3.31 — pobudzanie i propagacja fal elektromagnetycznych
1.11 — równania różniczkowe

Włodzimierz Laprus

ROZWIĄZANIA NIELINIOWYCH RÓWNAŃ TEORII MAGNETOJONOWEJ

20/1983

WARSZAWA 1983

ISSN 0208-5658

Prace Zakładu Teorii Fal Elektromagnetycznych

Praca nr 202

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 17 marca 1983 r.

N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 160 egz. Ark.wyd. 0,6. Ark.druk. 1,25
Oddano do drukarni w maju 1983 r.
Nr zamówienia 340/83 M-13 .

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Włodzimierz Laprus
Zakład Teorii Fal Elektromagnetycznych

ROZWIĄZANIA NIELINIOWYCH RÓWNAŃ TEORII MAGNETOJONOWEJ

1. WPROWADZENIE

Równania teorii magnetojonowej opisują propagację fal elektromagnetycznych w jonosferze. Oparte są na prostym modelu oddziaływania pola elektrycznego z plazmą złożoną z ruchomych elektronów i nieruchomych jonów. Zakłada się, że częstość zderzeń jest pomijalnie mała. Równania te tworzą układ dyspersywny z dużym parametrem p proporcjonalnym do pierwiastka ze średniej gęstości elektronów. Dla dużych pól elektrycznych opisany model jest niewystarczający, gdyż mechanizm oddziaływania pola na elektrony staje się bardziej skomplikowany. W takim przypadku należy dopuścić zależność przenikalności elektrycznej od pola elektrycznego, co powoduje, że równania teorii magnetojonowej stają się nieliniowe.

Przy użyciu metody fal biegnących opisanej w pracach [1] i [2] znajdziemy rozwiązanie równań teorii magnetojonowej w postaci rozwinięcia asymptotycznego dla $p \to \infty$ z dokładnością do wyrazów rzędu p^{-2}. W pierwszym punkcie pracy pokażemy, że istnieje rozwinięcie asymptotyczne dla ogólnego układu równań dyspersywnych. Następnie, w drugim punkcie, omówimy typowe problemy początkowe dla tego układu. W trzecim punkcie wyliczymy współczynniki rozwinięcia asymptotycznego dla nieliniowych równań teorii magnetojonowej.

2. ROZWINIĘCIE ASYMPTOTYCZNE

Rozważamy układ równań dyspersywnych postaci

$$A^{K}_{ik}(u,x)\frac{\partial u_k}{\partial x_K} + p B_i(u,x) = 0 \qquad /2.1/$$

dla K=0,1,...,m oraz i,k=1,...,n , przy czym $A^{0}_{ik} = \Gamma_{ik}$, $x_0 = t$.

Współczynniki równań są z założenia regularnymi funkcjami zmiennych u_k i x_K w obszarach odpowiednio U i D, p jest /dużym/ parametrem.

W rozwinięciu fali biegnącej

$$u_i(x) = u_i^o(x) + \sum_{\nu=1}^{N} g_i^\nu(x) S_\nu(\varphi) + R_i(x) \tag{/2.2/}$$

parametr p występuje w funkcjach $S_\nu(\varphi) = (ip)^{-\nu}\exp(ip\varphi)$, gdzie $\varphi(x)$ jest funkcją fazową, a także w reszcie rozwinięcia $R_i(x)$. Funkcja $u_i^o \in U$ jest rozwiązaniem układu /2.1/, dostatecznie regularnym, które w ogólności zależy od parametru p.

Współczynniki równań /2.1/ rozwijamy dla ustalonego x_K w otoczeniu punktu $u_i^o \in U$, co można napisać /z pominięciem wskaźników/ jako

$$A^\varkappa(u) = A^\varkappa(u^o) + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} A^{\varkappa(n)} \Sigma^n + \tilde{R}^\varkappa, \tag{/2.3/}$$

$$B(u) = B(u^o) + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} B^{(n)} \Sigma^n + \tilde{R}, \tag{/2.4/}$$

gdzie Σ oznacza sumę Σ_i występującą w rozwinięciu /2.2/, $\tilde{R}^\varkappa$ i $\tilde{R}$ oznaczają reszty $\tilde{R}^\varkappa_{ik}$ i $\tilde{R}_i$ napisane z pominięciem wskaźników, $A^{\varkappa(n)}$ i $B^{(n)}$ oznaczają n-te pochodne funkcji $A^\varkappa_{ik}(u)$ i $B_i(u)$ dla $u_i = u_i^o$, Σ^n jest iloczynem n wyrażeń Σ_i.

Po wstawieniu /2.3/ i /2.4/ do równań /2.1/ i zastosowaniu rozwinięcia /2.2/ otrzymujemy

$$D_{ik}(\Sigma_k + R_k) + (\tilde{\Sigma}^\varkappa_{ik} + \tilde{R}^\varkappa_{ik})\frac{\partial u_k}{\partial x_\varkappa} + p(\tilde{\Sigma}_i + \tilde{R}_i) = 0 \tag{/2.5/}$$

dla $\varkappa = 1,\dots,m$. $D_{ik} = A^K_{ik}(u_i^o,x)\partial/\partial x_K$, $\tilde{\Sigma}^\varkappa_{ik}$ i $\tilde{\Sigma}_i$ są sumami występującymi w rozwinięciu /2.3/ i /2.4/.

Równanie /2.5/, po uporządkowaniu wyrażeń względem funkcji S_ν, można zapisać w postaci

$$\sum_{\nu=0}^{N} E_i^\nu S_\nu + N_i[R] = 0. \tag{/2.6/}$$

Dla spełnienia tego równania wystarczy zażądać, by $E_i^\nu = 0$ dla $\nu = 0,1,\ldots,N-1$ oraz by $E_i^N S_N + N_i[R] = 0$. Otrzymujemy w ten sposób rekurencyjny ciąg równań wyznaczających funkcję fazową $\varphi(x)$, współczynniki $g_i^\nu(x)$ i resztę $R_i(x)$:

/2.7/
$$\mathcal{A}_{ik} g_k^1 = 0,$$

/2.8/
$$\mathcal{A}_{ik} g_k^{\nu+1} + D_{ik} g_k^\nu + H_{ik}^{(\nu)} g_k^\nu + G_i^{(\nu)} = 0, \quad \text{dla } \nu = 1,\ldots,N-1$$

/2.9/
$$N_i[R] + E_i^N S_N = 0.$$

gdzie $\mathcal{A}_{ik} = \dot{A}_{ik} - iB_i^k$ jest macierzą dyspersyjną. Przez $A_{ik} = D_{ik}\varphi$ oznaczono macierz charakterystyczną układu /2.1/, $B_i^k = \partial B_i / \partial u_k$ dla $u_k = u_k^0$. Funkcje $H_{ik}^{(\nu)}$ i $G_i^{(\nu)}$ są zależne od $g_k^1, \ldots, g_k^{\nu-1}$ i od x_K .

Wprowadzimy oznaczenie $\partial\varphi/\partial x_K = k_K$, przy czym $k_0 = -\omega$. Wtedy $A_{ik} = k_K A_{ik}^K$ i $\mathcal{A}_{ik} = k_K A_{ik}^K - iB_i^k$. Równanie /2.7/ implikuje znikanie wyznacznika macierzy dyspersyjnej $Q = \det(\mathcal{A}_{ik})$, czyli

/2.10/
$$Q(-\omega, k) = 0$$

/k oznacza zmienne k_κ /. Zakładamy, że równanie dyspersyjne /2.10/ ma n rzeczywistych pierwiastków ω dla każdego rzeczywistego wektora k_κ i że macierz dyspersyjna $\mathcal{A}_{ik}$ ma n liniowo niezależnych wektorów zerowych lewych $l_i(u^0, x)$ i prawych $r_i(u^0, x)$ odpowiadających tym pierwiastkom. Jest to warunek wystarczający na to, by procedura fali biegnącej prowadziła do wyznaczenia rozwinięcia /2.2/. Szczegóły tej procedury są opisane w pracach [1] i [2] .

Równanie transportu dla g_i^N otrzymuje się z /2.9/ przy założeniu, że

/2.11/
$$l_i(u^0, x)\, N_i[R] = 0,$$

gdzie $l_i(k^0,x)$ jest wektorem zerowym macierzy dyspersyjnej, odpowiadającym wybranemu pierwiastkowi równania dyspersyjnego.

Będziemy zakładać, że dane początkowe mają rozwinięcie asymptotyczne postaci /2.2/, tj. że

$$u_i(t^0,x) = u_i^0(t^0,x) + \sum_{\nu=1}^{N} g_i^\nu(t^0,x) S_\nu(\varphi^0) + R_i(t^0,x) \qquad /2.12/$$

/x oznacza zmienne $x_\varkappa$ /; $\varphi^0 = \varphi^0(x) = \varphi(t^0,x)$ jest wartością początkową funkcji fazowej w chwili t^0.

W pracy [2] pokazano, że współczynniki rozwinięcia /2.2/ i funkcja fazowa, otrzymane z równań /2.7/-/2.9/, są regularnymi funkcjami w pewnym otoczeniu powierzchni początkowej $t=t^0$ dla $t>t^0$. Reszta rozwinięcia jest także regularna w pewnym otoczeniu powierzchni początkowej, co wynika z twierdzeń dotyczących układu równań /2.1/, przy założeniu że jest to układ hiperboliczny /patrz np. R. Courant and D. Hilbert [3] /. Pokazano ponadto, że moduł $|g_i^\nu(t,x) - g_i^\nu(t^0,x)|$ dla $\nu=1,\dots,N$ jest ograniczony przy $p\to\infty$. Stąd wniosek, że rozwinięcie /2.2/ jest asymptotyczne dla $p\to\infty$ w "słabym sensie": dla każdego dostatecznie dużego p istnieje takie otoczenie powierzchni początkowej, w którym reszta rozwinięcia jest znacznie mniejsza niż N-ty wyraz rozwinięcia.

Pokażemy teraz, że $R_i = o(S_N)$ przy $p\to\infty$, a tym samym, że rozwinięcie /2.2/ jest asymptotyczne. W tym celu nieco dokładniej zbadamy równanie /2.9/. Korzystając z /2.5/ mamy

$$N_i[R] \equiv D_{ik}R_k + \tilde{R}_{ik}^{\varkappa}\frac{\partial u_k}{\partial x_\varkappa} + \tilde{\Sigma}_{ik}^{\varkappa}\frac{\partial R_k}{\partial x_\varkappa} + p\tilde{R}_i + O(1/p^{N+1}) = -E_i^N S_N . \qquad /2.13/$$

Reszty $\tilde{R}_{ik}^{\varkappa}$ i $\tilde{R}_i$ można przedstawić przy użyciu /2.3/ i /2.4/ jako funkcje reszty R_i, co daje

$$\tilde{R}_{ik}^{\varkappa} = A_{ik}^{\varkappa l} R_l + O(R^{N+1}) + O(1/p^{N+1}) , \qquad /2.14/$$

$$\tilde{R}_i = B_i^k R_k + O(R^{N+2}) + O(1/p^{N+2}) , \qquad /2.15/$$

gdzie $A^{\varkappa l}_{ik} = \partial A^{\varkappa}_{ik}/\partial u_l$. Wprowadzamy oznaczenie $R_i = \Gamma_i \exp(ip\varphi)$ i przepisujemy /2.13/ uwzględniając /2.14/ i /2.15/. Mamy

$$
\begin{aligned}
/2.16/ \qquad & (D_{ik}\Gamma_k)e^{ip\varphi} + ip\Gamma_k e^{ip\varphi} D_{ik}\varphi + A^{\varkappa l}_{ik}\Gamma_l e^{ip\varphi}\frac{\partial u_k}{\partial x_\varkappa} + \\
& O(1/p^{N+1}) + \tilde{\Sigma}^{\varkappa}_{ik}\frac{\partial \Gamma_k}{\partial x_\varkappa} e^{ip\varphi} + A^{\varkappa l}_{ik} g^1_l e^{2ip\varphi}\Gamma_k k_\varkappa + O(\Gamma/p) + \\
& pB^k_i \Gamma_k e^{ip\varphi} + O(p\Gamma^{N+2}) + O(1/p^{N+1}) = -E^N_i S_N ,
\end{aligned}
$$

a po podzieleniu przez $\exp(ip\varphi)$

$$
\begin{aligned}
/2.17/ \qquad & D_{ik}\Gamma_k + ipA_{ik}\Gamma_k + pB^k_i\Gamma_k + \tilde{\Sigma}^{\varkappa}_{ik}\frac{\partial\Gamma_k}{\partial x_\varkappa} + A^{\varkappa l}_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial x_\varkappa}\Gamma_l + \\
& + A^{\varkappa l}_{ik} g^1_l k_\varkappa e^{ip\varphi}\Gamma_k + O(\Gamma^{N+1}) + O(\Gamma/p) + O(p\Gamma^{N+2}) + \\
& + O(1/p^{N+1}) = -E^N_i (ip)^{-N} .
\end{aligned}
$$

Przenosząc na prawą stronę równania /2.17/ wyrazy nie zawierające funkcji Γ_k otrzymujemy ostatecznie

$$/2.18/ \qquad D_{ik}\Gamma_k + ipA_{ik}\Gamma_k + C^{\varkappa}_{ik}\frac{\partial\Gamma_k}{\partial x_\varkappa} + K_{ik}\Gamma_k + W_i(\Gamma) = -E^N_i(ip)^{-N} + F_i ,$$

gdzie

$$/2.19/ \qquad C^{\varkappa}_{ik} = \tilde{\Sigma}^{\varkappa}_{ik} + A^{\varkappa l}_{ik}\Gamma_l e^{ip\varphi} , \quad K_{ik} = A^{\varkappa k}_{il}\,\partial(u^0_l + \Sigma_l)/\partial x_\varkappa + A^{\varkappa l}_{ik} g^1_l k_\varkappa e^{ip\varphi}$$

oraz

$$/2.20/ \qquad W_i(\Gamma) = O(\Gamma^{N+1}) + O(\Gamma/p) + O(p\Gamma^{N+2}) + O(p\Gamma^2) , \quad F_i = O(1/p^{N+1}) .$$

Ponadto $E^N_i = O(1)$ /patrz wzór /2.9/ pracy [1] /. Równanie /2.18/ jest niejednorodnym i nieliniowym równaniem cząstkowym pierwszego rzędu dla funkcji $\Gamma_k(t,x)$. Jego rozwiązanie istnieje i jest jednoznaczne w pewnym otoczeniu powierzchni początkowej. Wynika to /pośrednio/ z istnienia i jednoznaczności rozwiązania układu /2.1/ oraz z istnienia i jednoznaczności rozwiązania równań /2.7/–/2.9/.

Oznaczmy przez $\mathring{\Gamma}_k(t,x)$ rozwiązanie równania jednorodnego /2.18/, tzn. równania /2.18/ z zerem po prawej stronie. Zachowanie funkcji $\Gamma_k(t,x)$ dla $p \to \infty$ określa następujące

TWIERDZENIE. Jeżeli $1/p^{N+1} = o(\Gamma)$ przy $p \to \infty$, to $\Gamma_k \sim \overset{\circ}{\Gamma}_k$ przy $p \to \infty$.

Dowód. Niech $\Gamma_k = \rho_\theta r_k^\theta + h_k$, gdzie $\theta = 1, \ldots, q$; q jest krotnością wybranego pierwiastka równania dyspersyjnego /2.10/. Zgodnie z założeniem h_k jest rzędu większego niż $1/p^{N+1}$ lub ρ_θ jest rzędu większego niż $1/p^{N+1}$ dla $p \to \infty$. W pierwszym przypadku obydwa wyrazy po prawej stronie /2.18/ są do pominięcia względem drugiego wyrazu po lewej. Stąd wynika, że dla $p \to \infty$ rozwiązanie równania /2.18/ dąży do rozwiązania równania jednorodnego. Podobnie jest w drugim przypadku. Mnożymy /2.18/ przez lewy wektor zerowy l_i^θ macierzy dyspersyjnej i stwierdzamy, że znika drugi wyraz po lewej stronie /2.18/ i pierwszy wyraz po prawej /co wynika z założenia /2.11//. Widać, że wyraz $l_i^\theta F_i$ jest do pominięcia względem wyrazu $l_i^\theta K_{ik} \Gamma_k$. Tym samym teza twierdzenia jest udowodniona.

WNIOSEK. $\Gamma_k = \overset{\circ}{\Gamma}_k + O(1/p^{N+1})$ dla $p \to \infty$.

W rozwinięciu asymptotycznym /2.12/ danych początkowych $u_i(t^\circ, x)$ reszta rozwinięcia $R_i(t^\circ, x) = o(S_N)$, albo inaczej $R_i(t^\circ, x) = O(1/p^{N+1})$. Jeśli przyjmiemy, że $R_i(t^\circ, x)$ jest wartością początkową funkcji $R_i(t,x)$ będącej rozwiązaniem równania /2.13/, to wartość początkowa dla równania jednorodnego /2.18/ /czyli z zerem po prawej stronie/ jest rzędu $1/p^{N+1}$, a więc $\overset{\circ}{\Gamma}_k = O(1/p^{N+1})$. W szczególności dla $R_i = 0$ także $\overset{\circ}{\Gamma}_i = 0$. Stąd wniosek, że $R_i(t,x) = O(1/p^{N+1})$ dla $p \to \infty$, czyli rozwinięcie /2.2/ ze współczynnikami wyliczonymi z równań /2.7/-/2.9/ jest rozwinięciem asymptotycznym rozwiązania równań /2.1/ dla $p \to \infty$.

W przypadku, gdy układ /2.1/ jest liniowy, równanie /2.18/ ma postać

$$D_{ik}\Gamma_k + ip\mathcal{A}_{ik}\Gamma_k = -E_i^N (ip)^{-N} \tag{2.21}$$

i dowód twierdzenia należy przeprowadzić inną metodą /por. R. Courant and D. Hilbert [4] /

3. PROBLEMY POCZĄTKOWE

Problem początkowy dla układu równań /2.1/ jest określony przez dane początkowe w postaci rozwinięcia /2.12/. Współczynniki tego rozwinięcia,

$$g_i^{\nu}(t^{\circ},x) = \sigma_{\theta}^{\nu} r_i^{\theta} + h_i^{\nu} , \qquad /3.1/$$

zawierają wektory zerowe r_i^{θ} macierzy dyspersyjnej związane z jednym wybranym pierwiastkiem /o krotności q/ równania dyspersyjnego. Równania transportu dla σ_{θ}^{ν} są określone na promieniach leżących na powierzchni fazowej odpowiadającej temu pierwiastkowi.

Funkcja początkowa $u_i(t^{\circ},x)$ jest zależna od parametru p , czyli

$$u_i(t^{\circ},x) = \mu_i(x;p) . \qquad /3.2/$$

Jeśli μ_i jest dostatecznie regularną funkcją parametru p, to μ_i można przedstawić jako rozwinięcie postaci /2.12/. Współczynniki tego rozwinięcia można przedstawić jako kombinacje liniowe n liniowo niezależnych wektorów zerowych macierzy dyspersyjnej. Widać więc, że funkcja $\mu_i(x;p)$ daje się przedstawić jako suma rozwinięć postaci /2.12/, z których każde odpowiada innemu pierwiastkowi równania dyspersyjnego. Wtedy gdy układ /2.1/ jest liniowy, takie przedstawienie prowadzi do kilku osobnych problemów początkowych. Superpozycja ich rozwiązań daje rozwiązanie wyjściowego problemu początkowego.

Szczególnym przypadkiem danych początkowych /2.12/ są dane początkowe oscylacyjne

$$\mu_i(x;p) = u_i^{\circ}(t^{\circ},x) + \frac{1}{ip} g_i^{1}(t^{\circ},x) e^{ip\gamma^{\circ}} . \qquad /3.3/$$

Ponieważ $g_i^1 = \sigma_{\theta} r_i^{\theta}$, funkcja /3.3/ przedstawia sumę znanego rozwiązania u_i° w chwili t° oraz fali o amplitudzie $(ip)^{-1}\sigma_{\theta}(x) r_i^{\theta}(x,k)$ odpowiadającej wybranemu pierwiastkowi równania dyspersyjnego. Jeśli wszystkie pierwiastki tego równania są różne, to istnieje n typów takich fal.

Najprostsze dane początkowe otrzymuje się kładąc $\varphi^{o}=0$ w /3.3/, tj.

$$\mu_i(x;p) = u_i^{o}(t^{o},x) + \frac{1}{ip} g_i^{1}(t^{o},x). \tag{/3.4/}$$

Funkcja μ_i jest tu po prostu sumą u_i^{o} i małego zaburzenia odpowiadającego wybranemu pierwiastkowi równania dyspersyjnego.

Istnieją dwa rodzaje problemów początkowych dla układu równań /2.1/, które są związane z jego szczególną cechą /por. R.M. Lewis [5] /. Rozważmy transformację zmiennych niezależnych i zmiennych zależnych

$$x'_k = p x_k , \qquad u'_i(x') = u_i(x) \tag{/3.5/}$$

Układ /2.1/ przechodzi w układ równań nie zawierający parametru p

$$`A_{ik}^{k}(u',x') \frac{\partial u'_k}{\partial x'_k} + `B_i(u',x') = 0 , \tag{/3.6/}$$

gdzie

$$`A_{ik}^{k}(u',x') = A_{ik}^{k}(u,x) , \quad `B_i(u',x') = B_i(u,x). \tag{/3.7/}$$

Tak więc rozwinięcie asymptotyczne rozwiązania układu /2.1/ dla $p \to \infty$ jest równoważne rozwinięciu asymptotycznemu rozwiązania układu /3.7/ dla $x'_k \to \infty$. Dane początkowe dla równań /3.6/ są związane z danymi początkowymi dla równań /2.1/:

$$u'_i(t^{o\prime},x') = u_i(t^{o\prime},x) = \mu_i(x;p) = \mu_i(x'/p;p). \tag{/3.8/}$$

W szczególności, dla $\mu_i(x;p) = \mu_i(px)$, mamy

$$u'_i(t^{o\prime},x') = \mu_i(x'). \tag{/3.9/}$$

W tym przypadku problem początkowy dla układu /3.6/ z danymi początkowymi /3.9/ jest równoważny problemowi początkowemu dla układu /2.1/ z danymi początkowymi "szybkozmiennymi" /ze względu na duże pochodne dla $p \to \infty$/. Wynika stąd, że przy użyciu rozwinięcia /2.2/ można zbadać zachowanie asymptotyczne rozwiązania układu /3.6/ z danymi początkowymi /3.9/ dla $x'_k \to \infty$ /ani układ równań, ani dane początkowe nie zawierają parametru p/.

Drugi rodzaj danych początkowych dla układu /2.1/, to dane początkowe "wolnozmienne", $\mu_i(x;p) = \mu_i(x)$. Korzystając z /3.8/ mamy

$$u'_i(t^{o\prime}, x') = \mu_i(x'/p), \tag{3.10}$$

czyli funkcję początkową dla układu /3.6/, której pochodne są małe dla $p \to \infty$.

Dane początkowe postaci /3.4/ są szybkozmienne na przykład wtedy, gdy $\sigma_\theta(x) = \sigma^*_\theta x_\varkappa p^2$, gdzie σ^*_θ jest stałą. Należy przy tym założyć, że u^o_i =const , i że r^o_i nie zależy od $x_\varkappa$. Innymi słowy, współczynniki układu /2.1/ powinny być niezależne od zmiennych x_k oraz powinno istnieć rozwiązanie równania $B_i(u)=0$. Przy podobnych założeniach dane początkowe /3.4/ są wolnozmienne, jeśli $\sigma_\theta(x) = \sigma^*_\theta x_\varkappa p$.

4. ASYMPTOTYCZNE ROZWIĄZANIA RÓWNAŃ TEORII MAGNETOJONOWEJ

Równania teorii magnetojonowej /patrz K. G. Budden [6] /

$$\nabla \times \underline{H} = \underline{J} + \varepsilon \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}, \quad \nabla \times \underline{E} = -\mu \frac{\partial \underline{H}}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \underline{J}}{\partial t} = \varepsilon \phi^2 \underline{E} \tag{4.1}$$

są liniowe i składają się z równań Maxwella dla pola elektrycznego $\underline{E}$ i magnetycznego $\underline{H}$ oraz z równania dla prądu $\underline{J}$. To ostatnie równanie wynika z założenia, że prąd spowodowany jest przez ruch elektronów o ładunku e , masie m i gęstości $\eta(x)$, i że ruch elektronów określony jest przez równanie Newtona z siłą $e\underline{E}$. W równaniach /4.1/ przez ε i μ oznaczono przenikalność elektryczną i magnetyczną /są to dodatnie stałe/, $\phi(x)$ oznacza częstość plazmową, która jest zdefiniowana przez zależność

$$\varepsilon\phi^2 = \eta e^2/m . \tag{4.2}$$

Zamiast /4.1/, zbadamy nieco inny układ równań,

$$\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\underline{H} + \frac{1}{\varepsilon}\underline{J} = 0, \quad \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} + \frac{1}{\mu}\nabla\times\underline{E} = 0, \tag{4.3}$$
$$\frac{\partial \underline{J}}{\partial t} - \varepsilon_0\phi^2\underline{E} = 0,$$

w którym przenikalność elektryczna zależna jest od pola $\underline{E}$:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1|\underline{E}|^2, \tag{4.4}$$

gdzie ε_0 i ε_1 są dodatnimi stałymi. Związek /4.2/ jest zastąpiony przez

$$\varepsilon_0\phi^2 = \eta e^2/m . \tag{4.5}$$

Oddziaływanie pola $\underline{E}$ na ruch elektronów ma tutaj bardziej złożony charakter niż w równaniach /4.1/. Po wprowadzeniu nowych zmiennych

$$\underline{E}' = \sqrt{\varepsilon_0}\,\underline{E}, \quad \underline{H}' = \sqrt{\mu}\,\underline{H}, \quad \underline{J}' = \underline{J}/\phi\sqrt{\varepsilon_0}, \quad x' = c_0/x, \tag{4.6}$$

gdzie $c_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu}$, dostajemy /po opuszczeniu primów/ układ równań

$$\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\nabla\times\underline{H} + p\beta\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\underline{J} = 0, \quad \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} + \nabla\times\underline{E} = 0, \tag{4.7}$$
$$\frac{\partial \underline{J}}{\partial t} - p\beta\underline{E} = 0,$$

gdzie $p\beta(x) = \phi(x)$.

Dalej będziemy zakładać, że pola $\underline{E}$, $\underline{H}$ i prąd $\underline{J}$ zależą tylko od zmiennych t, x . Dla $(u_i) = (E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z, J_x, J_y, J_z)$ układ /4.7/ przybiera postać /2.1/ z macierzą

/4.8/
$$(A^1_{ik}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}A & 0 \\ A^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie

/4.9/
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

oraz wektorem

/4.10/
$$(B_i) = (\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\beta \underline{J},\ 0,\ -\beta \underline{E}).$$

Stąd można wyliczyć macierz dyspersyjną $\mathcal{A}_{ik} = -\omega \Gamma_{ik} + kA^1_{ik} - iB^k_i$, czyli

/4.11/
$$(\mathcal{A}_{ik}) = \begin{bmatrix} -i\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\beta B - \omega I & k\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}A & -i\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\beta I \\ kA^T & -\omega I & 0 \\ i\beta I & 0 & -\omega I \end{bmatrix},$$

gdzie

/4.12/
$$B = \underline{J}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \underline{E}} = 2\varepsilon_1 \underline{J}\,\underline{E}$$

jest diadą, I jest macierzą jednostkową 3x3.

Zakładamy, że $u^0_i(t,x) \equiv 0$ w rozwinięciu /2.2/. Dla $u_i = u^0_i$ macierz dyspersyjna ma postać

/4.13/
$$(\mathcal{A}_{ik}) = \begin{bmatrix} -\omega I & kA & -i\beta I \\ kA^T & -\omega I & 0 \\ i\beta I & 0 & -\omega I \end{bmatrix}$$

i jest hermitowska, mimo że układ /2.1/ z macierzą /4.8/ nie nie jest symetrycznie hiperboliczny, i że macierz $B_i^k(u)$ nie jest antyhermitowska dla $u_i \neq u_i^0$.

Pierwiastki równania dyspersyjnego

/4.14/ $$Q(-\omega, k) = (\beta^2 + k^2 - \omega^2)(\beta^2 - \omega^2)\omega^3 = 0$$

są następujące:

/4.15/ $$\omega_1 = \sqrt{\beta^2 + k^2} \quad i \quad \omega_2 = -\sqrt{\beta^2 + k^2}$$

podwójne,

/4.16/ $$\omega_3 = \beta \quad i \quad \omega_4 = -\beta$$

pojedyncze,

/4.17/ $$\omega_5 = 0$$

potrójny. Wektory zerowe /prawe/ macierzy /4.13/, r_i^0 , odpowiadające tym pierwiastkom mają postać

/4.18/ $$\begin{aligned} (r_i^1) &= (0 \;\; 1 \;\; 0 \,.\, 0 \;\; 0 \;\; \pm k/\sqrt{\beta^2+k^2} \,.\, 0 \;\; \pm i\beta/\sqrt{\beta^2+k^2} \;\; 0)\,, \\ (r_i^2) &= (0 \;\; 0 \;\; 1 \,.\, 0 \;\; \mp k/\sqrt{\beta^2+k^2} \;\; 0 \,.\, 0 \;\; 0 \;\; \pm i\beta/\sqrt{\beta^2+k^2}) \end{aligned}$$

dla ω_1 /znak górny/ i dla ω_2 /znak dolny/,

/4.19/ $$(r_i) = (\pm i \;\; 0 \;\; 0 \,.\, 0 \;\; 0 \;\; 0 \,.\, 1 \;\; 0 \;\; 0)$$

dla ω_3 /znak górny/ i dla ω_4 /znak dolny/,

/4.20/ $$\begin{aligned} (r_i^1) &= (0 \;\; 0 \;\; 0 \,.\, 1 \;\; 0 \;\; 0 \,.\, 0 \;\; 0 \;\; 0)\,, \\ (r_i^2) &= (0 \;\; 0 \;\; 0 \,.\, 0 \;\; 1 \;\; 0 \,.\, 0 \;\; 0 \;\; ik/\beta)\,, \\ (r_i^3) &= (0 \;\; 0 \;\; 0 \,.\, 0 \;\; 0 \;\; 1 \,.\, 0 \;\; -ik/\beta \;\; 0)\,, \end{aligned}$$

dla ω_5 .

Przejdziemy teraz do wyznaczenia promieni i funkcji fazowych odpowiadających pierwiastkom /4.15/-/4.17/, przy założeniu że β jest niezależne od x , czyli że ośrodek jest jednorodny. Pierwiastki ω_1 i ω_2 . Hamiltonian

/4.21/ $$\mathcal{H}(x,k) = \mp\sqrt{\beta^2+k^2}$$

daje prędkość grupową

/4.22/ $$\gamma = \partial\mathcal{H}/\partial k = \mp k/\sqrt{\beta^2+k^2}$$

/patrz prace [1] i [2] /. Rozwiązując równania kanoniczne Hamiltona

/4.23/ $$\dot{x} = \gamma , \qquad \dot{k} = 0,$$

otrzymujemy promienie /a właściwie wstęgi promieniowe/

/4.24/ $$x = \gamma t + x^0 , \quad k = k^0 ,$$

gdzie x^0 i k^0 są wartościami początkowymi x i k dla $t^0=0$, γ jest stałe na promieniach. Ponieważ lagrangian

/4.25/ $$\mathcal{L} = -\mathcal{H} + k\partial\mathcal{H}/\partial k = \pm\beta^2/\sqrt{\beta^2+(k^0)^2}$$

jest także stały na promieniach, mamy

/4.26/ $$\varphi(t,x) = \int_0^t \mathcal{L}\,ds + \varphi^0(x^0) = \mathcal{L}t + \varphi^0(x^0)$$

przy czym $x^0 = x-\gamma t$. Funkcja początkowa $\varphi^0(x) = \varphi(0,x)$ daje wartość początkową funkcji $k(t)$ określonej na promieniu przecinającym oś x w punkcie x^0 :

/4.27/ $$k^0(x^0) = d\varphi^0(x^0)/dx^0 .$$

Dla $t>0$ funkcja $k(t,x)$ jest określona przez /4.27/, gdzie położono $x^\circ = x - \gamma t$, czyli

/4.28/ $$k(t,x) = k^\circ(x - \gamma t).$$

Pierwiastki ω_3 i ω_4 . Ponieważ $\mathcal{H} = \mp p$, to $\gamma = 0$ i równania kanoniczne Hamiltona mają rozwiązanie

/4.29/ $$x = x^\circ, \quad k = k^\circ.$$

Lagrangian $\mathcal{L} = \pm p$ daje funkcję fazową postaci

/4.30/ $$\varphi(t,x) = \int_0^t \mathcal{L}\, ds + \varphi^\circ(x^\circ) = \pm p t + \varphi^\circ(x^\circ),$$

gdzie należy położyć $x^\circ = x$. Funkcja

/4.31/ $$k(t,x) = k^\circ(x)$$

z k° danym przez /4.27/ jest niezależna od t .

Pierwiastek ω_5 . W tym przypadku $\mathcal{H} = 0$, $\gamma = 0$, $\mathcal{L} = 0$ i równania kanoniczne mają rozwiązanie dane przez /4.29/. Funkcja fazowa ma postać

/4.32/ $$\varphi(t,x) = \varphi^\circ(x^\circ)$$

gdzie $x^\circ = x$, a więc jest niezależna od t . Podobnie funkcja $k(t,x)$, określona przez /4.31/, jest niezależna od t .

Wyznaczymy teraz współczynniki równań transportu

/4.33/ $$\dot{\sigma}_\theta + a_{\theta'} e^{ip\varphi} \sigma_{\theta'} \sigma_\theta + b_{\theta\theta'} \sigma_{\theta'} = 0$$

na promieniach /patrz wzory /1.16/-/1.18/ pracy [2] oraz wzór /4.14/ pracy [1] /. Przede wszystkim należy zauważyć, że $a_\theta \equiv 0$ dla wszystkich trzech typów promieni /odpowiadających pierwiastkom ω_1 i ω_2 , ω_3 i ω_4 , ω_5 /. Widać to z relacji określającej współczynnik a_θ ,

$$/4.34/ \qquad l_i^{\theta'} r_i^{\theta} a_{\theta''} = l_i^{\theta'} \bar{k}_{ik}^{l} r_k^{\theta} r_l^{\theta''}$$

dla $u_k = u_k^0$, gdzie $\bar{k}_{ik} = k_{ik} + \omega I$. Łatwo sprawdzić korzystając z /4.11/, że $\bar{k}_{ik}^{l} = \partial \bar{k}_{ik} / \partial u_l = 0$ dla $u_k = u_k^0$. Tak więc promienie wszystkich typów są wyjątkowe.

Do obliczenia współczynników $b_{\theta\theta'}$ potrzebna jest znajomość macierzy $l_i^{\theta} D_{ik} r_k^{\theta'}$, która jest równa zero dla promieni odpowiadających pierwiastkom ω_3 i ω_4 , ω_5 . Natomiast dla promieni pierwszego typu /pierwiastki ω_1 i ω_2 /

$$/4.35/ \qquad l_i^{\theta} D_{ik} r_k^{\theta'} = w\, \delta_{\theta\theta'} \ , \qquad w = \mp (k^0)' \beta^2 [\beta^2 + (k^0)^2]^{-3/2} ,$$

gdzie $(k^0)' = dk^0(x^0)/dx^0$ jest stałe na promieniu; $l_i^{\theta} = (r_i^{\theta})^*$, to znaczy lewe wektory zerowe otrzymuje się z prawych wektorów zerowych jako ich sprzężenia zespolone. Biorąc pod uwagę, że $m_{\theta\theta'} = l_i^{\theta} r_i^{\theta'} = 2\delta_{\theta\theta'}$, mamy

$$/4.36/ \qquad b_{\theta\theta'} = m_{\theta\theta''}^{-1} l_i^{\theta''} D_{ik} r_k^{\theta'} = \frac{1}{2} w\, \delta_{\theta\theta'} .$$

Pierwiastki ω_1 i ω_2 . Równanie transportu

$$/4.37/ \qquad \dot{\sigma}_\theta + \frac{1}{2} w \sigma_\theta = 0$$

ma na promieniach rozwiązanie

$$/4.38/ \qquad \sigma_\theta(t) = \sigma_\theta^0 \exp\left(\mp \frac{1}{2} w t\right).$$

Stąd

$$/4.39/ \qquad \sigma_\theta(t,x) = \sigma_\theta^0(x^0) \exp\left[\mp \frac{1}{2} w(x^0) t\right] ,$$

gdzie należy położyć $x^0 = x - \gamma t$.

Pierwiastki ω_3 i ω_4 . Równanie transportu $\dot{\sigma}_\theta = 0$ daje funkcję

$$\sigma_\theta(t,x) = \sigma_\theta^0(x^0) \tag{4.40}$$

w której $x^0 = x$, a więc niezależną od t .

Pierwiastek ω_5 . Równanie transportu $\dot{\sigma}_\theta = 0$ daje funkcję postaci /4.40/ z $x^0 = x$.

Zbierając powyższe wyniki otrzymujemy ostatecznie następujące rozwinięcia asymptotyczne nieliniowych równań /4.7/ dla $p \to \infty$.

Fala pierwszego typu /pierwiastki ω_1 i ω_2 /:

$$E_x \sim 0, \quad E_y \sim \sigma_1^0(x-\gamma t)\frac{1}{ip}e^{F(t,x)}, \quad E_z \sim \sigma_2^0(x-\gamma t)\frac{1}{ip}e^{F(t,x)}, \tag{4.41}$$

$$H_x \sim 0, \quad H_y \sim \sigma_2^0(x-\gamma t)\gamma\frac{1}{ip}e^{F(t,x)}, \quad H_z \sim -\sigma_1^0(x-\gamma t)\gamma\frac{1}{ip}e^{F(t,x)}, \tag{4.42}$$

$$J_x \sim 0, \quad J_y \sim \sigma_1^0(x-\gamma t)k\beta^{-1}\frac{1}{p}e^{F(t,x)}, \quad J_z \sim \sigma_2^0(x-\gamma t)k\beta^{-1}\frac{1}{p}e^{F(t,x)}, \tag{4.43}$$

gdzie $F(t,x) = \mp\frac{1}{2}w(x-\gamma t) + ip\varphi(t,x)$; funkcje $\varphi(t,x)$, γ , k dane są przez /4.26/, /4.22/, /4.28/.

Fala drugiego typu /pierwiastki ω_3 i ω_4 /:

$$E_x \sim \mp\sigma^0(x)\frac{1}{p}e^{ip\varphi(t,x)}, \quad J_x \sim \sigma^0(x)\frac{1}{ip}e^{ip\varphi(t,x)}, \tag{4.44}$$

gdzie $\varphi(t,x) = \pm\beta t + \varphi^0(x)$. Pozostałe składowe mają pierwszy wyraz rozwinięcia równy zero.

Fala trzeciego typu /pierwiastek ω_5 /:

$$H_x \sim \sigma_1^0(x)\frac{1}{ip}e^{ip\varphi^0(x)}, \quad H_y \sim \sigma_2^0(x)\frac{1}{ip}e^{ip\varphi^0(x)}, \quad H_z = \sigma_3^0(x)\frac{1}{ip}e^{ip\varphi^0(x)} \tag{4.45}$$

$$J_y \sim -\sigma_3^0(x)k\beta^{-1}\frac{1}{p}e^{ip\varphi^0(x)}, \quad J_z \sim \sigma_2^0(x)k\beta^{-1}\frac{1}{p}e^{ip\varphi^0(x)}, \tag{4.46}$$

gdzie k dane jest przez /4.31/. Pozostałe składowe mają pierwszy wyraz rozwinięcia równy zero.

5. KONKLUZJA

Rozwiązania asymptotyczne /4.41/-/4.46/ równań teorii magnetojonowej zachowują się jak p^{-1} dla $p \to \infty$, jeśli dane początkowe są postaci /3.3/. W innych przypadkach to zachowanie może być inne. Na przykład dla danych początkowych /3.3/ z funkcją $\sigma_0(t^0, x; p)$ proporcjonalną do p rozwiązania asymptotyczne są równe $O(1)$ dla $p \to \infty$.

Zgodnie z tym co zostało powiedziane w punkcie 3, otrzymane rozwiązania asymptotyczne dają informację o zachowaniu pól $\underline{E}$, $\underline{H}$ i $\underline{J}$ dla $x \to \infty$ /są to tzw. pola dalekie/.

LITERATURA

[1] W. LAPRUS, Metoda fal biegnących dla równań quasi-liniowych dyspersywnych, Prace IPPT 3/1981.

[2] W. LAPRUS, Rozwiązania asymptotyczne równań quasi-liniowych dyspersywnych, Prace IPPT 27/1982.

[3] R. COURANT and D. HILBERT, Methods of Mathematical Physics Vol. 2, Interscience Publishers, 1962; rozdz. VI, §10.

[4] R. COURANT and D. HILBERT, op. cit., rozdz. VI, §5.

[5] R. M. LEWIS, Asymptotic methods for the solution of dispersive hyperbolic equations, /w "Asymptotic Solutions of Differential Equations and Their Applications", wyd. C. H. Wilcox; John Wiley and Sons, 1964 /.

[6] K. G. BUDDEN, Radio Waves in the Ionosphere, Cambridge Univ. Press, 1961.