

4.43 — konstrukcja prętowa

W. Koteln, M. Kleiber

STATECZNOŚĆ I WRAZLIWOŚĆ  
NA IMPERFEKCJE PEWNEJ PRZESTRZENNEJ  
KONSTRUKCJI PRĘTOWEJ

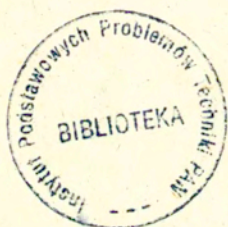
29 / 1983

P. 269a



WARSZAWA 1983

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 14 marca 1983 r.



57008



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 150 egz. Ark.wyd. 1 . Ark. druk. 1,5.

Oddano do drukarni w czerwcu 1983 r.

Nr zamówienia 442/83 M-13 .

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul.Śniadeckich 8

Władysław Kotuła  
Politechnika Lubelska  
Michał Kleiber  
Zakład Teorii Konstrukcji

## STATECZNOŚĆ I WRAŻLIWOŚĆ NA IMPERFEKCJE PEWNEJ PRZESTRZENNEJ KONSTRUKCJI PRĘTOWEJ

### 1. WSTĘP

Zagadnienia stateczności konstrukcji oraz ich wrażliwości na imperfekcje są niewątpliwie jednym z najaktualniejszych problemów współczesnej mechaniki. Wynika to zarówno z atrakcyjności poznawczej takich zagadnień jak i z pobudek czysto praktycznych.

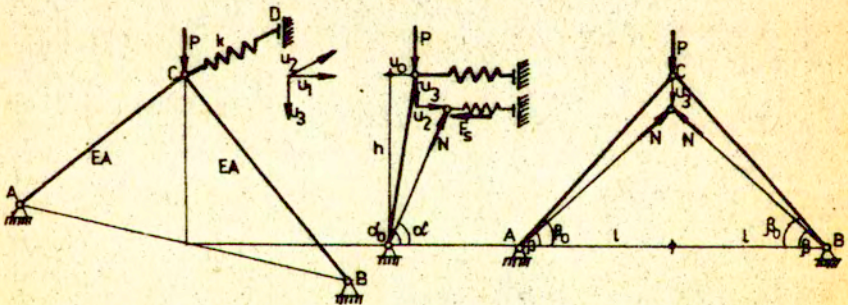
Dostępne wyniki wielu eksperymentów oraz liczne usterki wykonawstwa [4] wykazują, że konstrukcje nie są realizowane przy ścisłym zachowaniu opisu geometrii proponowanego przez projektantów. Stwarza to konieczność badania wpływu niedokładności wykonania na ich zachowanie.

Pełna analiza stateczności nawet najprostszych układów wymaga częstokroć rozważań wykraczających poza wyrobioną na bazie problemów liniowych intuicję inżynierską, korzysta ponadto w istotny sposób z aparatu formalnego mechaniki nieliniowej. Prowadzi to do znacznych trudności zarówno w sformułowaniu jak i przy próbach uzyskiwania efektywnych rozwiązań. Trudności te powodują, że specjalnego znaczenia nabierają studia dokonywane na odpowiednio dobranych układach modelowych, pozwalających na jakościowe zrozumienie zachodzących zjawisk oraz odpowiednie formułowanie i rozwiązywanie zagadnień bardziej złożonych.

Niniejsza praca służy zilustrowaniu pojęć teorii stateczności konstrukcji na przykładzie bardzo prostego, modelowego układu dwóch prętów oraz sprężyny /rys.1/ deformowanych w przestrzeni pod wpływem działania statycznego, konserwatywnego obciążenia skupionego. Celem jej jest ukazanie kompletnych wyników dotyczących stateczności i wrażliwości na imperfekcję na przykładzie, który mimo swej prostej postaci stanowi bardzo dobrą jakościową idealizację wielu skomplikowanych zagadnień z zakresu teorii powłok. Przykład ten ilustruje również możliwość bezpośredniego określenia krzywej charakteryzującej wrażliwość konstrukcji na imperfekcję, podanej w ogólnej, parametrycznej postaci przez Koitera [6].

## 2. ROZWIĄZANIE ANALITYCZNE

### 2.1. Równania równowagi



Rys.1 układ w stanie początkowym oraz po deformacji.

Z warunków równowagi przy wykorzystaniu symetrii otrzymujemy:

$$(2.1) \quad N = P/2 \sin \alpha \sin \beta \quad , \quad F_5 = P \cot \alpha \quad .$$

W przyjętym układzie współrzędnych  $(u_1, u_2, u_3)$  dla stanu zdeformowanego możemy zapisać

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= (h-u_3) / \sqrt{(u_0+u_2)^2 + (h-u_3)^2} \quad , \\ (2.2) \quad \cos \alpha &= (u_0+u_2) / \sqrt{(u_0+u_2)^2 + (h-u_3)^2} \quad , \\ \sin \beta &= \sqrt{(u_0+u_2)^2 + (h-u_3)^2} / L' \quad , \end{aligned}$$

gdzie:

$$L' = \sqrt{l^2 + (u_0+u_2)^2 + (h-u_3)^2} \quad .$$

Prawo Hooke'a dla sprężystego materiału prętów ma postać

$$(2.3) \quad \varepsilon = \frac{N}{EA} = \frac{L_0 - L'}{L_0} \quad ,$$

gdzie:

$$L_0 = \sqrt{l^2 + h^2 + u_0^2} \quad .$$

Na podstawie zależności (1), (2) i (3) otrzymujemy:

$$(2.4) \quad P = 2EA \left( \frac{1}{L'} - \frac{1}{L_0} \right) (h-u_3)$$

Jeżeli przyjmiemy w układzie sprężynę o charakterystyce liniowej

$$(2.5) \quad F_s = k u_2$$

wówczas równanie (1)<sub>2</sub> przyjmie postać

$$(2.6) \quad P = \frac{k u_2 (h-u_3)}{u_0 + u_2}$$

Wykorzystując (4) i (6) otrzymujemy związek między  $u_2$  i  $u_3$  jako

$$(2.7) \quad (h-u_3)^2 = \left[ \frac{k u_2}{2EA(u_0+u_2)} + \frac{1}{L_0} \right]^2 - [l^2 + (u_0+u_2)^2]$$

Związek ten wraz z równaniem (6) pozwala wyznaczyć ścieżkę równowagi w przestrzeni przemieszczeniowo-obciążeniowej  $(P, u_2, u_3)$ .

## 2.2. Analiza rozwiązania

Rozpatrzmy najpierw układ bez imperfekcji ( $u_0 = 0$ ). Zależność (6) możemy wówczas wyrazić w postaci

$$(2.8) \quad P = k(h - u_3)$$

W układzie współrzędnych  $P-u_3$  jest to prosta /rys.2/ o współczynniku kierunkowym równym  $k$  /stała sprężyny/. Prosta ta reprezentuje tzw. wtórną drogę równowagi układu.

Dla  $u_3 = 0$  znajdujemy

$$(2.9) \quad P_{okr} = kh$$

tj. wartość siły odpowiadającą tzw. początkowej stateczności rozpatrywanego układu.

Jeżeli w równaniu (4) przyjmiemy  $u_0 = 0$

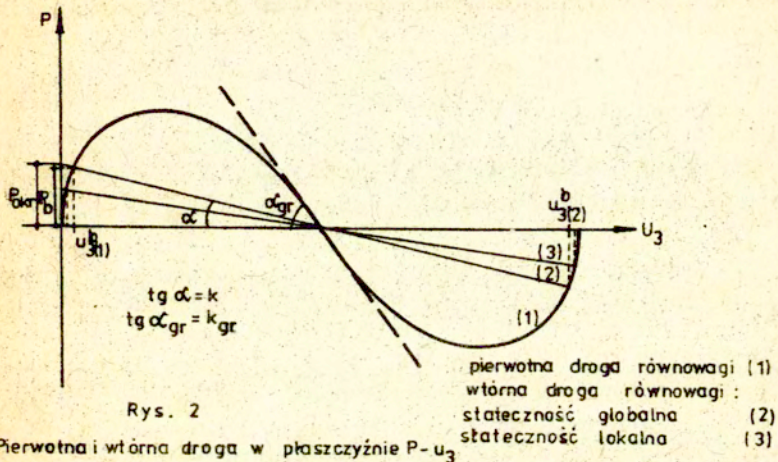
$$(2.10) \quad L' = L'_1 = \sqrt{l^2 + (h - u_3)^2},$$

oraz

$$(2.11) \quad L_0 = L_{01} = \sqrt{l^2 + h^2}$$

wówczas uzyskamy pierwotną drogę równowagi w kształcie odwróconej litery S /Rys.2/. Pierwotna i wtórna droga równowagi wyznaczają punkt bifurkacji, w którym możliwe jest rozdwojenie stanu równowagi. Obciążenie bifurkacyjne związane z tym punktem wyznaczone na podstawie zależności (4), (9) i (11) określone jest wzorem (12):

$$(2.12) \quad P_b = k \left[ \left( \frac{k}{2EA} + \frac{1}{L_{01}} \right)^2 - l^2 \right]^{1/2}$$



Na podstawie (12) możemy określić przedział wartości stałej sprężyny  $k$  dla których istnieją rozwiązania bifurkacyjne:

$$(2.13) \quad k_{1gr} < k < k_{2gr} \quad ,$$

gdzie:

$$k_{1gr} = 0 \quad ,$$

$$k_{2gr} = 2EA \left( \frac{1}{l} - \frac{1}{L_{01}} \right) .$$

W rozpatrywanym przypadku możemy stwierdzić, że układ posiada niesymetryczną charakterystykę wyboyceniową przy czym stany niestateczne zawarte są w przedziale:

$$(2.14) \quad u_{3(1)}^b < u < u_{3(2)}^b \quad ,$$

gdzie:

$$u_{3(1)}^b = h - \left[ \left( \frac{k}{2EA} + \frac{1}{L_{01}} \right)^2 - l^2 \right]^{1/2},$$

$$u_{3(2)}^b = h + \left[ \left( \frac{k}{2EA} + \frac{1}{L_{01}} \right)^2 - l^2 \right]^{1/2}.$$

Dotychczasowe rozważania dotyczyły bifurkacji i możliwości utraty stateczności konstrukcji w sensie globalnym. Możemy również określić punkt bifurkacji odpowiadający lokalnej utracie stateczności /wyboczenie prętów/. W tym celu w równaniu (1)<sub>1</sub> przyjmijmy

$$(2.15) \quad N_E = \frac{\pi^2 E J}{(L_1)^2}$$

/co odpowiada istnieniu siły Eulera w prętach/.  
Stąd

$$(2.16) \quad P_E = \frac{2\pi^2 E J}{(L_1)^3} (h - u_3)$$

otrzymaliśmy w ten sposób wtórną drogę równowagi dla lokalnej utraty stateczności /rys.2/.

Po osiągnięciu punktu bifurkacji dalszy przyrost obciążenia powoduje w konstrukcji z niesymetryczną charakterystyką wyboczeniową przeskok do nowej konfiguracji równowagi. W konstrukcji rzeczywistej punkty bifurkacji przechodzą w punkty graniczne [ 5 ] /obciążenie krytyczne -  $P_S$ /. Przy obciążeniu  $P > P_S$  nastąpi również przeskok do nowej konfiguracji i pod tym względem konstrukcja rzeczywista zachowuje się podobnie jak idealna, o ile imperfekcje nie są zbyt duże, gdyż wówczas w charakterystyce wyboczeniowej może wystąpić punkt przegięcia [ 6 ].

W rozpatrywanym przypadku droga równowagi układu z niedokładnością asymptotycznie zbliża się do pierwotnej drogi równowagi oraz do pewnej krzywej leżącej w płaszczyźnie równoległej do osi  $u_2$  i zawierającej wtórną drogę równowagi układu idealnego. Płaszczyzna ta opisana równaniem:



$$(2.17) \quad \frac{P}{k} = h - u_3$$

daje w wyniku przecięcie z powierzchnią (4) /dla  $u_0 = 0$ / rzut na płaszczyznę  $u_2$  i  $u_3$  w postaci (18)

$$(2.18) \quad k = 2EA \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{L_0} \right)$$

Jest to równanie okręgu

$$(2.19) \quad u_2^2 + (h - u_3)^2 = r^2 ,$$

gdzie:

$$r^2 = \left[ 1 / \left( \frac{k}{2EA} + \frac{1}{L_0} \right) \right]^2 \cdot \frac{1}{4}$$

W przestrzeni przemieszczeniowo-obciążeniowej jest to elipsa symetryczna względem płaszczyzny  $P-u_3$ . Symetria ta zostaje zakłócona w przypadku sprężyny o charakterystyce nieliniowej, tj. wówczas gdy

$$k = a + b u_2$$

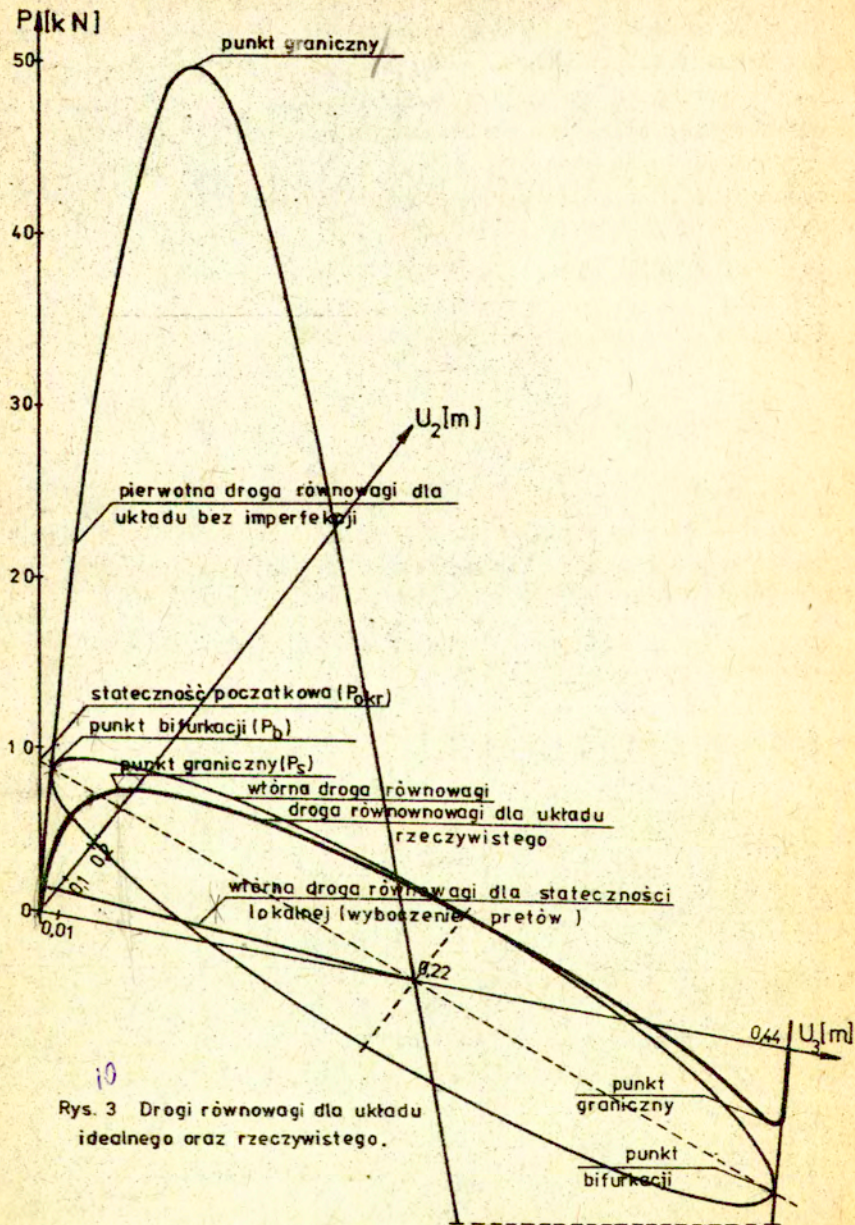
Wyniki analizy sprężystej rozpatrywanego układu przedstawiono na rysunku nr 3 dla

$$E = 2,1 \cdot 10^{11} [\text{N/m}^2] , \quad k = 4 \cdot 10^4 [\text{N/m}] , \quad A = 6 \cdot 10^{-4} [\text{m}^2] ,$$

$$h = 0,22 [\text{m}] , \quad l = 2,1888618 [\text{m}] , \quad u_0 = 0,022 [\text{m}] .$$

W pracy rozpatrzono również układ przy założeniu materiału sprężysto-plastycznego z kinematycznym wzmocnieniem dla prętów przy sprężystym zachowaniu się sprężyny. W analizie przyjęto następujące wartości szczegółowe:

$$\frac{E_1}{E} = 0,01 , \quad \tilde{\sigma}_0 = 3,5 \cdot 10^7 [\text{N/m}^2] .$$



10  
Rys. 3 Drogi równowagi dla układu idealnego oraz rzeczywistego.

Wyniki przedstawiono graficznie na rys.4, na którym pokazano drogę równowagi w rzucie na płaszczyźnie P-u<sub>3</sub> oraz rozwój odkształceń plastycznych, a także wielkość siły osiowej w prętach w trakcie deformacji układu. Pojawienie się uplastycznienia powoduje przejście układu do stanu niestatecznego. Dopiero w procesie sprężystego odciążania po osiągnięciu przez obciążenie zewnętrzne maksimum lokalnego /na odcinku B-C/ konstrukcja przyjmuje konfigurację stateczną. W konsekwencji dalszego odciążania sprężystego uzyskujemy rozciąganie w prętach przy ujemnej składowej u<sub>2</sub> stanu przemieszczenia. Odkształcenia plastyczne zanikają dopiero po osiągnięciu punktu F, który odpowiada deformacji: u<sub>3</sub> < - 2h; u<sub>2</sub> < 0.

### 3. WRAZLIWOŚĆ NA IMPERFEKCJE

#### 3.1. Dobór funkcji określającej wrażliwość na imperfekcje.

Analizowany układ posiada niesymetryczną charakterystykę wybocheniową i jest konstrukcją wrażliwą na niedokładności.  $\frac{P_s}{P_b}$  Dla konstrukcji tej wyznaczono w niniejszej pracy stosunek  $\frac{P_s}{P_b}$  przy różnych wielkościach imperfekcji dla stałej sprężyny k=40 oraz k = 100. Wyniki zestawiono w tabeli nr 1. Należy zauważyć, że  $\frac{P_s}{P_b}$  nie zależy w tym wypadku od stałej sprężyny k.

Na podstawie uzyskanych wyników określić można zależność

$$u_0 = f(P_s/P_b).$$

1. W przypadku funkcji kwadratowej poprowadzonej przez punkty A, B i F otrzymujemy:

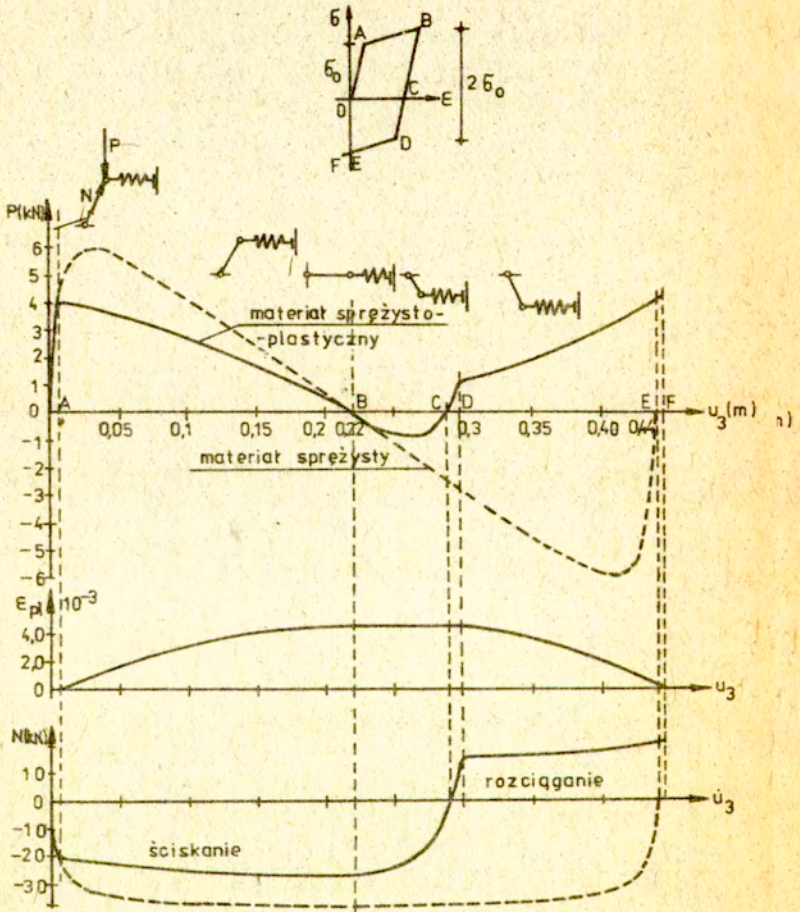
$$(3.1) \quad u_0 = a_1(1 - P_s/P_b)^2 + b_1(1 - P_s/P_b)$$

gdzie:

$$a_1 = 0,2076609, \quad b_1 = 0,0140467$$

2. W przypadku wielomianu czwartego stopnia /przechodzącego przez punkty A, B, D, G/:

$$(3.2) \quad u_0 = a_2(1 - P_s/P_b)^4 + b_2(1 - P_s/P_b)^3 + c_2(1 - P_s/P_b)^2 + d_2(1 - P_s/P_b)$$



Rys 4 Zachowanie się układu przy sprężysto-  
-plastycznym materiale prętów.

gdzie:

$$\begin{aligned} a_2 &= 4,1014794, & b_2 &= 2,0609908, \\ c_2 &= 0,4643381, & d_2 &= 0,0087295 \end{aligned}$$

Zależności te w praktyczny i łatwy sposób pozwalają określić parametr obciążenia krytycznego układu  $P_s$  przy znanych wielkościach niedokładności oraz obciążenia bifurkacyjnego.

Tabela 1. WRAŻLIWOŚĆ KONSTRUKCJI NA IMPERFEKCJE

Punkt	$u_0$	$k = 40 \text{ [kN/m]}$		$k = 100 \text{ [kN/m]}$	
		$P_s \cdot 10^4 \text{ [N]}$	$P_s / P_b$	$P_s \cdot 10^4 \text{ [N]}$	$P_s / P_b$
A	0.000	$P_b = 0,8487308$	1	$P_b = 1,999032$	1
B	0.0005	0,8268549	0,9742252	1,947726	0,9743346
C	0.001	0,8141142	0,9592136	1,9180347	0,9594814
D	0.003	0,7773137	0,9158542	1,8321431	0,9165151
E	0.008	0,7136581	0,8408533	1,683436	0,8421255
F	0.015	0,6475286	0,7629375	1,5288387	0,7647895
G	0.022	0,5940361	0,699911	1,4037789	0,7022293
H	0.03	0,5422822	0,638933	1,2828163	0,6417187
I	0.04	0,487259	0,574103	1,154324	0,5774414

### 3.2. Porównanie wyników z teorią Koitera.

Wg teorii Koitera dla konstrukcji o charakterystyce niesymetrycznej zależność  $u_0 = f\left(\frac{P_s}{P_b}\right)$  ma postać

$$(3.3) \quad (1 - P_s / P_b)^2 + 4 a u_0 P_s / P_b = 0$$

Wartość "a" dla analizowanego układu uzyskać można z warunku jednakowej krzywizny funkcji wyznaczonej z równania (1) lub (2) oraz funkcji (3). W przypadku funkcji kwadratowej otrzymujemy wzór:

$$(3.4) \quad a = -1 / (4 a_1)$$

zaś dla wielomianu czwartego stopnia wzór

$$(3.5) \quad a = -1/(4c_2)$$

Wyniki przedstawiono graficznie na rys.5 na którym krzywa Nr I przedstawia uzyskaną wartość  $\frac{S}{P}$  natomiast krzywe Nr II i III zależności  $u_0 = f\left(\frac{S}{P}\right)$  wg Koitefa dla "a" wyznaczonego odpowiednio z równań (4) i (5).

#### 4. METODA ENERGETYCZNA

##### 4.1. Równania równowagi

Rozpatrzmy energię potencjalną układu

$$(4.1) \quad V = c\Delta L^2 + k u_2^2/2 - P u_3 \quad ,$$

gdzie:

$$c = EA/L_0 \quad , \quad \Delta L = L_0 - L'$$

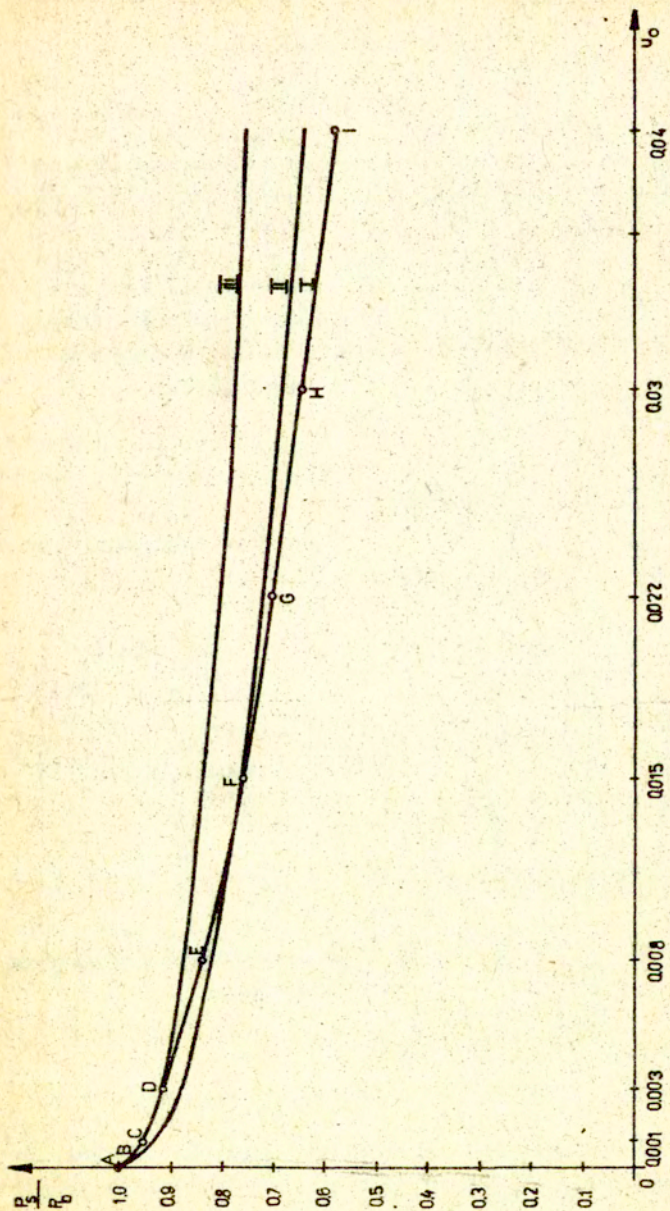
oraz ustalmy warunki jej ekstremum. Warunkiem ekstremum jest znikanie  $\delta V$  /pierwszej wariacji energii/, warunkiem równowagi jest więc

$$(4.2) \quad \frac{\partial V}{\partial u_i} = 0 \quad , \quad i = 2,3$$

Stąd:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial u_2} &= 2c(u_0 + u_2)(1 - L_0/L') + k u_2 \quad , \\ \frac{\partial V}{\partial u_3} &= 2c(h - u_3)(L_0/L' - 1) - P \quad . \end{aligned}$$

Po przekształceniach uzyskujemy:



Rys. 5 Wrażliwość układu na imperfekcja

$$(4.4) \quad \begin{aligned} P &= 2EA(1/L' - 1/L_0)(h - u_3) \quad , \\ P[(u_0 + u_2)/(h - u_3)] &= ku_2 \quad . \end{aligned}$$

Są to równania równowagi uzyskane w rozwiązaniu analitycznym.

#### 4.2. Stateczność

Ze względu na stateczność musi być spełniony dodatkowy warunek dodatniej określoności drugiej wariacji energii potencjalnej układu. Aby  $\delta^2 V$  była dodatnio określona zarówno wyznacznik współczynników formy kwadratowej

$$D = \left| \frac{\partial^2 V}{\partial u_i \partial u_j} \right| \quad , \quad i, j = 2, 3$$

jak i jego główne minory muszą być dodatnie. Warunki te prowadzą do układu nierówności

$$(4.5) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial u_3^2} = \frac{2EA}{L_0} \left[ \left(1 - \frac{L_0}{L'}\right) + \frac{(h - u_3)^2 L_0}{(L')^3} \right] > 0$$

$$(4.6) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2} = k + \frac{2EA}{L_0} \left[ \left(1 - \frac{L_0}{L'}\right) + \frac{(u_0 + u_2)^2 L_0}{(L')^3} \right] > 0$$

$$(4.7) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial u_3^2} \frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2} - \left[ \frac{2EA}{(L')^3} (h - u_3)(u_0 + u_2) \right]^2 > 0$$

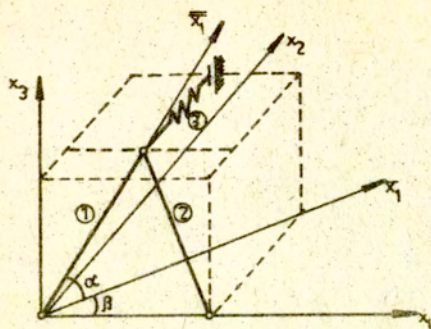
Przemieszczenia  $u_2$  i  $u_3$  spełniające powyższe nierówności odpowiadają statecznym postaciom równowagi.

#### 5. METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

##### 5.1. Lokalny i globalny układ współrzędnych

Równania problemu sformułujemy stosując uaktualniony opis Lagrange'a. Zastosujemy dyskretyzację naturalną przyjmując pręt obustronnie przegubowy jako jeden element skończony.





Rys.6

Transformacja układu współrzędnych oraz macierzy sztywności dla elementu, pierwszego /Rys.6/, opisana jest zależnościami

$$(5.1) \quad \bar{x} = A_{\alpha} \bar{x} \quad , \quad x = A_{\beta} \bar{x}$$

gdzie:

$$A_{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad , \quad A_{\beta} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dla aktualnej konfiguracji układu przyjmujemy:

$$\sin \alpha = \frac{h + u_3}{L} \quad , \quad \sin \beta = \frac{u_0 + u_2}{\sqrt{l^2 + (u_0 + u_2)^2}} \quad ,$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{l^2 + (u_0 + u_2)^2}}{L} \quad , \quad \cos \beta = \frac{l^2}{\sqrt{l^2 + (u_0 + u_2)^2}} \quad .$$

Macierze sztywności pręta zapisane w lokalnym układzie współrzędnych  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  transformują się wg (2) tj:

$$(5.2) \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\beta \mathbf{A}_\alpha & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_\beta \mathbf{A}_\alpha \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{k}} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\alpha^T \mathbf{A}_\beta^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_\alpha^T \mathbf{A}_\beta^T \end{bmatrix}$$

Transformacji podlegają macierze:

1. Macierz sprężystości

$$(5.3) \quad \mathbf{k}_E = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & & -1 & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \text{(sym.)} & & & 1 & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

2. Macierz początkowych naprężeń

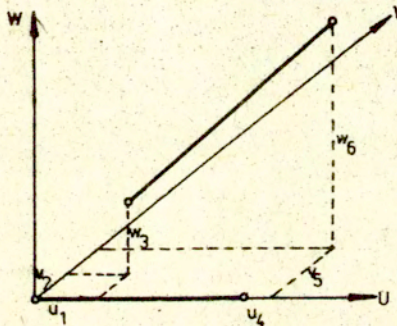
$$(5.4) \quad \mathbf{k}_\sigma = \frac{F}{L} \begin{bmatrix} & & & & \\ & 1 & & -1 & \\ & & 1 & & -1 \\ \text{(sym.)} & & & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix}$$

3. Macierz początkowych przemieszczeń [3] /liniowa/

$$(5.5) \quad \mathbf{k}_u = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 3u_{,x} & v_{,x} & w_{,x} & -3u_{,x} & -v_{,x} & -w_{,x} \\ & & & -v_{,x} & & \\ & & & & -w_{,x} & \\ \text{(sym.)} & & & 3u_{,x} & v_{,x} & w_{,x} \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

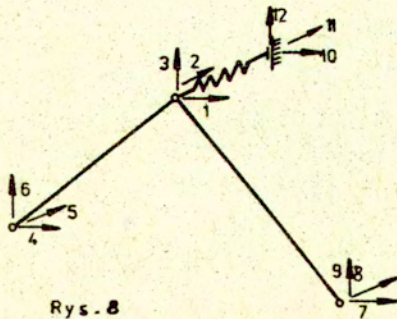
gdzie  $u,x$ ,  $v,x$ ,  $w,x$  zdefiniowane są jako /por.rys.7/.

$$u_{,x} = \frac{u_4 - u_1}{L'} \quad , \quad v_{,x} = \frac{v_5 - v_2}{L'} \quad , \quad w_{,x} = \frac{w_6 - w_3}{L'}$$



Rys.7

Po uwzględnieniu transformacji dla poszczególnych elementów oraz możliwych stopni swobody /rys.8//  $u_2 \neq 0$ ,  $u_3 \neq 0$ ,  $u_3 = u_{12}$  /



Rys.8

globalne macierze /dla całego układu/ będą miały postać

$$(5.6) \quad K_E = \begin{bmatrix} \frac{2AE}{(L')^3} (u_0 + u_2)^2 + k & \frac{2AE}{(L')^3} (h + u_3)(u_0 + u_2) \\ \text{(sym.)} & \frac{2AE}{(L')^3} (h + u_3)^2 \end{bmatrix}$$

$$(5.7) \quad K_G = P \begin{bmatrix} \frac{1}{h + u_3} \left[ \frac{u_0 + u_2}{(h + u_3)(L')^2} - 1 \right] & \frac{u_0 + u_2}{(L')^2} \\ \text{(sym.)} & \frac{h + u_3}{(L')^2} - \frac{1}{h + u_3} \end{bmatrix}$$

przy czym jest dodatnie przy ścisaniu

$$(5.8) \quad K_u = \frac{2AE}{(L')^2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

$$a_{11} = \sin \alpha \sin^2 \beta \cos^2 \alpha u_3 + (3 \cos^3 \alpha \sin^3 \beta + 2 \cos^2 \beta \cos \alpha \sin \beta + 2 \sin^3 \beta \sin^2 \alpha \cos \alpha) u_2 + \frac{(L')^2 k u_2}{2AE L'_2},$$

$$a_{12} = a_{21} = \sin \beta \cos \alpha (2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) u_3 + (2 \sin \alpha \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \sin^3 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \beta \sin \beta) u_2,$$

$$a_{zz} = \sin^2 \alpha \sin \beta \cos \alpha u_2 + (3 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha) \sin \alpha u_3 \quad ;$$

$L'_2$  - długość sprężyny.

Macierze sprężystości oraz początkowych naprężeń w globalnym układzie współrzędnych możemy również wyrazić w postaci;  
por. [2]

$$(5.9) \quad k_E = \frac{2AE}{L'} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \mathbf{c}^T & -\mathbf{c} \mathbf{c}^T \\ -\mathbf{c} \mathbf{c}^T & \mathbf{c} \mathbf{c}^T \end{bmatrix}$$

$$(5.10) \quad k_G = \frac{F}{L'} \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{c} \mathbf{c}^T & -(\mathbf{I} - \mathbf{c} \mathbf{c}^T) \\ -(\mathbf{I} - \mathbf{c} \mathbf{c}^T) & \mathbf{I} - \mathbf{c} \mathbf{c}^T \end{bmatrix}$$

gdzie  $\mathbf{c}$  jest macierzą kosinusów kierunkowych dla poszczególnych elementów:

$$\mathbf{c}_1^T = \frac{1}{L'} [ l \quad , \quad u_0 + u_2 \quad , \quad h + u_3 ] \quad ,$$

$$\mathbf{c}_2^T = \frac{1}{L'} [-l \quad , \quad u_0 + u_2 \quad , \quad h + u_3 ] \quad ,$$

$$\mathbf{c}_3^T = k [ 0 \quad , \quad 1 \quad , \quad 0 ] \quad .$$

## 5.2. Przyrostowe sformułowanie zagadnienia.

Wykorzystując macierze  $K_E$  i  $K_G$  możemy zapisać /opis uaktualniony na kroku!/  

$$(5.11) \quad [ K_E + K_G ] [\Delta u] = [\Delta P]$$

Należy zauważyć, że sterowanie obciążeniowe nie może być stosowane w otoczeniu punktów krytycznych, gdzie macierz styczna jest słabo uwarunkowaną. Można wówczas przejść na sterowanie kinematyczne ( $\Delta u_2$  lub  $\Delta u_3$ ).

W związku z silną nieliniowością zagadnienia w obliczeniach należy zastosować proces iteracyjny. Ze względu na zbieżność

tego procesu w analizie zastosowano pełną metodę iteracji Newtona-Raphsona, w której na każdym etapie iteracji macierz styczna  $K$  podlega modyfikacji.

### 5.3. Problem stateczności początkowej.

Przyjmując układ bez imperfekcji ( $u_0 = 0$ ) otrzymujemy z równania (11) postać (12), dla której poszukujemy nietrywialnego rozwiązania

$$(5.12) \quad \begin{bmatrix} k - \frac{P}{h} & & \\ & \frac{2h^2AE}{L_1^3} - \frac{Pl^2}{hL_1^2} & \\ & & \end{bmatrix} [\Delta u] = [0]$$

a zatem:

$$\text{Det} [K_E + K_G] = 0$$

Najmniejszy pierwiastek tego równania pozwala znaleźć siłę krytyczną układu

$$(5.13) \quad P_{\text{okr}} = hk$$

Wielkość tę uzyskano również w rozwiązaniu analitycznym problemu /wzór 2.10/.

### 5.4. Bifurkacja stanu równowagi.

Obciążenie bifurkacyjne wyznaczono iteracyjnie wychodząc z rozwiązania zagadnienia stateczności początkowej (13)

$$P^* = hk$$

oraz

$$(5.14) \quad \left[ \frac{2h^2AE}{L_1^3} - \frac{P^*l^2}{hL_1^2} \right] U_3^{(1)} = P^*$$

Z r. (14) wyznaczamy  $u_3^{(1)}$  i obliczamy  $P_1^* = k(h + u_3^{(1)})$ .  
Po czterech krokach iteracji uzyskano

$$(5.15) \quad P_a^* = 8,493564 \text{ [kN]}$$

Dokładne rozwiązanie (2.12) daje w wyniku

$$(5.16) \quad P_b = 8,487308 \text{ [kN]}$$

Uwzględnienie macierzy poszatkowych przemieszczeń /liniowej  
względem  $u$ / powoduje zmniejszenie wielkości obciążenia bifur-  
kacji do wartości

$$(5.17) \quad P_b = 8,471326 \text{ [kN]}$$

## 6. WNIOSKI

Analizowany układ należy do klasy konstrukcji wrażliwych na  
imperfekcje i posiada niesymetryczną charakterystykę wybocze-  
niową.

Przy sprężystym zachowaniu materiału obciążenie przyjmuje  
wartości zerowe w punktach dla których:  $u_3 = 0$ ,  $u_2 = 0$ ;  
 $u_3 = h$ ,  $u_2 = \max.$ ;  $u_3 = 2h$ ,  $u_2 = 0$ . Uzyskane wyniki nie potwier-  
dzają rezultatów numerycznej analizy podobnego układu przedsta-  
wionych w pracy [1] gdzie dla  $u_3 = 2h$  jest  $u_2 \neq 0$ .

Przebieg wtórnej drogi równowagi, przy analizie stateczności  
globalnej, na płaszczyźnie o kącie nachylenia  $\alpha = \arctg k$   
względem płaszczyzny  $u_2-u_3$  pozwala ocenić istnienie rozwiązania  
bifurkacyjnego i ewentualnie określić punkt rozdzielenia/także  
graficznie/.

Znajomość obciążenia bifurkacji oraz imperfekcji dla danego  
układu umożliwia, w prosty sposób, wyznaczenie obciążenia kry-  
tycznego na podstawie rys.5.

Przy założeniu sprężysto-plastycznego modelu materiału prętów  
obserwujemy jakościowo odmienne zachowanie się układu w proce-  
sie obciążania i deformacji, a uplastycznienie powoduje niesta-  
teczny stan równowagi.

W przyrostowym sformułowaniu zagadnienia, ze względu na silne  
nieliniowości problemu, konieczne jest stosowanie procesu ite-  
rajnego na kroku.

## 6. LITERATURA

1. P.G. BERGAN, Solution algorithms for nonlinear structural problems, Computer and Structures, Vol.12 Pergamon Press Ltd., 1980.
2. K. DEMS, M. KLEIBER, Physically and geometrically nonlinear analysis of structures using one- and two-dimensional finite elements, Rozprawy Inżynierskie, 24, 4. 1976.
3. S. RAJASEKARAN, D.W. MURRAY, Incremental finite element matrices, Journal of the Structural Division. December 1973.
4. J. ROORDA, Problemy stateczności konstrukcji sprężystych, Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji, Ossolineum, Wrocław 1981.
5. Z. WASZCZYSZYN, Problemy numeryczne nieliniowej analizy stateczności konstrukcji sprężystych, Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji, Ossolineum, Wrocław 1981.
6. R. GRYBOS<sup>Ć</sup>, Stateczność konstrukcji pod obciążeniem uderzeniowym, PWN, Warszawa-Poznań 1980.