International Congress of Mathematicians

CAMBRIDGE: AUGUST 1912

ÜBER DIE BEGRIFFE "LINIE" UND "FLÄCHE"

VON Z. JANISZEWSKI.

Mein Referat hat einen ganz negativen Charakter: ich will nur einige kritische Bemerkungen über den heutigen Stand einer Frage mitteilen und keine Lösung derselben. Ich stelle mich hier auf *rein geometrischen* (besser: *mengentheoretischen*) Boden und betrachte alle geometrischen Gebilde als Punktmengen. Der Einfachheit halber beschränke ich mich auf im dreidimensionalen euklidischen Raume nirgendsdichte Kontinua (d. h. Kontinua ohne innere Punkte).

Die geometrischen Gebilde, mit welchen wir gewöhnlich zu tun haben—die, so kompliziert sie uns auch erscheinen mögen, doch immer verhältnissmässig einfach sind—verteilen sich ganz natürlich in zwei grundverschiedene Arten: in Linien und Flächen. Es können zwar Gebilde auch aus Linien und Flächen zusammengesetzt sein—*wir beschränken uns aber auf solche, die in der Umgebung jedes Punktes dieselbe Dimensionsanzahl haben.*

Bei dieser Beschränkung scheint zwischen Linien und Flächen eine Kluft zu bestehen.

Die—bis heute offene—Frage, die ich hier an die Spitze stelle, lautet: ist es wirklich so, gilt dies auch von den allgemeinsten geometrischen Gebilden? Oder giebt es vielleicht solche Kontinua, die weder Linie, noch Fläche genannt werden können?

Für die Beantwortung dieser Hauptfrage bedarf man einer *ganz allgemeinen* Definition der Linie und der Fläche.

Für den zweidimensionalen Raum ist die Frage bekanntlich gelöst, oder sie ist vielmehr gegenstandslos, da dort jedes nirgendsdichte Kontinuum eine Linie ist (die Zoretti *Cantorsche Linie* nennt). Für den dreidimensionalen Raum aber besitzen wir keine solche allgemeingültige Definition, welche aus den nirgendsdichten Kontinuen die Linien aussonderte.

Viele beschränken sich von vornherein (offen oder stillschweigend) auf spezielle Gebilde (das gilt auch von den abstrakten, tiefen Untersuchungen von Enriques). Die am besten bekannte, Jordansche Definition steht gerade im Widerspruch zu den geometrischen Forderungen (wie die "Peanosche Kurve" zeigt) und interessirt uns also nicht*.

* Dabei ist es noch zu betonen, dass man überhaupt nicht die uns interessierende Frage als Untersuchung über den Funktionsbegriff auffassen darf. Der letztere scheint zu eng zu sein, es sei denn, dass man ganz unregelmässig mehrdeutige Funktionen betrachten will. Denn, wie will man z. B. die unten angegebene Kontinua als eindeutige Funktionen auffassen?

Eine wesentlich andere Untersuchung ist die von Fréchet, die von vornherein die Existenz verschiedener Dimensionstypen annimmt; Fréchet schreibt z. B. dem Kreise einen höheren Dimensionstypus zu, als der Strecke. Diese sehr interessante Idee aber schliesst unsere Frage nicht aus. Diese würde in Fréchet'scher Terminologie ungefähr so lauten: spaltet sich die Mannigfaltigkeit der den nirgendsdichten Kontinuen entsprechenden Dimensionstypen in zwei Klassen oder nicht?

Es könnte jedoch scheinen als liessen sich einige Aussagen als allgemeingültige Definitionen der Linie oder der Fläche aufstellen. Ich will nun eine Linie konstruiren die ein Gegenbeispiel zu einer solcher vermeinten Definition bildet und die als Vorbild oder Bestandsteil vieler anderer Gegenbeispiele zu anderen Versuchen der Definitionen dient.

Man könnte nämlich meinen dass ein Kontinuum eine *Fläche* ist, wenn es mit *jeder* es schneidenden Ebene, die einer gegebenen Ebene parallel ist, eine Linie gemein hat.

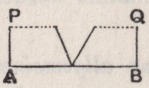
Nun, diese Eigenschaft besitzt folgendermassen konstruirte *Linie*.

Sei $\mathfrak{P}$ eine auf der Strecke PQ nirgends dichte, perfekte Punktmenge; wir verbinden jeden Punkt derselben mit einem ausserhalb der Geraden PQ liegenden Punkte A durch geraden Strecken. Die Gesammtheit dieser Strecken bildet ein Kontinuum $\mathfrak{C}$, das offenbar eine (Cantorsche) Linie ist.

In A richten wir eine Senkrechte AB zu der Ebene APQ. Jetzt ordnen wir den Punkten von AB die Punkte von $\mathfrak{P}$ (und also die Strecken des Kontinuums $\mathfrak{C}$) in der von Cantor angegebenen Weise zu: *jedem* Punkte der Strecke AB entspricht ein oder zwei Punkte der Menge $\mathfrak{P}$.

Wir betrachten nun $\mathfrak{C}$ als orthogonale Projektion der zu konstruirenden Linie.

In jedem Punkte der Strecke AB richten wir eine (ev. zwei) Senkrechte parallel und gleich der ihm entsprechenden Strecke des Kontinuums $\mathfrak{C}$; ihre Gesamtheit bildet das gesuchte Kontinuum $\mathfrak{K}$. Dass $\mathfrak{K}$ eine Linie ist können wir deshalb behaupten, weil es mit einer ebener Cantorschen Linie $\mathfrak{L}$ elementarverwandt (homeomorph) ist, die wir folgendermassen konstruiren: Wir verbinden durch gerade Strecken die sich entsprechenden Punkte einer Strecke AB und die Punkte einer perfekten Menge $\mathfrak{P}$, die auf einer zu AB parallelen Strecke PQ liegt und dort nirgends dicht ist.



Es ist offenbar, dass dieses Kontinuum nirgends dicht ist; also ist es eine Linie. Ebenso ersichtlich ist seine Elementarverwandschaft mit dem vorher konstruirten Kontinuum.

$\mathfrak{K}$ ist also eine Linie und doch besitzt es die Eigenschaft mit jeder zu APQ parallelen und es schneidenden Ebene eine Linie (gerade Strecke) *gemein zu haben.*

Die Linien $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ sind noch dadurch merkwürdig, dass sie ein Kontinuum enthalten (die Strecke AB), von dem *jeder* Punkt ein Verzweigungspunkt ist. Es klingt in der Tat paradox dass die mehrfachen Punkte einer (Cantorschen, nicht Jordanschen) Linie ein Kontinuum bilden können*.

* Im Raume von unendlich vielen Dimensionen würde man mit Hülfe von $\mathfrak{L}$ eine Linie konstruiren können, von der *jeder* Punkt ein Verzweigungspunkt ist.

Ein ganz analoges Gegenbeispiel lässt sich für eine Definition der folgenden Art konstruiren: Die Umgebung eines Punktes A des gegebenen Kontinuum $\mathfrak{L}$ ist eine Fläche, wenn *jede* mit einem genügend kleinen Radius um ihn beschriebene Kugel mit $\mathfrak{L}$ eine Linie (z. B. einen Kreis) gemein hat. Dagegen wird diese Definition *wahrscheinlich* gut, wenn man dieselbe auch für eine unendliche Menge zu A benachbarter Punkte voraussetzt, welche von der Machtigkeit des Kontinuums ist. Eine ähnliche Bemerkung gilt von der zuerst versuchten Definition.

Ich gehe zu einem zweiten Beispiel über. Dieses beweist: *es gibt Kontinua, die keinen einfachen Bogen enthalten.* Es ist mir in der Tat gelungen ein Kontinuum zu konstruiren, derart, dass ein jedes Teilkontinuum ein Häufungskontinuum (continu de condensation) enthält*.

Man enthält sie als Grenze einer Folge von Linien, deren erste die Linie $y = \sin \frac{1}{x}$ ist, und die folgenden enthält man nach der Methode der Kondensation der Singularitäten indem man überall die einfachen Bogen durch die der Linie $y = \sin \frac{1}{x}$ elementarverwandte Linien ersetzt. Man muss nur dabei dafür sorgen, dass die Abänderungen die man macht, genügend schnell gegen Null konvergieren. Es scheint mir diese Linie insofern interessant zu sein, als alle bisherigen (mir bekannten) Beispiele der Topologie aus lauter geraden Strecken konstruirt waren oder werden konnten, und man meinen könnte, dies gelte allgemein.

Wir konstruiren jetzt auf dieser Linie als Directrix einen Zylinder. Die so erhaltene Fläche *enthält kein Abbild einer Kreisfläche.* Sie zeigt also, dass die Definitionen einer Fläche welche sich auf solche Abbildung stützen, nicht allgemein sind.

Im Vorhergehenden habe ich mich bei der Beurteilung der Definitionen auf gewisse Forderungen gestützt, die leicht zu formulieren sind; z. B., dass ein einer Cantorschen ebenen Linie elementarverwandtes Kontinuum selbst Linie heisse, und ebenso ein in eine endliche Anzahl von Linien zerlegbares Kontinuum; und dass ein Kontinuum, dass das Innere einer Kugel in Gebiete teilt, eine Fläche heisse. Sie sind notwendig und unmittelbar durch den intuitiven Sinn der Worte "Linie" und "Fläche" diktiert; sie scheinen aber nicht hinreichend zu sein. Die eventuellen weiteren Forderungen zu formulieren und ihre gegenseitige Unabhängigkeit zu beweisen scheint mir hier die nächste positive Aufgabe zu sein. Bevor dies getan wird kann man von keiner Definition behaupten, dass sie allgemeingültig ist.

Ich schliesse diese, nur negativen Entwickelungen mit der Bemerkung dass ich die so *ganz allgemeine* Frage nur zur Orientirung behandle. Ich meine dagegen, dass es bei dem jetzigem Stande der Wissenschaft, die Untersuchungen, die sich auf einfachere Gebilde beschränken, am ehesten hierauf ein Licht werfen können.

* Ich habe hier von Herrn Brouwer erfahren, dass ihm dasselbe Beispiel bekannt war.