O wpływie ruchu na zmiany stanu skupienia.

Przez

Władysława Natansona.

Rzecz przedstawiona na posiedzeniach Wydziału matematyczno-przyrodniczego z dnia 8 marca i 25 kwietnia 1898 roku.

Uważajmy układ „doskonale niejednolity"; będziemy tak nazywali układ, złożony z pewnej liczby ciał, np. (jak przypuszczać będziemy) z dwóch ciał, które, same przez się będąc jednolite i nie mieszając się nigdy ze sobą, mogą swobodnie przeobrażać się w siebie: pierwsze na drugie i nawzajem drugie na pierwsze. Będziemy przypuszczali, że układ znajduje się w ruchu; ażeby ruch ten określić ogólnie, załóżmy, że każdemu nieskończenie małemu elementowi w obu ciałach przysługują składowe prędkości, które są skończonemi i ciągłemi, zresztą zaś dowolnemi funkcyami spółrzędnych i czasu. Będziemy się posługiwali niekiedy hypotezami, które tylko w przypadku ciał płynnych mogą być ściśle spełnione; będziemy wówczas nazywali „płynami" ciała uważanego układu.

Widzimy przedewszystkiem, że badanie zjawisk ruchu w tak określonym układzie nie stanowi już, właściwie mówiąc, przedmiotu Nauki Mechaniki (gdzie przez Mechanikę rozumiemy również np. Hydrodynamikę); nie mamy podstawy do stanowczego a priori twierdzenia, że prawa ruchu zwyczajne (np. równania hydrodynamiczne) stosują się bez zmiany do niniejszego przypadku. Widzimy powtóre, że zadanie znale-

www.rcin.org.pl

zienia praw, według których w tym razie odbywa się „r e a k c y a" między ciałami (t. j. zmiana stanu skupienia lub wogóle zamiana jednego ciała na drugie), wykracza znowu zupełnie poza ramy Nauki Termodynamiki klasycznej.

Wydaje nam się, że zasada t. zw. „termokinetyczna", której poświęciliśmy dwie dawniejsze rozprawy [1]), zastosowana do wyłożonego tu zagadnienia, pozwala odpowiedzieć na obadwa pytania, które ono, jak widzieliśmy, pociąga za sobą. Temu zastosowaniu poświęcamy uwagi niniejsze. Zauważmy już tutaj na wstępie, że p. Gibbs [2]), a zwłaszcza p. Duhem [3]), zajmowali się niejednokrotnie zagadnieniami, które znajdują się w mniej lub bardziej blizkim związku z naszem zadaniem. Za obowiązek poczytujemy sobie zaznaczyć, jak znakomite prace tych uczonych ułatwiły nam istotnie rozwiązanie naszego zadania.

§ 1. Oznaczmy przez T całkowitą kinetyczną energię układu; przez F oznaczmy całkowitą swobodną energię układu, jeśli taka wielkość będzie wogóle istniała. Będziemy przypuszczali, że temperatura jest jednakowa we wszystkich punktach układu; o czem później będziemy mieli sposobność więcej powiedzieć. Udzielamy zmian nieskończenie małych wirtualnych zmiennym niezależnym, wyznaczającym stan układu; przypuśćmy, że zachodzą wówczas zmiany δT i δF w wartościach energij poprzednio wspomnianych. Przypuśćmy powtóre, że wszystkie siły zewnętrzne, jakie działają na układ, wykonywają wówczas pracę δW; przypuśćmy nareszcie, że układ przytem pochłania ilość ciepła, wynoszącą $\delta' Q$, w sposób n i e o d w r a c a l n y. Uważajmy pewien okres czasu, od $t=t_0$ do $t=t_1$. Niechaj wolno będzie uważać, w tych granicach, ilości nieskończenie małe δT, δF, δW i $\delta' Q$ za funkcye czasu, mogące ulegać różniczkowaniu. Powiadamy, że dla każdej przemiany wirtualnej, jaką można osiągnąć w układzie przez udzielanie zmian zmiennym niezależnym, zachodzi równanie

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \{ \delta T - \delta F + \delta W + \delta' Q \} = 0. \tag{I}$$

§ 2. Niechaj będzie V objętość, zajmowana przez pierwsze ciało układu; niechaj będzie V' objętość, zajmowana przez drugie. Oznaczmy

---

[1]) Rozprawy Wydziału mat.-przyr. Akademii Umiejętności, tom XXX, str. 309; tom XXXIV, str. 67.

[2]) Transactions of the Connecticut Academy of Sc. and Arts, Vol. III, p. 203, (1874—78).

[3]) Annales Scient. de l'Ecole Normale Sup. (3), Vol. X, p. 183 (1893). Travaux et Mémoires des Facultés de Lille, I, Nr. 5, p. 2 (1891); III, Nr. 11, p. 20 (1893).

www.rcin.org.pl

przez S powierzchnię, która odgranicza objętość V od zewnętrznego świata, przez S' podobnież powierzchnię, która V' odgranicza od zewnątrz, przez Σ nareszcie oznaczmy powierzchnię, wzdłuż której stykają się V i V'. Rozcinamy masy obu ciał na elementy nieskończenie małe, z którymi obchodzimy się tak, jak gdybyśmy mogli każdy rozpoznać indywidualnie; uważamy np. objętość $dx\,dy\,dz$ elementu za zmienną, natomiast jego masę, $dx\,dy\,dz\,\rho$, za stałą. Przypuśćmy, że u, v, w są składowe prędkości elementu $dx\,dy\,dz\,\rho$ w pierwszem ciele, u' zaś, v' i w' składowe prędkości elementu $dx'\,dy'\,dz'\,\rho'$ w drugiem; suma

$$\frac{1}{2}\iiint\limits_{V} dx\,dy\,dz\,\rho\,(u^2+v^2+w^2) + \frac{1}{2}\iiint\limits_{V'} dx'\,dy'\,dz'\,\rho'\,(u'^2+v'^2+w'^2)$$

wyraża przeto całkowitą energię kinetyczną układu.

Przypuśćmy, że podczas uważanej wirtualnej przemiany w układzie składowe prędkości u, v, w oraz u', v', w' zmieniają się o:

$$\delta u,\ \delta v,\ \delta w;\quad \delta u',\ \delta v',\ \delta w'.$$

Elementy obu ciał doznają jednocześnie pewnych przesunięć. Oznaczmy przez

$$\delta x,\ \delta y,\ \delta z;\quad \delta x',\ \delta y',\ \delta z'$$

składowe przesunięć, jakich elementy doznają pod wpływem czynników natury „m e c h a n i c z n e j“, jakoto: ciśnienia i inne siły zewnętrzne, własna elementów bezwładność i t. d. Przez

$$Dx,\ Dy,\ Dz;\quad Dx',\ Dy',\ Dz'$$

oznaczmy natomiast składowe przesunięć, wynikających z przyczyny „r e a k c y i“, t. j. z przyczyny zmiany stanu skupienia, lub, mówiąc ogólniej: zamiany jednego ciała w układzie na drugie. Obliczmy zmianę energii kinetycznej, jaka nastąpi skutkiem łącznego działania wszystkich tych zmian. Zadanie to rozwiążemy w przypuszczeniu, że zarówno w jednem ciele jak w drugiem istnieje p o t e n c y a ł p r ę d k o ś c i. Kładziemy zatem

$$u=-\frac{\partial\varphi}{\partial x};\quad v=-\frac{\partial\varphi}{\partial y};\quad w=-\frac{\partial\varphi}{\partial z};$$

$$u'=-\frac{\partial\varphi'}{\partial x'};\quad v'=-\frac{\partial\varphi'}{\partial y'};\quad w'=-\frac{\partial\varphi'}{\partial z'},$$

gdzie zresztą funkcye φ i φ' mogą zawierać czas w sposób wyraźny.

Przypuśćmy na chwilę, że jedynie tylko „mechaniczne“ czynniki działają w układzie. Nie zmienia się wówczas liczba elementów, masy

www.rcin.org.pl

ich również nie ulegają zmianie. A zatem energia kinetyczna pierwszego ciała doznaje wówczas zmiany

$$\iiint_V dx\, dy\, dz\, \rho\, (u\delta u + v\delta v + w\delta w)\,, \tag{1}$$

co możemy napisać, rozumiejąc przez d/dt operator

$$\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z},$$

jak następuje:

$$\frac{d}{dt}\iiint_V dx\, dy\, dz\, \rho\, (u\delta x + v\delta y + w\delta z)$$

$$-\iiint_V dx\, dy\, dz\, \rho \left(\frac{du}{dt}\delta x + \frac{dv}{dt}\delta y + \frac{dw}{dt}\delta z\right). \tag{2}$$

Lecz, kładąc

$$E = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\,(u^2 + v^2 + w^2), \tag{3}$$

mamy oczywiście

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x}; \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial E}{\partial y}; \qquad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial E}{\partial z},$$

możemy zatem wyrazić wielkość (2) w sposób następujący:

$$\frac{d}{dt}\Bigg\{-\iiint_V dx\, dy\, dz\, \varphi\, \delta\rho + \iiint_V dx\, dy\, dz\, \varphi \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \rho}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \rho}{\partial z}\delta z\right)$$

$$+\iint_S dS\, \rho\, \varphi\, (l\delta x + m\delta y + n\delta z) + \iint_\Sigma d\Sigma\, \rho\, \varphi\, (l\delta x + m\delta y + n\delta z)\Bigg\}$$

$$-\iiint_V dx\, dy\, dz\, E\, \delta\rho + \iiint_V dx\, dy\, dz\, E \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \rho}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \rho}{\partial z}\delta z\right)$$

$$+\iint_S dS\, \rho\, E\, (l\delta x + m\delta y + n\delta z) + \iint_\Sigma d\Sigma\, \rho\, E\, (l\delta x + m\delta y + n\delta z), \tag{4}$$

jeżeli oznaczymy przez l, m, n dostawy kierunkowe normalnej zewnętrznej, wyprowadzonej do powierzchni S, lub Σ, w miejscu elementu dS, lub $d\Sigma$.

www.rcin.org.pl

Powyższy wyraz (4) stanowi pierwszą dopiero część całkowitej zmiany energii kinetycznej pierwszego ciała w układzie. Ażeby zmianę tę całkowicie obliczyć, musimy dołączyć do wyrazu (4) część drugą, wynikającą z możliwej w układzie „reakcyi". Przez ową „reakcyę" nie zmienia się oczywiście energia kinetyczna elementów, które w niej nie biorą udziału; ma ona jedynie ten skutek, że pewna liczba elementów zostaje zabrana jednemu ciału i dołączona do drugiego. Zjawisko zatem, które nazywamy „reakcyą", musi pociągać za sobą następującą zmianę w energii kinetycznej ciała pierwszego:

$$\frac{d}{dt}\left\{\iint\limits_S dS\,\rho\,\varphi\,(lDx+mDy+nDz)+\iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\rho\,\varphi\,(lDx+mDy+nDz)\right\}$$

$$(5)\qquad +\iint\limits_S dS\,\rho\,E\,(lDx+mDy+nDz)+\iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\rho\,E\,(lDx+mDy+nDz).$$

Zmianę energii kinetycznej płynu drugiego obliczamy w sposób podobny.

§ 3. Zajmiemy się teraz obliczeniem nieskończenie małej wielkości δF. Uczyńmy z początku założenie, że ciała naszego układu są płynami doskonałymi (swobodnymi od tarcia); będziemy starali się następnie uogólnić rozumowania, ażeby i układy, rozpraszające energię, zostały przez nie objęte. Załóżmy, że energia swobodna F istnieje i że wynosi

$$(1)\qquad F=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz\,\rho f+\iiint\limits_{V'} dx'\,dy'\,dz'\,\rho' f',$$

gdzie energie swobodne jednostkowe f i f' mają być funkcyami gęstości ρ, względnie ρ', w danym punkcie płynu, oraz temperatury. Założenie podobne równa się oczywiście pewnej hypotezie, która jednak wydaje się usprawiedliwioną w obecnym przypadku [1]).

Na mocy uczynionych założeń udowadniamy łatwo, wzorem rozumowania, którem posłużyliśmy się w § 2-im, że zmiana wirtualna całkowita energii swobodnej wynosi, w ciele pierwszem, co następuje:

[1]) Por. P. Duhem, Ann. Sc. de l'Ecole Norm. Sup. (3), X, 183 (1893); Travaux et Mémoires des Facultés de Lille, III, mém. Nr. 11, p. 15 (1893).

www.rcin.org.pl

$$\iiint\limits_V dx\,dy\,dz\,\rho\,\frac{\partial f}{\partial \rho}\,\delta\rho$$

$$-\iint\limits_S dS\,\rho\,f\,(lDx+mDy+nDz)-\iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\rho\,f\,(lDx+mDy+nDz). \quad (2)$$

Do drugiego ciała stosuje się wyraz podobny.

§ 4. Znajdźmy pracę zewnętrzną, wykonywaną w układzie w przemianie wirtualnej. Niechaj p_x, p_y, p_z oznaczają składowe ciśnienia zewnętrznego całkowitego, jakie jest wywierane na element dS; p'_x, p'_y, p'_z niechaj oznaczają podobnie składowe ciśnienia zewnętrznego całkowitego, które do dS' jest przyłożone. Wirtualna praca ciśnień zewnętrznych wynosi:

$$\iint\limits_S dS\left\{p_x(\delta x+Dx)+p_y(\delta y+Dy)+p_z(\delta z+Dz)\right\}$$

$$+\iint\limits_{S'} dS'\left\{p'_x(\delta x'+Dx')+p'_y(\delta y'+Dy')+p'_z(\delta z'+Dz')\right\}. \quad (1)$$

Oprócz ciśnień, mogą być czynne w układzie siły innego typu, zdolne do wykonywania pracy. Przypuśćmy, że każdy element $dx\,dy\,dz\,\rho$ ulega działaniu siły, której składowe wynoszą

$$dx\,dy\,dz\,\rho\,X, \quad dx\,dy\,dz\,\rho\,Y, \quad dx\,dy\,dz\,\rho\,Z$$

i że siła ta ma potencyał Ψ. O elementach płynu drugiego uczynimy założenie podobne. A zatem piszemy:

$$X=-\frac{\partial\Psi}{\partial x}; \quad Y=-\frac{\partial\Psi}{\partial y}; \quad Z=-\frac{\partial\Psi}{\partial z};$$

$$X'=-\frac{\partial\Psi'}{\partial x'}; \quad Y'=-\frac{\partial\Psi'}{\partial y'}; \quad Z'=-\frac{\partial\Psi'}{\partial z'};$$

w tych równaniach Ψ i Ψ' mają być funkcyami identycznemi co do natury, więc Ψ' jest, krótko mówiąc, równoważne ilości $\Psi\,(x', y', z')$. Gdyby jedyną przemianą wirtualną w układzie była ta, jaka wyraża się przez waryacye δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, tedy siły typu X, Y, Z miałyby w niej do wykonania pracę

www.rcin.org.pl

$$-\iiint\limits_V dx\,dy\,dz\,\Psi\,\delta\rho+\iiint\limits_V dx\,dy\,dz\,\Psi\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\rho}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\rho}{\partial z}\delta z\right)$$

$$(2)\qquad +\iint\limits_S dS\,\rho\,\Psi\,(l\delta x+m\delta y+n\delta z)+\iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\rho\,\Psi\,(l\delta x+m\delta y+n\delta z).$$

Ze względu na możliwą w układzie reakcyę należy tu dodać

$$(3)\qquad \iint\limits_S dS\,\rho\,\Psi\,(lDx+mDy+nDz)+\iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\rho\,\Psi\,(lDx+mDy+nDz),$$

jak to widzimy łatwo na zasadzie rozumowania, podobnego do odpowiednich rozumowań poprzednich. Wszystko, co tu powiedzieliśmy, możemy z drobnemi zmianami powtórzyć o ciele drugiem.

§ 5. Przyjęliśmy wyżej, tymczasowo, założenie, według którego płyny układu mają być swobodne od tarcia wewnętrznego. Uczyńmy teraz dalszą hypotezę, że mianowicie płyny wzdłuż powierzchni zetknięcia (Σ) przylegają do siebie tak, iż ślizganie się jednego po drugim jest wyłączone. Hypoteza ta jest nam potrzebna do zupełnego rozwiązania zadania. Przyjąwszy ją, uwalniamy się od konieczności rozważania tarcia wzajemnego pomiędzy płynami, czynnego w powierzchni zetknięcia.

§ 6. Składowe przesunięć δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ nie są całkiem dowolne; są one poddane następującym warunkom: 1) nie mogą zmienić całkowitej masy pierwszego płynu; 2) nie mogą zmienić podobnież masy drugiego; 3) nie mogą pociągać za sobą ślizgania się wzdłuż powierzchni zetknięcia Σ. Oznaczmy przez B pewną z góry nieoznaczoną funkcyę spółrzędnych i czasu, która pozostaje skończona i ciągła w objętości V oraz na powierzchniach S i Σ; możemy uwolnić się wówczas od pierwszego warunku, jeśli wprowadzimy wyraz następujący do równania zasadniczego (I) w § 1-ym:

$$\iiint\limits_V dx\,dy\,dz\,B\,\delta\rho-\iiint\limits_V dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial\rho B}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\rho B}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\rho B}{\partial z}\delta z\right)$$

$$(1)\qquad -\iint\limits_S dS\,\rho\,B\,(l\delta x+m\delta y+n\delta z)-\iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\rho\,B\,(l\delta x+m\delta y+n\delta z).$$

Warunek drugi uwzględnimy w sposób podobny. Nareszcie, ażeby wyrazić warunek trzeci, włączymy do równania (I) wyrażenie kształtu

www.rcin.org.pl

$$\iint\limits_{\Sigma} d\Sigma \, \{ \alpha (\delta x - \delta x') + \beta (\delta y - \delta y') + \gamma (\delta z - \delta z') \}, \qquad (2)$$

w którem α, β, γ oznaczają trzy funkcye, tymczasowo nieoznaczone, spółrzędnych i czasu, które pozostają skończone i ciągłe na rozległości powierzni zetknięcia Σ.

Składowe Dx, Dy, Dz, Dx', Dy', Dz' podlegają również pewnemu ograniczeniu, a mianowicie z mocy następujących warunków: 1) przesunięcia, którym odpowiadają te składowe, nie mogą zmienić całkowitej (łącznej) masy układu, jakkolwiek zmieniają oczywiście masę każdego składnika z osobna; 2) na powierzchni Σ nie powinny wywoływać ślizgania się. Tworzymy więc wyraz

$$\iint\limits_{S} dS \, \rho \, C \, (lDx + mDy + nDz) + \iint\limits_{\Sigma} d\Sigma \, \rho \, C \, (lDx + mDy + nDz)$$

$$+ \iint\limits_{S'} dS' \, \rho' \, C \, (l'Dx' + m'Dy' + n'Dz') + \iint\limits_{\Sigma} d\Sigma \, \rho' \, C \, (l'Dx' + m'Dy' + n'Dz'), \qquad (3)$$

w którym oznaczamy przez C dowolną (byle skończoną i ciągłą) funkcyę wyraźną czasu, od spółrzędnych zaś niezależną, czyli ze względu na spółrzędne stałą; i dołączamy ten wyraz do poprzednich, znajdujących się w równaniu zasadniczem (I), § 1. Tym sposobem uwalniamy się od pierwszego warunku. Ażeby od drugiego uwolnić się również, wprowadzamy do tegoż równania wyraz

$$\iint\limits_{\Sigma} d\Sigma \, \{ \varepsilon (Dx - Dx') + \varkappa (Dy - Dy') + \lambda (Dz - Dz') \}, \qquad (4)$$

gdzie oznaczamy przez ε, $\varkappa$, λ funkcye nieoznaczone spółrzędnych i czasu, które pozostają skończone i ciągłe we wszystkich punktach powierzchni Σ. Uwzględniwszy tym sposobem wszystkie wspomniane warunki w równaniu zasadniczem, możemy uważać znajdujące się w niem waryacye za zupełnie niezależne i dowolne.

§ 7. Przytaczamy tu równanie zasadnicze, w postaci, jaką przybiera według rozumowań powyższych; opuszczamy tylko wyrazy, które znikają, jako pochodne zupełne względem czasu, w rezultacie ostatecznym.

www.rcin.org.pl

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \Big\{ -\iiint\limits_V dx\,dy\,dz\; E\,\delta\rho + \iiint\limits_V dx\,dy\,dz\; E\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\rho}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\rho}{\partial z}\delta z\right)$$

$$+\iint\limits_S dS\,\rho\,E\,(l\delta x+m\delta y+n\delta z)+\iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\rho\,E\,(l\delta x+m\delta y+n\delta z)$$

$$+\iint\limits_S dS\,\rho\,E\,(lDx+mDy+nDz)+\iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\rho\,E\,(lDx+mDy+nDz)$$

$$-\iiint\limits_{V'} dx'\,dy'\,dz'\;E'\,\delta\rho' + \iiint\limits_{V'} dx'\,dy'\,dz'\;E'\left(\frac{\partial\rho'}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial\rho'}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial\rho'}{\partial z'}\delta z'\right)$$

$$+\iint\limits_{S'} dS'\,\rho'\,E'\,(l'\delta x'+m'\delta y'+n'\delta z')+\iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\rho'\,E'\,(l'\delta x'+m'\delta y'+n'\delta z')$$

$$+\iint\limits_{S'} dS'\,\rho'\,E'\,(l'Dx'+m'Dy'+n'Dz')+\iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\rho'\,E'\,(l'Dx'+m'Dy'+n'Dz')$$

$$-\iiint\limits_V dx\,dy\,dz\;\rho\,\frac{\partial f}{\partial\rho}\,\delta\rho$$

$$+\iint\limits_S dS\,\rho\,f\,(lDx+mDy+nDz)+\iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\rho\,f\,(lDx+mDy+nDz)$$

$$-\iiint\limits_{V'} dx'\,dy'\,dz'\;\rho'\,\frac{\partial f'}{\partial\rho'}\,\delta\rho'$$

$$+\iint\limits_{S'} dS'\,\rho'\,f'\,(l'Dx'+m'Dy'+n'Dz')+\iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\rho'\,f'\,(l'Dx'+m'Dy'+n'Dz')$$

$$+\iint\limits_S dS\,\{\,p_x(\delta x+Dx)+p_y(\delta y+Dy)+p_z(\delta z+Dz)\,\}$$

$$+\iint\limits_{S'} dS'\,\{\,p'_x(\delta x'+Dx')+p'_y(\delta y'+Dy')+p'_z(\delta z'+Dz')\,\}$$

$$- \iiint\limits_{V} dx\,dy\,dz\,\Psi\,\delta\rho + \iiint\limits_{V} dx\,dy\,dz\,\Psi \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \rho}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \rho}{\partial z}\delta z \right)$$

$$+ \iint\limits_{S} dS\,\rho\,\Psi\,(l\delta x + m\delta y + n\delta z) + \iint\limits_{\Sigma} d\Sigma\,\rho\,\Psi\,(l\delta x + m\delta y + n\delta z)$$

$$+ \iint\limits_{S} dS\,\rho\,\Psi\,(lDx + mDy + nDz) + \iint\limits_{\Sigma} d\Sigma\,\rho\,\Psi\,(lDx + mDy + nDz)$$

$$- \iiint\limits_{V'} dx'\,dy'\,dz'\,\Psi'\,\delta\rho' + \iiint\limits_{V'} dx'\,dy'\,dz'\,\Psi' \left(\frac{\partial \rho'}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial \rho'}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial \rho'}{\partial z'}\delta z' \right)$$

$$+ \iint\limits_{S'} dS'\,\rho'\,\Psi'\,(l'\delta x' + m'\delta y' + n'\delta z') + \iint\limits_{\Sigma} d\Sigma\,\rho'\,\Psi'\,(l'\delta x' + m'\delta y' + n'\delta z')$$

$$+ \iint\limits_{S'} dS'\,\rho'\,\Psi'\,(l'Dx' + m'Dy' + n'Dz') + \iint\limits_{\Sigma} d\Sigma\,\rho'\,\Psi'\,(l'Dx' + m'Dy' + n'Dz')$$

$$+ \iiint\limits_{V} dx\,dy\,dz\,B\,\delta\rho - \iiint\limits_{V} dx\,dy\,dz \left(\frac{\partial \rho B}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \rho B}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \rho B}{\partial z}\delta z \right)$$

$$- \iint\limits_{S} dS\,\rho\,B\,(l\delta x + m\delta y + n\delta z) - \iint\limits_{\Sigma} d\Sigma\,\rho\,B\,(l\delta x + m\delta y + n\delta z)$$

$$+ \iiint\limits_{V'} dx'\,dy'\,dz'\,B'\,\delta\rho' - \iiint\limits_{V'} dx'\,dy'\,dz' \left(\frac{\partial \rho' B'}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial \rho' B'}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial \rho' B'}{\partial z'}\delta z' \right)$$

$$- \iint\limits_{S'} dS'\,\rho'\,B'\,(l'\delta x' + m'\delta y' + n'\delta z') - \iint\limits_{\Sigma} d\Sigma\,\rho'\,B'\,(l'\delta x' + m'\delta y' + n'\delta z')$$

$$+ \iint\limits_{\Sigma} d\Sigma\,\{\,\alpha\,(\delta x - \delta x') + \beta\,(\delta y - \delta y') + \gamma\,(\delta z - \delta z')\,\}$$

$$+ \iint\limits_{S} dS\,\rho\,C\,(lDx + mDy + nDz) + \iint\limits_{\Sigma} d\Sigma\,\rho\,C\,(lDx + mDy + nDz)$$

www.rcin.org.pl

$$+\iint\limits_{S'} dS'\,\rho'\,C\,(l'Dx'+m'Dy'+n'Dz')+\iint\limits_{\Sigma} d\Sigma\,\rho'\,C\,(l'Dx'+m'Dy'+n'Dz')$$

$$+\iint\limits_{\Sigma} d\Sigma\,\{\,\varepsilon\,(Dx-Dx')+\varkappa\,(Dy-Dy')+\lambda\,(Dz-Dz')\,\}\Big\}=0.$$

§ 8. Wnioski, jakie stąd wynikają, są następujące. W każdem miejscu objętości V muszą być spełnione równania: po pierwsze

$$-E-\Psi-\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}+B=0 \tag{1}$$

powtóre trzy równania, z pomiędzy których pierwsze brzmi:

$$(E+\Psi)\frac{\partial \rho}{\partial x}-\frac{\partial \rho B}{\partial x}=0. \tag{2a}$$

W każdem miejscu powierzchni S zachodzą związki:

$$\rho\,(E+\Psi-B)\,l+p_x=0 \quad \text{i t. d.} \tag{3a}$$

$$\rho\,(E+\Psi+f+C)\,l+p_x=0 \quad \text{i t. d.} \tag{4a}$$

Do każdego miejsca w objętości V' stosują się równania:

$$-E'-\Psi'-\rho'\frac{\partial f'}{\partial \rho'}+B'=0 \tag{5}$$

oraz trzy równania kształtu:

$$(E'+\Psi')\frac{\partial \rho'}{\partial x'}-\frac{\partial \rho' B'}{\partial x'}=0 \quad \text{i t. d.} \tag{6a}$$

W każdem miejscu powierzchni S' mamy

$$\rho'\,(E'+\Psi'-B')\,l'+p'_x=0 \quad \text{i t. d.} \tag{7a}$$

$$\rho'\,(E'+\Psi'+f'+C)\,l'+p'_x=0 \quad \text{i t. d.} \tag{8a}$$

Wszędzie wreszcie wzdłuż powierzchni Σ obowiązują równania:

$$\rho\,(E+\Psi-B)\,l+\alpha=0 \quad \text{i t. d.} \tag{9a}$$

$$\rho\,(E+\Psi+f+C)\,l+\varepsilon=0 \quad \text{i t. d.} \tag{10a}$$

$$\rho'\,(E'+\Psi'-B')\,l'-\alpha=0 \quad \text{i t. d.} \tag{11a}$$

$$\rho'\,(E'+\Psi'+f'+C)\,l'-\varepsilon=0 \quad \text{i t. d.} \tag{12a}$$

www.rcin.org.pl

Równania (3), albo równania (4), wyznaczają ciśnienie zewnętrzne, które jest czynne na powierzchni S. Widzimy z nich, że ciśnienie to ma być wywierane normalnie do elementu, na który działa, i że, co do wartości, powinno wynosić

$$p = -\rho(E + \Psi - B) \tag{13}$$

albo też

$$p = -\rho(E + \Psi + f + C). \tag{14}$$

Będziemy przypuszczali, że podobne równania zachodzą w każdem miejscu wewnątrz objętości V, a nawet na powierzchni Σ wzajemnego zetknięcia; wolno nam uczynić takie założenie, które określa pojęcie „wewnętrznego“ w pierwszym płynie ciśnienia. Otrzymujemy wówczas [1]) z (1) i z (13)

$$p = \rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho}. \tag{15}$$

Z równań (2a) i (13) wyprowadzamy

$$\rho \frac{\partial E}{\partial x} + \rho \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{i t. d.} \tag{16a}$$

to zaś są widocznie zwykłe równania ruchu Hydrodynamiki odwracalnej, albowiem mamy

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{du}{dt} \quad \text{i t. d.} \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -X \quad \text{i t. d.}$$

Z równań (5), (6) i (7) otrzymujemy podobnie związek, analogiczny do powyższego (13); za jego pomocą określamy ciśnienie „wewnętrzne“ w płynie drugim i na jego granicach; znajdujemy wówczas równania ruchu płynu drugiego, które są zupełnie podobne do równań (16).

W równaniu (14) poznajemy bez trudności twierdzenie, znane dobrze z Hydrodynamiki, które udowadnia się natychmiast, całkując, gdy można, równania ruchu. Mamy mianowicie, według (15),

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

[1]) Por. P. Duhem, Travaux et Mémoires des Facultés de Lille, III, mém. Nr. 11, p. 27 (1893).

www.rcin.org.pl

stąd zaś wynika, jeśli założymy

$$G = \int \frac{dp}{\rho}, \tag{17}$$

związek następujący:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f + \frac{p}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial x} \quad \text{i t. d.} \tag{18a}$$

Jeśli wprowadzimy zatem wielkość G do równania (14), zastępując przez nią wyrażenie $f+p/\rho$, otrzymamy twierdzenie [1]), o którem wspominaliśmy wyżej. Możemy wykonać zupełnie podobny rachunek na zasadzie równań (8), z których wynika związek, analogiczny do (14). Lecz zważmy w takim razie, że w równaniach (4) i (8), albo też w (14) i w równaniu, analogicznem do (14), występuje stała C t a s a m a; że tak być powinno, nie moglibyśmy okazać bezpośrednio, na zasadzie powołanego hydrodynamicznego twierdzenia; niebawem zaś zobaczymy, że okoliczność ta ma, dla wnioskowania naszego, znaczenie istotne.

Powracając do równań (9) i (11), zauważmy najpierw, że dają one

$$\alpha : \beta : \gamma = l : m : n \tag{19}$$

w każdym punkcie powierzchni Σ. Następnie, porównawszy je z (3) i z (7), widzimy, że mamy

(20a) $-p_x + \alpha = 0;$ $-p'_x - \alpha = 0;$ (21a)

(20b) $-p_y + \beta = 0;$ $-p'_y - \beta = 0;$ (21b)

(20c) $-p_z + \gamma = 0;$ $-p'_z - \gamma = 0.$ (21c)

Z równań (10) i (12) wynika podobnie

$$\varepsilon : \varkappa : \lambda = l : m : n \tag{22}$$

oraz dalej, przez porównanie z (4) i (8),

(23a) $-p_x + \varepsilon = 0;$ $-p'_x - \varepsilon = 0;$ (24a)

(23b) $-p_y + \varkappa = 0;$ $-p'_y - \varkappa = 0;$ (24b)

(23c) $-p_z + \lambda = 0;$ $-p'_z - \lambda = 0.$ (24c)

Uważajmy dowolny punkt na powierzchni Σ; zastosujmy do niego jednocześnie równania (20) i (21). Ponieważ α, β, γ są funkcyami spółrzędnych (i czasu), przeto będą miały, w (20) i (21), wartości jedna-

[1]) Por. H. Lamb, Hydrodynamics, 1895, p. 21.

www.rcin.org.pl

kowe. Stosując podobnież równania (23) i (24) do obranego punktu, będziemy w nim mieli dla ε, $\varkappa$ i λ wartości, w (23) i (24) jednakowe. Otrzymamy zatem

$$p'_x = -p_x; \quad p'_y = -p_y; \quad p'_z = -p_z;$$

z równań zaś (19) i (22) wynika, że te ciśnienia są wywierane normalnie.

Z równania (14) i z analogicznego równania, tyczącego się ciała drugiego, wynika:

$$E - E' + \Psi - \Psi' + f - f' + \frac{p}{\rho} - \frac{p'}{\rho'} = 0. \tag{25}$$

Wielkości E, Ψ, f, p oraz ρ w tem równaniu tyczą się dowolnego punktu na powierzchni S, natomiast wielkości E', Ψ', f', p' i ρ' tyczą się dowolnego punktu na powierzchni S'. Możemy uważać równanie (25) za uogólnienie klasycznego warunku równowagi termodynamicznej w układzie, który znajduje się w spoczynku. Istotnie, jeśli założymy $E=0$, $E'=0$ i zastosujemy równanie (25) do dowolnego punktu powierzchni Σ (udowodnimy zaś łatwo, że to wolno uczynić), tedy będzie

$$\Psi' = \Psi, \qquad p' = p$$

i otrzymamy

$$f - f' + p\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right) = 0, \tag{26}$$

co jest właśnie owym termodynamicznym warunkiem równowagi w układzie „doskonale niejednolitym“.

§ 9. Spróbujmy uogólnić teraz metodę rozumowania w taki sposób, ażeby wciągnąć w jego obręb tarcie i inne okoliczności, związane z tarciem. Podstawą rachunków pozostaje równanie (I), w § 1-ym. Zachowując bez zmiany wszystkie założenia i wszystkie oznaczenia, przyjęte w § 2-im, powiadamy, że możemy wyrazić w sposób następujący zmianę wirtualną energii kinetycznej, w płynie pierwszym, wynikającą z działania czynników „mechanicznych“:

$$-\frac{d}{dt}\iiint\limits_V dx\,dy\,dz\,\rho\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z\right)$$

$$-\iiint\limits_V dx\,dy\,dz\,\rho\left(\frac{\partial E}{\partial x}\delta x + \frac{\partial E}{\partial y}\delta y + \frac{\partial E}{\partial z}\delta z\right). \tag{1}$$

www.rcin.org.pl

Zmianę tej energii, wynikającą ze zjawiska „reakcyi" w układzie, utworzymy według wzoru (5) w § 2-gim i dodamy do wyrażenia powyższego. Podobnie postąpimy względem płynu drugiego. Co się więc tyczy zmian energii kinetycznej układu, nie wymaga w obecnym rachunku przekształceń istotnych.

Inaczej mają się rzeczy ze zmianą energii swobodnej; musimy zastąpić tu założenia § 3-go przez znacznie ogólniejsze. Zrzekamy się obecnie twierdzenia, jakoby istniała funkcya f, zależna od gęstości ρ i od temperatury, która wyrażałaby jednostkową energię swobodną; jakoby istniała analogiczna funkcya f'; nie przypuszczamy nawet, że istnieje skończona energia swobodna $\boldsymbol{F}$ całkowitego układu. Poprzestajemy na założeniu, że część nieskończenie małej wielkości $\delta\boldsymbol{F}$, jaka odpowiada działaniu czynników „mechanicznych", ma postać następującą:

$$\iiint\limits_V dx\,dy\,dz\,\rho\left\{ I\frac{\partial\delta x}{\partial x}+J\frac{\partial\delta y}{\partial y}+K\frac{\partial\delta z}{\partial z}+\right.$$

$$\left. +L\left(\frac{\partial\delta z}{\partial y}+\frac{\partial\delta y}{\partial z}\right)+M\left(\frac{\partial\delta x}{\partial z}+\frac{\partial\delta z}{\partial x}\right)+N\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}+\frac{\partial\delta x}{\partial y}\right)\right\} \tag{2}$$

w pierwszem ciele układu. Oznaczamy tu przez I, J, K, L, M, N pewne funkcye spółrzędnych i czasu, których wyznaczeniem zajmiemy się później. Z teoryi ciał ciągłych znane są dobrze zasady, z których wynika, że kształt, tu przez nas przyjęty, jest dostatecznie ogólny; moglibyśmy go zastosować nietylko do ciał płynnych lepkich, lecz również np. do stałych sprężystych. Napiszmy, zamiast (2), co następuje:

$$-\iiint\limits_V dx\,dy\,dz\left\{\left(\frac{\partial\rho I}{\partial x}+\frac{\partial\rho N}{\partial y}+\frac{\partial\rho M}{\partial z}\right)\delta x+\right.$$

$$+\left(\frac{\partial\rho N}{\partial x}+\frac{\partial\rho J}{\partial y}+\frac{\partial\rho L}{\partial z}\right)\delta y+$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\rho M}{\partial x}+\frac{\partial\rho L}{\partial y}+\frac{\partial\rho K}{\partial z}\right)\delta z\right\}$$

$$-\iint\limits_S dS\,\rho\,\{(lI+mN+nM)\,\delta x+(lN+mJ+nL)\,\delta y+(lM+mL+nK)\,\delta z\}$$

$$-\iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\rho\,\{(lI+mN+nM)\,\delta x+(lN+mJ+nL)\,\delta y+(lM+mL+nK)\,\delta z\}. \tag{3}$$

www.rcin.org.pl

Lecz wiemy skądinąd [1]), że w płynie lepkim ta sama wielkość wynosi:

$$-\iiint_V dx\,dy\,dz\,p\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right) \tag{4}$$

lub jeszcze

$$+\iiint_V dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial p}{\partial x}\delta x+\frac{\partial p}{\partial y}\delta y+\frac{\partial p}{\partial z}\delta z\right)$$

$$+\iint_S dS\,p\,(l\delta x+m\delta y+n\delta z)+\iint_\Sigma d\Sigma\,p\,(l\delta x+m\delta y+n\delta z). \tag{5}$$

Jeśli więc wyrażenia (3) i (5) mają być też same, tedy powinniśmy mieć związki następujące: w objętości V

$$-\left(\frac{\partial\rho I}{\partial x}+\frac{\partial\rho N}{\partial y}+\frac{\partial\rho M}{\partial z}\right)=\frac{\partial p}{\partial x}=\rho\,\frac{\partial G}{\partial x}; \tag{6a}$$

$$-\left(\frac{\partial\rho N}{\partial x}+\frac{\partial\rho J}{\partial y}+\frac{\partial\rho L}{\partial z}\right)=\frac{\partial p}{\partial y}=\rho\,\frac{\partial G}{\partial y}; \tag{6b}$$

$$-\left(\frac{\partial\rho M}{\partial x}+\frac{\partial\rho L}{\partial y}+\frac{\partial\rho K}{\partial z}\right)=\frac{\partial p}{\partial z}=\rho\,\frac{\partial G}{\partial z}, \tag{6c}$$

na powierzchni zaś S i Σ:

$$-\rho\,(lI+mN+nM)=pl; \tag{7a}$$

$$-\rho\,(lN+mJ+nL)=pm; \tag{7b}$$

$$-\rho\,(lM+mL+nK)=pn; \tag{7c}$$

równania (7) są zresztą następstwem równań poprzedzających (6). Litera G w równaniach (6) ma znaczenie, ustalone wyżej, w § 8-ym.

Przechodzimy do obliczenia drugiej części ilości δF (wciąż w pierwszym płynie), mianowicie tej, która zależy od „reakcyi“, możliwej w układzie. Zauważmy przedewszystkiem, że całkę objętościową, znajdującą się w powyższem wyrażeniu (3), można napisać, według równań (6), w sposób następujący:

---

[1]) Por. Rozprawy Wydziału matematyczno-przyrodniczego Akad. Umiej., tom XXX, str. 318.

www.rcin.org.pl

$$\iiint\limits_V dx\,dy\,dz\, G\,\delta\rho - \iiint\limits_V dx\,dy\,dz\, G\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\rho}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\rho}{\partial z}\delta z\right)$$

$$(8) \qquad - \iint\limits_S dS\,\rho\, G\,(l\delta x + m\delta y + n\delta z) - \iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\rho\, G\,(l\delta x + m\delta y + n\delta z).$$

Kierując się kształtem tego wyrazu, jakoteż postacią pozostałych wyrazów we wzorze (3), znajdujemy, jako wartość wspomnianej drugiej części waryacyi, co następuje:

$$- \iint\limits_S dS\,\rho\, G\,(lDx + mDy + nDz) - \iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\rho\, G\,(lDx + mDy + nDz)$$

$$- \iint\limits_S dS\rho\,\{(lI + mN + nM)\,Dx + (lN + mJ + nL)\,Dy + (lM + mL + nK)\,Dz\}$$

$$(9) \qquad - \iint\limits_\Sigma d\Sigma\rho\,\{(lI + mN + nM)\,Dx + (lN + mJ + nL)\,Dy + (lM + mL + nK)\,Dz\}.$$

Pozostałe wyrazy w nieskończenie małej δF, tyczące się płynu drugiego, obliczamy w sposób analogiczny.

Praca wirtualna, którą wykonywają nad pierwszym płynem bądź ciśnienia zewnętrzne, bądź też siły zewnętrzne, działające z odległości, wynosi, według hypotez i oznaczeń, przyjętych w § 4-ym,

$$\iint\limits_S dS\,\{p_x(\delta x + Dx) + p_y(\delta y + Dy) + p_z(\delta z + Dz)\}$$

$$- \iiint\limits_V dx\,dy\,dz\,\rho\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\delta z\right)$$

$$(10) \qquad + \iint\limits_S dS\,\rho\,\Psi\,(lDx + mDy + nDz) + \iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\rho\,\Psi\,(lDx + mDy + nDz).$$

Wyrażenie podobne stosuje się do płynu drugiego.

Rozważmy teraz postać nieodwracalnego wyrazu $\delta' Q$. W płynach lepkich skutkiem ruchu wytwarza się ciepło. Dzięki przewodnictwu, ciepło to będzie przenikało do elementów, biorących udział w „reakcyi“ i będzie się tam zużywało na potrzeby tej reakcyi. Zamiast tych rze-

www.rcin.org.pl

czywistych stosunków, wyobraźmy sobie następujące fikcyjne. Przypuśćmy, że odbieramy każdemu elementowi, za pomocą stosownych zbiorników, takie wciąż ilości ciepła, jakie wytwarzają się w nim działaniem tarcia; przypuśćmy, że zapobiegamy tym sposobem wszelkim zmianom temperatury [1]). Jednocześnie doprowadzamy elementom, biorącym udział w „reakcyi", ilości ciepła, równe poprzednim, czerpiąc je z tych samych fikcyjnych zbiorników.

Wyobraźmy sobie, że poznaliśmy w każdym punkcie pierwszego płynu (x, y, z) panujące tam „średnie" ciśnienie; oznaczmy je przez p. Oznaczmy dalej przez

$$p_{xx},\ p_{yy},\ p_{zz},\ p_{yz}=p_{zy},\ p_{zx}=p_{xz},\ p_{xy}=p_{yx}$$

zwykle tak oznaczane składowe ciśnienia. Przypuszczamy, że dla skompensowania ilości ciepła, powstającej w pierwszym płynie skutkiem przesunięć δx, δy, δz, potrzeba jest pochłonięcia (rozumianego algebraicznie) ilości ciepła:

$$-\iiint\limits_V dx\,dy\,dz\left\{(p-p_{xx})\frac{\partial\delta x}{\partial x}+(p-p_{yy})\frac{\partial\delta y}{\partial y}+(p-p_{zz})\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right.$$

$$\left.-p_{yz}\left(\frac{\partial\delta z}{\partial y}+\frac{\partial\delta y}{\partial z}\right)-p_{zx}\left(\frac{\partial\delta x}{\partial z}+\frac{\partial\delta z}{\partial x}\right)-p_{xy}\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}+\frac{\partial\delta x}{\partial y}\right)\right\}. \tag{11}$$

Wyrażenie (11) otrzymujemy przez naturalne uogólnienie wielkości, wyliczonej przez Sir G. G. Stokesa i spokrewnionej blizko z „funkcyą dysypacyjną" Lorda Rayleigh. Możemy przekształcić je w sposób następujący:

$$\iiint\limits_V dx\,dy\,dz\left\{\left[\frac{\partial p}{\partial x}-\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{xz}}{\partial z}\right)\right]\delta x+\right.$$

$$+\left[\frac{\partial p}{\partial y}-\left(\frac{\partial p_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial z}\right)\right]\delta y+$$

$$\left.+\left[\frac{\partial p}{\partial z}-\left(\frac{\partial p_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right)\right]\delta z\right\}$$

---

[1]) Jest to założenie, które czynimy zawsze w teoryi ruchu płynów lepkich; por. Rozprawy Wydz. mat.-przyr. Akad. Umiej., tom XXX, str. 316.

www.rcin.org.pl

$$-\iint\limits_S dS\,\{(p_x-pl)\,\delta x+(p_y-pm)\,\delta y+(p_z-pn)\,\delta z\}$$

(12) $$-\iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\{(p_x-pl)\,\delta x+(p_y-pm)\,\delta y+(p_z-pn)\,\delta z\}.$$

Wprowadzamy teraz wielkość Γ, którą określamy za pomocą równań:

(13a) $$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{xz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial\Gamma}{\partial x};$$

(13b) $$\frac{\partial p_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial\Gamma}{\partial y};$$

(13c) $$\frac{\partial p_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial\Gamma}{\partial z},$$

mających się stosować do każdego punktu objętości V. Czynimy tym sposobem pewne założenie, które jednak, jak się okaże, łączy się jak najściślej z hypotezą istnienia potencyału prędkości (§ 2). Całka objętościowa, znajdująca się w powyższym wzorze (12), przybiera wówczas postać

(14) $$\iiint\limits_V dx\,dy\,dz\,\rho\left\{\frac{\partial(G-\Gamma)}{\partial x}\delta x+\frac{\partial(G-\Gamma)}{\partial y}\delta y+\frac{\partial(G-\Gamma)}{\partial z}\delta z\right\};$$

stąd zaś, zarówno jak z kształtu pozostałych wyrazów wzoru (12), wnosimy, że część nieodwracalnego wyrazu $\delta' \boldsymbol{Q}$, jaka (w pierwszym płynie) odpowiada wirtualnej reakcyi, jest równa

$$-\iint\limits_S dS\,\rho\,(G-\Gamma)\,(lDx+mDy+nDz)-\iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\rho\,(G-\Gamma)\,(lDx+mDy+nDz)$$

$$-\iint\limits_S dS\,\{(p_x-pl)\,Dx+(p_y-pm)\,Dy+(p_z-pn)\,Dz\}$$

(15) $$-\iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\{(p_x-pl)\,Dx+(p_y-pm)\,Dy+(p_z-pn)\,Dz\}.$$

Pozostałe w $\delta' \boldsymbol{Q}$ wyrazy, tyczące się drugiego płynu, obliczamy w sposób, do przytoczonego podobny.

www.rcin.org.pl

W powyższym rachunku unikaliśmy z umysłu wprowadzania zmiennych ρ i ρ' jako niezależnych; zatem widzimy, że z pomiędzy warunków, wyliczonych wyżej w § 6-ym, możemy obecnie opuścić dwa pierwsze i poddać przesunięcia δx, δy, δz jedynie trzeciemu, co uczynimy w sposób, objaśniony w powołanym paragrafie. Warunki zaś, obowiązujące przesunięcia Dx, Dy, Dz, przeniesiemy bez zmiany z § 6-go na obecne zadanie, do którego stosują się podobnie, jak stosowały się do poprzedniego prostszego.

§ 10. Zbierając wyniki § 9-go, otrzymujemy równanie następujące:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \Big\{ -\iiint\limits_V dx\,dy\,dz\,\rho\left(\frac{\partial E}{\partial x}\delta x + \frac{\partial E}{\partial y}\delta y + \frac{\partial E}{\partial z}\delta z\right)$$

$$+\iint\limits_S dS\,\rho\,E\,(lDx+mDy+nDz) + \iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\rho\,E\,(lDx+mDy+nDz)$$

$$-\iiint\limits_{V'} dx'\,dy'\,dz'\,\rho'\left(\frac{\partial E'}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial E'}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial E'}{\partial z'}\delta z'\right)$$

$$+\iint\limits_{S'} dS'\,\rho'\,E'\,(l'Dx'+m'Dy'+n'Dz') + \iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\rho'\,E'\,(l'Dx'+m'Dy'+n'Dz')$$

$$-\iiint\limits_V dx\,dy\,dz\,\rho\left(\frac{\partial G}{\partial x}\delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\delta y + \frac{\partial G}{\partial z}\delta z\right)$$

$$+\iint\limits_S dS\,\rho\,\{(lI+mN+nM)\,\delta x + (lN+mJ+nL)\,\delta y + (lM+mL+nK)\,\delta z\}$$

$$+\iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\rho\,\{(lI+mN+nM)\,\delta x + (lN+mJ+nL)\,\delta y + (lM+mL+nK)\,\delta z\}$$

$$+\iint\limits_S dS\,\rho\,G\,(lDx+mDy+nDz) + \iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\rho\,G\,(lDx+mDy+nDz)$$

www.rcin.org.pl

$$+\iint\limits_S dS\,\rho\,\{(lI+mN+nM)\,Dx+(lN+mJ+nL)\,Dy+(lM+mL+nK)\,Dz\}$$

$$+\iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\rho\,\{(lI+mN+nM)\,Dx+(lN+mJ+nL)\,Dy+(lM+mL+nK)\,Dz\}$$

$$-\iiint\limits_{V'} dx'\,dy'\,dz'\,\rho'\left(\frac{\partial G'}{\partial x'}\,\delta x'+\frac{\partial G'}{\partial y'}\,\delta y'+\frac{\partial G'}{\partial z'}\,\delta z'\right)$$

$$+\iint\limits_{S'} dS'\rho'\{(l'I'+m'N'+n'M')\delta x'+(l'N'+m'J'+n'L')\delta y'+(l'M'+m'L'+n'K')\delta z'\}$$

$$+\iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\rho'\{(l'I'+m'N'+n'M')\delta x'+(l'N'+m'J'+n'L')\delta y'+(l'M'+m'L'+n'K')\delta z'\}$$

$$+\iint\limits_{S'} dS'\,\rho'\,G'\,(l'Dx'+m'Dy'+n'Dz)+\iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\rho'\,G'\,(l'Dx'+m'Dy'+n'Dz')$$

$$+\iint\limits_{S'} dS'\rho'\{(l'I'+m'N'+n'M')Dx'+(l'N'+m'J'+n'L')Dy'+(l'M'+m'L'+n'K')Dz'\}$$

$$+\iint\limits_\Sigma d\Sigma\rho'\{(l'I'+m'N'+n'M')Dx'+(l'N'+m'J'+n'L')Dy'+(l'M'+m'L'+n'K')Dz'\}$$

$$+\iint\limits_S dS\,\{\,p_x\,(\delta x+Dx)+p_y\,(\delta y+Dy)+p_z\,(\delta z+Dz)\,\}$$

$$-\iiint\limits_V dx\,dy\,dz\,\rho\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\,\delta x+\frac{\partial\Psi}{\partial y}\,\delta y+\frac{\partial\Psi}{\partial z}\,\delta z\right)$$

$$+\iint\limits_S dS\,\rho\,\Psi\,(lDx+mDy+nDz)+\iint\limits_\Sigma d\Sigma\,\rho\,\Psi\,(lDx+mDy+nDz)$$

$$+\iint\limits_{S'} dS'\,\{\,p'_x\,(\delta x'+Dx')+p'_y\,(\delta y'+Dy')+p'_z\,(\delta z'+Dz')\,\}$$

$$-\iiint\limits_{V'} dx'\,dy'\,dz'\,\rho'\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial x'}\,\delta x'+\frac{\partial\Psi'}{\partial y'}\,\delta y'+\frac{\partial\Psi'}{\partial z'}\,\delta z'\right)$$

www.rcin.org.pl

$$+\iint\limits_{S'} dS'\,\rho'\,\Psi'\,(l'Dx'+m'Dy'+n'Dz') + \iint\limits_{\Sigma} d\Sigma\,\rho'\,\Psi'\,(l'Dx'+m'Dy'+n'Dz')$$

$$+\iiint\limits_{V} dx\,dy\,dz\,\rho\left\{\frac{\partial(G-\Gamma)}{\partial x}\delta x+\frac{\partial(G-\Gamma)}{\partial y}\delta y+\frac{\partial(G-\Gamma)}{\partial z}\delta z\right\}$$

$$-\iint\limits_{S} dS\,\{(p_x-pl)\,\delta x+(p_y-pm)\,\delta y+(p_z-pn)\,\delta z\}$$

$$-\iint\limits_{\Sigma} d\Sigma\,\{(p_x-pl)\,\delta x+(p_y-pm)\,\delta y+(p_z-pn)\,\delta z\}$$

$$-\iint\limits_{S} dS\,\rho\,(G-\Gamma)\,(lDx+mDy+nDz) - \iint\limits_{\Sigma} d\Sigma\,\rho\,(G-\Gamma)\,(lDx+mDy+nDz)$$

$$-\iint\limits_{S} dS\,\{(p_x-pl)\,Dx+(p_y-pm)\,Dy+(p_z-pn)\,Dz\}$$

$$-\iint\limits_{\Sigma} d\Sigma\,\{(p_x-pl)\,Dx+(p_y-pm)\,Dy+(p_z-pn)\,Dz\}$$

$$+\iiint\limits_{V'} dx'\,dy'\,dz'\,\rho'\left\{\frac{\partial(G'-\Gamma')}{\partial x'}\delta x'+\frac{\partial(G'-\Gamma')}{\partial y'}\delta y'+\frac{\partial(G'-\Gamma')}{\partial z'}\delta z'\right\}$$

$$-\iint\limits_{S'} dS'\,\{(p'_x-p'l')\,\delta x'+(p'_y-p'm')\,\delta y'+(p'_z-p'n')\,\delta z'\}$$

$$-\iint\limits_{\Sigma} d\Sigma\,\{(p'_x-p'l')\,\delta x'+(p'_y-p'm')\,\delta y'+(p'_z-p'n')\,\delta z'\}$$

$$-\iint\limits_{S'} dS'\rho'(G'-\Gamma')(l'Dx'+m'Dy'+n'Dz') - \iint\limits_{\Sigma} d\Sigma\rho'(G'-\Gamma')(l'Dx'+m'Dy'+n'Dz')$$

$$-\iint\limits_{S'} dS'\,\{(p'_x-p'l')\,Dx'+(p'_y-p'm')\,Dy'+(p'_z-p'n')\,Dz'\}$$

$$-\iint\limits_{\Sigma} d\Sigma\,\{(p'_x-p'l')\,Dx'+(p'_y-p'm')\,Dy'+(p'_z-p'n')\,Dz'\}$$

www.rcin.org.pl

$$+\iint\limits_{\Sigma} d\Sigma \left\{ \alpha(\delta x - \delta x') + \beta(\delta y - \delta y') + \gamma(\delta z - \delta z') \right\}$$

$$+\iint\limits_{S} dS\, \rho\, C(lDx + mDy + nDz) + \iint\limits_{\Sigma} d\Sigma\, \rho\, C(lDx + mDy + nDz)$$

$$+\iint\limits_{S'} dS'\, \rho'\, C(l'Dx' + m'Dy' + n'Dz') + \iint\limits_{\Sigma} d\Sigma\, \rho'\, C(l'Dx' + m'Dy' + n'Dz')$$

$$(1) \qquad +\iint\limits_{\Sigma} d\Sigma \left\{ \varepsilon(Dx - Dx') + \varkappa(Dy - Dy') + \lambda(Dz - Dz') \right\} \Bigg\} = 0.$$

Wynikają stąd następujące wnioski. Wszędzie w objętości V muszą być spełnione równania

$$(2a) \qquad \rho \frac{\partial E}{\partial x} + \rho \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \rho \frac{\partial \Gamma}{\partial x} = 0 \text{ i t. d.},$$

które możemy przepisać w postaci dobrze znanej

$$(3a) \qquad \rho \frac{du}{dt} - \rho X + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \text{i t. d.},$$

podobnie jak to uczyniliśmy z równaniami (16) w § 8-ym. Wszędzie w objętości V' muszą być spełnione równania analogiczne. Na powierzchni S zachodzą w każdym punkcie związki:

$$(4a) \qquad \rho(lI + mN + nM) + pl = 0;$$

$$(4b) \qquad \rho(lN + mJ + nL) + pm = 0;$$

$$(4c) \qquad \rho(lM + mL + nK) + pn = 0;$$

są to równania (7) z § 9-go. Otrzymujemy z nich łatwo

$$(5) \qquad \rho(l^2 I + m^2 J + n^2 K + 2mnL + 2nlM + 2lmN) + p = 0.$$

W każdym punkcie powierzchni S mamy dalej

$$(6a) \qquad \rho(E + \Psi + \Gamma + C)\, l + \rho(lI + mN + nM) + pl = 0;$$

$$(6b) \qquad \rho(E + \Psi + \Gamma + C)\, m + \rho(lN + mJ + nL) + pm = 0;$$

$$(6c) \qquad \rho(E + \Psi + \Gamma + C)\, n + \rho(lM + mL + nK) + pn = 0;$$

www.rcin.org.pl

to znaczy, wobec równań (4), iż mamy (całkę równań ruchu):

$$E+\Psi+\Gamma+C=0. \tag{7}$$

Na powierzchni S' otrzymujemy równania ze wszech miar podobne; pomiędzy innemi otrzymujemy związek

$$E'+\Psi'+\Gamma'+C=0, \tag{8}$$

zawierający stałą C tę samą, jaka w równaniu (7) się znajduje. Z równań (7) i (8) wynika tedy zależność

$$E-E'+\Psi-\Psi'+\Gamma-\Gamma'=0. \tag{9}$$

Równanie (9) stanowi postać najogólniejszą, jaką może przybrać twierdzenie, sprowadzające się, w zwykłym przypadku spoczynku, do klasycznego warunku [(26), § 8] równowagi termodynamicznej.

Jeśli przypuścimy, że tarcie w płynach znika, otrzymamy wartość

$$-\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}$$

na wielkości I, J oraz K; wielkości L, M, N stają się równe zeru. A zatem równanie (5) sprowadza się do dawniejszego związku

$$p=\rho^2\frac{\partial f}{\partial\rho}$$

(por. § 8), tak iż wolno podstawiać wielkość $f+p/\rho$ za wielkość G, jak udowodniliśmy w paragrafie powołanym. Z drugiej strony, widzimy bezpośrednio, że wielkość Γ sprowadza się wówczas do G. Tym sposobem równanie obecne (9) sprowadza się wówczas do równania (25), § 8; obecne rozumowania zawierają w sobie rozumowanie dawniejsze, jako przypadek szczególny. Podnosimy jeszcze okoliczność, iż wielkość $f+p/\rho$ jest oczywiście t. zw. „potencyałem termodynamicznym zupełnym“ (pod ciśnieniem stałem), obliczonym na jednostkę masy płynu uważanego.

Z równania (1) wynikają jeszcze następujące równania, stosujące się do dowolnego miejsca powierzchni Σ:

www.rcin.org.pl

$$(10a) \qquad \rho\,(lI + mN + nM) - p_x + pl + \alpha = 0$$

$$(10b) \qquad \rho\,(lN + mJ + nL) - p_y + pm + \beta = 0$$

$$(10c) \qquad \rho\,(lM + mL + nK) - p_z + pn + \gamma = 0$$

$$(11a) \qquad \rho'\,(l'I' + m'N' + n'M') - p'_x + p'l' - \alpha = 0$$

$$(11b) \qquad \rho'\,(l'N' + m'J' + n'L') - p'_y + p'm' - \beta = 0$$

$$(11c) \qquad \rho'\,(l'M' + m'L' + n'K') - p'_z + p'n' - \gamma = 0$$

$$(12a) \qquad \rho\,(E + \Psi + \Gamma + C)\,l + \rho\,(lI + mN + nM) - p_x + pl + \varepsilon = 0$$

$$(12b) \qquad \rho\,(E + \Psi + \Gamma + C)\,m + \rho\,(lN + mJ + nL) - p_y + pm + \varkappa = 0$$

$$(12c) \qquad \rho\,(E + \Psi + \Gamma + C)\,n + \rho\,(lM + mL + nK) - p_z + pn + \lambda = 0$$

$$(13a) \qquad \rho'\,(E' + \Psi' + \Gamma' + C)\,l' + \rho'\,(l'I' + m'N' + n'M') - p'_x + p'l' - \varepsilon = 0$$

$$(13b) \qquad \rho'\,(E' + \Psi' + \Gamma' + C)\,m' + \rho'\,(l'N' + m'J' + n'L') - p'_y + p'm' - \varkappa = 0$$

$$(13c) \qquad \rho'\,(E' + \Psi' + \Gamma' + C)\,n' + \rho'\,(l'M' + m'L' + n'K') - p'_z + p'n' - \lambda = 0.$$

Porównajmy te równania z równaniami: (4), (6) oraz z równaniami analogicznemi, napisanemi dla drugiego płynu; otrzymamy:

$$(14a) \qquad -p_x + \alpha = 0; \qquad -p'_x - \alpha = 0; \qquad (15a)$$

$$(14b) \qquad -p_y + \beta = 0; \qquad -p'_y - \beta = 0; \qquad (15b)$$

$$(14c) \qquad -p_z + \gamma = 0; \qquad -p'_z - \gamma = 0; \qquad (15c)$$

$$(16a) \qquad -p_x + \varepsilon = 0; \qquad -p'_x - \varepsilon = 0; \qquad (17a)$$

$$(16b) \qquad -p_y + \varkappa = 0; \qquad -p'_y - \varkappa = 0; \qquad (17b)$$

$$(16c) \qquad -p_z + \lambda = 0; \qquad -p'_z - \lambda = 0. \qquad (17c)$$

A zatem mamy w każdym punkcie powierzchni Σ:

$$(18) \qquad p'_x = -p_x; \qquad p'_y = -p_y; \qquad p'_z = -p_z$$

podobnie jak dawniej; lecz obecnie ciśnienia te nie są już (wogóle mówiąc) skierowane normalnie do elementu, na który działają. Ciśnienia, działające na elementy dS i dS' nie są również, wogóle mówiąc, skierowane do nich normalnie w obecnym przypadku.

§ 11. Zakończymy niniejszą pracę przykładem, który posłuży za ilustracyę poprzedniej ogólnej teoryi. Wyobraźmy sobie na otwartem powietrzu płynący strumień wody; przypuśćmy, iż opływa on kawałek

www.rcin.org.pl

lodu, który nurza się w nim częścią swej powierzchni. Lód ma być w spoczynku, ruch wody ma być, przypuśćmy, ruchem „trwałym", zatem potencyał prędkości nie może zawierać czasu wyraźnie. Zwracamy uwagę na dwa punkty, M i M', które wybieramy w sposób następujący. Pierwszy punkt, M, wybieramy na swobodnej powierzchni wody, w odległości od lodu, która, biorąc bezwzględnie, nie jest znaczna, jednak zarazem dostatecznie jest wielka, ażeby wolno było zaniedbać zupełnie, w punkcie M, wpływ sił adhezyjnych, czynnych na granicy zetknięcia pomiędzy lodem a wodą. Punkt drugi, M', obieramy na powierzchni swobodnej lodu, również niezbyt daleko od granicy zetknięcia z wodą. Ponieważ tedy punkty M i M' leżą we wzajemnem bezpośredniem sąsiedztwie, przeto możemy zaniedbać różnicę wartości potencyałów (Ψ i Ψ') siły ciężkości, utworzonych w tych miejscach. Oznaczając przez q prędkość płynięcia wody w punkcie M, mamy dalej

$$\text{w } M: E = \tfrac{1}{2} q^2; \qquad \text{w } M': E' = 0. \tag{1}$$

A zatem równanie (25) z § 8-go daje nam tutaj, jeśli p_0 oznacza ciśnienie normalne (atmosferyczne):

$$f - f' + p_0\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right) + \tfrac{1}{2} q^2 = 0. \tag{2}$$

Obliczmy temperaturę, przypuśćmy ϑ, jaka wypada z równania (2). Oznaczmy przez h i h' potencyał termodynamiczny zupełny wody i lodu, branych zawsze w jednostce masy, pod ciśnieniem stałem; a więc

$$h = f + \frac{p}{\rho}; \qquad h' = f' + \frac{p'}{\rho'}. \tag{3}$$

Niechaj będzie ϑ_0 temperatura bezwzględna, odpowiadająca temperaturze zera Celsyusza; w razie $q = 0$ mielibyśmy widocznie

$$h(\vartheta_0, p_0) - h'(\vartheta_0, p_0) = 0, \tag{4}$$

podczas gdy w obecnym przypadku jest, jak wskazuje (2),

$$h(\vartheta, p_0) - h'(\vartheta, p_0) + \tfrac{1}{2} q^2 = 0. \tag{5}$$

Owóż, jeśli σ i σ' oznaczają wartości entropii jednostki masy wody i lodu, obliczone na 0° C. i ciśnienie atmosferyczne normalne, tedy mamy:

www.rcin.org.pl

(6) $$h(\vartheta, p_0) - h(\vartheta_0, p_0) = -(\vartheta - \vartheta_0)\,\sigma;$$

(7) $$h'(\vartheta, p_0) - h'(\vartheta_0, p_0) = -(\vartheta - \vartheta_0)\,\sigma'.$$

Z równań (6), (7), (4) i (5) otrzymujemy:

(8) $$\vartheta - \vartheta_0 = \frac{\vartheta_0\, q^2}{2\,L},$$

gdzie L jest ciepłem topliwości lodu w 0^0 C. i pod ciśnieniem normalnem. Stąd się okazuje, że, jeśli np. q wynosi 1 metr na sekundę, tedy $\vartheta - \vartheta_0$ wynosi około $^1/_{2000}{}^0$ C., zatem ϑ wynosi około $^1/_{2000}{}^0$ C. nad 0^0 C. Gdyby przewodnictwo wody było nadzwyczajnie znaczne, gdyby zatem ciepło, jakie wytwarza się skutkiem tarcia, dostarczane natychmiast topiącym się elementom lodu, było obracane na potrzeby tej reakcyi, tedy w przypadku, jaki wyobraziliśmy sobie, sama przez się musiałaby zapanowywać temperatura około $^1/_{2000}{}^0$ C. nad zerem w częściach wody i lodu, sąsiadujących z powierzchnią graniczną. Ponieważ, dzięki tarciu, ciepło ustawicznie się wytwarza, przeto proces topienia się nie mógłby ustawać; temperatura około $^1/_{2000}{}^0$ C. nad zerem nie jest więc bynajmniej właściwą temperaturą równowagi. Jest to tylko temperatura równowagi c z ę ś c i o w e j; mianowicie jedna część składowa reakcyi, część o d w r a c a l n a, dochodzi tam do równowagi.

www.rcin.org.pl