Archives of Mechanics • Archiwum Mechaniki Stosowanej • 28, 2, pp. 189–198, Warszawa 1976

Approximation du second ordre de la loi de comportement des fluides simples.
Lois classiques déduites de l'introduction d'un nouveau tenseur objectif

R. DROUOT et M. LUCIUS (PARIS)

DANS cette étude on utilise le théorème du retard de COLEMAN et NOLL pour obtenir différents types d'approximation de la loi de comportement des fluides simples de Noll. Les approximations fournies par cette méthode dépendent essentiellement du transport choisi et de la dérivation associée. Ceci permet de faire un parallèle entre les fluides du deuxième ordre classique et le modèle de HUILGOL qui apparaît alors dans un certain sens comme une approximation au deuxième ordre. Le transport associé est explicité dans le cas des écoulements viscométriques.

W pracy zaproponowano funkcjonalne równania konstytutywne typu cieczy prostej, w których dziedziną funkcjonału jest historia pewnego tensora obiektywnego, różniącego się od prawego tensora względnej deformacji Cauchy'ego-Greena. Stosując wyprowadzone przez COLEMANA i NOLLA twierdzenie o opóźnianiu, otrzymano odpowiednie przybliżenia n-tego rzędu, w szczególności równania cieczy newtonowskiej oraz cieczy drugiego rzędu. W tym ostatnim przypadku wyprowadzone równania są identyczne z równaniami podanymi przez HUILGOLA w r. 1968 oraz zapewniają stabilność rozwiązań dla przepływów ścinających. Pokazano również, że znane przypadki cieczy Rivlina-Ericksena i cieczy Reinera-Rivlina wynikają z zaproponowanych równań konstytutywnych.

В работе предложены функциональные определяющие уравнения типа простой жидкости, в которых областью определения функционала является история некоторого объективного тензора, отличающегося от правого тензора относительной деформации Коши-Грина. Применяя выведенную Колеманом и Ноллом теорему о запаздывании получены соответствующие приближения n-ого порядка, а в частности уравнения ньютоновской жидкости и жидкости второго порядка. В этом последнем случае выведенные уравнения совпадают с уравнениями приведенными Гюильголом в 1968 году, а также обеспечивают стабильность решений для сдвиговых течений. Показано тоже, что известные случаи жидкости Ривлина-Эриксена и жидкости Рейнера-Ривлина вытекают из предложенных определяющих уравнений.

Introduction

De nombreuses lois de comportement de fluides simples ont été proposées par différents auteurs. Pour les milieux appelés fluides du second ordre, certaines relations peuvent être déduites de la loi de comportement des fluides simples proposée par NOLL [1], par utilisation du théorème du retard (voir B. D. COLEMAN et W. NOLL [2]). Nous rappelons en particulier le cas des fluides newtoniens, de REINER-RIVLIN et de RIVLIN-ERICKSEN [3].

HUILGOL [4], dans un article publié en 1968, propose un autre modèle, pour un fluide incompressible du second ordre. L'auteur présente cette formulation en dehors de toute théorie des fluides simples, en n'utilisant qu'une forme de loi posée à priori et le principe d'objectivité matérielle. L'avantage essentiel de ce modèle est de ne pas présenter de phénomènes d'instabilité, mis en évidence par COLEMAN-DUFFIN-MIZEL [5], pour les fluides du second ordre classiques.

Nous nous proposons, dans cette étude, de replacer ces différentes lois de comportement comme autant de cas particuliers d'une relation fonctionelle générale, utilisant comme argument un nouveau tenseur objectif.

1. Introduction du tenseur objectif $\bar{\mathbf{B}}_t(\tau)$

Rappelons tout d'abord que pour comparer les configurations d'un milieu continu à deux instants τ et t (nous supposerons que $\tau < t$) on introduit la relation:

$$\boldsymbol{\xi} = \chi_t(\mathbf{x}, \tau), \tag{1.1}$$

où $\mathbf{x}$ désigne le vecteur position d'une particule M, à l'instant t, relativement à un repère lié à un référentiel $(\mathscr{R})$ et $\boldsymbol{\xi}$ le vecteur position de cette même particule à l'instant τ.

La fonction étant supposée différentiable relativement à $\mathbf{x}$ on définit

$$\mathbf{F}_t(\tau) = \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} \chi_t(\mathbf{x}, \tau) \tag{1.2}$$

appelée gradient des déplacements relatifs.

La décomposition polaire de F_t peut s'effectuer à tout instant suivant

$$\mathbf{F}_t(\tau) = \mathbf{R}_t(\tau)\mathbf{U}_t(\tau) \tag{1.3}$$

ou

$$\mathbf{F}_t(\tau) = \mathbf{V}_t(\tau)\mathbf{R}_t(\tau), \tag{1.4}$$

où $\mathbf{R}_t$ représente le tenseur des rotations relatives, $\mathbf{U}_t$ et $\mathbf{V}_t$ les extensions relatives droite ou gauche.

On peut ainsi définir

$$\mathbf{C}_t(\tau) = \mathbf{U}_t^2(\tau) = \mathbf{F}_t^T(\tau)\mathbf{F}_t(\tau), \tag{1.5}$$

$$\mathbf{B}_t(\tau) = \mathbf{V}_t^2(\tau) = \mathbf{F}_t(\tau)\mathbf{F}_t^T(\tau), \tag{1.6}$$

tenseurs relatifs droit où gauche de Cauchy-Green.

Il est intéressant de considérer l'expression de $\mathbf{F}_t$ et des grandeurs qui s'en déduisent lorsque l'on observe le mouvement dans un autre référentiel $(\mathscr{R}^*)$.

Dans un premier temps, écrivons la relation liant les positions $\boldsymbol{\xi}$ et $\boldsymbol{\xi}^*$ d'une même particule dans deux repères liés à $(\mathscr{R})$ et $(\mathscr{R}^*)$.

$$\boldsymbol{\xi}^* = \mathbf{c}(\tau) + Q(\tau)\boldsymbol{\xi}. \tag{1.7}$$

Un calcul simple [6] montre que:

$$\mathbf{F}_t^*(\tau) = Q(\tau)\mathbf{F}_t(\tau)Q^T(t), \tag{1.8}$$

$$\mathbf{C}_t^*(\tau) = Q(t)\mathbf{C}_t(\tau)Q^T(t), \tag{1.9}$$

$$\mathbf{B}_t^*(\tau) = Q(\tau)\mathbf{B}_t(\tau)Q^T(\tau). \tag{1.10}$$

L'expression (1.10) montre que si l'on veut conserver la même propriété que celle (1.9) pour un tenseur construit à partir de $\mathbf{B}_t$, il nous faut considérer le tenseur

$$\overline{\mathbf{B}}_t(\tau) = \mathbf{P}_t^{-1}(\tau)\mathbf{B}_t(\tau)\mathbf{P}_t(\tau), \tag{1.11}$$

$$P_t \text{ étant tel que } \begin{cases} 1) & \mathbf{P}_t^*(\tau) = \mathbf{Q}(\tau)\mathbf{P}_t(\tau)\mathbf{Q}^T(t), \\ 2) & \mathbf{P}_t(t) = \mathbf{1}. \end{cases} \tag{1.12}$$

Remarques. 1) Le tenseur $\overline{\mathbf{B}}_t$ défini par (1.11) est objectif si $P_t(\tau)$ vérifie (1.12).

2) L'objectivité du tenseur $\overline{\mathbf{B}}_t$ entraîne celle de ses dérivées successives par rapport à τ, prises pour $\tau = t$,

$$\frac{d^n\overline{\mathbf{B}}_t^*(\tau)}{d\tau^n} = Q(t)\,\frac{d^n\overline{B}_t(\tau)}{d\tau^n}\,Q^T(t), \tag{1.13}$$

relation vraie en particulier pour $\tau = t$.

2. Généralisation de la loi de comportement des fluides simples incompressibles

Rappelons tout d'abord la définition proposée par B. D. COLEMAN et W. NOLL [7] pour caractériser un fluide simple:

a) l'état des contraintes à l'instant considéré dépend de l'histoire du gradient de déplacements relatifs;

b) le fluide ne présente aucune configuration privilégiée. Ces deux conditions se trouvent réunies si l'on propose une relation fonctionelle de la forme:

$$\mathbf{T} = \mathop{\mathfrak{F}}_{s=0}^{\infty}\big(\overline{\mathbf{B}}(t-s)\big). \tag{2.1}$$

En effet, $\overline{\mathbf{B}}_t$ est un tenseur (symétrique) construit à partir de l'histoire du gradient de déplacements relatifs, et la condition b) résulte de la condition d'isotropie vérifiée par:

$$\mathbf{Q}\mathop{\mathfrak{F}}_{s=0}^{\infty}\big(\overline{\mathbf{B}}_t(t-s)\big)\mathbf{Q}^T = \mathop{\mathfrak{F}}_{s=0}^{\infty}\big(\mathbf{Q}\overline{\mathbf{B}}_t(t-s)\mathbf{Q}^T\big). \tag{2.2}$$

Cette identité provient en particulier du principe d'objectivité matérielle et de l'objectivité du tenseur $\overline{\mathbf{B}}_t$.

Puisque $\overline{\mathbf{B}}_t(t) = \mathbf{1}$, on peut remarquer que

$$\mathop{\mathfrak{F}}_{s=0}^{\infty}\big(\mathbf{1}(s)\big) = p\mathbf{1}, \quad \mathbf{1}(s) = \mathbf{1}\ \forall\, s \in \mathbb{R}^+, \tag{2.3}$$

où p désigne la pression hydrostatique. Ainsi, en définissant:

$$\mathop{\mathfrak{H}}_{s=0}^{\infty}\big(\overline{\mathbf{G}}(s)\big) = p\mathbf{1} + \mathop{\mathfrak{F}}_{s=0}^{\infty}\big(\overline{G}(s)+\mathbf{1}(s)\big) \tag{2.4}$$

on obtient

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \mathop{\mathfrak{H}}_{s=0}^{\infty}\big(\overline{\mathbf{G}}(s)\big), \quad \mathbf{G}(s) = \overline{\mathbf{B}}_t(t-s) - \mathbf{1}. \tag{2.5}$$

3. Approximation d'ordre n des fluides simples

Rappelons que B. D. COLEMAN et W. NOLL [2] ont démontré le résultat suivant (appelé théorème du retard):

— soit $\mathfrak{H}$ une fonctionnelle de mémoire de type $(h; n)$; supposons que l'argument g de $\mathfrak{H}$ parcourt un espace vectoriel normé $\mathscr{H}$ et prenne ses valeurs dans l'espace des tenseurs symétriques $\mathscr{S}$. Si $\mathfrak{H}$ prend ses valeurs dans un espace vectoriel normé $\mathscr{V}$, alors, pour chaque p-uple d'indice $(j_1, \dots, jp)$ tels que $1 \leqslant j_1 \leqslant \dots \leqslant j_p \leqslant n$, $j_1 + \dots + j_p \leqslant n$, il existe une forme p-linéaire bornée $\underset{j_1 \dots j_p}{\mathfrak{L}}$, dépendant de p tenseurs de $\mathscr{S}$, à valeurs dans $\mathscr{V}$, telle que pour tout $g \in \mathscr{H}$

$$\mathfrak{H}(g_\alpha) = \sum_{(j_1 \dots j_p)} \underset{j_1 \dots j_p}{\mathfrak{L}} (g_\alpha^{(j_1)}, \dots, g_\alpha^{(j_p)}) + \sigma(\alpha^n), \tag{3.1}$$

où

$$g_\alpha(s) = g(\alpha s), \quad g_\alpha^{(j)} = \alpha^j g^{(j)}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{3.2}$$

Ce théorème va permettre de définir une approximation au rang n de la fonctionnelle. Pour cela, nous pouvons remarquer que:

— pour tout $\mathscr{S} \in \mathbb{R}^+$, $\overline{\mathbf{G}}(s) \in \mathscr{S}$ (cette relation tient à la nature symétrique de $\mathbf{B}_t$),

— $\overline{\mathbf{G}}(0) = \mathbf{0}$. Cette relation provient de $\overline{\mathbf{B}}_t(t) = \mathbf{1}$ et est nécessaire pour l'appartenance de $\overline{\mathbf{G}}$ à un espace de type $\mathscr{H}$,

— $\overline{\mathbf{G}}$ est supposée p fois continûment dérivable pour $s = 0$,

— la vérification de l'applicabilité de ce théorème est immédiate quand on connait la nature des espaces $\mathscr{V}$ et $\mathscr{H}$ (voir [2]).

Nous pouvons alors considérer:

$$\overline{\mathbf{G}}_\alpha(s) = \overline{\mathbf{G}}(\alpha s) \text{ où } 0 < \alpha < 1. \tag{3.3}$$

$\overline{G}_\alpha$, ainsi définie, correspond du point de vue cinématique à une histoire essentiellement semblable à celle de $\overline{\mathbf{G}}$, mais qui se déroule plus ou moins "lentement" suivant la valeur de α.

Les tenseurs

$$\mathbf{B}_k = \frac{d^k}{d\tau^k} \overline{\mathbf{B}}_t(\tau)\bigg|_{\tau=t} = (-1)^k \overline{\mathbf{G}}^{(k)}, \quad k = 1, \dots, n \tag{3.4}$$

s'apparentent aux tenseurs de Rivlin-Ericksen définis par

$$\mathbf{A}_k = \frac{d^k}{d\tau^k} \mathbf{C}_t(\tau)\bigg|_{\tau=t}. \tag{3.5}$$

R e m a r q u e. Compte tenu de l'objectivité des tenseurs $\underset{t}{\overline{\mathbf{B}}}(\tau)$, les tenseurs $\mathbf{B}_k$ sont objectifs.

En effet, lors d'un changement de référentiel,

$$\overline{\mathbf{B}}_t^*(\tau) = \mathbf{Q}(t) \overline{\mathbf{B}}_t(\tau) \mathbf{Q}^T(t) \tag{3.6}$$

et donc

$$\frac{d^k \overline{\mathbf{B}}^*(\tau)}{d\tau^k} = \mathbf{Q}(t) \frac{d^k}{d\tau^k} \overline{\mathbf{B}}_t(\tau) \mathbf{Q}^T(t) \tag{3.7}$$

et en particulier pour $\tau = t$:

$$\mathbf{B}_k^* = \mathbf{Q}(t)\mathbf{B}_k\mathbf{Q}^T(t) \tag{3.8}$$

(la notation sous-entend la dépendance de $\mathbf{B}_k$ par rapport à t).

On peut, grâce à (3.4), définir les dérivées à l'origine de l'histoire retardée soient

$$\mathbf{B}_k^\alpha = \alpha^k\mathbf{B}_k = (-1)^k\overline{\mathbf{G}}_\alpha^{(k)}. \tag{3.9}$$

Ainsi la formule (3.1), appliquée à la loi de comportement des fluides simples (2.5) conduit à l'expression du tenseur des contraintes associé à l'histoire retardée

$$\mathbf{T}_\alpha = -p\mathbf{1} + \sum_{(j_1 \ldots j_p)} \underset{j_1 \ldots j_p}{\mathfrak{L}} (\mathbf{B}_{j_1}^\alpha, \ldots, \mathbf{B}_{j_p}^\alpha) + \sigma(\alpha^n). \tag{3.10}$$

L'isotropie de $\mathfrak{H}$ permet de montrer que les formes multilinéaires $\underset{j_1 \ldots j_p}{\mathfrak{L}}$ sont des fonctions isotropes de leurs arguments.

Cas particuliers

Le cas $n = 1$ présente un intérêt particulier. En effet, l'utilisation de l'isotropie de la fonctionnelle $\mathfrak{L}_1$ et des théorèmes de représentation des fonctionnelles isotropes conduit à:

$$\mathbf{T}_\alpha = -p\mathbf{1} + \frac{h}{2}\mathbf{B}_1^\alpha + \frac{\lambda}{4}\operatorname{tr}(\mathbf{B}_1^\alpha)\mathbf{1} + \sigma(\alpha). \tag{3.11}$$

Nous verrons par la suite que cette équation représente, dans tous les cas étudiés, celle des fluides newtoniens.

Pour $n = 2$, si le fluide est incompressible et si le tenseur $\mathbf{P}_t$ introduit dans (1.12) est orthogonal,

$$\operatorname{tr}(\mathbf{B}_1) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}_1) = \operatorname{tr}(2\mathbf{D}) = 0, \tag{3.12}$$

alors l'utilisation des mêmes théorèmes de représentation conduit à:

$$\mathbf{T}_\alpha = -\bar{p}\mathbf{1} + \frac{h}{2}\mathbf{B}_1^\alpha + \beta(\mathbf{B}_1^\alpha)^2 + \frac{\gamma}{2}B_2^\alpha + \sigma(\alpha^2), \tag{3.13}$$

où n, β, γ sont des constantes caractéristiques du milieu considéré, $\bar{p}$ diffère en général de p, puisque l'on englobe dans ce terme toutes les grandeurs scalaires multiples du tenseur unité.

Nous allons à présent montrer comment on peut, en particularisant le tenseur $\mathbf{P}_t$, retrouver dans les résultats précédents les lois classiques des fluides newtoniens et des fluides du second ordre.

4. Lois de comportement usuelles déduites des formulations précédentes

4.1. Fluides newtoniens

Rappelons que le tenseur $\mathbf{P}_t$ défini dans (1.13) doit satisfaire

$$\mathbf{P}_t(t) = \mathbf{1}, \quad \mathbf{P}_t^*(\tau) = \mathbf{Q}(\tau)\mathbf{P}_t(\tau)\mathbf{Q}^T(t) \tag{4.1}$$

(formule déduite du changement de référentiel).

Prenons $\mathbf{P}_t(\tau) = \mathbf{F}_t(\tau)$. Il est clair que les relations (4.1) sont satisfaites.

Alors

$$\bar{\mathbf{B}}_t(\tau) = \mathbf{F}_t^{-1}(\tau)\mathbf{B}_t(\tau)\mathbf{F}_t(\tau) = \mathbf{C}_t(\tau). \tag{4.2}$$

Ainsi

$$\bar{\mathbf{G}}(s) = \mathbf{C}_t(t-s)-\mathbf{1} \tag{4.3}$$

et donc

$$\mathbf{B}_1 = \left[\frac{d}{d\tau}\mathbf{C}_t(\tau)\right]_{\tau=t} = \mathbf{A}_1 = 2\mathbf{D}, \quad (\mathbf{C}_t(t) = \mathbf{1}). \tag{4.4}$$

La relation (3.11) donne:

$$\mathbf{T}_\alpha = -p\mathbf{1}+2\eta\mathbf{D}^\alpha+\lambda\,\mathrm{tr}(\mathbf{D}^\alpha)\mathbf{1}+\sigma(\alpha). \tag{4.5}$$

En négligeant les terms d'ordre α dans cette relation on obtient

$$\mathbf{T}_\alpha = -p\mathbf{1}+2\eta\mathbf{D}^\alpha+\lambda\,\mathrm{tr}(\mathbf{D}^\alpha)\mathbf{1}, \tag{4.6}$$

c'est à dire la loi de comportement des fluides newtoniens.

4.2. Fluides de Rivlin-Ericksen ou de Reiner-Rivlin

Toujours en utilisant $\mathbf{P}_t(\tau) = \mathbf{F}_t(\tau)$

$$\mathbf{B}_2 = \left[\frac{d^2}{d\tau^2}\mathbf{C}_t(\tau)\right]_{\tau=t} = 2(\mathbf{A}_2), \tag{4.7}$$

où $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ sont les deux premiers tenseurs de Rivlin-Ericksen définis dans (3.5).

Ainsi la relation (3.13) conduit à:

$$\mathbf{T}_\alpha = -\bar{p}\mathbf{1}+\eta\mathbf{A}_1^\alpha+\beta(\mathbf{A}_1^\alpha)^2+\gamma(\mathbf{A}_2^\alpha)+\sigma(\alpha^2). \tag{4.8}$$

Si l'on néglige les termes du second ordre en α, dans cette expression, on obtient:

$$\mathbf{T}_\alpha = -\bar{p}\mathbf{1}+\eta\mathbf{A}_1^\alpha+\beta(\mathbf{A}_1^\alpha)^2+\gamma\mathbf{A}_2^\alpha, \tag{4,9}$$

c'est à dire la relation classique des fluides du second ordre.

La distinction entre fluides de Reiner-Rivlin et de Rivlin-Ericksen se fait simplement suivant que γ est nul ou non.

4.3. Fluides de Huilgol en écoulements viscométriques

Le problème pour le fluide de Huilgol est de définir le tenseur $\mathbf{P}_t(\tau)$ qui vérifie (1.12) et qui soit distinct des tenseurs $\mathbf{F}_t(\tau)$ et $\mathbf{R}_t(\tau)$ qui les conduisent aux tenseurs de Rivlin-Ericksen.

Considérons les écoulements viscométriques ou plus généralement les mouvements à l'histoire de déformation constante [14], p. 438. Pour de tels mouvements:

$$\mathbf{F}_0(\tau) = \mathbf{K}(\tau)e^{k(\tau)\mathbf{N}_0} \tag{4.10}$$

$\mathbf{K}(\tau)$ tenseur orthogonal, $k(\tau)$ une fonction scalaire de τ, $\mathbf{N}_0$ tenseur constant tel que $|\mathbf{N}_0| = 1$.

Alors

$$\mathbf{F}_t(\tau) = \mathbf{K}(\tau)\mathbf{K}^T(t)e^{[k(\tau)-k(t)]}\mathbf{N}. \tag{4.11}$$

En posant

$$\mathbf{N} = \mathbf{K}(t)\mathbf{N}_0\mathbf{K}^T(t) \tag{4.12}$$

le tenseur gradient des vitesses s'écrit

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{K}}\mathbf{K}^T + k'(t)\mathbf{N} \tag{4.13}$$

$k'(t) = \dfrac{dk}{dt}(t)$, soit

$$L - L^T = 2\dot{\mathbf{K}}\mathbf{K}^T + k'(\mathbf{N}-\mathbf{N}^T). \tag{4.14}$$

Si nous considérons la quantité $\mathbf{K}(\tau)\mathbf{K}^T(t)$, elle vérifie les propriétés (1.12). En effet lors d'un changement de référentiel défini par le tenseur orthogonal $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{K}^*(\tau)\mathbf{K}^{*T}(t) = \mathbf{Q}(\tau)\mathbf{K}(\tau)\mathbf{K}^T(t)\mathbf{Q}^T(t)$$

et d'autre part

$$\mathbf{K}(t)\mathbf{K}^T(t) = \mathbf{I}.$$

Ceci suggére le choix pour

$$P_t(\tau) = K(\tau)K^T(t). \tag{4.15}$$

Dans le cas d'écoulements viscométriques stationnaires ou non, $2\dot{\mathbf{K}}\mathbf{K}^T$ est bien différent de $(\mathbf{L}-\mathbf{L}^T)$ et de $\mathbf{L}$ et les dérivées $\left.\dfrac{d^n\overline{B}_t(\tau)}{d\tau^n}\right|_{\tau=t}$ sont pour $n \geqslant 2$ différentes des tenseurs de Rivlin-Ericksen.

En effet

$$\mathbf{B}_1 = \dot{\mathbf{P}}_t^T(t) + \dot{\mathbf{P}}_t(t) + \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1. \tag{4.16}$$

Le tenseur dérivé premier de $\overline{\mathbf{B}}_t(\tau)$, calculé pour $\tau = t$, s'identifie donc au premier tenseur de Rivlin-Ericksen. Il y aura donc identité entre l'approximation au l[er] ordre donnée dans (4.6) avec celle que l'on pourrait déduire de l'utilisation de ce tenseur $\mathbf{B}_1$.

Par contre

$$\mathbf{B}_2 = \left[\frac{d^2}{d\tau^2}\overline{\mathbf{B}}_t(\tau)\right]_{\tau=t} = \mathbf{A}_2 + 2\mathbf{L}\mathbf{L}^T - 2\mathbf{L}^T\mathbf{L} + 2\mathbf{A}_1\dot{\mathbf{P}}_t - 2\dot{\mathbf{P}}_t\mathbf{A}_1, \tag{4.17}$$

où $\mathbf{L}$ représente le tenseur des taux de déformation. Dans ce cas $\dot{\mathbf{P}}_t(t) = -\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$; $\mathbf{B}_2$ s'identifie ainsi au tenseur introduit par HUILGOL[4].

La relation (3.13) s'écrit dans ce cas

$$\mathbf{T}_\alpha = -\bar{p}\mathbf{1} + \eta\mathbf{A}_1^\alpha + \beta(\mathbf{A}_1^\alpha)^2 + \frac{\gamma}{2}\mathbf{B}_2^\alpha + o(\alpha^2), \tag{4.18}$$

c'est à dire, en nègligeant les termes du second ordre en

$$\mathbf{T}_\alpha = -\bar{p}\mathbf{1}+\eta\mathbf{A}_1^\alpha+\beta(\mathbf{A}_1^\alpha)^2+\frac{\gamma}{2}\mathbf{B}_2^\alpha.$$

On obtient ainsi une relation identique à celle proposée par HUILGOL.

En conclusion, la même formulation et le même degré d'approximation nous permettent de retrouver les deux cas particuliers des fluides de Rivlin-Ericksen et de Huilgol, dont les origines semblaient fort différentes.

Remarques. 1) Pour ces écoulements viscométriques, $\mathbf{Z}(t)$ introduit dans [4] coincide avec $\dot{K}K^T$.

De façon générale, peut-on envisager d'écrire le tenseur

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2 \quad \text{où} \quad \mathbf{W} = \mathbf{L}-\mathbf{L}^T = \mathbf{W}_1+\mathbf{W}_2,$$

$\mathbf{W}_1$ étant tel que lors d'un changement différentiel $\mathbf{W}_1^* = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T+\mathbf{Q}\mathbf{W}_1\mathbf{Q}^T$?

De la méme façon peut-on dans un écoulement quelconque mettre en évidence dans le tenseur $\mathbf{R}_t(\tau)$ de la décomposition polaire de $\mathbf{F}_t(\tau)$ une partie $\mathbf{P}_t(\tau)$ qui provient d'un mouvement rigide du voisinage de la particule considérée et qui est indépendante de la rotation due à la déformation de ce même voisinage?

Ce problème ouvert, signalé par NOLL dans [14] "A rational basis for specifying the change of prefered reference configuration in time remains to be found", est en cours d'étude.

2) On peut brièvement rappeler ici les raisons essentielles qui peuvent conduire à préférer le type d'approximation c).

Toutes les lois classiques des fluides incompressibles du second ordre, utilisées par LODGE [8], WHITE et METZER [9] ou RIVLIN-ERICKSEN, présentent des phénomènes d'instabilité [4].

L'équivalence donnée par WALTERS [10] entre fluides d'OLROYD [11] et RIVLIN-ERICKSEN, permet d'affirmer, comme l'ont montré TANNER et SIMMONS[12] que le fluide d'OLROYD présente les mêmes inconvénients.

La loi de type différentiel proposée par HUILGOL, et qui conduit à une équation aux dérivées partielles

$$\eta_0\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^3 V}{\partial x^2 t} = \varrho\frac{\partial V}{\partial t}, \quad \nu > 0$$

pour un écoulement de cisaillement simple, ne présente pas de telles instabilités. Une étude plus générale a d'ailleurs été développée par R. DROUOT [13] pour un tel fluide, en écoulement de Couette, soumis à des conditions initiales et aux limites irrégulières. Les résultats obtenus prouvent que ce fluide conserve son caractère de stabilité. Par ailleurs, un tel matériau présente toujours des effets non linéaires, comme les fluides du second ordre classiques avec, en particulier, l'apparition de contraintes normales.

5. Conclusion

Le résultat essentiel de ce mémoire tient dans la mise en évidence d'une origine commune à des lois de comportement de fluides non newtoniens approximées au second ordre, lois présentées jusqu'alors de manière sensiblement différente. Ceci a pu être réalisé par l'introduction d'un tenseur objectif $(\overline{\mathbf{B}}_t)$, construit à partir du tenseur relatif gauche de Cauchy-Green et qui ne présente pas, quant à lui, ce caractère d'objectivité.

Remarques. 1. L'étude qui précède a été volontairement limitée aux schémas classiques. Il est facile d'imaginer que d'autres modèles de lois de comportement de fluides du second ordre peuvent être déduites de l'approximation (3.13). Nous n'avons en effet particularisé le tenseur $\mathbf{P}_t$ que de deux manières différentes. On doit toutefois s'attendre à trouver des relations équivalentes. Cette conjecture sous-entend que les différences dans les lois de comportement ne pourraient être considérées qu'en comparant les termes de même ordre d'approximation (et en particulier, après avoir négligé les termes d'ordre supérieur à α^2; une telle situation pourrait se présenter pour certains tenseurs $\mathbf{P}_t$).

2. Notre travail s'est ici limité aux approximations déduites de l'utilisation du théorème du retard. B. D. Coleman et W. Noll [7] ont proposé d'autres types d'approximation, comme celles de la viscoélasticité linéaire finie, basée sur l'introduction d'espaces fonctionnels contenant les histoires de déformations relatives et sur des notions de Frechet-différentiabilité pour les fonctionnelles matérielles. Une étude intéressante de stabilité pourrait être proposée sur l'approximation du 1[er] ordre conduisant à

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \int_0^\infty m(s)\overline{\mathbf{G}}(s)\,ds + \Big[\int_0^\infty 1(s)\,\mathrm{tr}\big(\overline{\mathbf{G}}(s)\big)\,ds\Big]\mathbf{1},$$

où $\overline{\mathbf{G}}$ représenterait l'histoire $\overline{\mathbf{G}}(s) = \overline{\mathbf{B}}_t(t-s)-\mathbf{1}$ avec

$$\overline{B}_t(\tau) = \mathbf{P}_t^T(\tau)\mathbf{B}_t(\tau)\mathbf{P}_t(\tau),$$

$\mathbf{P}_t$ étant le tenseur orthogonal défini dans (4.3).

Bibliographie

1. W. Noll, *A mathematical theory of the mechanical behaviour of continuous media*, Arch. Ration. Mechanics and Analysis, 2, 197, 1958.
2. B. D. Coleman and W. Noll, *An approximation theorem for functionals, with applications in continuum mechanics*, Arch. Ration. Mechanics and Analysis, 5, 355, 1960.
3. R. S. Rivlin and J. L. Ericksen, *Stress-deformation relations for isotropic materials*, Journal Ration. Mechanics and Analysis, 4, 323, 1955.
4. R. R. Huilgol, *A second-order fluid of the differential type*, Int. Journal of Non-Linear Analysis, 3, 471, 1968.
5. B. D. Coleman, R. J. Duffin and V. J. Mizel, *Instability, uniqueness and non existence theorems for the equation $U_t = U_{xx} - U_{xtx}$ on a strip*, Arch. Ration. Mechanics and Analysis, 19, 100, 1965.
6. P. Germain, *Cours de mécanique des milieux continus*; 94, Masson, 1973.
7. B. D. Coleman and W. Noll, *Simple fluids with fading memory*, Proc. Int. Symp. on Second-order Effects in Elasticity, Plasticity and Fluid Dynamics, HAIFA 1962.
8. Lodge, *Elastic liquids*, Academic Press, 1964.
9. J. L. White and A. B. Metzer, *Constitutive equations for viscoelastic fluids with applications to rapid external flows*, A. I. Ch. E. Journal, 11, 324, 1965.
10. K. Walters, *Relation between Coleman-Noll, Rivlin-Ericksen, Green-Rivlin and Olroyd fluids*, Z. A. M.P. 21, 592, 1970.

11. J. G. OLDROYD, *Non newtonian effects in steady motion of source idealized elastics-viscous liquids*, Proc. Royal Soc., A 245, 278. 1958.
12. R. I. TANNER and J. M. SIMMONS, *An instability in source rate-type viscoelastic constitutive equations*, Chem. Eng. Science, 22, 1079, 1967.
13. R. DROUOT, *Sur l'écoulement de Couette instationnaire d'un fluide de Huilgol*, Arch. Mech., 1974.
14. C. TRUESDELL and W. NOLL, *The non-linear field theories of mechanics*, Handbuch der Physik, Sec. 107, Springer-Verlag, 1965.

LABORATOIRE ASSOCIE DE MECANIQUE THEORIQUE (LA 229)
UNIVERSITE DE PARIS VI
et
LABORATOIRE D'ENERGETIQUE ET DE MECANIQUE THEORIQUE
ET APPLIQUEE, NANCY

Reçu 6, 6, 1975.