Sur les coupures du plan faites par des continus

RÉSUMÉ

Ce Mémoire traite de deux notions: *frontière* et *coupure*. En me bornant à une portion finie du plan euclidien, j'expose dans le chapître III les propriétés de la frontière d'un continu, et dans le chapître IV je donne la condition *nécessaire* et *suffisante* pour que la somme de deux continus, dont aucun ne coupe le plan, soit une *coupure* du plan. Cette condition est que l'ensemble de points communs de ces deux continus *ne soit pas bien enchaîné (ni vide)*.

Le chapître I est consacré aux définitions; dans le chapître II j'expose les propriétés des polygones approximatifs, construits d'après la méthode de M. C. Runge, modifiée en tant que je divise le plan en hexagones (au lieu de le diviser en carrés), ce qui simplifie un peu l'exposition. Dans § 6 je donne la définition de la coupure. L'ensemble fermé $\mathfrak{D}$ coupe le plan entre deux ensembles $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$, s'il n'a aucun point commun avec $\mathfrak{M}+\mathfrak{N}$ et si tout continu $\mathfrak{K}$ ayant des points communs avec $\mathfrak{M}$ et avec $\mathfrak{N}$ a aussi de points communs avec $\mathfrak{D}$. L'ensemble coupe le plan (ou est une coupure) s'il existe deux points, entre lesquels il coupe le plan. La formule (18) exprime que D coupe le plan, la formule (18') — qu'il ne le coupe pas; th. VI donne une condition (19), nécessaire et suffisante pour que l'ensemble ($\mathfrak{D}$) ne coupe pas le plan [1].

---

[1]) Pour les notations je renvoie à ma Thèse (Paris, 1911, reimprimée dans le Journal de l'Ec. Polyt. (2) 16, 1912) ou à ma Note au Bull. de l'Ac. des Sciences de Cracovie (Novembre 1912) (la dernière page). Les notations nouvelles sont: Les majuscules grecques désignent les lignes polygonales; Σ_a désigne un réseau d'hexagones de coté a. $\mathfrak{Z}$ désigne l'ensemble de tous les points du plan.

$\mathfrak{C}^s(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ désigne un semicontinu (ou point) contenant $\mathfrak{A}$ et contenu dans $\mathfrak{B}$; semicontinu (d'après Cantor) c'est un ensemble $\mathfrak{E}$ tel que pour deux points arbitraires M et N de $\mathfrak{E}$ il existe un $\mathfrak{C}(A+B, \mathfrak{E})$. $\mathfrak{C}^s_s(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ désigne un $\mathfrak{C}^s(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ saturé (v. ma Thèse, p. 7–8).

Dans le chapître III sont rassemblées les propriétés de la frontière d'un continu (v. les formules (20) jusqu'à (23)). Je démontre (th. IX) que la frontière d'un $\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C})$ (où $\mathfrak{C}$ désigne un continu et Z un point extérieur au $\mathfrak{C}$) est contenue dans la frontière de $\mathfrak{C}$; qu'elle est un continu (th. X); que tout point de la frontière d'un continu $\mathfrak{C}$, ou appartient à un continu $\mathfrak{F}(\mathfrak{W}^Z(\mathfrak{C}))$, ou est un point limite de ces continus (th. XI); et que (th. XII, de M. Mazurkiewicz) l'ensemble des points de $\mathfrak{F}(\mathfrak{C})$ intérieurs à un cercle quelconque n'est pas ponctiforme (c'est-à-dire tel qu'il ne contient aucun continu) [1].

(*Chap.* IV. § 1) *Théorème* A. [2] La somme de deux continus ($\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$), dont aucun ne coupe le plan et dont l'ensemble des points communs est bien enchaîné ou vide, ne coupe pas le plan.

Il nous faut démontrer qu'étant donné deux points arbitraires A et B de l'ensemble complémentaire de $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$ on peut trouver un arc simple $(AB)_3$ sans points communs avec $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$. Pour cela nous joignons A et B par deux lignes polygonales, $(AB)_1$ et $(AB)_2$, sans points communs respectivement avec $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$. L'une des deux parties, en lesquelles le plan est coupé par le polygone $(AB)_1 + (AB)_2$, ne contient évidemment pas de points de $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$. Nous la désignons par $\mathfrak{S}$. Dans cette partie du plan on peut mener un $(AB)_3$ sans points communs avec $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$, en combinant $(AB)_1$ avec $\mathfrak{F}(\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_2, a))$, où a est plus petit que la distance de $\mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{S}$ à $(\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{S}) + (AB)_2$.

(§ 2) *Lemme 1.* Si l'ensemble des points communs de deux continus ($\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$) remplissant un nombre fini d'intérieurs des hexagones (Γ_i et Δ_i respectivement) du réseau, n'est pas bien enchaîné, la somme de ces deux continus coupe le plan.

La démonstration procède de façon suivante: nous trouvons une ligne ($\Phi + F_1 F_2$, v. (f) et (i)) qui est contenue dans $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$ et qui coupe le plan; après nous démontrons que dans chacune des deux parties, en lesquels

---

$\mathfrak{W}^A(\mathfrak{A}) \equiv \mathfrak{C}^s_s(A, \mathfrak{Z} - \mathfrak{A})$; en particulier, si l'ensemble donné est un polygone Π, $\mathfrak{W}(\Pi)$ et $\mathfrak{W}^\infty(\Pi)$ désignent l'ensemble de points intérieurs, resp. extérieurs, au Π.

$\mathfrak{F}^A(\mathfrak{C}) \equiv \mathfrak{F}(\mathfrak{W}^A(\mathfrak{C}))$.

$\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a)$ désigne l'ensemble de points contenus dans deux genres des superficies des hexagones d'un réseau Σ_a donné, à savoir: 1) ceux qui contiennent les points de $\mathfrak{M}$; 2) ceux qui ont un coté commun avec ceux du premier genre. C'est la frontière de cet ensemble, $\mathfrak{F}(\mathfrak{P}(\mathfrak{M}, a))$, qui forme l'ensemble de polygones approximatifs de $\mathfrak{M}$.

Je crois, qu'en connaissant ces symboles et avec les explications du texte français, le lecteur, s'il voudrait connaître les démonstrations, pourra les lire dans le Mémoire polonais, sans lire le texte de la langue ordinaire, car tous les pas du raisonnement sont formulés dans la langue de symboles.

[1]) On trouvera quelques théorèmes analogues à ceux du chapître II et III dans le tome II du bien connu *Bericht* de M. Schoenflies.

cette ligne coupe l'intérieur de Φ, il existe des points de l'ensemble complémentaire, de $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$ (à savoir: les intérieurs des hexagones Λ_1 et Λ_2). C'est entre ces points que $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$ coupe le plan.

Lemme 2. Si chaque ensemble $\mathfrak{A}_n$ d'une suite donnée $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \ldots,$ coupe le plan entre deux points donnés M et N, leur ensemble d'accumulation [1] $\mathfrak{A}_0$ coupe le plan entre M et N, s'il ne contient aucun de ces deux points.

(§ 3) *Théorème* B.[2] La somme de deux continus ($\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$), dont l'ensemble de points communs n'est pas bien enchaîné (ni vide) coupe le plan.

Nous approchons l'ensemble $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$ de telle façon que les polygones approximant les deux parties $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ de $\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2$ n'ont pas de points communs [(c)]. En extrayant $\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_1 \times \mathfrak{C}_2, a)$ de $\mathfrak{C}_1$ et de $\mathfrak{C}_2$ et fermant les restes, nous obtenons deux ensembles fermés $\mathfrak{C}_1{}^*$ et $\mathfrak{C}_2{}^*$ sans points communs [(h)]. Maintenant nous approximons $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$ de telle façon que la somme $\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_1, b) + \mathfrak{P}(\mathfrak{C}_2, b)$ (que nous désignons par $\mathfrak{F}$) remplisse les conditions du lemme 1 [(l), (m), (n)] et, par conséquent, coupe le plan.

En prenant une suite des nombres $b_n = \frac{b}{4^n}$ $(n = 1,2\ldots)$ nous recevons des approximations $\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2, b_n)$ (que nous désignons par $\mathfrak{F}_n$) qui tous coupent le plan au moins entre deux points fixes, M et N, d'où il s'ensuit d'après le lemme 2, que leur partie commune (qui est leur ensemble d'accumulation), c'est-à-dire $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$, coupe le plan.

Il nous reste à démontrer l'existence de tels points M et N, entre lesquels tous les $\mathfrak{F}_n$ coupent le plan.

Nous envisageons toutes les regions $\mathfrak{W}^{M_i}(\mathfrak{F})$ $(i = 1, 2, \ldots p)$, en lesquels le plan est coupé par $\mathfrak{F}$. Après je démontre que, parmi les p régions $\mathfrak{W}^{M_i}(\mathfrak{F}_n)$, il y en a, pour chaque n, au moins deux qui ne sont pas identiques. En effet, la supposition que pour un n elles se confondent toutes dans une seule, $\mathfrak{W}^{M_1}(\mathfrak{F}_n)$ — ce qui revient à dire que $\mathfrak{Z} - \mathfrak{W}^{M_1}(\mathfrak{F}_n)$ ne coupe pas le plan — est impossible, car $\mathfrak{Z} - \mathfrak{W}^{M_1}(\mathfrak{F}_n)$ peut être présenté comme la somme de deux continus ($\mathfrak{V}_1$ et $\mathfrak{V}_2$) remplissant les conditions du lemme 1 [(v), (w), (x), (y)]; ces deux continus, $\mathfrak{V}_1$ et $\mathfrak{V}_2$, sont formés par les intérieurs des hexagones du réseau Σ_{b_n}, ayant des points communs respectivement avec $\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_1, b)$ et $\mathfrak{P}(\mathfrak{C}_2, b)$. Ainsi le théorème B se trouve demontré.

---

[1]) V. ma Thèse, Ch. I, § IV (p. 15).

[2]) Les démonstrations topologiques modernes des théorèmes A et B (qui sont d'ailleurs équivalents) peuvent être trouvées dans l'oeuvre de C. Kuratowski, *Topologie II*, Warszawa 1952, p. 353-355 [*Remarque de la Rédaction*].