) Cf. H. POINCARÉ, *La valeur de la science*, Paris 1920, p. 82, H. MINKOWSKI, *Diophantische Approximationen*, 1907, préface, et L. BOLTZMANN, *Gustav Robert Kirchhoff* (Akademische Festrede), Graz 1887, p. 28-30.

En citant GOETHE, qui a appelé le dôme gothique „une musique figée", J. W. A. YOUNG dit dans son livre *The teaching of mathematics*, Londres 1911, que mieux pourrait-on l'appeler „la mathématique pétrifiée". E. E. KUMMER, *Über einige mathematische und philosophische Grundanschauungen Leibnizens* (Akademische Festrede), Berlin 1867, en pense autrement: pour lui, la vraie beauté des mathématiques ressemble plutôt à celle de la nature.

Pour ne pas nous borner aux témoignages des mathématiciens, citons encore un passage du livre de F. RUDIO, *Über den Antheil der mathematischen Wissenschaften an der Kultur der Renaissance*, Sammlung gemeinverständlicher wissenschaftlicher Vorträge, Virchow-Holtzendorff, Hamburg 1892, fascicule 142, p. 19: „Ce qui a attiré avec une force irrésistible vers les sciences mathématiques les grands maîtres de la Renaissance, comme Brunellesco, Lionardo da Vinci, Raphael, Michelangelo et en particulier aussi Albrecht Dürer, n'a pas été exclusivement la tendance à l'instruction universelle. Ils ont été conscients que, malgré toute la liberté de l'imagination individuelle, l'art connaît également la loi de nécessité et que, réciproquement, malgré toute la logique inébranlable de sa structure, les mathématiques se développent, elles aussi, suivant les lois de la beauté".

([25]) La comparaison aux échecs est superficielle encore ici. Les échecs peuvent procurer un contentement esthétique comparable à la solution élégante et ingénieuse d'un problème mathématique particulier, mais nullement à cette harmonie des objets

5. En tant qu'une science aprioristique, les mathématiques n'empruntent rien aux autres sciences, excepté peut-être à la logique, dont elles puisent la connaissance (d'ailleurs pratique seulement) des principes du raisonnement correct. C'est pourquoi seule la logistique peut être mentionnée comme la science auxiliaire des mathématiques. Puis, ce sont la philosophie des mathématiques et l'histoire des mathématiques qui peuvent intéresser le mathématicien plus particulièrement. Pour des raisons pratiques, nous rangeons cependant toutes les trois sciences parmi les disciplines mathématiques et les traitons dans cette Section; il sera donc question, à l'endroit convenable, aussi de leur importance pour le mathématicien (cf. également l'*Introduction* du Degré III).

6. Par contre, les mathématiques sont une science auxiliaire pour des sciences fort nombreuses et de plus en plus nombreuses. KANT a caractérisé même la tendance générale à formuler nos connaissances d'après le mode mathématique en disant: „J'affirme que, dans chacune des sciences naturelles, l'on ne peut trouver qu'autant de véritable science qu'il s'y trouve de mathématiques" ([26]). Plus particulièrement, elle est un instrument inestimable dans l'exploration de la nature inanimée et qui est d'autant plus efficace que l'exactitude avec laquelle l'objet à examiner se laisse analyser et mesurer est plus considérable. La mécanique par exemple peut être écrite presque entièrement, pour ainsi dire, dans le langage mathématique, à l'aide des formules. Aussi la physique et l'astronomie exigent de leurs adeptes une instruction mathématique approfondie (plus notamment les équations différentielles, les séries de Fourier, le calcul des variations et celui des probabilités). Autres sciences naturelles n'exigent pas autant de mathématiques, mais — quand même — tout au moins l'algèbre et la géométrie scolaires, éléments de la géométrie analytique et ceux du calcul différentiel et intégral. Les sciences techniques exigent en outre la connaissance de la géométrie descriptive. Parmi les humanités, je ne mentionnerai que l'économie et la statistique (avec applications pratiques, surtout aux assurances) comme celles où les mathématiques trouvent des applications de plus en plus étendues. Il y a des traités d'économie qui font usage même des équations différentielles ([27]).

---

et des relations mathématiques que découvrent les théorèmes et les théories, pas plus qu'au plan artistique et à la structure de la théorie même.

([26]) I. KANT, Préface aux *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*, Riga 1786.

([27]) Ce courant mathématique dans l'économie politique est représenté surtout par PARETO, professeur à Lausanne. Parmi ses oeuvres sont à citer: *Cours d'économie politique*, deux volumes, Lausanne 1896 et 1897, *Anwendungen der Mathematik auf Nationalöconomie*, Enzyclopädie der Mathematischen Wissenschaften, volume I,

7. Les études philosophiques, bien que les mathématiques n'y aient pas d'applications au sens strict, exigent non moins de connaissances mathématiques. Qui, en effet, plus que le philosophe a besoin d'être routiné dans le raisonnement logique et rigoureux, d'avoir du criticisme que lui donnent les mathématiques, qui révèlent si souvent le faux dans les jugements en apparence simples et évidents ? Puis, la philosophie s'occupe des fondements et des notions principales des sciences, donc avant tout de celles des mathématiques, car elles sont la base de toutes les sciences (du moins des sciences naturelles). D'ailleurs, les notions telles que quantité, continuité, infinité, dûment élucideés par les mathématiques, sont d'usage constant en philosophie. Ce besoin de connaître les mathématiques se manifeste plus nettement encore dans des branches particulières de la philosophie. Qui s'occupe de la logique doit prendre connaissance des raisonnements mathématiques et des modes de former les notions — ce sont des matériaux pour ses études; s'il s'occupe de l'épistémologie, c'est la valeur épistémologique des mathématiques et de leurs fondements qui est importante pour lui; s'il étudie l'histoire des sciences, leur méthodologie ou l'ainsi dite philosophie de la nature (*), la nécessité qu'il connaisse les mathématiques n'exige même pas d'explication. Pour voir l'importance du rôle que joue la manière de concevoir les mathématiques dans divers systèmes philosophiques, il suffit de se souvenir de KANT. Rappelons aussi combien y avait-il de mathématiciens parmi les plus grands philosophes — PYTHAGORE, PLATON, DESCARTES, LEIBNIZ — ce qui n'a pas été sans influence sur leurs oeuvres philosophiques. Dans la plupart des écoles philosophiques d'aujourd'hui, les mathématiques jouent un rôle important. Notons-en celle d'HUSSERL (dont les vues philosophiques fondamentales se sont formées sous l'influence des études mathématiques et de la philosophie de mathématiques (il le dit lui-même dans la préface de son oeuvre *Logische Untersuchungen*), puis l'empiriocriticisme (histoire de la mécanique) de MACH, l'école de Marbourg et celle de FRIES (pour s'en convaincre, il suffit de jeter un coup d'oeil dans les écrits que ces écoles éditent). Les mathématiques deviennent ainsi, dans un certain sens, pratiquement nécessaires, à savoir pour comprendre aisément et se faire une opinion critique des publications philosophiques actuelles. Il est cependant à remarquer que la philosophie ne s'engage presque pas dans des résultats mathématiques particuliers, à la suite de quoi l'on peut, sans connaître les mathématiques, lire des livres philosophiques faisant appel aux mathématiques ou les analysant, et avoir l'impression de les avoir compris; mais — il y a grande différence entre comprendre et comprendre.

partie II, 1902; dans l'édition française de cette encyclopédie, cet article se trouve dans le tome I, volume IV, fascicule 4, 1911.

(*) „Naturphilosophie" des Allemands [note des éditeurs].

C'est pourquoi, à ceux qui ont choisi la voie de la philosophie, il faut répéter même aujourd'hui les paroles que PLATON avait placées, il y a des siècles, à l'entrée de son académie: „Que personne n'entre ici sans connaître la géométrie" ([28]).

8. En tant qu'une science des formes générales de tous les phénomènes (après l'abstraction de tous les caractères qualitatifs des objets) et en tant que la seule science rigoureusement déductive, les mathématiques présentent une énorme valeur instructive: elles développent l'imagination, apprennent à raisonner correctement et forme des facultés qui permettent de s'orienter plus facilement dans des phénomènes compliqués. C'est pourquoi l'on exige de tout homme instruit une certaine routine mathématique, plutôt que la connaissance de la teneur de cette science. Le Degré II de ce „Conseiller" (c'est-à-dire à peu près le programme de l'enseignement secondaire) correspond à l'ensemble des connaissances qui sont nécessaires à ce but. Le Degré I n'est pas à considérer que comme une introduction au Degré II. Il embrasse, en effet, une partie des mêmes matières que le Degré II, mais elles y sont exposées d'une manière plus facile, plus intuitive, plus pratique, en vue des applications directes à la vie quotidienne. Ce n'est donc pas la véritable théorie proprement dite, mais un cours propedeutique. Les autodidactes qui n'ont pas acquis la faculté de penser d'une manière rigoureuse ou qui n'ont en vue que l'utilité pratique, nécessaire dans leur vie, dans leur ménage ou dans leur métier, peuvent bien en profiter et renoncer d'aller plus loin. Ceux qui enseignent les mathématiques aux enfants au stade primaire de l'enseignement trouveront dans le Degré I une liste des manuels recommandés et autres indications (voir le chapitre intitulé *La méthodique de l'enseignement*).

Le lecteur un peu plus exercé et désirant acquérir l'instruction secondaire générale devra commencer par le Degré II. Il ne fera point de saut en omettant le Degré I, puisqu'il trouvera dans les manuels du Degré II toutes les matières du Degré I, depuis les plus élémentaires, mais rangées plus méthodiquement. Ce n'est que dans le cas où ces manuels se seraient montrés trop difficiles pour lui qu'il aura à recourir à ceux du Degré I, comme étant plus intuitifs.

Qui connaît l'algèbre, la géométrie (élémentaire) et la trigonométrie au niveau du Degré II peut commencer d'emblée par le Degré III. Nous lui conseillons cependant de lire en tout cas l'*Introduction* du Degré II. Il faut pourtant éviter trop de minutie dans l'étude des mathématiques élémentaires. Le progrès dans l'étude de la mathématiques ne consiste pas

([28]) Le mot „géométrie" est évidemment employé comme synonyme des „mathématiques". Quant au plan et au mode d'étudier les mathématiques pour un philosophe, voir l'*Introduction* du Degré III.

à retenir tous les détails ni à apprendre le plus grand nombre de formules, mais bien à assimiler et approfondir de nouvelles notions et méthodes. Un approfondissement véritable des connaissances mathématiques élémentaires (approfondissement et non pas élargissement) n'est d'ailleurs possible qu'au niveau du Degré III, d'une part par l'étude des fondements de la géométrie et de l'arithmétique, et d'autre part en concevant les mathématiques élémentaires au moyen des notions des mathématiques supérieures, en les regardant d'un point de vue choisi bien au-dessus d'elles.

Qui commence à étudier les mathématiques supérieures doit, après avoir lu l'*Introduction* du Degré III, n'étudier que les chapitres sur les disciplines par lesquelles il veut débuter, sans se préoccuper de l'ordre de succession de ces chapitres. En effet, les chapitres du Degré III ne sont pas déstinés à être lus dans aucun ordre fixe, mais plutôt à être consultés à l'instar des encyclopédies (ce qui est facilité par l'Index des matières). Certains chapitres ont en vue la vulgarisation et peuvent servir aux lecteurs du Degré II, par exemple pour compléter leurs connaissances (tout particulièrement: *Arithmétique*, *Théorie des ensembles*, *Théorie des nombres*, *Géométrie analytique et synthétique*, *Fondements de la géométrie*, *Topologie*, *Logistique*, *Calcul des probabilités* et *Problèmes philosophiques des mathématiques*; cf. *Introduction* du Degré II, § 2).

Qui est déjà un peu familiarisé avec les mathématiques supérieures peut lire n'importe quel chapitre qui l'intéresse. Ces chapitres sont d'ordinaire indépendants les uns des autres et, en cas contraire, les citations permettent de retrouver facilement les endroits du „Conseiller" contenant des renseignements nécessaires. En général, la connaissance des mathématiques élémentaires y suffit (ce qui n'en exclut pas l'insuffisance pour comprendre des propositions particulières ou mêmes certains passages). L'exception font les chapitres: *Théorie des fonctions analytiques*, *Équations différentielles ordinaires*, *Équations fonctionnelles et intégrales*, *Développements en séries*, *Équations différentielles aux dérivées partielles*, *Théorie des groupes*, *Géométrie différentielle* et *Calcul des variations*. Pour les comprendre, il faut posséder des connaissances au moins élémentaires sur les séries, les fonctions de variable réelle, le calcul différentiel et intégral et la géométrie analytique.

9. Il est désirable que même ceux dont la profession future n'exige pas de connaissances mathématiques regardent un peu au dehors du Degré II dans l'intérêt de leur instruction générale ([29]), étant donné la disproportion entre la quantité des matières du Degré II et celle du Degré III.

([29]) Malheureusement, il n'y a presque pas de livres populaires sur les problèmes de mathématiques supérieures (cf. Degré II). Comment faudrait-il compléter à cet égard le Degré II, voir les *Introductions* des Degrés II et III.

Comme le montre en effet la Table, p. 236, les mathématiques élémentaires ne sont qu'une menue partie de la totalité de cette science. „Les *Éléments* d'EUCLIDE consituent une partie aussi petite des mathématiques que l'Iliade — de la littérature ou les sculptures de PHIDIAS — de l'art mondial" selon la juste comparaison de KEYSER ([30]). Il arrive cependant assez souvent de voir les bacheliers s'imaginant que l'algèbre et la géométrie élémentaires épuisent l'ensemble des problèmes des mathématiques et que les mathématiques supérieures d'aujourd-hui, tout en restant dans le cercle étroit de ces problèmes antiques, consistent à trouver un nombre plus grand de formules analogues, mais plus compliquées. Un tel avis — si l'on songe au développement magnifique des mathématiques modernes et même les plus récentes — est si éloigné de la vérité que nous sommes contraints de le qualifier une erreur absolument inadmissible, surtout en face de l'importance que le développement des mathématiques a eu et continue d'avoir pour la culture contemporaine.

L'illusion qu'une telle stagnation puisse se produire en mathématiques tire son origine de l'extrême conservatisme de cette science: peu de ses conquêtes ont été rejetées plus tard, presque toutes étant en effet si solidement fondées qu'elles ont résisté à l'épreuve du temps ([31]). Ce conservatisme ne résulte point d'une vénération aveugle de tout ce qui est ancien, car les mathématiques sont avant tout impregnées du criticisme et n'arrêtent pas leurs critiques devant les vérités les plus simples et les plus évidentes.

Néanmoins, le fait que nouvelles recherches ne modifient pas les résultats des mathématiques élémentaires ne doit pas voiier celui que les mathématiques sont en même temps une science extrêmement progressive. Elle se développe très rapidement, s'avance par des voies fort variées et conquiert de nouveaux domaines ne craignant pas les théories les plus hardies et paradoxales. Rappelons seulement les nombres imaginaires, les géométries non euclidiennes, qui rejettent les anciens axiomes géométriques, et la théorie des ensembles, dans laquelle la partie peut être égale au tout.

Les indications plus détaillées sur les études de chaque Degré sont à trouver dans les *Introductions* respectives. En particulier, celle du Degré III tient compte des besoins de tous les lecteurs qui désirent posséder pour n'importe quelle raison une instruction mathématique dépassant l'instruction secondaire dans n'importe quel domaine jusqu'à la spécialisation finale et la préparation aux travaux de recherche.

([30]) C. J. KEYSER, *Mathematics*, New York 1907, p. 8.

([31]) „... si conservatrice que sont les mathématiques, qui ne détruisent pas les travaux des époques antérieures pour élever à leur place de nouveaux édifices" (H. HANKEL, *Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten*, Tübingen 1869 et 1885, p. 7).

10. La subdivision des mathématiques est à entendre comme il suit (explication de la Table):

10,1. La Table poursuit un double but. Le premier est théorique et épistémologique: nous voulons donner une image de l'immensité et des ramifications des mathématiques, de même que ranger dans un ordre les théories déjà connues au lecteur. L'autre but est pratique: la Table veut être un catalogue de toutes les branches des mathématiques, de façon que le lecteur y ayant trouvé le nom ignoré par lui d'une discipline donnée puisse s'orienter à quel domaine de recherches elle appartient et trouver aisément les renseignements sur ce domaine. C'est pourquoi nous avons cherché à rendre la Table aussi complète que possible et y avons placé même quelques branches des mathématiques qu'il faudrait traiter plutôt comme faisant partie des autres théories que comme constituant des théories autonomes.

La Table n'est qu'une approximation peu exacte de l'état réel des choses. On ne peut, en effet, songer à l'exactitude d'une subdivision en présence d'un objet si vif, indivisible et étant en train de se développer. Les mathématiques sont un organisme qui ne se laisse pas démembrer sans une certaine déformation. À plus forte raison, on est contraint à se contenter des jugements fort approchés lorsqu'il est question de comparer entre eux les domaines distincts, étant donné le défaut de toute convention adoptée au sujet de mesurer l'importance des disciplines, le degré de leur épanouissement et celui de leurs rapports mutuels.

Nous tenons donc à noter en particulier que nous avons représenté sur cette Table uniquement les rapports qui nous ont parus importants ou particulièrement intéressants, sans avoir tenu compte des autres rapports. Il en résulte déjà que la Table est non seulement peu exacte, mais aussi fort subjective. Un autre l'aurait composée autrement et nous--mêmes pourrions en modifier la composition. Il faut donc que le lecteur la traite comme un essai ayant pour but de lui faciliter l'orientation aux premiers pas de ses études, lui offrir un sujet à méditer et lui fournir un fond pour former sa propre opinion (un fond peut aussi faire contraste).

Les rapports entre divers domaines des mathématiques sont de nature fort variée: sujet commun, méthode commune de recherche, l'application des résultats d'un domaine à un autre etc.; enfin, le rapport consiste souvent en ce qu'une discipline fait partie de l'autre. C'est ainsi par exemple que la théorie des fonctions elliptiques ou algébriques appartient à celle des fonctions analytiques et que l'étude des coniques appartient à la géométrie analytique ou synthétique — suivant la méthode de recherche adoptée. Nous ne représentons pas ces différences; il faut remarquer toutefois que quant à la disposition des disciplines, nous nous sommes laissés guider par l'affinité de leurs objets, ne représentant d'autres rapports que par des lignes d'union. D'une façon générale, nous avons cependant eu en vue la raison pratique, à savoir combien l'étude d'une science est utile ou bien nécessaire pour en étudier une autre. Aussi, avons-nous omis les rapports évidents par eux-mêmes, car résultant des autres rapports.

10,2. On partage d'habitude les mathématiques en deux grandes sections: l'analyse et la géométrie. Ce partage existe réellement, mais il n'est pas aussi net dans les mathématiques supérieures qu'on serait porté à le croire de prime abord. Repose-t-il sur la différence de l'objet d'investigation ? La géométrie, celle qui appartient aux mathématiques pures, n'étudie pas l'espace physique, mais seulement les propriétés mathématiques de cet espace et de bien d'autres espaces encore auxquels appartient, par exemple, le temps ([32]). Qui entend quelque chose à la géométrie analytique sait bien qu'étudier une ligne ou une fonction revient finalement au même. Plus encore, dans la géométrie analytique supérieure, conçue d'une manière abstraite, les lignes et les figures géométriques ne sont autre chose que certaines équations ou autres objets de l'analyse. Et pourrait-on affirmer au sérieux que les recherches relatives aux figures imaginaires ou aux espaces à plusieurs dimensions concernent l'espace visible ou au moins intuitif ?

Il en est de même de la géométrie non analytique, dite géométrie pure, à laquelle appartiennent: géométrie élémentaire, topologie (dans l'ordre d'idées de DEHN et celui de SCHOENFLIES) et géométrie synthétique, les théories actuelles des fondements de la géométrie ayant rendu même la géométrie pure tout à fait indépendante de l'élément spatial quel qu'il soit, empirique ou intuitif. Il semble plus facile de définir la différence entre l'objet de la géométrie pure et celui de l'analyse: la géométrie pure s'occupe des concepts géométriques définis par les axiomes sans employer les nombres. Mais c'est une différence bien vague.

En quoi consiste donc la différence entre ces deux branches des mathématiques, surtout lorsque la géométrie est traitée analytiquement ? La réponse la plus fréquente est qu'elles diffèrent par leur langage: l'une appelle ses objets d'investigation lignes, droites etc., tandis que l'autre les appelle fonctions, équations etc. Si l'on cherche à pénétrer plus profon-

---

([32]) H. POINCARÉ (*Analysis situs*, Journal de l'École Polytechnique, 1895, (2) 1, p. 1) dit: „La Géométrie, en effet, n'a pas pour unique raison d'être la description immédiate des corps qui tombent sous nos sens: elle est avant tout l'étude analytique d'un groupe; rien n'empêche, par conséquent, d'aborder d'autres groupes analogues et plus généraux."

La notion d'espace mathématique ou mieux *variété* sera envisagée dans le chapitre *Fondements de la géométrie*, et son rapport à l'espace physique — dans le chapitre *Problèmes philosophiques des mathématiques* de ce „Conseiller".

dément dans le sens de cette réponse, on s'aperçoit que la différence indiquée par elle n'est pas superficielle: le mode d'appeler les choses cache celui de les concevoir.

C'est donc bien par la conception de l'objet et par la méthode de l'étudier — et non pas par l'objet lui-même — que l'analyse et la géométrie se distinguent entre elles. Aussi la plupart des objets de recherches mathématiques sont-ils traités à la fois géométriquement et analytiquement, comme regardés de deux côtés. Car tous les faits mathématiques se laissent exprimer dans le langage de la géométrie et dans celui de l'analyse; mais ils s'expriment d'une manière plus simple tantôt dans l'un, tantôt dans l'autre de ces langages. C'est ce qui donne naissance aussi à la différence dans le mode de poser les problèmes dans les deux domaines.

10,3. Plus fondamental nous semble être le partage des mathématiques en celles des objets continus et discontinus (discrets). Nous rangeons dans les secondes la théorie des nombres et celle des groupes discrets avec l'algèbre ([33]) et dans les premières le reste de l'analyse (celle au sens strict) avec presque toute la géométrie ([34]).

La différence entre ces deux parties des mathématiques est très considérable aussi bien dans leurs méthodes d'investigation que dans leurs objets et leurs problèmes (ce qui n'exclut point l'existence des rapports intimes entre elles). Il n'y a cependant que fort peu d'applications de l'un de ces domaines dans l'autre.

Un partage analogue, mais ne portant que sur l'analyse au sens strict est celui en analyse des grandeurs complexes (fonctions analytiques) et réelles (fonctions arbitraires) ([35]). Il est plus fondamental que le partage suivant l'objet, car en modifiant le domaine des recherches (à savoir, en le restreignant aux fonctions de variables réelles, mais en levant simultanément la restriction qu'elles soient analytiques), l'on effectue un changement des problèmes et des méthodes qui modifie essentiellement la nature des recherches ([36]).

([33]) Il est vrai que l'algèbre s'occupe des polynômes, qui sont des fonctions continues, mais elle ne les étudie pas comme des fonctions et ne fait pas intervenir leur continuité dans les démonstrations (excepté celle de l'ainsi dit *théorème fondamental de l'algèbre*). Seules les démonstrations de ce genre sont considérées comme vraiment algébriques.

([34]) De la géométrie, on pourrait faire entrer dans les mathématiques des formes discontinues la topologie (direction de Dehn) et la géométrie élémentaire, tant qu'elle s'occupe des lignes brisées, surtout celle des polygones et polyèdres réguliers.

([35]) Si l'on voulait étendre ce partage à la géométrie, il faudrait ranger dans les mathématiques d'objets arbitraires (réels) la topologie (direction de Schoenflies) et la théorie des courbes quelconques.

([36]) Pour ce partage, voir le chapitre *Développements en séries* de ce „Conseiller".

10,4. Il nous reste à dire quelques paroles au sujet du partage des mathématiques en élémentaires et supérieures. C'est, bien entendu, une subdivision conventionnelle: pratiquement, on appelle mathématiques élémentaires les disciplines faisant partie de l'enseignement secondaire (avec leurs développements directs) et qui n'exigent pas l'introduction de nouvelles notions, donc toute la géométrie grècque et l'algèbre médiévale.

Les mathématiques se développent en formant des notions de plus en plus complexes et séparées par un chemin de plus en plus long des notions simples qui en ont été le point de départ. Toute introduction d'une nouvelle notion de ce genre — toute ascension au nouvel échelon de l'abstraction — peut être considérée comme passage à un niveau plus élevé („supérieur") des mathématiques. Cette gradation est évidemment différente pour chaque branche des mathématiques et elle est caractérisée par l'introduction des nouvelles notions différentes.

Cependant l'introduction de la très importante notion de limite constitue le saut le plus sensible, de sorte que l'on peut regarder cette notion comme la borne marquant le passage aux mathématiques supérieures. La notion de limite se présente, il est vrai, déjà dans la géométrie élémentaire lors de la détermination de l'aire du cercle etc., mais c'est bien une incursion dans les mathématiques supérieures (dans le calcul intégral).

Pourtant, la notion de limite ne suffit guère à caractériser les mathématiques supérieures, car on ne l'introduit pas dans toutes leurs branches. Elle ne sépare non plus les mathématiques élémentaires ni de l'algèbre supérieure par exemple, ni de la théorie des nombres.

Néanmoins, cette signification du terme „élémentaire" est devenu d'usage aussi en mathématiques supérieures. On y appelle d'habitude élémentaires toutes les démonstrations qui n'ont recours qu'à des notions de la théorie des nombres et de l'algèbre (même très compliquées et difficiles) sans faire intervenir la notion de limite. Cela ne veut point dire que de telles démonstrations soient plus faciles qu'une démonstration analytique.