EXTRAIT DU BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES. SÉRIE A: SCIENCES MATHÉMATIQUES
NOVEMBRE 1912

Démonstration d'une propriété des continus irréductibles entre deux points

par

S. Janiszewski

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1912

Uzasadnienie pewnej własności kontynuów nieprzywiedlnych, łączących dwa punkty. — Démonstration d'une propriété des continus irréductibles entre deux points.

Note

de M. S. **JANISZEWSKI,**

présentée, dans la séance du 4 Novembre 1912, par M. S. Zaremba m. c.

Cette communication est consacrée à la discussion d'une question relative aux continus irréductibles AB[1]); l'exposé en sera un peu long, mais il nous conduira en revanche à une suite de lemmes intéressants par eux-mêmes.

On sait qu'un continu irréductible AB peut contenir deux continus irréductibles différents $(AM)_1$ et $(AM)_2$ entre le point A et un autre point M de AB. Le plus simple exemple en est un continu composé d'une spirale et de son cercle asymptotique, où les points A et M sont situés sur ce cercle et le point B au commencement de la spirale.

La question qui se pose est celle-ci: Est-il possible que le continu irréductible AB contienne un point M tel qu'il existe sur AB à la fois deux continus irréductibles différents entre A et M et deux continus irréductibles différents entre B et M?

Nous allons voir que la réponse est négative. Il est nécessaire pour cela de se rendre compte dans quelles conditions un continu irréductible AB peut contenir deux continus irréductibles $(AM)_1$ et $(AM)_2$ différents

Rappelons que, $(BM)_1$ étant un continu irréductible quelconque entre B et M sur AB, on a les relations évidentes:

[1]) Pour les définitions et les notations voir la fin de cette Note. Comparez aussi ma Thèse *Sur les continus irréductibles entre deux points* (Journal de l'École politechnique, II[e] série, 16[e] cahier).

$$(AM)_1 + (BM)_1 \equiv AB$$
$$(AM)_2 + (BM)_1 \equiv AB$$

d'où:

$$(BM)_1 \supset AB - (AM)_1 \supset (AM)_2 - (AM)_1$$
$$(BM)_1 \supset AB - (AM)_2 \supset (AM)_1 - (AM)_2$$

c'est-à-dire:

$$(BM)_1 \supset (AB - (AM)_1) + (AB - (AM)_2) \equiv AB - ((AM)_1 \times (AM)_2)$$

Nous avons obtenu ainsi deux relations:

$$AB \supset (BM)_1 \supset \overline{AB - ((AM)_1 \times (AM)_2)}$$

qui montrent déjà que, si $(AM)_1 \times (AM)_2$ est un ensemble punctiforme:

$$(BM)_1 \equiv AB;$$

il n'y a donc dans ce cas qu'un seul continu irréductible BM sur AB.

Pour démontrer que la proposition précédente est générale, il nous faudra d'abord établir trois lemmes.

Lemme 1. Soit $\mathcal{C}$ un continu, $\mathcal{F}$ un ensemble fermé et A un point de $\mathcal{C} \times \mathcal{F}$. Si $\mathcal{C} - \mathcal{F}$ n'est pas vide on a:

$$\mathcal{K} \times (\overline{\mathcal{C} - \mathcal{F}}) \not\equiv 0$$

en désignant par $\mathcal{K}$ l'ensemble $\mathfrak{C}_s(A, \mathcal{C} \times \mathcal{F})$. [Jusqu'à présent nous pouvons seulement affirmer que:

$$(\mathcal{C} \times \mathcal{F}) \times (\overline{\mathcal{C} - \mathcal{F}}) \not\equiv 0\,.$$

Conformément à la 9-me définition l'ensemble $\overline{\mathcal{C} - \mathcal{F}}$ représente celui que l'on obtient en ajoutant à $\mathcal{C} - \mathcal{F}$ l'ensemble de ses points-limites. [1])].

Supposons en effet que:

$$\mathcal{K} \times (\overline{\mathcal{C} - \mathcal{F}}) \equiv 0\,.$$

On a alors:

$$\varrho_1 = \varrho\,(\mathcal{K}, (\overline{\mathcal{C} - \mathcal{F}})) > 0$$

[1]) J'ai démontré d'une autre manière un lemme équivalent dans ma thèse, p. 45 (dans le Journal p. 123).

d'où:

$$\varrho\,(\mathcal{S}, (\overline{\mathcal{C} - \mathcal{F}})) > 0,$$

où nous avons posé:

$$\mathcal{S} \equiv \mathfrak{S}\,(\mathcal{K}, \tfrac{1}{2}\,\varrho_1).$$

Donc:

(a) $$\mathcal{S} \times (\overline{\mathcal{C} - \mathcal{F}}) \equiv 0$$

et a fortiori:

$$\mathcal{C} \times \mathcal{S} \times (\overline{\mathcal{C} - \mathcal{F}}) \equiv 0.$$

Cette dernière identité montre que

$$\mathcal{C} \times \mathcal{S} \subset \mathcal{C} \times \mathcal{F}.$$

D'autre part:

$$\mathcal{C} \times \mathcal{S} \supset A$$

par conséquent:

(b) $$\mathcal{K}_1 \equiv \mathfrak{C}_s\,(A, \mathcal{C} \times \mathcal{S}) \subset \mathfrak{C}_s\,(A, \mathcal{C} \times \mathcal{F}) \equiv \mathcal{K}.$$

Mais comme $\mathcal{C}$ n'est pas contenu dans $\mathcal{S}$ (d'après la relation (a)) il doit exister un point K de $\mathcal{K}_1$, situé sur la frontière $\mathcal{G}$ de $\mathcal{S}$ [1]), c'est-à-dire:

$$\mathcal{K}_1 \times \mathcal{G} \not\equiv 0.$$

Pour tout point K de $\mathcal{G}$ on a évidemment:

$$\varrho\,(K, \mathcal{K}) = \tfrac{1}{2}\,\varrho_1;$$

or cette égalité est absurde, car:

$$\varrho\,(K, \mathcal{K}) = 0$$

vu que (d'après (b)):

$$\mathcal{K} \supset \mathcal{K}_1 \supset K.$$

Lemme 2. Soit $\mathcal{C}$ un $\mathfrak{C}\,(A, AB)$; *si l'ensemble* $(\overline{AB - \mathcal{C}})$ *n'est pas vide, il est continu.*

[1]) Voir ma Thèse, Chap. I, théorème IV, Corrollaire, p. 23 (dans le Journal p. 101).

En effet, écartons le cas $\mathcal{C} \equiv AB$; alors évidemment $\mathcal{C}$ ne contient pas B, c'est-à-dire:

$$(\overline{AB - \mathcal{C}}) \supset B.$$

Considérons l'ensemble:

$$\mathcal{K} \equiv \mathfrak{C}_{s}\,(B, (\overline{AB \supset \mathcal{C}})).$$

Si

$$AB - (\overline{AB - \mathcal{C}}) \equiv 0$$

on a:

$$(\overline{AB - \mathcal{C}}) \supset AB,$$

donc:

$$(\overline{AB - \mathcal{C}}) \equiv AB$$

et le lemme est démontré.

Si

$$AB - (\overline{AB - \mathcal{C}}) \not\equiv 0$$

nous pouvons appliquer aux ensembles AB, $(\overline{AB - \mathcal{C}})$ et au point B le lemme 1, ce qui nous donne

$$\text{(c)} \qquad \mathcal{K} \times (\overline{AB - (\overline{AB - \mathcal{C}})}) \not\equiv 0.$$

Or:

$$AB - (AB - \mathcal{C}) \equiv \mathcal{C}$$

(car $AB \supset \mathcal{C}$), d'où:

$$AB - (\overline{AB - \mathcal{C}}) \subset \mathcal{C}$$

et:

$$\overline{AB - (\overline{AB - \mathcal{C}})} \subset \mathcal{C};$$

donc, en vertu de (c):

$$\mathcal{K} \times \mathcal{C} \not\equiv 0$$

et, $\mathcal{K}$ et $\mathcal{C}$ étant des continus, l'ensemble $\mathcal{K} + \mathcal{C}$ l'est aussi; par conséquent c'est un $\mathfrak{C}\,(A + B, AB)$, c'est-à-dire:

$$\mathcal{K} + \mathcal{C} \equiv AB,$$

d'où:

$$\mathcal{K} \supset AB - \mathcal{C}$$

et

$$\mathcal{K} \supset (\overline{AB - \mathcal{C}}).$$

D'après la définition de $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K} \subset (\overline{AB - \mathcal{C}}),$$

par conséquent:

$$\mathcal{K} \equiv (\overline{AB - \mathcal{C}})$$

c'est-à-dire que $(\overline{AB - \mathcal{C}})$ est un continu [1]). C. q. f. d.

Corollaire. $\mathcal{C}$ étant un $\mathfrak{C}$ (A, AB), deux cas peuvent se présenter qui s'excluent mutuellement:

1) ou bien $(\overline{AB - \mathcal{C}})$ ne contient pas A,

2) ou bien $(\overline{AB - \mathcal{C}}) \equiv AB$, c'est-à-dire: $\mathcal{C}$ est un continu de condensation de AB.

En effet, en dehors du cas $\mathcal{C} \equiv AB$, pour lequel a lieu l'alternative 1), on a, comme nous l'avons déjà vu:

$$(\overline{AB - \mathcal{C}}) \supset B.$$

D'après le lemme précédent, l'ensemble $(\overline{AB - \mathcal{C}})$ est un continu, c'est donc un $\mathfrak{C}$ (B, AB); par conséquent, s'il contient A, il est identique à AB.

Lemme 3. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{K}$ deux $\mathfrak{C}$ (B, AB); si $\mathcal{K}$ est un continu de condensation de AB et si $\mathcal{C}$ ne l'est pas, on a:

$$\mathcal{C} \supset \mathcal{K}.$$

Supposons en effet que $\mathcal{C}$ ne contienne pas $\mathcal{K}$. Dans ce cas:

$$(\overline{AB - \mathcal{C}}) \times \mathcal{K} \not\equiv 0$$

et, $(\overline{AB - \mathcal{C}})$ n'étant pas vide est, d'après le lemme précédent, un $\mathcal{C}$ (A, AB); donc on a évidemment:

$$(\overline{AB - \mathcal{C}}) + \mathcal{K} \equiv AB$$

d'où

$$(\overline{AB - \mathcal{C}}) \supset AB - \mathcal{K}$$

donc

$$(\overline{AB - \mathcal{C}}) \supset (\overline{AB - \mathcal{K}}) \equiv AB.$$

[1]) $(\overline{AB - \mathcal{C}})$ ne peut pas se réduire à un point, car alors il serait identique à $AB - \mathcal{C}$, ce qui est impossible, $AB - \mathcal{C}$ ne pouvant pas être fermé.

Or cette relation est absurde, $\mathcal{C}$ n'étant pas par hypothèse un continu de condensation de AB. Donc:

$$\mathcal{C} \supset \mathcal{K}, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Revenons maintenant à la question qui nous occupe. Nous avons vu que, $(AM)_1$ et $(AM)_2$ étant deux continus irréductibles différents et $(BM)_1$ un continu irréductible quelconque, situés tous les trois sur un continu irréductible AB, on a:

$$(BM)_1 \supset (\overline{(AM)_1 - (AM)_2}).$$

Considérons l'ensemble:

$$\mathcal{K}_A \equiv \mathfrak{C}_s(A, (AM)_1 \times (AM)_2);$$

$\mathcal{K}_A$ ne contient pas M, car autrement $\mathcal{K}_A$, contenant A et M, devrait d'une part être identique à $(AM)_1$ et de l'autre à $(AM)_2$, et on aurait $(AM)_1 \equiv (AM)_2$ contrairement à l'hypothèse.

Comme

$$(AM)_1 - (AM)_2 \not\equiv 0$$

on a en vertu du lemme 1:

$$(BM)_1 \supset \mathcal{K}_A \times (\overline{(AM)_1 - (AM)_2}) \supset N.$$

Le point N étant situé sur $(BM)_1$, soit $(BN)_1$ un continu irréductible entre B et N situé sur $(BM)_1$:

$$(BM)_1 \supset (BN)_1.$$

Comme

$$\mathcal{K}_A \times (BN)_1 \supset N$$

l'ensemble $\mathcal{K}_A + (BN)_1$ est continu; il contient A et B, donc il est identique à AB:

$$\mathcal{K}_A + (BN)_1 \equiv AB.$$

De cette relation on tire:

$$(BN)_1 \supset AB - \mathcal{K}_A \supset (AM)_1 - \mathcal{K}_A;$$

donc, en posant pour abréger:

$$\mathcal{R} \equiv (\overline{(AM)_1 - \mathcal{K}_A}),$$

on a:

$$(BM)_1 \supset \mathfrak{K}.$$

Comme $\mathcal{K}_A$ ne contient pas M, on a:

$$\mathfrak{K} \supset M.$$

D'après le lemme 2 $\mathfrak{K}$ est un continu.

Le même lemme appliqué à $(BM)_1$ et $\mathfrak{K}$ (qui d'après ce qui précède est un $\mathfrak{C}(M, (BM)_1)$), montre que $(\overline{(BM)_1 - \mathfrak{K}})$ est continu ou vide. Nous verrons tout de suite (v. (d)) que ce second cas ne peut pas se présenter.

Nous avons établi au début que:

$$(BM)_1 \supset (AM)_2 - (AM)_1;$$

comme

$$\mathfrak{K} \times ((AM)_2 - (AM)_1) \equiv 0$$

(car $\mathfrak{K} \subset (AM)_1$), on a:

$$(BM)_1 - \mathfrak{K} \supset (AM)_2 - (AM)_1$$

ou encore

$$\text{(d)} \qquad (\overline{(BM)_1 - \mathfrak{K}}) \supset (\overline{(AM)_2 - (AM)_1}) \not\equiv 0.$$

D'après le lemme 1:

$$\mathcal{K}_A \times (\overline{(AM)_2 - (AM)_1}) \not\equiv 0,$$

donc a fortiori:

$$\mathcal{K}_A \times (\overline{(BM)_1 - \mathfrak{K}}) \not\equiv 0.$$

Comme de plus $\mathcal{K}_A$ et $(\overline{(BM)_1 - \mathfrak{K}})$ sont des continus, l'ensemble $\mathcal{K}_A + (\overline{(BM)_1 - \mathfrak{K}})$, contenant les points A et B, est un $\mathfrak{C}(A + B, AB)$, par conséquent:

$$\mathcal{K}_A + (\overline{(BM)_1 - \mathfrak{K}}) \equiv AB \supset M.$$

Comme $\mathcal{K}_A$ ne contient pas M, on a:

$$(\overline{(BM)_1 - \mathfrak{K}}) \supset M.$$

Le corollaire du lemme 2 nous montre que le continu $\mathfrak{K}$ est un continu de condensation de $(BM)_1$.

Remarquons à présent (cette remarque est essentielle) que $\mathfrak{K}$ n'est pas un continu de condensation de $(AM)_1$.

En effet, de l'identité

$$(AM)_1 - [(AM)_1 - \mathcal{K}_A] \equiv \mathcal{K}_A$$

on tire:

$$(\overline{(AM)_1 - \mathcal{R}}) \subset \mathcal{K}_A .$$

Donc, comme $\mathcal{K}_A$ ne contient pas $(AM)_1$, on a:

$$(\overline{(AM)_1 - \mathcal{R}}) \not\equiv (AM)_1$$

c'est-à-dire que $\mathcal{R}$ ne peut pas être un continu de condensation de $(AM)_1$.

Nous sommes arrivés ainsi au résultat suivant:

Étant donné un continu irréductible AB qui contient deux continus irréductibles différents $(AM)_1$ et $(AM)_2$ entre A et M, l'ensemble $(\overline{(AM)_1 - \mathcal{K}_A})$:

1) contient le point M;

2) est un continu de condensation d'un continu irréductible BM quelconque situé sur AB;

3) n'est pas un continu de condensation de $(AM)_1$.

Ce résultat nous permettra de résoudre la question posée au début de ce paragraphe.

Théorème. Un continu irréductible AB ne peut pas contenir un point M tel qu'il existe à la fois deux continus irréductibles différents entre A et M et deux continus irréductibles différents entre B et M.

En effet, si cela était possible, nous pourrions considérer deux ensembles:

$$(\overline{(AM)_1 - \mathcal{K}_A}) \text{ et } (\overline{(BM)_1 - \mathcal{K}_B})$$

(où nous avons posé:

$$\mathcal{K}_B \equiv \mathfrak{C}_s (B, (BM)_1 \times (BM)_2) .$$

Le premier est un continu de condensation de $(BM)_1$, le second ne l'est pas; en appliquant le lemme 3, on obtient:

$$(\overline{(BM)_1 - \mathcal{K}_B}) \supset (\overline{(AM)_1 - \mathcal{K}_A}) .$$

En appliquant à ces deux ensembles le même lemme par rapport au continu irréductible $(AM)_1$, on trouve:

$$(\overline{(BM)_1 - \mathcal{K}_B}) \subset (\overline{(AM)_1 - \mathcal{K}_A}) .$$

La contradiction est manifeste, ces deux ensembles ne pouvant évidemment être identiques, puisque l'un d'eux est un continu de condensation de $(BM)_1$, et l'autre ne l'est pas.

Définitions et notations.

1. Les majuscules romaines $(A, B, \ldots)$ désignent les points.

2. Les majuscules rondes $(\mathscr{A}, \mathscr{B}, \ldots)$ désignent les ensembles de points.

3. $\varrho\,(A, B)$ désigne la distance entre A et B; $\varrho\,(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ désigne la borne inférieure de $\varrho\,(A, B)$, le point A étant contenu dans $\mathscr{A}$ et B dans $\mathscr{B}$.

4. $\mathscr{A} + \mathscr{B}$ désigne l'ensemble des points contenus dans $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$.

5. $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ désigne l'ensemble de points communs aux ensembles $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$.

6. $\mathscr{A} - \mathscr{B}$ désigne l'ensemble de tous les points de $\mathscr{A}$ qui ne sont pas contenus dans $\mathscr{B}$.

7. $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$ signifie: $\mathscr{A}$ est identique à $\mathscr{B}$.

8. $\left.\begin{matrix}\mathscr{A} \subset \mathscr{B} \\ \mathscr{B} \supset \mathscr{A}\end{matrix}\right\}$ signifie: $\mathscr{A}$ est contenu dans $\mathscr{B}$ ou $\mathscr{B}$ contient $\mathscr{A}$.

9. $\overline{\mathscr{A}}$ désigne l'ensemble des points de $\mathscr{A}$ et des points limites de $\mathscr{A}$.

10. $\mathfrak{S}\,(\mathscr{A}, a)$ désigne l'ensemble des points S tels que

$$\varrho\,(\mathscr{A}, S) \leqq a.$$

11. $\mathfrak{C}\,(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ désigne un c o n t i n u — ou un point — qui c o n t i e n t $\mathscr{A}$ et e s t c o n t e n u dans $\mathscr{B}$.

12. $\mathfrak{C}_s\,(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ est un $\mathfrak{C}\,(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ saturé, c'est-à-dire tel qu'il n'existe aucun autre ensemble possédant les mêmes propriétés et contenant l'ensemble donné.

13. AB désigne un continu irréductible entre les points A et B, c'est-à-dire un continu contenant les points A et B, dont on ne peut enlever aucune partie sans qu'il cesse d'être continu ou de contenir A et B à la fois.

14. C o n t i n u d e c o n d e n s a t i o n d'un continu $\mathscr{C}$ est tout continu $\mathscr{K}$ composé exclusivement de points limites de l'ensemble des points de $\mathscr{C}$ non contenus dans $\mathscr{K}$, c'est-à-dire un continu $\mathscr{K}$ tel que:

$$\overline{(\mathscr{C} - \mathscr{K})} \supset \mathscr{K}.$$