

Praca habilitacyjna

Józef Kudzik

MECHANIKA
SILNIE ODKSZTAŁCALNYCH OŚRODKÓW
O ANIZOTROPOWEJ PRZEPUSZCZALNOŚCI

29 / 1981

P.269



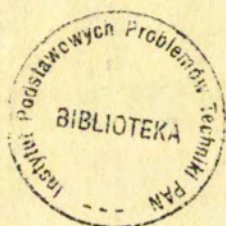
WARSZAWA 1981

ISSN 0208-5658

Praca habilitacyjna

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 25 sierpnia 1981r.

Zarejestrowana pod nr 29/1981



57084



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 160 egz. Ark. wyd. 3,2. Ark.druk.4,75
Oddano do drukarni w sierpniu 1981 r.
Nr zamówienia 481/81

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Józef KUBIK

Precownia Teorii Konsolidacji i Termodyfuzji
IPPT, PAN - Poznań

MECHANIKA SILNIE ODKSZTAŁCALNYCH OŚRODKÓW
O ANIZOTROPOWEJ PRZEPUSZCZALNOŚCI

1. Wstęp

Mechanika odkształcalnych ośrodków porowatych wypełnionych cieczą stanowi istotną część teorii ośrodków wieloskładnikowych. Znaczenie tej dziedziny wyznaczają liczne zagadnienia inżynierskie z zakresu mechaniki gruntów, mechaniki skał, kopalnictwa ropy naftowej, teorii filtracji, biomechaniki czy metalurgii proszków. Teoria ośrodków porowatych bez wypełnienia lub wypełnionych cieczą znajduje również zastosowanie w badaniach elementów konstrukcji jak np. porowatych łożysk, wibroizolatorów, rurek cieplnych czy też w badaniach własności nowych materiałów o tzw. porowatości konstrukcyjnej.

Tematyka ta zawiera bogatą literaturę poczynając od pracy Terzagiego [74], w której zaproponował model ośrodka konsolidującego oraz Biota [9] autora matematycznej teorii konsolidacji. Monograficzne opracowanie wyników w tej dziedzinie do roku 1964 zawiera praca Derskiego [20]. Zarys rozwoju teorii konsolidacji wraz z krytycznym omówieniem światowych kierunków badań przedstawiła Sobczyńska [69]. Przeglądu zagadnień dynamicznych rozważanych w ramach teorii konsolidacji dokonał ostatnio Dzięcielak [25]. Dorobek badań radzieckich w tej dziedzinie za lata 1917 - 1967 prezentuje praca Tsytoicha i Zareckiego [76].

Należy zaznaczyć, że większość prac z tej dziedziny za punkt wyjścia przyjmuje liniową teorię Biota [9], [11-12].

Miejsce tej teorii w mechanice ośrodków ciągłych dyskutował Solecki [70], natomiast tensorowy charakter jej równań ruchu oraz twierdzenie o jednoznaczności przedstawił Ignaczak [37].

W teorii Biota przyjmuje się, że porowatość, przepuszczalność i gęstości składników są stałe, ponadto, że porowatość objętościowa równa jest powierzchniowej. Założenie o stałej porowatości jest istotnym mankamentem teorii gdyż właśnie zmiana porowatości jest odpowiedzialna za proces konsolidacji. O jej znacznych zmianach w czasie deformacji świadczą liczne obserwacje i doświadczenia nawet w zakresie małych odkształceń (por. [8]). Podobnie, stała przepuszczalność eliminuje wpływ deformacji ośrodka na przepływ cieczy przez porowaty szkielet. Trudne do zaakceptowania jest również założenie równości pomiędzy objętościową i powierzchniową porowatością zwłaszcza dla ośrodków anizotropowych, dla których porowatość powierzchniowa zależy od kierunku.

Pewne uzupełnienie w tym zakresie stanowią prace Hsieh, Yewa [36] i Nikolajewskiego [55-56], w których dyskutuje się zmiany porowatości.

Z punktu widzenia ruchu ośrodka w teorii Biota szkielet i całkowita ciecz wypełniająca pory charakteryzują się odpowiednio jednym polem prędkości. Dla takiego przypadku Biot [11] analizował sprzężenie ruchu przez masę jako efekt zapostulowanej energii kinetycznej dla ośrodka dwufazowego w postaci pełnej funkcji kwadratowej. Inne natomiast podejście zaproponował Derski [21] dokonując podziału cieczy na swobodną charakteryzującą się własnym polem prędkości oraz ciecz uwięzioną w szkielecie i poruszającą się z jego prędkością. Założył on przy tym, że porowatość objętościowa i powierzchniowa są stałe lecz nie są sobie równe. W rezultacie uzyskał prostszą postać równań ruchu w porównaniu z Biotem, inną interpretację fazowych tensorów naprężenia oraz jasne określenie wielkości występujących w tych równaniach jednakże przy założeniu, że ciecz swobodna i uwięziona nie wymieniają masy w czasie ruchu. Równania ruchu Derskiego zostały następnie potwierdzone

w pracach [22-23]. Zagadnienie sprzężenia przez masę, w oparciu o wyniki Biota oraz koncepcję Derskiego, dyskutował także Kowalski [41] w ramach teorii mieszanin wykazując współrzędne normalne.

Wymienione wyżej prace, bogatsze z fizycznego punktu widzenia, nie eliminują jednak niedostatków omawianych w liniowej teorii Biota. Nie wyjaśniają także w pełni istoty sprzężenia przez masę w ośrodku porowatym wypełnionym cieczą, której przyczyny tkwią w charakterze geometrycznej struktury porów.

Możliwość uwzględnienia wpływu zmian omawianych parametrów na zjawiska mechaniczne w mieszaninie szkielet - ciecz daje teoria ośrodków heterogenicznych sformułowana przez Truesdella i Toupiną [75]. Sposób jej wykorzystanie do ośrodka porowatego rozważał Nigmatulin [57-58]. W ramach tej teorii można wyróżnić dwa sposoby opisu ośrodka. W pierwszym, materiał porowaty wypełniony cieczą traktuje się formalnie jako mieszaninę nie uwzględniając wpływu wewnętrznej struktury geometrycznej szkieletu na wzajemne oddziaływanie faz. Taki sposób opisu prezentują liczne prace wśród których wymienić należy przede wszystkim: Adkinsa [1], Atkina [3], Grena, Naghdiego [31-33], Greena Steela [34], Koellera, Zebiba [39]. Głównie dotyczą one sposobu określenia energii, entropii lub też dyskusji nad formalizmem związków konstytutywnych przy całkowitym pominięciu charakteru wewnętrznej struktury porów.

Inne podejście reprezentują prace Morlanda [52-53], Müllera [54], Prevosta [61], Raatsa, Klute [63-64], Ramirez [65] oraz Szefera [73], w których modyfikuje się geometryczny opis mieszaniny [75] zakładając, że każdy składnik scharakteryzowany jest własną objętością i powierzchnią. Strukturę geometryczną porów charakteryzuje się w tym przypadku porowatością objętościową. Przyjmuje się ponadto, że porowatość powierzchniowa i objętościowa są równe co podobnie jak u Biota trudne jest do zaakceptowania. Nie dyskutuje się natomiast zmian własności przepuszczalności szkieletu i jej wpływu na przepływ cieczy.

Nie ma też związku pomiędzy strukturą porów i kierunkowymi własnościami mechanicznymi szkieletu. Tak np. w nieliniowej teorii konsolidacji sformułowanej przez Szefera [73] przepuszczalność jest konsekwencją matematycznej formy związku konstytutywnego dla sił dyfuzji nie zaś zadaną własnością charakteryzującą szkielet.

Do tej grupy należy również zaliczyć pracę Auriaulte [4] oraz Biota [13]. W pierwszej z nich rozważa się dynamiczne zagadnienia ośrodków porowatych wypełnionych cieczą o własnościach okresowych w mikroskali wykorzystując metodę homogenizacji. Druga analizuje skończone odkształcenia ośrodka porowatego postulując potencjał energii swobodnej jako funkcji zależnej od tensora odkształcenia szkieletu oraz zawartości cieczy.

Podsumowując stan badań w tym zakresie można stwierdzić, że w obecnej chwili brak jest jednolitej teorii ośrodków porowatych wypełnionych cieczą obejmującej wszystkie przedstawione wyżej zagadnienia. W tej pracy podjęto próbę sformułowania takiej teorii, której zakres omówimy w następnym rozdziale.

2. Cel i zakres pracy

Jak zaznaczyliśmy we wstępie, zmiany porowatości oraz przepuszczalności w procesie deformacji ośrodka porowatego wypełnionego cieczą mogą mieć istotny wpływ na fizyczny charakter zachodzących w nim zjawisk. W omawianych tam pracach geometryczna struktura szkieletu reprezentowana jest poprzez porowatość objętościową, która jest izotropową funkcją skalarną i nie charakteryzuje ona anizotropowych własności tej struktury. Wskutek tego eliminuje się z teorii, na etapie jej formułowania, możliwość wyjaśnienia istoty sprzężenia masowego, które może wystąpić w równaniach ruchu ośrodka nawet w przypadku pełnej izotropii (jeżeli porowatość objętościowa i powierzchniowa nie są sobie równe). Nie daje to również możliwości zbadania wpływu wewnętrznej struktury szkieletu na charakter oddziaływań pomiędzy polami naprężeń składników oraz na siły dyfuzji. Ponadto, trudny jest do stwierdzenia fakt powiązania struktury szkieletu z jego kierunkowymi własnościami mechanicznymi.

Mając na uwadze przedstawione powyżej istotne mankamenty dotychczasowych rozważań w tej dziedzinie, istnieje potrzeba możliwie pełnego opisu zjawisk mechanicznych silnie odkształcalnego porowatego ośrodka wypełnionego cieczą z uwzględnieniem charakterystyki geometrycznej struktury szkieletu. Temu właśnie celowi poświęcona jest niniejsza praca.

Ponieważ struktura geometryczna rzeczywistych ośrodków porowatych jest bardzo złożona i trudna do teoretycznego opisu w mechanice powszechnie wprowadza się odpowiednie ich modele. Według Dulliena [24] dla materiałów o małych i średnich wartościach porowatości uzasadniony jest model kanalikowy, natomiast dla większych porowatości bardziej odpowiedni jest model ośrodka ciągłego (cieczy) z wtrąceniami w postaci cząstek ciała stałego (drag model).

W naszych rozważaniach wykorzystamy kanalikowy model.

ośrodka, którego wewnętrzną strukturę geometryczną scharakteryzujemy tensorem strukturalnej przepuszczalności (rozdział 3). Pozwoli to, dla ustalonego modelu, określić oryginalne o istotnym znaczeniu dla teorii związku pomiędzy przepuszczalnością ośrodka oraz porowatością objętościową i powierzchniową na drodze czysto geometrycznych rozważań. Na tej podstawie np. można stwierdzić, że dla ośrodka izotropowego porowatość objętościowa jest zawsze większa od powierzchniowej.

Proponowany opis struktury pozwala wyjaśnić koncepcję cieczy uwięzionej i swobodnej wprowadzonej do teorii przez Derskiego [21]. Prowadzi to do podziału ośrodka na składniki kinematyczne rozróżnialne z punktu widzenia odpowiedniego pola prędkości, (rozdz. 4). Ponadto daje możliwość jasnej interpretacji istoty sprzężenia masowego pomiędzy składnikami.

Uwzględnienie struktury geometrycznej szkieletu przy formułowaniu związków fizycznych pozwala ustalić jej wpływ na charakter oddziaływań składników pomiędzy sobą w przypadku teorii nieliniowej (rozdz. 5) oraz teorii liniowej (rozdział 6). Zauważamy, że tensor strukturalnej przepuszczalności wpływa nie tylko na zmianę pola naprężeń w cieczy przepływającej przez szkielet ale także może być odpowiedzialny za mechaniczne własności kierunkowe porowatego szkieletu (p. 6.2). Pozwala przy tym jasno zinterpretować fakt, że ciśnienie hydrostatyczne w porach o anizotropowej strukturze wywołuje nie tylko objętościowe zmiany szkieletu ale również zmiany jego postaci.

Analiza związku konstytutywnego dla sił dyfuzji pozwala wyodrębnić wpływ struktury porów a następnie efekt niejednorodności pola prędkości cieczy na te siły. Dalsze rozważanie sił dyfuzji wykazują, że liniowe prawo przepływu Darcy, paraboliczne prawa przepływu Muskata i Forchheimera oraz odcinkowo liniowe prawo przepływu (z początkowym gradientem hydraulicznym) są szczególnym ich przypadkiem.

Niniejsza praca ma na celu sformułowanie możliwie ogólnej nieliniowej teorii ośrodka dwufazowego umożliwiającej analizę wpływu struktury szkieletu na zachodzące w czasie

deformacji zjawiska jak również występujących w teorii sprężenia. Cel ten uzyskuje się na drodze konsekwentnie stosowanych zasad mechaniki kontinuum przy opisie kinematyki i dyskusji równań bilansowych oraz formułowaniu związków konstytutywnych.

W rozważaniach przyjęto, że rodzaj deformacji ośrodka określony jest deformacją szkieletu, który każdorazowo wyznacza kształt obszaru zajmowanego przez ośrodek. Pozwoliło to na posługiwanie się przy opisie wielkościami dostępnymi do pomiaru.

Przy formułowaniu równań konstytutywnych wykorzystano twierdzenia o reprezentacji izotropowych funkcji tensorowych o argumentach tensorowych. Umożliwia to ustalenie najbardziej ogólnej postaci funkcji konstytutywnych dla przyjętych argumentów. Jest to postać dogodna do oceny jakości i rzędu występujących w teorii sprężenia a także jest odpowiednim punktem wyjścia do uzyskania teorii zlinearyzowanej.

Otrzymane wyniki odnoszone są do teorii znanych z podkreśleniem występujących różnic jakościowych.

W rozważaniach pomija się efekty termiczne jak również możliwość aktywności chemicznej składników ośrodka.

Niniejsze opracowanie wykorzystuje badania własne autora w tym zakresie [42-45] a także wyniki dotychczas niepublikowane.

3. Charakterystyka geometrycznej struktury ośrodka

3.1. Porowatość objętościowa, powierzchniowa, przepuszczalność.

Zasadniczy wpływ na zjawiska mechaniczne w odkształcalnych ośrodkach porowatych wypełnionych cieczą, obok fizycznych własności materiału, ma geometryczna struktura porowatego szkieletu. Badania poświęcone ustaleniu parametrów w pełni charakteryzujących strukturę porów jak też związków pomiędzy nimi stanowią istotną część ogólnej teorii ośrodków porowatych i są przedmiotem wielu prac na ten temat. Historyczny przegląd tych badań do roku 1957 oraz krytyczną ich ocenę zawiera monografia Scheideggere [66], natomiast zarys obecnego stanu badań w tej dziedzinie omawia Dullien w monografii [24].

W dotychczas rozważanych zagadnieniach mechaniki odkształcalnych ośrodków porowatych dla scharakteryzowania geometrycznej struktury szkieletu wykorzystuje się porowatość objętościową f_v i symetryczny tensor przepuszczalności \mathbf{K} występujący w liniowym prawie przepływu Darcy.*) Należy zaznaczyć, że f_v reprezentuje porowatość efektywną określającą pojemność wzajemnie przenikających się porów na jednostkę objętości ośrodka. Tensor \mathbf{K} natomiast charakteryzuje opór porowatego szkieletu w odniesieniu do przepływającej przez niego cieczy. W ostatnim okresie przy analizie oddziaływań mechanicznych pomiędzy fazami cieczy i szkieletu uwzględnia się również porowatość powierzchniowa

*) Prawo Darcy zostało ustalone doświadczalnie dla ośrodków izotropowych (por. [66]). Jego uogólnienia na ośrodki anizotropowe dokonał Ferrandon [28], zakładając proporcjonalność pomiędzy prędkością cieczy i potencjałem działającym na nią siłą. Podobny wynik otrzymał Litwiniszyn [50] wykorzystując analogię do procesu dyfuzji. Teoretyczny wywód prawa Darcy poprzez odpowiednie uśrednianie równań Naviera-Stokesa przedstawiono w pracy Neumana [59] oraz Poreha i Elata [60].

wę f_s , która określa udział powierzchni zajmowanej przez pory na powierzchni jednostkowej ośrodka porowatego.

Pomiędzy wymienionymi wielkościami, pomimo że dotyczą tej samej geometrycznej struktury porów, nie udało się jak do tej pory znaleźć zadowalających związków. Np. Biot [10] i Morland [53] a także Szefer [73] i Raats [62] wprowadzając pojęcie tzw. przekroju statystycznego utrzymują że

$$(3.1) \quad f_v = f_s.$$

Równość ta wydaje się być słuszna jedynie dla porowatości powierzchniowej uśrednionej w odniesieniu do jednostki objętości ośrodka na co wskazują wyniki pracy [46]. Równości (3.1) nie daje się uzasadnić szczególnie w przypadku gdy porowaty szkielet ma anizotropową strukturę. Wówczas porowatość powierzchniowa jest funkcją kierunku podczas gdy porowatość objętościowa jest izotropową funkcją skalarną.

Określenie związku pomiędzy K i wielkościami f_v i f_s nie jest możliwe na drodze geometrycznych rozważań ponieważ nie ma czysto geometrycznej interpretacji. Dla ustalenia takiego związku w tym przypadku najczęściej rozważa się przepływ cieczy opisany równaniem Hagen-Poiseuille'a lub Naviera-Stokesa w kapilarnym modelu ośrodka porowatego. Szersze zastosowanie zwłaszcza w metalurgii proszków znalazły związki zaproponowane w oparciu o taką analizę przez Kozeny i Carmana (por. [67]) dla izotropowych ośrodków porowatych, dla których

$$(3.2) \quad k = f (f_v^3),$$

gdzie k jest współczynnikiem przepuszczalności.

Interesującego przeglądu prac dotyczących zależności porowatość - przepuszczalność, wynikających z analizy równań Naviera-Stokesa dla ośrodków porowatych o strukturze prętowej, dokonano w pracy Kołodziejca [40].

Należy również nadmienić, że tensor K używany przy rozważaniu zjawisk hydrodynamicznych w ośrodku porowatym nie ma jasnego związku z kierunkowymi własnościami mecha-

nicznymi szkieletu. Jednak obserwacja i intuicja fizyczne wskazuje, że własności te są ze sobą sprzężone. Autorowi nie są znane badania rozstrzygające ten problem.

Na podstawie omawianych wyników stwierdzić można, że pozostaje nadal otwarty problem ustalenia zależności pomiędzy przepuszczalnością szkieletu i jego porowatością na poziomie rozważań geometrycznych, a jednocześnie określenie przebiegu zmiany porowatości powierzchniowej w zależności od kierunku dla ośrodka o anizotropowej strukturze porów.

Próbie rozwiązania wymienionych wyżej problemów, dla kanalikowego modelu ośrodka porowatego, w oparciu o wielkości geometryczne: wektor i tensor strukturalnej przepuszczalności (por. [42]) przedstawimy poniżej.

3.2. Wektor i tensor strukturalnej przepuszczalności

● Wektor strukturalnej przepuszczalności

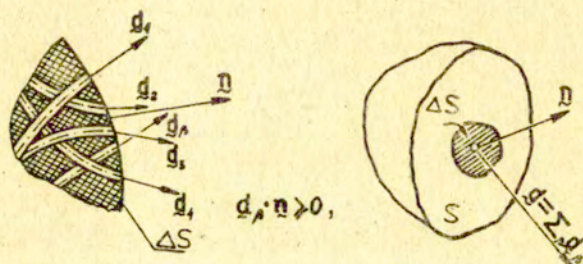
Podstawową cechą porowatego materiału jest przepuszczalność (możliwość przepływu płynu przez pory). Fakt ten wymaga aby pory były połączone ze sobą (drożne). Tworzą one w ten sposób bardzo złożoną strukturę wewnętrzną trudną do teoretycznego opisu. W naszych rozważaniach posłużymy się modelem ośrodka, którego strukturę tworzą wzajemnie przenikające się mikrokanaliki o dowolnym kształcie i wewnętrznym rozkładzie.

W ośrodku takim mogą występować zjawiska, które wymagają uwzględnienia kształtu i charakteru porów w skali mikro. W większości zagadnień fizycznych, zwłaszcza przy analizie przepływów przez ośrodki porowate, bardziej odpowiednia jest makroskopowa charakterystyka struktury porów i temu poświęcimy uwagę. W tym celu materiał porowaty traktujemy jako ośrodek ciągły. Zakładamy, że każdy dowolnie mały element objętości dV zawiera jednocześnie materiał szkieletu i mikropory. Oznaczając przez h i H wymiary charakterystyczne odpowiednio w mikro i makroskali, natomiast przez D

wymiar charakterystyczny dla elementu dV , wymagamy aby spełniony był następujący warunek

$$(3.2.1) \quad h \ll D \ll H .$$

Warunek ten oznacza, że objętość dV - mała w porównaniu z wymiarami ośrodka - zawiera dostatecznie dużą ilość porów dla ustalenia ich średnich własności. Mikropory szkieletu o kanalikowej strukturze wewnętrznej charakteryzujemy wektorami d_β , $|d_\beta| = O(h)$, jak na rys. 1. Kierunki d_β są stycznymi



Rys. 1. Model ośrodka porowatego

ne do osi odpowiednich mikrokanałków, a ich moduły reprezentują wielkości przekrojów normalnych mikroporów w miejscu przecięcia. Jest to charakterystyka w mikroskali. Z makroskopowego punktu widzenia, biorąc pod uwagę warunek (3.2.1), w dowolnym punkcie ośrodka możemy zdefiniować następujący wektor

$$(3.2.2) \quad n^p(x, n) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta d}{\Delta S}, \quad \Delta d = \sum_\beta d_\beta .$$

Zakładamy przy tym, że granica (3.2.2) istnieje i ma wartość skończoną. Wektor n^p nazywamy wektorem strukturalnej przepuszczalności. Reprezentuje on średni kanał (pory) odniesiony do jednostki powierzchni ośrodka i zależy od położenia rozważanego punktu x oraz wektora normalnego n do

powierzchni przekroju w tym punkcie.

● Tensor strukturalnej przepuszczalności

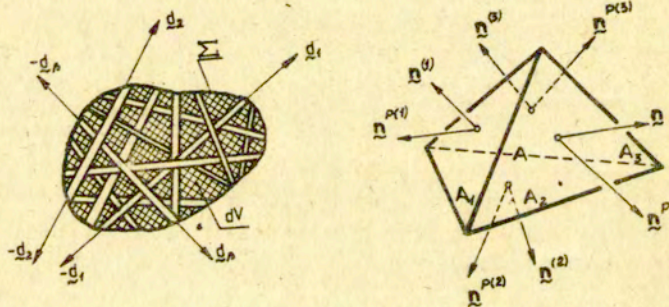
Rozważamy elementarną objętość dV ośrodka zawierającą punkt \mathbf{x} i ograniczoną zamkniętą powierzchnią Σ . Zakładając, że w takiej objętości mikrokanaliki są prostoliniowe o niezmiennych przekrojach poprzecznych, (rys.2), mamy

$$(3.2.3) \quad \sum_{\Sigma} \mathbf{d}_n = \mathbf{0} .$$

Biorąc pod uwagę sumę (3.2.3) oraz definicję (3.2.2) dla zamkniętej powierzchni Σ , otrzymujemy

$$(3.2.4) \quad \int_{\Sigma} \mathbf{n}^p d\Sigma = \mathbf{0} .$$

Powyższy warunek zastosujemy do elementarnego czworościanu pokazanego na rys. 2. Przyjmujemy, że na każdej z jego



Rys. 2. Model kanalikowej struktury porów w elementarnej objętości dV

ścian. wektor strukturalnej przepuszczalności jest funkcją odpowiedniego wektora normalnego, czyli

$$\mathbf{n}^p = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) , \quad \mathbf{n}^{p(l)} = \mathbf{f}^{(l)}(\mathbf{x}, \mathbf{n}^{(l)}) .$$

Na podstawie (3.2.4), dla powierzchni ograniczającej czworościan, mamy

$$(3.2.5) \quad \mathbf{n}^p = -\frac{1}{A} \{ A_1 \mathbf{n}^{p(1)} + A_2 \mathbf{n}^{p(2)} + A_3 \mathbf{n}^{p(3)} \}.$$

Ponieważ dla dowolnej powierzchni zamkniętej S spełniony jest warunek

$$\int_S \mathbf{n} \, dS = \mathbf{0}$$

zatem jest on słuszny również dla powierzchni ograniczającej czworościan i przyjmuje postać

$$(3.2.6) \quad \mathbf{n} = -\frac{1}{A} \{ A_1 \mathbf{n}^{(1)} + A_2 \mathbf{n}^{(2)} + A_3 \mathbf{n}^{(3)} \}.$$

Uwzględniając (3.2.6) w (3.2.5), otrzymujemy zależność

$$\mathbf{f} \left\{ -\frac{1}{A} A_i \mathbf{n}^{(i)} \right\} = -\frac{1}{A} \sum_i A_i \mathbf{f}^{(i)}(\mathbf{n}^{(i)}).$$

Na jej podstawie stwierdzamy, że \mathbf{f} jest liniową funkcją \mathbf{n} i wektor \mathbf{n}^p można zapisać jak następuje

$$(3.2.7) \quad \mathbf{n}^p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$$

gdzie \mathbf{P} jest tensorem drugiego rzędu i nazywamy go tensorem strukturalnej przepuszczalności. Jak wykazano w dodatku tensor \mathbf{P} jest symetryczny, czyli

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$$

Dla ośrodka z izotropową przepuszczalnością \mathbf{P} musi być tensorem izotropowym

$$(3.2.8) \quad \mathbf{P} = \lambda \mathbf{1}$$

gdzie λ , jak wykażemy poniżej, reprezentuje porowatość powierzchniową.

Należy nadmienić, że tensor \mathbf{P} ma czysto geometryczny sens i różni się od tensora przepuszczalności \mathbf{K} reprezentującego opór przepływu przez ośrodek porowaty. Wzajemne relacje pomiędzy \mathbf{P} i \mathbf{K} będą widoczne w p. 6.2. niniejszej pracy.

Wykorzystując geometryczną interpretację wektora łatwiej zauważyć, że porowatość powierzchniowa w zależności od kierunku można zapisać jak następuje

$$(3.2.9) \quad f_s^{(n)} = \frac{\mathbf{n}^p \cdot \mathbf{n}^p}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^p},$$

lub uwzględniając (3.2.7), mamy

$$(3.2.10) \quad f_s^{(n)} = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}^2 \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \mathbf{n}}.$$

Na podstawie (3.2.10) stwierdzamy, że dla ośrodka izotropowego porowatość powierzchniowa jest równa wartościom głównym izotropowego tensora \mathbf{P} , tj. $f_s = \lambda$ i nie zależy od wyboru orientacji przekroju.

3.3. Związek porowatość - przepuszczalność

Przeanalizujemy obecnie zależność pomiędzy porowatością objętościową i przepuszczalnością dla przyjętego modelu ośrodka. Wykorzystamy przy tym podstawowe własności rachunku prawdopodobieństwa. W tym celu rozważamy elementarną objętość, w kształcie sześcianu o jednostkowych bokach, zawierającą punkt \mathbf{x} . Krawędzie sześcianu wybieramy równoległe do osi układu współrzędnych x_i , które są jednocześnie osiami głównymi dla tensora \mathbf{P} . Ponieważ \mathbf{P} jest tensorem symetrycznym, to jego wartości główne $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ są wielkościami rzeczywistymi. W takim przypadku pory reprezentowane są przez trzy wzajemnie prostopadłe i przenikające się kanaliki, których przekroje normalne są odpowiednio równe λ_i . Na podstawie (3.2.10) stwierdzamy, że wielkości λ_i reprezentują jednocześnie porowatości powierzchniowe na ściankach sześcianu prostopadłych odpowiednio do osi x_i , czyli

$$(3.3.1) \quad \lambda_1 = f_s^{(1)}, \quad \lambda_2 = f_s^{(2)}, \quad \lambda_3 = f_s^{(3)}.$$

Otoczenie punktu x składa się z cząstek szkieletu i porów. Dla losowo wybranego punktu ξ tego otoczenia możemy zdefiniować następujące zdarzenia:

A - punkt ξ należy do porów,

A_1, A_2, A_3 - przez punkt ξ możliwy jest przepływ cieczy odpowiednio w kierunkach x_1, x_2, x_3 .

Wykorzystując geometryczną definicję prawdopodobieństwa [51], mamy

$$(3.3.2) \quad f_v(x) = \mathcal{P}(A)$$

oraz

$$(3.3.3) \quad \mathcal{P}(A_1) = f_s^{(1)}, \quad \mathcal{P}(A_2) = f_s^{(2)}, \quad \mathcal{P}(A_3) = f_s^{(3)}.$$

Ponieważ $f_v(x)$ jest porowatością efektywną, to zdarzenie A jest sumą zdarzeń A_1, A_2, A_3 . Na podstawie zależności dla prawdopodobieństwa sumy trzech niewykluczających się zdarzeń, równość (3.3.2) możemy zapisać w następującej postaci

$$(3.3.4) \quad \begin{aligned} f_v = \mathcal{P}(A) &= \mathcal{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \\ &= \mathcal{P}(A_1) + \mathcal{P}(A_2) + \mathcal{P}(A_3) - \mathcal{P}(A_1 \cap A_2) + \\ &- \mathcal{P}(A_2 \cap A_3) - \mathcal{P}(A_3 \cap A_1) + \mathcal{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę związki (3.3.3) widzimy, że pierwsze trzy wyrazy sumy (3.3.4) reprezentują sumę porowatości powierzchniowych. Trzy następne składniki, przy założeniu że zdarzenia A_1, A_2, A_3 mają dodatnie prawdopodobieństwa; możemy zapisać jak następuje

$$(3.3.5) \quad \begin{aligned} \mathcal{P}(A_1 \cap A_2) &= \mathcal{P}(A_1) \cdot \mathcal{P}(A_2) \cdot \frac{\mathcal{P}(A_1|A_2)}{\mathcal{P}(A_1)}, \\ \mathcal{P}(A_2 \cap A_3) &= \mathcal{P}(A_2) \cdot \mathcal{P}(A_3) \cdot \frac{\mathcal{P}(A_2|A_3)}{\mathcal{P}(A_2)}, \\ \mathcal{P}(A_3 \cap A_1) &= \mathcal{P}(A_3) \cdot \mathcal{P}(A_1) \cdot \frac{\mathcal{P}(A_3|A_1)}{\mathcal{P}(A_3)}, \end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{P}(A_i|A_j)$, $i, j = 1, 2, 3$, oznacza prawdopodobieństwo warunkowe. Ostatni składnik sumy (3.3.4) przyjmuje postać

$$(3.3.6) \quad \mathcal{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathcal{P}(A_1) \cdot \mathcal{P}(A_2) \cdot \mathcal{P}(A_3) \times \frac{\mathcal{P}(A_2|A_1) \mathcal{P}(A_3|A_2 \cap A_1)}{\mathcal{P}(A_2) \mathcal{P}(A_3)}$$

Uwzględniając (3.3.1) - (3.3.6) stwierdzamy, że porowatość objętościowa f_v związana jest z tensorem \mathbf{P} następującą zależnością

$$(3.3.7) \quad f_v = I_1^{\mathbf{P}} - a I_2^{\mathbf{P}} + b I_3^{\mathbf{P}},$$

gdzie

$$\begin{aligned} I_1^{\mathbf{P}} &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ I_2^{\mathbf{P}} &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3, \\ I_3^{\mathbf{P}} &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3, \end{aligned}$$

są podstawowymi niezmiennikami tensora \mathbf{P} . Współczynniki a i b charakteryzują mikrostrukturę ośrodka i dla przepuszczalności izotropowej mają postać

$$a = \frac{\mathcal{P}(A_2|A_1)}{\mathcal{P}(A_1)}, \quad b = \frac{\mathcal{P}(A_2|A_1) \mathcal{P}(A_3|A_2 \cap A_1)}{\mathcal{P}(A_2) \mathcal{P}(A_3)},$$

żeś dla przypadku anizotropowego

$$a = \frac{\mathcal{P}(A_1 \cap A_2) + \mathcal{P}(A_2 \cap A_3) + \mathcal{P}(A_3 \cap A_1)}{I_2^{\mathbf{P}}}$$

natomiast b pozostaje bez zmian.

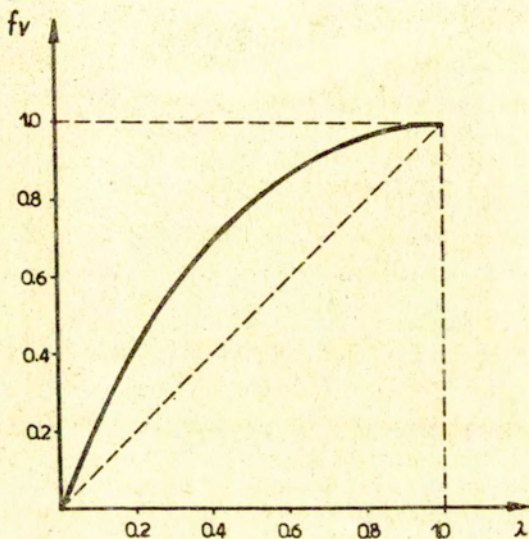
Dla ośrodka z izotropową przepuszczalnością mamy $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \equiv \lambda$, zatem zależność (3.3.7) przyjmuje postać

$$(3.3.8) \quad f_v = 3\lambda - 3a\lambda^2 + b\lambda^3.$$

Na tej podstawie możemy określić zmiany porowatości objętościowej w zależności od λ dla modelu o kwadratowym przekroju kanalików. Dla tak przyjętej struktury

$$a = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad b = \frac{1}{\lambda^2} \sqrt{\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Przebieg tych zmian przedstawiono na rys. 3. Wynika z niego



Rys. 3. Przebieg zmian f_v w zależności od λ

istotny wniosek, że

■ dla ośrodka izotropowego porowatość objętościowa jest zawsze większa od porowatości powierzchniowej.

Na podobnej drodze przeprowadzono analizę zmian zależności porowatość - przepuszczalność dla ośrodków anizotropowych, której wyniki zawiera praca [47].

4. Kinematyka

oraz równania bilansu ośrodka dwufazowego

4.1. Opis deformacji

W rozważaniach posługujemy się kontynualnym modelem ośrodka dwufazowego \mathcal{B} składającego się z porowatego odkształcalnego szkieletu \mathcal{B}^s i wypełniającej pory cieczy \mathcal{B}^f . Zakładamy przy tym, że

- 1° \mathcal{B} jest kontinuum w takim sensie, że w dowolnie wybranej elementarnej objętości ośrodka znajdują się jednocześnie cząstki szkieletu i cieczy,
- 2° szkielet \mathcal{B}^s i ciecz \mathcal{B}^f są obszarami spójnymi (wyklucza to izolowane pory lub luźne cząstki szkieletu otoczone cieczą),
- 3° dowolnie wybrana objętość ośrodka jest równa sumie objętości materiału szkieletu i objętości cieczy wypełniającej pory, tj.

$$V = V^s + V^f$$

w odróżnieniu od założenia teorii mieszanin, gdzie

$$V = V_1 = V_2 = \dots = V_n,$$

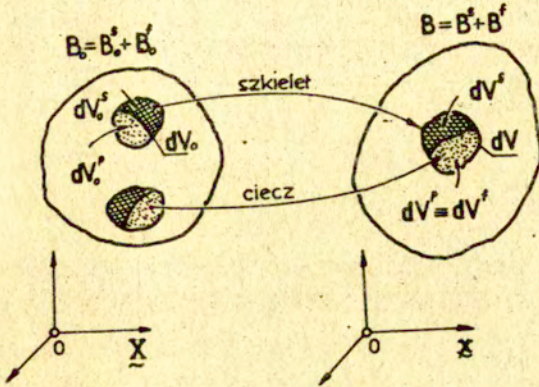
- 4° ośrodek jest statystycznie jednorodny,
- 5° struktura wewnętrzna porowatego szkieletu scharakteryzowana jest strukturalnym tensorem przepuszczalności \mathbf{P} .

Ruch cząstek poszczególnych faz ośrodka względem ortogonalnego kartezjańskiego układu współrzędnych opisują równanie

$$(4.1.1) \quad \mathbf{x}^\alpha = \mathbf{X}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t) \quad \alpha = \begin{cases} s - \text{szkielet} \\ f - \text{ciecz,} \end{cases}$$

gdzie \mathbf{x}^α oznacza położenie cząstki składnika α w konfigu-

racji bieżącej w chwili τ , która w konfiguracji początkowej, $\tau = 0$, zajmowała położenie \mathbf{X}^α (rys. 4.). Przyjmujemy,



Rys. 4. Deformacje ośrodka porowatego

że funkcje (4.1.1) są jednowartościowe, ciągłe i posiadają ciągłe pochodne. Ze względu na warunek ciągłości deformacji przyjmujemy ponadto, że

$$\det \left\{ \partial x_i^\alpha / \partial X_M^\alpha \right\}, \quad (\text{nie sumować po } \alpha).$$

Rozważamy ruch takich cząstek szkieletu i cieczy, które w chwili $\tau = t$ zajmują w konfiguracji aktualnej to samo położenie, tj.

$$\mathbf{x}^s = \mathbf{x}^f \equiv \mathbf{x},$$

i wówczas prędkość cząstek składnika α jest

$$(4.1.2) \quad \mathbf{v}^\alpha = \frac{D}{Dt} \mathbf{x}$$

gdzie $\frac{D}{Dt}$ oznacza różniczkowanie względem t dla ustalonych \mathbf{X}^α . Tensory

$$(4.1.3) \quad F_{iM} = \partial x_i / \partial X_M^s, \quad L_{ij} = \partial v_i^f / \partial x_j, \quad i, j, M = 1, 2, 3$$

reprezentują odpowiednio gradient deformacji szkieletu

1 gradient prędkości cieczy.

Ponieważ kształt obszaru zajmowanego przez ośrodek określony jest kształtem porowatego szkieletu stąd zmianę objętości ośrodka dla zadanej deformacji określa jacobian przekształcenia szkieletu

$$(4.1.4) \quad J = \det \{ \mathbf{F} \} = \frac{dV}{dV_0} .$$

Jeżeli początkową porowatość objętościową oznaczymy przez

$$f_v^0 = \frac{dV_0^p}{dV_0} ,$$

natomiast porowatość aktualną odniesioną odpowiednio do konfiguracji aktualnej i początkowej, jako

$$f_v = \frac{dV^p}{dV} ,$$

$$f_v^L = \frac{dV^p}{dV_0} ,$$

to wykorzystując (4.1.4) , mamy

$$(4.1.5) \quad \frac{dV^p}{dV_0^p} = \frac{f_v^L}{f_v^0} = J \frac{f_v}{f_v^0} .$$

Zależność ta opisuje zmianę objętości porów w deformowanym ośrodku w zależności od początkowej i aktualnej porowatości.

Uwzględniając założenia dotyczące analizowanego ośrodka, dla każdego składnika α możemy zdefiniować masową gęstość dyfuzyjną ^{*)} jako wielkość średnią odniesioną do jednostki objętości ośrodką

$$(4.1.6) \quad \bar{g}^\alpha = \frac{1}{dV} \int_{dV^\alpha} g^\alpha dV$$

gdzie g^α i dV oznaczają odpowiednio gęstość składnika α oraz element objętości rozważane w mikroskali. Średnią gęstość składnika α odniesioną do jednostkowej jego objętoś-

^{*)} W literaturze polskiej brak jednomyślności co do terminologii tak zdefiniowanej wielkości. Używa się także określeń równoznacznych: gęstość parcjalna, gęstość pozorna lub przedłużona.

ci określa związek

$$(4.1.7) \quad \hat{S}^\alpha = \frac{1}{dV^\alpha} \int_{dV^\alpha} S^\alpha dv = \frac{1}{n^\alpha} \bar{S}^\alpha,$$

gdzie $n^\alpha = \frac{dV^\alpha}{dV}$, $0 \leq n^\alpha \leq 1$, $\sum_{\alpha f} n^\alpha = 1$,

i dla $\alpha = f \rightarrow n^f \equiv f_v$; $\alpha = s \rightarrow n^s = 1 - f_v$.

Na podstawie (4.1.7) stwierdzamy, że dla składników jednorodnych w mikroskali, $\hat{S}^\alpha = S^\alpha$ i mamy

$$\bar{S}^\alpha = n^\alpha S^\alpha.$$

4.2. Równania bilansu masy

● Bilans masy składników fizycznych

Równanie ciągłości masy dla poszczególnych faz ośrodka, przy pominięciu oddziaływań chemicznych, możemy zapisać bądź to w postaci całkowej

$$(4.2.1) \quad \int_V \frac{\partial}{\partial t} \bar{S}^\alpha dV + \int_S \bar{S}^\alpha \mathbf{v}^\alpha \cdot \mathbf{n} dS = 0,$$

lub w postaci lokalnej

$$(4.2.2) \quad \frac{\partial \bar{S}^\alpha}{\partial t} + \text{div}(\bar{S}^\alpha \mathbf{v}^\alpha) = 0.$$

Równanie (4.2.2) dla szkieletu można zapisać alternatywnie

$$(4.2.3) \quad \frac{\partial \bar{S}^s}{\partial t} = J = \frac{dV}{dV_0}$$

gdzie \bar{S}^s i \bar{S}^s są gęstościami szkieletu odpowiednio przed i po deformacji. Jeżeli materiał szkieletu jest nieściśliwy, $S^s = S^s$, to otrzymujemy bardzo użyteczną zależność

$$(4.2.4) \quad f_v = 1 - J^{-1}(1 - f_v^0)$$

określającą porowatość aktualną w zależności od porowatości początkowej dla zadanej deformacji.

Równanie ciągłości dla cieczy można przedstawić w po-

staci równowaznej rozważając zmianę zawartości cieczy zdefiniowaną jak następuje

$$(4.2.5) \quad \zeta = \frac{\varrho^f dV^p - \varrho_0^f dV_0^p}{\varrho^f dV^p} .$$

Wykorzystując zależność (4.1.5) zmianę zawartości cieczy odniesioną do jednostkowej objętości porowatego ośrodka, możemy zapisać w postaci

$$(4.2.6) \quad \bar{\zeta} = f_v^t \cdot \zeta = f_v \cdot \{ J - J^t \} , \quad J^t = \frac{\varrho_0^f}{\varrho^f} .$$

Jeżeli w trakcie deformacji ośrodka zawartość cieczy nie ulega zmianie to $\bar{\zeta} = 0$ i z (4.2.6) otrzymujemy następujący warunek

$$(4.2.7) \quad \frac{\varrho_0^s}{\varrho_0^f} = \frac{\varrho^s}{\varrho^f} = \text{const.}$$

Jeżeli natomiast ciecz wypełniająca pory jest nieściśliwa, to $\varrho^f = \varrho_0^f$ i zależność (4.2.6) redukuje się do postaci

$$(4.2.8) \quad \bar{\zeta} = f_v \cdot J - f_v^0 ,$$

która opisuje względną zmianę objętości porów w czasie deformacji.

W przypadku małych odkształceń rozważanego ośrodka zmianę zawartości cieczy (4.2.6) przyjmuje znaną postać wprowadzoną przez Biota [9]

$$\bar{\zeta} = f_v (\varepsilon_{kk} - \theta_{kk})$$

gdzie ε_{kk} i θ_{kk} oznaczają odpowiednio dylatację szkieletu i cieczy.

● Wpływ struktury szkieletu na pole prędkości cieczy

Należy zauważyć, że dyskutowane równania ciągłości (4.2.1) i (4.2.2) są powszechnie stosowane w mechanice materiałów wielofazowych i są poprawne z punktu widzenia bilansu

ilości masy poszczególnych składników ośrodka. Nie odzwierciedlają jednak faktu, że z geometrycznego punktu widzenia struktura szkieletu jest uprzywilejowana w stosunku do cieczy i nakłada ograniczenia na jej przepływ przez szkielet. Efekt ten jest odpowiedzialny za sprzężenie masowe pomiędzy składnikami. Istotną cechą tego sprzężenia jest to, że faza cieczy charakteryzuje się dwoma efektywnymi polami prędkości, podczas gdy w wymienionych równaniach prędkość cieczy \mathbf{v}^f jest w ogólnym przypadku prędkością barycentryczną co wykazemy poniżej.

Równanie ciągłości (4.2.1) dla cieczy można przedstawić w postaci

$$(4.2.9) \quad \int_V \frac{\partial}{\partial t} \bar{s}^f dV + \int_S \bar{s}^f (\mathbf{v}^s + \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS = 0,$$

skąd widać, że całka powierzchniowa

$$I = \int_S \bar{s}^f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS,$$

reprezentuje wydatek cieczy w jednostce czasu przez powierzchnię S wynikający z ruchu względnego. W równaniu tym \mathbf{u} reprezentuje prędkość cieczy względem szkieletu, która związana jest z prędkością filtracyjną \mathbf{q} cieczy następującą zależnością

$$f_v \mathbf{u} = \mathbf{q}$$

znaną w literaturze jako postulat Dupuit - Forchheimera ([66] rozdz. 6). Prędkość \mathbf{u} nie zawsze jest prędkością względną efektywną co dyskutowano w pracy [43]. Jest nią jedynie w przypadku równości porowatości objętościowej i powierzchniowej.

Ponieważ efektywna prędkość cieczy przepływającej przez porowaty szkielet ściśle zależy od geometrycznej struktury porów, definiujemy względną prędkość porową cieczy \mathbf{u}^f wykorzystując wektor \mathbf{n}^p jak następuje

$$(4.2.10) \quad I = \int_S \bar{s}^f \mathbf{u}^f \cdot \mathbf{n}^p dS = \int_S \bar{s}^f \mathbf{P} \mathbf{u}^f \cdot \mathbf{n} dS.$$

Uwzględniając (4.2.10) w równaniu (4.2.9) możemy wykazać, że

$$(4.2.11) \quad \bar{g}^f \mathbf{v}^f = (\bar{g}^f \mathbf{1} - \mathbf{M}) \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{M} \dot{\mathbf{v}}^s,$$

gdzie $\mathbf{v}^f = \mathbf{v}^s + \mathbf{u}$, $\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}^s$, $\dot{\mathbf{v}}^s = \dot{\mathbf{v}}^s + \mathbf{u}^f$, $\mathbf{M} = g^f \mathbf{P}$.

Zauważamy, że związek (4.2.11) określa pęd cieczy o gęstości \bar{g}^f , który jest złożony z pędu cieczy uwięzionej w szkieletcie poruszającej się z prędkością $\dot{\mathbf{v}}$ oraz pędu cieczy "swobodnej", której prędkość jest $\dot{\mathbf{v}}^s$. Poszczególne pędy liczone są z odpowiednimi udziałami masowymi dla rozważanych ruchów cieczy. Tensor \mathbf{M} określa udziały masowe cieczy w jej ruchu względem szkieletu, natomiast pozostała część ciecicy porusza się ze szkieletem. Wzór (4.2.11) odpowiada definicji prędkości barycentrycznej \mathbf{v}^f dla cieczy całkowitej o gęstości \bar{g}^f , co mieliśmy wykazać.

Dla ośrodka o izotropowej przepuszczalności zależność (4.2.11) redukuje się do postaci

$$\bar{g}^f \mathbf{v}^f = (\bar{g}^f - g^f \lambda) \dot{\mathbf{v}} + g^f \lambda \dot{\mathbf{v}}^s.$$

Poszczególne udziały masowe w tym wzorze są zbieżne z cieczą swobodną $g^f \lambda$ i uwięzioną $(\bar{g}^f - g^f \lambda)$ wprowadzonymi na innej drodze przez Derskiego [21] dla ośrodka izotropowego. Jeśli dodatkowo przyjmiemy $f_v = \lambda$, to na podstawie powyższego związku stwierdzamy, że

$$\mathbf{v}^f = \dot{\mathbf{v}}^s, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^f$$

i wówczas \mathbf{v}^f i \mathbf{u} są prędkościami efektywnymi.

Na podstawie przeprowadzonych rozważań widzimy, że

ciecz charakteryzuje się dwoma polami prędkości; ciecz swobodna porusza się z prędkością $\dot{\mathbf{v}}^s$, ciecz uwięziona z prędkością szkieletu $\dot{\mathbf{v}}$. Ciecz całkowita rozważana jako składnik fizyczny ma prędkość barycentryczną \mathbf{v}^f .

Stwierdzamy zatem, że kinematyczny podział cieczy jest następstwem uwzględnienia wpływu struktury ośrodka na ruch cieczy.

● Bilans masy składników kinematycznych

Otrzymane dotychczas wyniki pozwalają nam zapisać równania ciągłości dla składników ośrodka rozróżnialnych z punktu widzenia kinematycznego, tzn. charakteryzujących się odpowiednio jednym polem prędkości. Zauważamy, że jeden składnik kinematyczny tworzy szkielet i ciecz uwięziona natomiast drugim składnikiem jest ciecz swobodna.

Dla szkieletu, cieczy uwięzionej i cieczy swobodnej możemy napisać odpowiednio następujące równania ciągłości

$$(4.2.12) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varrho^s + \operatorname{div}(\bar{\varrho}^s \dot{\mathbf{v}}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\bar{\varrho}^f \mathbf{1} - \mathbf{M}) \right\} + \operatorname{div} \left\{ (\bar{\varrho}^f \mathbf{1} - \mathbf{M}) \dot{\mathbf{v}} \right\} &= \varrho_1, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{3} \operatorname{tr} \mathbf{M} \right\} + \operatorname{div} \left\{ \mathbf{M} \dot{\mathbf{v}} \right\} &= \varrho_2 \end{aligned}$$

z warunkiem, że $\varrho_1 + \varrho_2 = 0$. Korzystaliśmy przy tym z tożsamości:

$$\begin{aligned} \bar{\varrho}^f \mathbf{1} &\equiv \left\{ \bar{\varrho}^f \mathbf{1} - \mathbf{M} \right\} + \mathbf{M}, \\ \bar{\varrho}^f &\equiv \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\bar{\varrho}^f \mathbf{1}) - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\bar{\varrho}^f \mathbf{1} - \mathbf{M}) + \frac{1}{3} \operatorname{tr} \mathbf{M}. \end{aligned}$$

Ponieważ ciecz uwięzioną i szkielet charakteryzują się tym samym polem prędkości, równania (4.2.12) można przedstawić w postaci równoważnej

$$(4.2.13) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{3} \operatorname{tr} \dot{\mathbf{M}} \right\} + \operatorname{div} \left\{ \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{v}} \right\} &= \varrho_1, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{3} \operatorname{tr} \dot{\mathbf{M}} \right\} + \operatorname{div} \left\{ \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{v}} \right\} &= \varrho_2, \end{aligned}$$

gdzie $\dot{\mathbf{M}} = (\bar{\varrho}^s + \bar{\varrho}^f) \mathbf{1} - \mathbf{M}$, $\dot{\mathbf{M}} \equiv \dot{\mathbf{M}}$.

Łatwo zauważyć, że otrzymane równania ciągłości odpowiadają składnikom kinematycznym. Na podstawie tych równań

widzimy, że

|| w trakcie ruchu pomiędzy składnikami kinematycznymi zachodzi wymiana masy o czym świadczą człony źródłowe \mathcal{G}_1 i \mathcal{G}_2 .

Analizując równania (4.2.13) dla ośrodka izotropowego, otrzymamy

$$(4.2.14) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathcal{G}} + \operatorname{div} \{ \bar{\mathcal{G}} \dot{\mathbf{v}} \} &= - \operatorname{div} \{ \bar{\mathcal{G}}_2^f (\dot{\mathbf{v}} - \dot{\mathbf{v}}^f) \}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathcal{G}}_2^f + \operatorname{div} \{ \bar{\mathcal{G}}_2^f \dot{\mathbf{v}} \} &= - \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathcal{G}}_2^f + \operatorname{div} (\bar{\mathcal{G}}_2^f \dot{\mathbf{v}}) \right\}, \end{aligned}$$

gdzie $\bar{\mathcal{G}}$, $\bar{\mathcal{G}}_2^f$, $\bar{\mathcal{G}}_1^f$ oznaczają odpowiednio gęstość całkowitą ośrodka, gęstość cieczy uwięzionej oraz cieczy swobodnej i są równe

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{G}} &= \bar{\mathcal{G}}^s + \bar{\mathcal{G}}^f, \\ \bar{\mathcal{G}}_1^f &= \bar{\mathcal{G}}^f - \bar{\mathcal{G}}_2^f, \quad \bar{\mathcal{G}}_2^f = \bar{\mathcal{G}}^f \lambda. \end{aligned}$$

Pierwsze z równań (4.2.14) jest zbieżne z uzyskanym przez Derskiego [21], natomiast drugie różni się prawą stroną. Różnica wynika z faktu, że w [21] dodatkowo wykorzystuje się zasadę zachowania masy cieczy swobodnej. Zauważamy ponadto, że gdy $f_v = \lambda$, wówczas $\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{v}}^f$ i równania (4.2.14) redukują się do postaci

$$(4.2.15) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathcal{G}} + \operatorname{div} \{ \bar{\mathcal{G}} \mathbf{v}^s \} &= - \operatorname{div} \{ \bar{\mathcal{G}}^f (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) \}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathcal{G}}_2^f + \operatorname{div} \{ \bar{\mathcal{G}}_2^f \mathbf{v}^f \} &= 0. \end{aligned}$$

Na podstawie równań (4.2.15) dochodzimy do istotnego wniosku, że

|| w przypadku gdy $f_v = \lambda$, składniki kinematyczne utożsamiają się ze składnikami fizycznymi ośrodka i pomiędzy nimi nie występuje wymiana masy (brak sprzężenia przez masę w równaniach ruchu poszczególnych faz).

4.3. Bilans pędu i momentu pędu

● Tensory naprężenia składników fizycznych i kinematycznych

Równanie bilansu pędu wiąże zmianę pędu masy składnika zawartej w objętości V z wektorem głównym sił działających nateń składnik. Wektor główny sił działających na wybrany składnik ośrodka jest sumą sił powierzchniowych, masowych i sił wzajemnego oddziaływania z pozostałymi składnikami. Zanim zapiszemy matematyczną postać równań bilansu pewnego omówienia wymagają siły powierzchniowe.

Jak już stwierdziliśmy, analizowany ośrodek można rozważać z punktu widzenia podziału na składniki fizyczne (ciecz i porowaty szkielet) lub też składniki kinematyczne (ciecz swobodna i porowaty szkielet połączony z cieczą uwięzioną). Ten właśnie fakt sprawia, że różne mogą być podejścia przy definiowaniu fazowych (parcjalnych) tensorów naprężenia. W większości prac poświęconych mechanice odkształcalnych ośrodków wielofazowych tensory naprężenia wiąże się ze składnikami fizycznymi, wykorzystując koncepcję podaną przez Truesdella i Toupiną [75] oraz odmiennie interpretowaną przez Greena i Naghdiego [31-33]. Należy nadmienić, że koncepcja Truesdella spotkała się z krytyczną oceną Gurtina, Olivera i Williamsa [35] jako dająca zbyt silne symetrie oddziaływań (por. również Wilmański [79]). Inną natomiast metodę zaproponowano w pracy [41] gdzie tensory naprężenia odpowiadają składnikom kinematycznym. Sposób zdefiniowania tych tensorów budzi jednak zastrzeżenia, gdyż ich diwergencje mogą być w ogólności funkcjami wektora normalnego n co przeczy niezależności tensorów naprężenia od n .

W niniejszych rozważaniach wykorzystamy ideę zaprezentowaną przez Greena i Naghdiego [31-33] i przyjmujemy, że każdy składnik fizyczny charakteryzuje się wektorem naprę-

zenia \mathbf{t}^α takim, że iloczyn $\mathbf{t}^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha$ reprezentuje moc sił powierzchniowych przekazywaną przez jednostkę powierzchni S ograniczającej objętość ośrodka V . Z każdym wektorem \mathbf{t}^α związany jest fazowy tensor naprężenia \mathbf{T}^α zgodnie z zależnością

$$(4.3.1) \quad \mathbf{t}^\alpha = \mathbf{T}^\alpha \cdot \mathbf{n}.$$

Wektory naprężenia dla składników kinematycznych określimy z warunku, że łączna moc sił powierzchniowych składników fizycznych jest równa mocy sił powierzchniowych składników kinematycznych zawartych w tej samej objętości V ośrodka;

$$(4.3.2) \quad \mathbf{t}^s \cdot \mathbf{v}^s + \mathbf{t}^f \cdot \mathbf{v}^f = \dot{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \ddot{\mathbf{t}} \cdot \ddot{\mathbf{v}}.$$

Podstawiając do (4.3.2) zależność (4.2.11) otrzymujemy

$$(4.3.3) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{t}} &= \mathbf{t}^s + \left(1 - \frac{1}{\rho} \mathbf{P}\right) \cdot \mathbf{t}^f, \\ \ddot{\mathbf{t}} &= \frac{1}{\rho} \mathbf{P} \cdot \mathbf{t}^f. \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu związków (4.3.1) znajdujemy tensory naprężeń dla składników kinematycznych

$$(4.3.4) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{T}} &= \mathbf{T}^s + \left(1 - \frac{1}{\rho} \mathbf{P}\right) \mathbf{T}^f, \\ \ddot{\mathbf{T}} &= \frac{1}{\rho} \mathbf{P} \mathbf{T}^f, \end{aligned}$$

przy czym stwierdzamy, że

$$\dot{\mathbf{T}} + \ddot{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^s + \mathbf{T}^f.$$

● Równania ruchu składników kinematycznych

Równania bilansu pędu dla każdego składnika kinematycznego można zapisać w następującej postaci

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\dot{M}_{ij} \dot{v}_j) dV + \int_S \dot{M}_{ij} \dot{v}_j \dot{v}_i n_i dS =$$

$$= \int_S \dot{t}_i dS + \int_V \dot{s} b_i dV + \int_V \dot{r}_i dV, \quad k=1,2,$$

gdzie $\dot{M}_{ij} = (\dot{s}^s + \dot{s}^f) \delta_{ij} - M_{ij}$, $\dot{M}_{ij} \equiv M_{ij} = s^f P_{ij}$.

W równaniu tym \mathbf{b} jest wektorem jednostkowych sił masowych, wektor $\dot{\mathbf{r}}^k$, ($k = 1, 2$), reprezentuje siły wzajemnego oddziaływania składników kinematycznych odniesione do jednostkowej objętości ośrodka i spełniających warunek

$$\sum_k \int_V \dot{\mathbf{r}}^k dV = \mathbf{0} \longrightarrow \sum_k \dot{\mathbf{r}}^k = \mathbf{0}.$$

Po wykorzystaniu twierdzenia Gaussa-Ostrogradzkiego, przy zamianie całek powierzchniowych na objętościowe, a następnie uwzględniając równanie (4.2.12) otrzymamy lokalną postać równań bilansu pędu składników kinematycznych

$$(4.3.5) \quad \operatorname{div} \dot{\mathbf{T}}^k + \dot{s}^k \mathbf{b} + \dot{\mathbf{r}}^k - \dot{\mathbf{M}}^k \frac{D}{Dt} \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{H}}^k \dot{\mathbf{v}},$$

gdzie $\dot{\mathbf{H}}^k = \frac{\partial}{\partial t} (\dot{s}^f \mathbf{1} - \dot{\mathbf{M}}^k) + \operatorname{div} \{ (\dot{s}^f \mathbf{1} - \dot{\mathbf{M}}^k) \otimes \dot{\mathbf{v}} \},$

$$\dot{\mathbf{H}}^k = \frac{\partial}{\partial t} \dot{\mathbf{M}}^k + \operatorname{div} \{ \dot{\mathbf{M}}^k \otimes \dot{\mathbf{v}} \},$$

$$\dot{\mathbf{H}}^1 + \dot{\mathbf{H}}^2 = \operatorname{div} \{ \mathbf{M} \otimes \mathbf{u}^f - \dot{s}^f \mathbf{1} \otimes \mathbf{u} \},$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{\mathbf{v}} \cdot \operatorname{grad} \dots,$$

Na podstawie otrzymanych równań ruchu widzimy, że pomiędzy składnikami kinematycznymi występuje sprzężenie poprzez przyrosty pędów $\dot{\mathbf{H}}^k \dot{\mathbf{v}}$. Efekt ten określany jako sprzężenie masowe (por. Chao, Sha, Soo [18]) jest następstwem wymiany masy w trakcie ruchu pomiędzy rozważanymi składnikami.

● Równanie ruchu składników fizycznych

Rozważymy teraz bilans pędu dla składników fizycznych. Należy przy tym zauważyć, że faza cieczy jest mieszaniną cieczy swobodnej i uwięzionej. Konsekwencją tego faktu jest to, że całkowita zmiana pędu cieczy nie jest równa zmianie jej pędu dla prędkości barycentrycznej \mathbf{v}^f . Stąd też odpowiednio dla szkieletu i cieczy mamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \mathfrak{g}^s \dot{\mathbf{v}} dV &= \int_S \mathbf{t}^s dS + \int_V \mathbf{r}^s dV + \int_V \mathfrak{g}^s \mathbf{b} dV, \\ \frac{d}{dt} \int_V (\mathfrak{g}^f \mathbf{1} - \mathbf{M}) \dot{\mathbf{v}} dV + \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{M} \dot{\mathbf{v}} dV &= \\ &= \int_S \mathbf{t}^f dS + \int_V \mathbf{r}^f dV + \int_V \mathfrak{g}^f \mathbf{b} dV, \end{aligned}$$

przy czym siły wzajemnego oddziaływania pomiędzy cieczą i szkieletem spełniają warunek

$$\sum_{\alpha} \int_V \mathbf{r}^{\alpha} dV = 0 \longrightarrow \sum_{\alpha} \mathbf{r}^{\alpha} = 0.$$

Zamieniając całki powierzchniowe na objętościowe i uwzględniając fakt, że bilans jest słuszny dla dowolnie wybranej objętości V , otrzymamy równania ruchu dla składników fizycznych

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{T}^s + \mathfrak{g}^s \mathbf{b} + \mathbf{r}^s &= \mathfrak{g}^s \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{v}}, \\ (4.3.6) \quad \text{div } \mathbf{T}^f + \mathfrak{g}^f \mathbf{b} + \mathbf{r}^f &= (\mathfrak{g}^f \mathbf{1} - \mathbf{M}) \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{v}} + \\ &+ \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{M}} \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{v}}. \end{aligned}$$

Jeśli uwzględnimy (4.2.11) oraz dodatkowo zależności:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{d}{dt} + (\mathbf{v}^f - \dot{\mathbf{v}}) \cdot \text{grad} \dots = \frac{d}{dt} + (\mathbf{v}^f - \dot{\mathbf{v}}) \cdot \text{grad} \dots,$$

gdzie $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}^f \cdot \text{grad} \dots$,

to równanie (4.3.6)₂ można zapisać w postaci równoważnej

$$(4.3.7) \quad \operatorname{div} \mathbf{T}^f + \bar{\mathfrak{g}}^f \mathbf{b} + \mathbf{r}^f = \bar{\mathfrak{g}}^f \frac{D}{Dt} \mathbf{v}^f + \\ + \operatorname{div} \{ (\bar{\mathfrak{g}}^f \mathbf{1} - \dot{\mathbf{M}})(\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^f) \otimes (\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^f) + \dot{\mathbf{M}}(\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^f) \otimes (\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^f) \}.$$

Z równań (4.3.6) wynika, że pomiędzy składnikami fizycznymi występuje sprzężenie, które jest skutkiem podziału cieczy na uwięzioną i swobodną. Jest to bezpośrednim następstwem uwzględnienia charakterystyki wewnętrznej struktury szkieletu.

W przypadku ośrodka o izotropowej przepuszczalności równania ruchu przyjmują prostszą postać. Dla składników kinematycznych otrzymamy

$$(4.3.8) \quad \operatorname{div} \dot{\mathbf{T}} + \dot{\mathfrak{g}} \mathbf{b} + \dot{\mathbf{r}} = (\bar{\mathfrak{g}}^s + \bar{\mathfrak{g}}^f - \bar{\mathfrak{g}}_2^f) \frac{D}{Dt} \dot{\mathbf{v}} + \mathfrak{g}_1 \dot{\mathbf{v}}, \\ \operatorname{div} \dot{\mathbf{T}} + \dot{\mathfrak{g}} \mathbf{b} + \dot{\mathbf{r}} = \bar{\mathfrak{g}}_2^f \frac{D}{Dt} \dot{\mathbf{v}} + \mathfrak{g}_2 \dot{\mathbf{v}}.$$

Natomiast dla składników fizycznych mamy

$$(4.3.9) \quad \operatorname{div} \mathbf{T}^s + \bar{\mathfrak{g}}^s \mathbf{b} + \mathbf{r}^s = \bar{\mathfrak{g}}^s \frac{D}{Dt} \dot{\mathbf{v}}, \\ \operatorname{div} \mathbf{T}^f + \bar{\mathfrak{g}}^f \mathbf{b} + \mathbf{r}^f = (\bar{\mathfrak{g}}^f - \bar{\mathfrak{g}}_2^f) \frac{D}{Dt} \dot{\mathbf{v}} + \\ + \bar{\mathfrak{g}}_2^f \frac{D}{Dt} \dot{\mathbf{v}} + \mathfrak{g}_1 \dot{\mathbf{v}} + \mathfrak{g}_2 \dot{\mathbf{v}}.$$

Alternatywna postać równania (4.3.9)₂ jest

$$(4.3.10) \quad \operatorname{div} \mathbf{T}^f + \bar{\mathfrak{g}}^f \mathbf{b} + \mathbf{r}^f = \bar{\mathfrak{g}}^f \frac{D}{Dt} \mathbf{v}^f + \\ + \operatorname{div} \{ (\bar{\mathfrak{g}}^f - \bar{\mathfrak{g}}_2^f)(\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^f) \otimes (\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^f) + \bar{\mathfrak{g}}_2^f(\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^f) \otimes (\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^f) \}.$$

Istotne uproszczenie równań ruchu otrzymujemy zakładając równość pomiędzy porowatością objętościową i powierzchniową. W takim przypadku równania (4.3.8) i (4.3.9) stają się identyczne i mają postać

$$(4.3.11) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T}^s + \bar{\rho}^s \mathbf{b} + \mathbf{r}^s &= \bar{\rho}^s \frac{D}{Dt} \dot{\mathbf{v}}, \\ \operatorname{div} \mathbf{T}^f + \bar{\rho}^f \mathbf{b} + \mathbf{r}^f &= \bar{\rho}^f \frac{D}{Dt} \mathbf{v}^f \quad (= \bar{\rho}^f \frac{D}{Dt} \dot{\mathbf{v}}). \end{aligned}$$

Na podstawie otrzymanych wyników formułujemy następujące wnioski:

1° Pomiędzy składnikami kinematycznymi następuje wymiana pędu wskutek zmiany masy tych składników w czasie ruchu, (równania (4.3.5) i (4.3.8)). Jest to sprzężenie ruchu przez masę.

2° Dla przypadku gdy $\lambda = v$, składniki kinematyczne utożsamiają się z fizycznymi i w równaniach ruchu (4.3.8) nie występuje sprzężenie masowe.

3° Równania (4.3.8) będą zbieżne z uzyskanymi przez Derskiego [21], jeśli założymy dodatkowo, że masy składników kinematycznych spełniają zasadę zachowania.

4° Ruch cieczy całkowitej przez ośrodek porowaty można traktować formalnie jako ruch ośrodka jednofazowego z prędkością barocentryczną \mathbf{v}^f jeżeli w równaniu ruchu (4.3.7) całkowity tensor naprężenia dla cieczy zapiszemy w postaci

$$(4.3.12) \quad \mathbf{T}^c - \mathbf{T}^f = \left\{ (\bar{\rho}^f \mathbf{1} - \dot{\mathbf{M}}) (\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^f) \otimes (\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^f) + \dot{\mathbf{M}} (\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^f) \otimes (\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^f) \right\}.$$

Dla przypadku gdy $\frac{|\dot{\mathbf{v}}| - |\mathbf{v}^f|}{|\dot{\mathbf{v}}|} \ll 1$

$$\mathbf{T}^c \approx \mathbf{T}^f,$$

co można przyjąć za słuszne w zagadnieniach quasistatycznych.

● Siły oddziaływania składników

Siły wzajemnego oddziaływania składników ośrodka można przedstawić w postaci sumy (por. [62], [73]),

$$\mathbf{r}^\alpha = \mathbf{G}^\alpha(\mathbf{u} = \mathbf{0}) + \mathbf{L}^\alpha(\mathbf{u}),$$

przy czym \mathbf{G}^α reprezentuje siły oddziaływania statycznego, natomiast \mathbf{L}^α siły dyfuzji wynikające z ruchu cieczy względem porowatego szkieletu. Siły \mathbf{G}^α można określić rozwiązując statyczne równanie równowagi cieczy, które ma postać

$$(4.3.13) \quad T_{ij,j}^f + \bar{\Sigma}^f b_i + G_i^f = 0.$$

Ponieważ w stanie równowagi w cieczy panuje ciśnienie efektywne p , zatem wektor naprężenia cieczy swobodnej zapiszemy jak następuje

$$t_i^z = -p n_i^p = -p R_j n_j.$$

Wykorzystując następnie zależności (4.3.3) i (4.3.4), otrzymamy

$$T_{ij}^f = -f_v p \delta_{ij}$$

i na podstawie równania (4.3.13) jest

$$G_i^f = (f_v p)_{,i} - \bar{\Sigma}^f b_i.$$

Jeżeli dodatkowo uwzględnimy równanie równowagi cieczy w skali mikro w odniesieniu do jednostki objętości dV

$$\frac{1}{dV} \int_{dV} \{ (-\bar{p}_{,i}) + \bar{\Sigma}^f b_i \} dV = 0,$$

to założenie o jednorodności sił masowych w mikroskali pozwala napisać

$$f_v p_{,i} = f_v \bar{\Sigma}^f b_i$$

i ostatecznie siły oddziaływania statycznego przyjmą postać

$$(4.3.14) \quad G_i^f = -G_i^s = p f_{v,i} .$$

Siły dyfuzji T^α wymagają odpowiedniego równania konstytutywnego, które omówimy w następnym punkcie.

• Bilans momentu pędu

Na podstawie analizy bilansu momentu pędu dla poszczególnych składników fizycznych, przy braku masowych momentów spinowych, otrzymujemy

$$(4.3.15) \quad \begin{aligned} T^s - T^{sT} &= \mathfrak{B}^s \mathcal{B}^s , \\ T^c - T^{cT} &= \mathfrak{B}^f \mathcal{B}^f . \end{aligned}$$

Skośnie symetryczny tensor \mathcal{B}^α reprezentuje oddziaływanie momentowe pomiędzy cieczą i szkieletem. Tensor \mathcal{B}^α spełnia warunek

$$\sum_\alpha \mathfrak{B}^\alpha \mathcal{B}^\alpha = 0$$

na podstawie którego stwierdzamy, że

$$(T^s + T^c) = (T^s + T^c)^T .$$

Jeżeli przyjmiemy $\mathcal{B}^\alpha = 0$, to mamy

$$(4.3.16) \quad T^s = T^{sT} , \quad T^c = T^{cT} .$$

Biorąc pod uwagę (4.3.16) oraz (4.3.12) widzimy, że

$$T^f = T^{fT} , \quad T = T^T , \quad \hat{T} = \hat{T}^T .$$

W dalszych rozważaniach pomijając będziemy momentowe oddziały-

wania pomiędzy cieczą i szkieletem, a zatem wszystkie rozważane tensory naprężeń są tensorami symetrycznymi.

5. Związki konstytutywne

Równania (4.2.15)₂, (4.3.6) oraz (4.3.14) tworzą układ dziesięciu równań różniczkowych i nie wystarczają do określenia wielkości \mathfrak{S}^f oraz współrzędnych $\mathbf{x}^f, \mathbf{v}^f, \mathbf{t}^f, \mathbf{T}^s, \mathbf{T}^f$ i \mathbf{P} . Aby otrzymać zamknięty układ równań musimy uzupełnić otrzymane już równania związkami konstytutywnymi charakteryzującymi materiał porowatego szkieletu oraz cieczy wypełniającej pory.

Zasadniczo wyróżnić można dwa sposoby formułowania związków konstytutywnych. Pierwszy sposób polega na wykorzystaniu potencjałów do określenia wielkości konstytutywnych. W drugim przypadku wykorzystuje się twierdzenia o reprezentacji funkcji tensorowych dla odpowiednich wielkości konstytutywnych. Właśnie ten sposób wykorzystał Green [29] do analizy cieczy anizotropowej, Boehler i Sawczuk [17] oraz Boehler [15] do określenia związków fizycznych ośrodków zorientowanych. Podobnie Atkin [3] na tej drodze rozważał własności składników mieszaniny, natomiast Litewka i Sawczuk [49] analizowali własności pleistyczne materiałów perforowanych.

Dyskusję związków konstytutywnych, w naszym przypadku, przeprowadzimy w oparciu o twierdzenia reprezentacji funkcji tensorowych uwzględniając wymagane zasady przy formułowaniu tych związków.

Zakładamy, że porowaty szkielet posiada własności sprężyste, w stanie odniesienia jest izotropowy i jednorodny, natomiast ciecz jest lepka i w ogólnym przypadku nielawtonowska. Dla poszczególnych składników ośrodka rozważanych oddzielnie związki konstytutywne odpowiednio dla szkieletu i cieczy mają postać

$$(5.1) \quad \hat{\mathbf{T}}^s = \hat{\mathbf{T}}^s(\mathbf{B}) \quad , \quad \hat{\mathbf{T}}^f = \hat{\mathbf{T}}^f(\mathfrak{S}^f, \mathbf{D}) .$$

Tensor $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ jest lewym tensorem deformacji Cauchy - Greensa, natomiast $\mathbf{D} = 1/2 (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$ jest tensorem prędkości deformacji cieczy.

W przypadku mieszaniny, obecność jednego składnika wywiera wpływ na działanie sił powierzchniowych w składniku drugim. Tak np. ciśnienie w cieczy przepływającej przez porowaty szkielec zależy nie tylko od gęstości samej cieczy ale także gęstości szkielecetu. Powstaje zatem problem ustalenia zbioru argumentów od którego zależęć powinny wielkości konstytutywne. Zasada współobecności wymaga aby w równaniach konstytutywnych dla danego ośrodka występowały te same zmienne niezależne, jeśli nie stoi to w sprzeczności z prawami termodynamiki lub zasadą obiektywności (por. [26]). Na tej podstawie mamy

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^s &= \mathbf{T}^s(\mathfrak{F}^f, \mathbf{B}, \mathbf{D}), \\ \mathbf{T}^f &= \mathbf{T}^f(\mathfrak{F}^f, \mathbf{B}, \mathbf{D}). \end{aligned}$$

Liczba argumentów w (5.2) może być powiększona o prędkości \mathbf{v}^α i spiny \mathbf{W}^α , które z równań dla składników separowanych eliminuje zasada obiektywności. Mogą one wystąpić jedynie w postaci prędkości względnej i spinu względnego, gdyż tylko takie wielkości są obiektywne, tzn. dla dowolnego tensora ortogonalnego \mathbf{Q} spełniają warunek

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \mathbf{Q}\mathbf{u}, \quad \mathbf{W}^* = \mathbf{Q}\mathbf{W}\mathbf{Q}^T, \\ \text{gdzie} \quad \mathbf{u} &= \mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s, \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}^f - \mathbf{W}^s, \quad \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Zatem związki (5.2) oraz pozostałe wielkości konstytutywne możemy zapisać jak następuje

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^s &= \mathbf{T}^s(\mathfrak{F}^f, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{u}, \mathbf{W}), \\ \mathbf{T}^f &= \mathbf{T}^f(\quad \text{"} \quad \quad \quad), \\ \mathbf{P} &= \mathbf{P}(\quad \text{"} \quad \quad \quad), \\ \mathbf{t} &= \mathbf{t}(\quad \text{"} \quad \quad \quad), \end{aligned}$$

które czynią zadość zesadzie obiektywności.

O słuszności doboru zmiennych niezależnych w funkcjach (5.3) wydaje się świadczyć fakt, że przy braku jednego ze składników, w przypadku naprężeń, otrzymujemy związki (5.1).

Funkcje (5.3) nie są najbardziej ogólnymi jakie można zapostulować. Tak np. Crochet i Naghdi [19] podobnie jak Atkin [3] w zbiorze argumentów uwzględniają dodatkowo tensor prędkości deformacji szkieletu. Koeller i Zebib [39] za zmienne przyjmują gradienty deformacji obu składników, ich tensory prędkości deformacji, prędkość względną i względny spin. Green i Steel [34] nie uwzględniają spinów i postulują liniowość związków względem \mathbf{D} i \mathbf{u} . W wymienionych przypadkach związki konstytutywne dla składników separowanych nie są niestety bezpośrednim następstwem założenia o braku jednego ze składników. Pozwala to na stwierdzenie, że nadmiar argumentów w związkach konstytutywnych pociąga za sobą trudne do uzasadnienia sprzężenia pomiędzy składnikami.

Obecnie zajmiemy się specyfikacją postaci funkcji (5.3) wykorzystując twierdzenia o reprezentacji funkcji tensorowych sformułowane przez Spencera [71], Smitha [68], Wang [77-78] oraz analizowane przez Boehlera [14], [16]. Przy analizie wielkości \mathbf{T}^s , \mathbf{T}^f , \mathbf{P} pominiemy wpływ \mathbf{u} oraz \mathbf{W} . Uproszczenie takie uzasadnione jest tym, że jak wykazano w [72] argumenty te mają jedynie istotny wpływ na antysymetryczne części analizowanych tensorów, które w naszym przypadku są zerowe. Umożliwi to ponadto bardziej przejrzyste zaprezentowanie wyników i ich interpretację, kosztem pominięcia pewnych efektów wyższego rzędu. Należy nadmienić, że uwzględnienie \mathbf{u} i \mathbf{W} w dyskusji nie nasręcza matematycznych trudności jednakże znacznie rozbudowuje ostateczną postać wyników.

Na podstawie twierdzenia o reprezentacji dla tensora symetrycznego (patrz Dodatek) mamy:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^s(\mathbf{S}^f, \mathbf{B}, \mathbf{D}) &= \varphi_i \mathbf{G}_i, & \mathbf{P}(\mathbf{S}^f, \mathbf{B}, \mathbf{D}) &= \delta_i \mathbf{G}_i. \\ \mathbf{T}^f(\mathbf{S}^f, \mathbf{B}, \mathbf{D}) &= \psi_i \mathbf{G}_i, \end{aligned}$$

Zbiór generatorów tensorowych G_i , $i = 0, \dots, 7$, ma postać

$$1, \mathbf{B}, \mathbf{B}^2, \mathbf{D}, \mathbf{D}^2, \mathbf{BD} + \mathbf{DB}, \mathbf{B}^2\mathbf{D} + \mathbf{DB}^2, \mathbf{BD}^2 + \mathbf{D}^2\mathbf{B},$$

natomiast $\psi_i, \varphi_i, \delta_i$ są skalarnymi funkcjami nieredukowalnego zbioru następujących niezmienników:

$$\bar{\xi}^f, \text{tr } \mathbf{B}, \text{tr } \mathbf{B}^2, \text{tr } \mathbf{B}^3, \text{tr } \mathbf{D}, \text{tr } \mathbf{D}^2, \text{tr } \mathbf{D}^3, \\ \text{tr } \mathbf{BD}, \text{tr } \mathbf{BD}^2, \text{tr } \mathbf{B}^2\mathbf{D}^2.$$

Przeanalizujemy kolejno postacie funkcji (5.4).

● Naprężenie w szkielecie

Zgodnie z (5.4), naprężenie w szkielecie określone jest jak następuje

$$(5.5) \quad \mathbf{T}^s = \varphi_0 \mathbf{1} + \varphi_1 \mathbf{B} + \varphi_2 \mathbf{B}^2 + \varphi_3 \mathbf{D} + \varphi_4 \mathbf{D}^2 + \varphi_5 (\mathbf{BD} + \mathbf{DB}) \\ + \varphi_6 (\mathbf{B}^2\mathbf{D} + \mathbf{DB}^2) + \varphi_7 (\mathbf{BD}^2 + \mathbf{D}^2\mathbf{B}).$$

Łatwo zauważyć, że w przypadku braku cieczy w porach szkieletu otrzymujemy związek fizyczny dla sprężystego szkieletu

$$\mathbf{T}^s = \varphi'_0 \mathbf{1} + \varphi'_1 \mathbf{B} + \varphi'_2 \mathbf{B}^2,$$

gdzie φ'_0, φ'_1 i φ'_2 są funkcjami niezmienników tensora \mathbf{B} . Interesujący wynik otrzymamy, jeśli w (5.5) przyjmiemy $\mathbf{B} = \mathbf{1}$. Widzimy, że przepływająca przez pory ciecz wywołuje w szkielecie zarówno naprężenia styczne jak i normalne zgodnie z zależnością

$$\mathbf{T}^s = \bar{\varphi}_0 \mathbf{1} + \bar{\varphi}_3 \mathbf{D} + \bar{\varphi}_4 \mathbf{D}^2,$$

gdzie $\bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_3$ i $\bar{\varphi}_4$ są funkcjami $\bar{\xi}^f$ oraz niezmienników tensora \mathbf{D} . Jest to efekt sprężenia lepkościowego pomie-

dzy cieczą i szkieletem. Przykładem takiego oddziaływania może być przepływ spiętrzonej cieczy przez porowatą ścianę gdzie pole prędkości cieczy nie jest jednorodne. Jeśli natomiast w (5.5) pominiemy wpływ lepkości na naprężenia T^s to stwierdzamy, że pomiędzy cieczą i szkieletem występuje tylko sprzężenie objętościowe poprzez \bar{S}^f i wzór na naprężenie w szkielecie ma postać

$$T^s = \hat{\gamma}_0 \mathbf{1} + \hat{\gamma}_1 \mathbf{B} + \hat{\gamma}_2 \mathbf{B}^2$$

gdzie $\hat{\gamma}_0$, $\hat{\gamma}_1$ i $\hat{\gamma}_2$ są funkcjami \bar{S}^f i niezmienników \mathbf{B} .

● Naprężenie w cieczy

Na podstawie (5.4)₂ mamy

$$(5.6) \quad T^f = \psi_0 \mathbf{1} + \psi_1 \mathbf{D} + \psi_2 \mathbf{D}^2 + \psi_3 \mathbf{B} + \psi_4 \mathbf{B}^2 + \\ + \psi_5 (\mathbf{B}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{B}) + \psi_6 (\mathbf{B}^2\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{B}^2) + \psi_7 (\mathbf{B}\mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^2\mathbf{B}).$$

Zauważamy, że w przypadku gdy wyeliminujemy fazę szkieletu zależność (5.6) redukuje się do postaci

$$T^f = \bar{\psi}_0 \mathbf{1} + \bar{\psi}_1 \mathbf{D} + \bar{\psi}_2 \mathbf{D}^2$$

co odpowiada równaniu konstytutywnemu cieczy lepkiej Reinera-Rivlina. Jeśli natomiast $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, to ciecz nie przenosi naprężeń stycznych niezależnie od \mathbf{B} , zatem $\psi_3 = \psi_4 = 0$. Wówczas, na podstawie (5.6) otrzymamy

$$(5.7) \quad T^f = \psi_0 \mathbf{1} + \psi_1 \mathbf{D} + \psi_2 \mathbf{D}^2 + \psi_5 (\mathbf{B}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{B}) + \\ + \psi_6 (\mathbf{B}^2\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{B}^2) + \psi_7 (\mathbf{B}\mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^2\mathbf{B}).$$

Ostatnie trzy wyrazy tego równania reprezentują wpływ deformacji szkieletu na naprężenia w cieczy poprzez jej lepkość.

Wykorzystując następnie (5.4)₃ w (5.7) otrzymamy równanie

$$\begin{aligned} T^f = & \psi_0 \mathbf{1} + \psi_1 \mathbf{D} + \psi_2 \mathbf{D}^2 + \psi_5 (\mathbf{P}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{P}) + \\ & + \psi_6 (\mathbf{P}^2\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{P}^2) + \psi_7 (\mathbf{P}\mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^2\mathbf{P}), \end{aligned}$$

w którym widoczny jest wpływ struktury geometrycznej szkieletu na naprężenia w cieczy.

Jeśli w (5.7) pominiemy wpływ lepkości na naprężenia w cieczy to w wyniku otrzymamy

$$T^f = \psi_0 \mathbf{1}, \quad \psi_0 = \psi_0(\bar{\mathcal{S}}^f, \text{tr } \mathbf{B}, \text{tr } \mathbf{B}^2, \text{tr } \mathbf{B}^3),$$

z którego wynika, że sprzężenie pomiędzy szkieletem i cieczą ma charakter objętościowy. Założenie to jest powszechnie stosowane w liniowej teorii konsolidacji.

● Tensor strukturalnej przepuszczalności

Rozwinięta forma równania (5.4)₃ ma postać

$$\begin{aligned} (5.8) \quad \mathbf{P} = & \delta_0 \mathbf{1} + \delta_1 \mathbf{B} + \delta_2 \mathbf{B}^2 + \delta_3 \mathbf{D} + \delta_4 \mathbf{D}^2 + \\ & + \delta_5 (\mathbf{B}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{B}) + \delta_6 (\mathbf{B}^2\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{B}^2) + \delta_7 (\mathbf{B}\mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^2\mathbf{B}). \end{aligned}$$

Jeżeli ciecz nie przepływa przez porowaty szkielet oraz

$\mathbf{B} = \mathbf{1}$ mamy do czynienia z początkową konfiguracją szkieletu i \mathbf{P} jest tensorem izotropowym

$$\mathbf{P} = \bar{\delta}_0 \mathbf{1}$$

przy czym $\bar{\delta}_0 = \lambda_0$, gdzie λ_0 jest początkową porowatością powierzchniową. Ze wzoru (5.8) wynika, że geometryczna struktura porów opisana tensorem \mathbf{P} podlega zmianom na skutek deformacji szkieletu jak również przepływu przez pory cieczy lepkiej. Przy pominięciu wpływu lepkości na zmiany \mathbf{P} oraz przyjęciu $\mathbf{B} = \mathbf{1}$ zauważamy, że ciecz wypełniająca

pory ośrodka z początkowo izotropową przepuszczalnością nie może generować własności anizotropowych wewnętrznej struktury szkieletu.

● Siły dyfuzji

Przy analizie sił dyfuzji bierzemy pod uwagę wszystkie argumenty występujące w związku (5.3)₄. Nie ma bowiem przekonującego uzasadnienia dla pominięcia któregośkolwiek z nich. Na podstawie twierdzenia o reprezentacji funkcji wektorowej o argumentach tensorowych (patrz Dodatek), otrzymujemy

$$(5.9) \quad \tau(\bar{\xi}^f, \mathbf{B}, \mathbf{D}, u, \mathbf{W}) = \eta_i \mathbf{g}_i$$

gdzie zbiór generatorów \mathbf{g}_i , $i = 1, \dots, 10$ ma postać:

$$u, \mathbf{B}u, \mathbf{D}u, \mathbf{W}u, \mathbf{B}^2u, \mathbf{D}^2u, \mathbf{W}^2u, \\ (\mathbf{B}\mathbf{D} - \mathbf{D}\mathbf{B}) \cdot u, (\mathbf{B}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{B}) \cdot u, (\mathbf{D}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{D}) \cdot u,$$

natomiast η_i są skalarnymi funkcjami nieredukowalnego zbioru następujących niezmienników:

$$\bar{\xi}^f, \text{tr } \mathbf{B}, \text{tr } \mathbf{B}^2, \text{tr } \mathbf{B}^3, \text{tr } \mathbf{D}, \text{tr } \mathbf{D}^2, \text{tr } \mathbf{D}^3, \text{tr } \mathbf{W}^2, \\ \text{tr } \mathbf{B}\mathbf{D}, \text{tr } \mathbf{B}\mathbf{D}^2, \text{tr } \mathbf{B}\mathbf{D}^3, \text{tr } \mathbf{B}\mathbf{W}^2, \text{tr } \mathbf{D}\mathbf{W}^2, \\ \text{tr } \mathbf{B}^2\mathbf{W}^2, \text{tr } \mathbf{D}^2\mathbf{W}^2, \text{tr } \{\mathbf{B}^2\mathbf{W}^2\mathbf{B}\mathbf{W}\}, \text{tr } \{\mathbf{D}^2\mathbf{W}^2\mathbf{D}\mathbf{W}\}, \\ \text{tr } \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{W}, \text{tr } \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{W}^2, \text{tr } \mathbf{B}\mathbf{W}^2\mathbf{D}\mathbf{W}, \text{tr } \mathbf{B}\mathbf{D}^2\mathbf{W}, \text{tr } \mathbf{B}^2\mathbf{D}\mathbf{W}, \\ u \cdot u, u \cdot \mathbf{B}u, u \cdot \mathbf{D}u, u \cdot \mathbf{B}^2u, u \cdot \mathbf{D}^2u, \\ u \cdot \mathbf{W}^2u, u \cdot \mathbf{B}\mathbf{W}u, u \cdot \mathbf{B}\mathbf{D}u, u \cdot \mathbf{D}\mathbf{W}u, u \cdot \mathbf{B}\mathbf{W}^2u \\ u \cdot \mathbf{D}\mathbf{W}^2u, u \cdot \mathbf{W}\mathbf{B}\mathbf{W}^2u, u \cdot \mathbf{W}\mathbf{D}\mathbf{W}^2u, \\ u \cdot \mathbf{B}^2\mathbf{W}u, u \cdot \mathbf{D}^2\mathbf{W}u.$$

Jeżeli w (5.9) uwzględnimy (5.3)₄, to otrzymamy postać równoważną

$$(5.10) \quad \tau(\mathcal{S}^i, \mathbf{P}, \mathbf{D}, \mathbf{u}, \mathbf{W}) = \eta_i^i \mathcal{S}^i \dots$$

Zbiór generatorów \mathcal{S}^i otrzymamy ze zbioru \mathcal{B}_i zastępując tensor \mathbf{B} przez \mathbf{P} . Funkcje skalarne η_i^i będą funkcjami takiego samego zbioru niezmienników jak dla η_i jeżeli \mathbf{B} zastąpimy przez \mathbf{P} . Pełna forma (5.10) jest

$$(5.11) \quad \tau = \{ \eta_i^i \mathbf{1} + \eta_i^i \mathbf{P} + \eta_i^i \mathbf{P}^2 \} \cdot \mathbf{u} + \{ \eta_i^i \mathbf{D} + \eta_i^i \mathbf{D}^2 \} \cdot \mathbf{u} + \\ + \{ \eta_i^i \mathbf{W} + \eta_i^i \mathbf{W}^2 \} \cdot \mathbf{u} + \eta_i^i \{ \mathbf{P}\mathbf{D} - \mathbf{D}\mathbf{P} \} \cdot \mathbf{u} + \\ + \{ \eta_i^i (\mathbf{P}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{P}) \} \cdot \mathbf{u} + \{ \eta_i^i (\mathbf{D}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{D}) \} \cdot \mathbf{u}.$$

Zauważamy, że pierwszy człon prawej strony (5.11) reprezentuje wpływ wewnętrznej struktury porów na siły dyfuzji τ . Następne dwa człony określają wpływ \mathbf{D} oraz względnego spinu \mathbf{W} na siły τ i reprezentują efekty przyspieszenia wywołane niejednorodnością pola prędkości cieczy przepływającej przez porowaty ośrodek. Człony: czwarty i piąty wzoru (5.11) wyrażają dodatkowe efekty przyspieszenia wskutek zakłócenia (sprzężenia) pola prędkości cieczy poprzez anizotropię wewnętrznej struktury porów. Efekty te znikają jeżeli wewnętrzna struktura szkieletu jest izotropowa, tzn.

$\mathbf{P} = \lambda \mathbf{1}$. Ostatni człon wzoru (5.11) charakteryzuje wpływ niejednorodności pola prędkości cieczy na siły dyfuzji w postaci przyspieszenia wyższego rzędu.

Przy pominięciu efektów przyspieszenia postać sił dyfuzji znacznie się redukuje i wynosi

$$(5.12) \quad \tau = \{ \bar{\eta}_i \mathbf{1} + \bar{\eta}_i \mathbf{P} + \bar{\eta}_i \mathbf{P}^2 \} \cdot \mathbf{u},$$

gdzie $\bar{\eta}_i$ są funkcjami \mathcal{S}^i , $|\mathbf{u}|$, podstawowych niezmienników \mathbf{P} oraz $\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}^2\mathbf{u}$.

Jeżeli wykorzystamy otrzymany związek do ośrodka

z izotropową przepuszczalnością, $\mathbf{P} = \lambda \mathbf{1}$, równanie (5.12) można zapisać jak następuje

$$(5.13) \quad \tau = \eta(\bar{\sigma}^f, \lambda, |u|) \cdot u .$$

Zakładając, że $\eta = a(\bar{\sigma}^f, \lambda) + b(\bar{\sigma}^f, \lambda) \cdot |u|$, otrzymamy

$$(5.14) \quad \tau = (a + bu) \cdot u .$$

Rezultat ten jest zbieżny z parabolicznym prawem przepływu zaproponowanym niezależnie przez Muskata i Forchheimera, a także wyprowadzonym przez Irmaya (patrz [5]) oraz Ahmeda i Sunada [2], na drodze uśrednienia równań Naviera-Stokesa. Paraboliczne prawo przepływu było również potwierdzone eksperymentalnie przez Beaversa, Wilsona, Masha [6] oraz Beaversa i Sparrowa [7].

Jeżeli w związku (5.13) funkcję η rozłożymy w szereg Laurenta względem $|u|$

$$\eta = \dots + a_{-1} \frac{1}{|u|} + a_0 + a_1 |u| + \dots$$

to zachowując wyrazy: $a_{-1}|u|^{-1}$ oraz a_0 , otrzymamy prawo przepływu z początkowym gradientem hydraulicznym (por. [5])

$$(5.15) \quad \tau = a_{-1} + a_0 u .$$

Widzimy więc, że paraboliczne prawo przepływu oraz prawo z początkowym gradientem hydraulicznym są szczególnymi przypadkami równania (5.12).

W podsumowaniu należy stwierdzić, że związki konstytutywne (5.5), (5.7-5.8), (5.11) wraz z równaniami (4.3.6), (4.2.15) i (4.3.14) oraz zależnościami geometrycznymi

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T, \quad f_v = f_v(\mathbf{P})$$

tworzą zamknięty układ równań niezbędny do określenia poszukiwanych wielkości.

6. Zastosowanie wyników do liniowej teorii konsolidacji

6.1. Konsolidacja ośrodka izotropowego.

Związki z równaniami Biota i Derskiego

W ramach teorii liniowej przemieszczenia porowatego szkieletu jak również ich pochodne względem miejsca i czasu są małe. Tensor odkształcenia \mathbf{E} jest określony jak następuje

$$(6.1.1) \quad \frac{1}{2} (\mathbf{B} - \mathbf{1}) \cong \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T),$$

gdzie $\mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{1}$ jest gradientem przemieszczenia.

W przypadku cieczy zakładamy, że zmiany jej objętości oraz gradient prędkości pozostają małymi w czasie deformacji ośrodka. Związki konstytutywne (5.4) przyjmują postać

$$(6.1.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^s &= \mathbf{T}^s(\bar{\sigma}^f, \mathbf{E}, \mathbf{D}), \\ \mathbf{T}^f &= \mathbf{T}^f(\quad - \quad - \quad), \\ \mathbf{P} &= \mathbf{P}(\quad - \quad - \quad). \end{aligned}$$

Zbiór generatorów tensorowych \mathbf{G}_i jest

$$\mathbf{1}, \mathbf{E}, \mathbf{E}^2, \mathbf{D}, \mathbf{D}^2, \mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{E}, \mathbf{E}^2\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{E}^2, \mathbf{E}\mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^2\mathbf{E},$$

natomiast nieredukowalny zbiór niezmienników ma postać

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^f, \text{tr } \mathbf{E}, \text{tr } \mathbf{E}^2, \text{tr } \mathbf{E}^3, \text{tr } \mathbf{D}, \text{tr } \mathbf{D}^2, \text{tr } \mathbf{D}^3, \\ \text{tr } \mathbf{E}\mathbf{D}, \text{tr } \mathbf{E}^2\mathbf{D}, \text{tr } \mathbf{E}^2\mathbf{D}^2. \end{aligned}$$

Ponieważ ograniczamy się do liniowych zależności względem \mathbf{E} , \mathbf{D} oraz objętościowych zmian cieczy to związki (6.1.2)

możemy zapisać

$$(6.1.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^s &= \psi_1 \mathbf{1} + \psi_2 \mathbf{E} + \psi_3 \mathbf{D}, \\ \mathbf{T}^f &= \psi_4 \mathbf{1} + \psi_5 \mathbf{E} + \psi_6 \mathbf{D}, \\ \mathbf{P} &= \delta_1 \mathbf{1} + \delta_2 \mathbf{E} + \delta_3 \mathbf{D}, \end{aligned}$$

gdzie ψ_i , ψ_i , δ_i ($i = 1, 2, 3$) są funkcjami \mathfrak{I}^f , $\text{tr } \mathbf{E}$, $\text{tr } \mathbf{D}$ i wymagają dalszej specyfikacji.

Zauważamy, że jeśli $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ ciecz nie przenosi naprężeń stycznych niezależnie od \mathbf{E} , zatem $\psi_2 = 0$. Pozostałe funkcje skalarne określimy przyjmując dla nich następującą reprezentację wielomianową:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \alpha_0 + \alpha_1 \text{tr } \mathbf{E} + \alpha_2 \Theta_u + \alpha_3 \text{tr } \mathbf{D}, \\ \psi_2 &= \alpha_4, \quad \psi_3 = \alpha_5, \quad \alpha_j = \text{const.}, \quad (j = 0, \dots, 5), \\ \psi_4 &= \beta_0 + \beta_1 \text{tr } \mathbf{E} + \beta_2 \Theta_u + \beta_3 \text{tr } \mathbf{D}, \\ \psi_5 &= 0, \quad \psi_6 = \beta_4, \quad \beta_j = \text{const.}, \quad (j = 0, \dots, 4), \\ \delta_1 &= \gamma_0 + \gamma_1 \text{tr } \mathbf{E} + \gamma_2 \Theta_u + \gamma_3 \text{tr } \mathbf{D}, \\ \delta_2 &= \gamma_4, \quad \delta_3 = \gamma_5, \quad \gamma_j = \text{const.}, \quad (j = 0, \dots, 5). \end{aligned}$$

Z warunku, że jeżeli $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, $\Theta_u = 0$ to szkielec jest wolny od naprężeń, czyli $\mathbf{T}^s = \mathbf{0}$, otrzymujemy

$$\alpha_0 = 0.$$

Podobny warunek dla cieczy pozwala ustalić, że

$$\beta_0 = 0.$$

Tensor strukturalnej przepuszczalności jest izotropowy, czyli

$$\mathbf{P} = \lambda \cdot \mathbf{1}$$

jeśli $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, $\Theta_u = 0$, zatem $\gamma_0 = \lambda$, gdzie λ reprezentuje początkową porowatość powierzchniową.

Uwzględniając powyższe warunki w równaniach (6.1.3) otrzymamy

$$(6.1.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{T}^s &= \{ \alpha_1 \operatorname{tr} \mathbf{E} + \alpha_2 \Theta_u + \alpha_3 \operatorname{tr} \mathbf{D} \} \mathbf{1} + \alpha_4 \mathbf{E} + \alpha_5 \mathbf{D}, \\ \mathbf{T}^f &= \{ \beta_1 \operatorname{tr} \mathbf{E} + \beta_2 \Theta_u + \beta_3 \operatorname{tr} \mathbf{D} \} \mathbf{1} + \beta_4 \mathbf{D}, \\ \mathbf{P} &= \{ \lambda_0 + \delta_1 \operatorname{tr} \mathbf{E} + \delta_2 \Theta_u + \delta_3 \operatorname{tr} \mathbf{D} \} \mathbf{1} + \delta_4 \mathbf{E} + \delta_5 \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Analizując siły dyfuzji przyjmujemy, że prędkość względna cieczy jest rzędu odkształcenia, czyli $|\mathbf{u}| = O(\epsilon)$ i wzór (5.11) ma postać

$$(6.1.5) \quad \mathbf{t} = \{ \eta'_1 \mathbf{1} + \eta'_2 \mathbf{P} + \eta'_3 \mathbf{P}^2 \},$$

gdzie $\eta'_i = \eta'_i(\Theta_u, \operatorname{tr} \mathbf{P}, \operatorname{tr} \mathbf{P}^2, \operatorname{tr} \mathbf{P}^3, \dots)$.

Na podstawie (6.1.4)₃ mamy

$$\operatorname{tr} \mathbf{P} = 3 \lambda_0 + O(\epsilon), \quad \operatorname{tr} \mathbf{P}^2 = 3 \lambda_0^2 + O(\epsilon), \quad \operatorname{tr} \mathbf{P}^3 = 3 \lambda_0^3 + O(\epsilon),$$

zatem funkcje η'_i możemy zapisać jak następuje

$$(6.1.6) \quad \begin{aligned} \eta'_1 &= \xi_0 + \xi_1 \lambda_0 + \xi_2 \lambda_0^2 + \xi_3 \lambda_0^3 + \xi_4 O(\epsilon), \\ \eta'_2 &= \xi_5, \quad \eta'_3 = \xi_6, \quad \xi_0, \dots, \xi_6 = \text{const.} \end{aligned}$$

Po podstawieniu (6.1.4)₃ do (6.1.5) oraz wykorzystaniu (6.1.6), przy zachowaniu członów liniowych, otrzymamy następujące wyrażenie dla sił dyfuzji

$$(6.1.7) \quad \mathbf{t} = \frac{1}{k_0} \mathbf{u}, \quad \frac{1}{k_0} = \xi_1 \lambda_0 + \xi_2 \lambda_0^2 + \xi_3 \lambda_0^3.$$

Wykorzystano przy tym warunek, że $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ dla $\lambda_0 = 0$.

Otrzymane związki (6.1.4)_{1,2} dla naprężeń szkieletu i cieczy oraz (6.1.7) dla sił dyfuzji są zbieżne z równaniami konstytutywnymi (przy tych samych zmiennych niezależnych) diskutowanymi przez Beckera, McIvora [8], Atkina [3], Steala [72].

Jeżeli dodatkowo w (6.1.4) pominiemy wpływ lepkości,

oraz oznaczymy

$$\alpha_1 = M, \quad \alpha_2 = A, \quad \alpha_3 = 2N, \quad \beta_1 = Q, \quad \beta_2 = R$$

to otrzymamy znane związki fizyczne liniowej teorii konsolidacji Biota [9], [12].

$$(6.1.8) \quad \begin{aligned} T^s &= 2N\epsilon + (M\epsilon_{kk} + A\theta_{kk})\mathbf{1}, \\ T^f &= (Q\epsilon_{kk} + R\theta_{kk})\mathbf{1} = G\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Jeżeli ponadto związek (6.1.7) podstawimy do (4.3.9)₂ oraz wykorzystamy (4.3.14), to przy pominięciu sił bezwładności otrzymamy znane prawo przepływu Darcy

$$(6.1.9) \quad u_i = k_0 \{ f_v p_{,i} - \bar{g}^f b_i \}.$$

Przy założeniu, że $f_v = f_v^0$ równanie to ma postać identyczną z używaną przez Biota [10] lub Derskiego [20]

$$(6.1.10) \quad u_i = k_0 (G_{,i} - \bar{g}^f b_i),$$

gdzie k_0 jest współczynnikiem przepuszczalności ośrodka.

Na podstawie (6.1.7) stwierdzamy, że k_0 jest funkcją porowatości, co ogólnie można zapisać jak następuje

$$k_0 = k_0(\lambda^3) \approx k_0(f_v^3).$$

Należy zaznaczyć, że rezultat ten jest zbieżny z wynikami uzyskanymi przez Kozeny i Carmana (patrz [67]) weryfikowanymi doświadczalnie dla kapilarnych modeli ośrodków porowatych i materiałów sproszkowanych. Taką zależność potwierdzają również wyniki uzyskane dla ośrodków o strukturze prętowej (por. [40]).

Zależność (6.1.4)₃ opisuje ewolucję strukturalnej przepuszczalności wskutek deformacji porowatego szkieletu jak również przepływającej przez pory cieczy. Zaniedbując wpływ lepkości otrzymamy

$$(6.1.11) \quad \mathbf{P} = \{ \lambda_0 + \delta_1 \varepsilon_{kk} + \delta_2 \Theta_{kk} \} \cdot \mathbf{1} + \tau_1 \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Równanie to, mające sens geometryczny, może odpowiadać za-
postulowanemu przez Biota [12] związkowi opisującym przyro-
sty przepuszczalności (w sensie hydrodynamicznym) w zależ-
ności od tensora odkształcenia szkieletu. Przyjmuje on
jednocześnie, że zmiany objętości cieczy nie wpływają na
własność przepuszczalności, co w naszym przypadku odpowia-
da warunkowi $\delta_2 = 0$.

● Zestawienie równań teorii konsolidacji

W rozważanej teorii konsolidacji występuje 29 niewia-
domych. Są to:

- składowe tensora naprężenia szkieletu i cieczy

$$T_{ij}^s, \sigma$$

- współrzędne przemieszczenia szkieletu i prędkości
cieczy

$$u_i^s, v_i^f$$

- składowe tensora odkształcenia szkieletu i struktu-
ralnej przepuszczalności

$$\varepsilon_{ij}, P_{ij}$$

- gęstość cieczy i współrzędne wektora sił dyfuzji

$$g^f, \tau_i$$

Dla wyznaczenia wielkości nieznanych i przy założeniu, że

$$g^f = g_0^f + g^{f'}, \quad f_v = f_v^0 + f_v', \quad p = p_0 + p',$$

korzystamy z następujących równań

- równań ruchu

$$(6.1.12) \quad \begin{aligned} T_{ij,j}^s + \bar{\sigma}^s b_i + \bar{\sigma}_i^s + \tau_i^s - \bar{\sigma}^s \frac{D}{D^s t} v_i^s, \\ \bar{\sigma}_{,i} + \bar{\sigma}^f b_i + \bar{\sigma}_i^f + \tau_i^f - \bar{\sigma}^f \frac{D}{D^f t} v_i^f, \end{aligned}$$

- związków geometrycznych

$$(6.1.13) \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^s + u_{j,i}^s),$$

- związków konstytutywnych

$$(6.1.14) \quad \begin{aligned} T_{ij}^s &= (M \epsilon_{kk} + A \theta_{kk}) \delta_{ij} + 2N \epsilon_{ij}, \\ \bar{\sigma} &= Q \epsilon_{kk} + R \theta_{kk}, \\ \tau_i^f &= -\tau_i^s = \frac{1}{k_0} (v_i^f - v_i^s), \\ P_{ij} &= \{ \lambda_0 + \delta_1 \epsilon_{kk} + \delta_2 \theta_{kk} \} \delta_{ij} + \delta_3 \epsilon_{ij}, \end{aligned}$$

oraz równanie ciągłości dla cieczy w postaci

$$(6.1.15) \quad f_v^0 \dot{\sigma}^f + \sigma_o^f \dot{f}_v^f + \bar{\sigma}^f v_{i,i}^f = 0.$$

Równania te uzupełniają ponadto zależności (4.3.14) i (3.2.6)

$$(6.1.16) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_i^f &= -\bar{\sigma}_i^s - p_0 f_{v,i}^f, \\ f_v &= I_1^p - a I_2^p + b I_3^p. \end{aligned}$$

Równania (6.1.12) - (6.1.15) stanowią zamknięty układ równań niezbędnych przy rozwiązywaniu problemów początkowo-brzegowych teorii ośrodków porowatych wypełnionych cieczą. Na uwagę zasługuje tutaj fakt, że pomimo zlinearyzowanej teorii uwzględnia się zmiany porowatości jak również ewolucję wewnętrznej geometrycznej struktury porów ośrodka. Ma to istotne znaczenie przy określaniu sił oddziaływania statycznego (6.1.16) oraz pozwala zbadać wpływ naprężeń stycznych na zmianę porowatości co wykażemy niżej.

Jeżeli związeki (6.1.14)_{1,2} zapiszemy w innej postaci, (patrz [9], [20]),

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \left\{ T_{ij}^s - \frac{\nu}{1+\nu} T_{PP}^s \delta_{ij} \right\} + \frac{G}{3H} \delta_{ij}, \\ \Theta_{kk} &= \frac{T_{PP}^s}{3H} + \frac{G}{R}, \end{aligned}$$

to przy założeniu, że różne od zera pozostają tylko naprężenia T_{12}^s , otrzymamy

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2\mu} T_{12}^s.$$

Po podstawieniu tego związku do (6.1.14)₄ i wykorzystaniu (6.1.16)₂ znajdziemy

$$(6.1.17) \quad f_v - f_v^0 = c T_{12}^{s^2}, \quad c = \frac{(a - b \lambda_0)}{4\mu^2} \gamma_4^2 > 0.$$

Wynik ten jest potwierdzeniem postulatu Reiner'a (1965) stosowanego w mechanice gruntów [80], który stwierdza, że zmiany objętości porów zależą nie tylko od naprężeń normalnych ale również są proporcjonalne do kwadratu naprężeń stycznych.

Jeżeli w równaniach (6.1.12) - (6.1.15) ograniczymy się do stałej porowatości to otrzymamy układ równań teorii konsolidacji Biota bez sprzężenia masowego (oznacza to, że w równaniach Biota $\varrho_{12} = 0$).

● Równania ruchu Derskiego

Równania ruchu Derskiego [21] są sformułowane dla składników kinematycznych przy założeniu stałych wartości porowatości

$$f_v = f_v^0, \quad \lambda = \lambda_0.$$

Konsekwencją takiego założenia jest zerowanie się zależności (6.1.16)₄. Siły dafuzji dla cieczy swobodnej zależą od

prędkości względnej składników kinematycznych, zatem

$$(6.1.18) \quad \dot{\bar{r}}_i^s = -\dot{\bar{r}}_i^f = \frac{1}{k_s} (\dot{v}_i^s - \dot{v}_i^f) .$$

Jeżeli następnie wykorzystamy zależności (4.3.4) to otrzymamy

$$(6.1.19) \quad \begin{aligned} \dot{T}_{ik}^s &= T_{ik}^s + (1 - \frac{\lambda_s}{f_v}) G \delta_{ij} , \\ \dot{T}_{ik}^f &= \frac{\lambda_s}{f_v} G \delta_{ij} . \end{aligned}$$

Uwzględniając (6.1.18) i (6.1.19) równanie (4.3.8) przyjmujemy postać

$$(6.1.20) \quad \begin{aligned} \dot{T}_{ik,k}^s + (\bar{g} - \bar{g}_2^f) b_i &= (\bar{g} - \bar{g}_2^f) \frac{D}{Dt} \dot{v}_i + \frac{1}{k_s} (\dot{v}_i^s - \dot{v}_i^f) + g_1 \dot{v}_i^s , \\ \frac{\lambda_s}{f_v} G_{,i} + \bar{g}_2^f b_i - \bar{g}_2^f \frac{D}{Dt} \dot{v}_i - \frac{1}{k_s} (\dot{v}_i^s - \dot{v}_i^f) &+ g_2 \dot{v}_i^s , \end{aligned}$$

gdzie $\bar{g} = \bar{g}^s + \bar{g}^f$, $\bar{g}_2^f = \lambda_s g^f$.

Równania (6.1.20) sprowadzają się do równań ruchu Derskiego jeśli przyjmiemy, że masy składników kinematycznych są zachowane, czyli $g_1 = g_2 = 0$.

Otrzymane równania łącznie ze związkami geometrycznymi (6.1.13) oraz związkami fizycznymi (6.1.14) tworzą zamknięty układ równań teorii konsolidacji.

6.2. Anizotropowa konsolidacja ośrodków porowatych

● Ogólny przypadek anizotropii

Liczne ośrodki porowate charakteryzują się kierunkowymi własnościami mechanicznymi. Liniową teorię konsolidacji anizotropowych ośrodków porowatych wypełnionych cieczą rozważał Biot [10]. Problem przepływu cieczy przez anizotropowy sprężysty materiał porowaty, w ramach teorii mieszanin,

rozważał Adkins [1] oraz Green, Adkins [30]. Należy zaznaczyć, że w wymienionych pracach geometryczna struktura porowatego szkieletu nie ma bezpośredniego związku z rodzajem anizotropii materiału. Podobnie, anizotropia przepływu cieczy nie ma związku z własnościami kierunkowymi szkieletu. Problem wzajemnych powiązań pomiędzy tymi własnościami podjęto w pracy [48]. Tutaj wykorzystamy zaproponowany w rozdziale 3 opis geometrycznej struktury porów dla scharakteryzowania kierunkowych własności mechanicznych szkieletu oraz jego związku z anizotropią przepływu cieczy.

Zakładamy, że symetrię materiału porowatego, w stanie początkowym, charakteryzuje tensor strukturalnej przepuszczalności \mathbb{P} . Takie postępowanie uzasadnione jest wynikami prac Boehlera [14], Boehlera, Sawczuka [17], Litewki, Sawczuka [49].

Punktem wyjścia dla określenia związków konstytutywnych anizotropowego ośrodka są równania (6.1.2) oraz (5.9), które w tym przypadku mają postać

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}^s &= \mathbf{T}^s(\bar{\mathcal{S}}^f, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}, \mathbb{P}_0), \\
 \mathbf{T}^f &= \mathbf{T}^f(\quad - \quad - \quad), \\
 \mathbf{P} &= \mathbf{P}(\quad - \quad - \quad), \\
 \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}(\bar{\mathcal{S}}^f, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}, \mathbf{u}, \mathbb{P}_0).
 \end{aligned}
 \tag{6.2.1}$$

Celem wyspecyfikowania postaci związków fizycznych (6.2.1) korzystamy z twierdzeń o reprezentacji funkcji tensorowych (patrz Dodatek) i otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}^s(\bar{\mathcal{S}}^f, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}, \mathbb{P}_0) &= \psi_i \mathbf{G}_i, \\
 \mathbf{T}^f(\bar{\mathcal{S}}^f, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}, \mathbb{P}) &= \Psi_i \mathbf{G}_i, \\
 \mathbf{P}(\bar{\mathcal{S}}^f, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}, \mathbb{P}) &= \delta_i \mathbf{G}_i,
 \end{aligned}
 \tag{6.2.2}$$

gdzie pełny zbiór generatorów tensorowych jest

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{1}, \mathbf{E}, \mathbf{E}^2, \mathbf{D}, \mathbf{D}^2, \mathbf{P}_0, \mathbf{P}^2, (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{E}), (\mathbf{E}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{E}), \\
 & (\mathbf{D}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{D}), (\mathbf{E}^2\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{E}^2), (\mathbf{E}^2\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{E}^2), (\mathbf{D}^2\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{D}^2), \\
 & (\mathbf{E}\mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^2\mathbf{E}), (\mathbf{E}\mathbf{P}^2 + \mathbf{P}^2\mathbf{E}), (\mathbf{D}\mathbf{P}^2 + \mathbf{P}^2\mathbf{D}).
 \end{aligned}$$

Skalarne funkcje ψ_i, ψ_i, δ_i są funkcjami następującego zbioru niezmienników:

$$\begin{aligned}
 & \bar{s}^f, \text{tr } \mathbf{E}, \text{tr } \mathbf{E}^2, \text{tr } \mathbf{E}^3, \text{tr } \mathbf{D}, \text{tr } \mathbf{D}^2, \text{tr } \mathbf{D}^3, \text{tr } \mathbf{P}, \\
 & \text{tr } \mathbf{P}^2, \text{tr } \mathbf{P}^3, \text{tr } \mathbf{E}\mathbf{D}, \text{tr } \mathbf{E}\mathbf{P}, \text{tr } \mathbf{D}\mathbf{P}, \text{tr } \mathbf{E}^2\mathbf{D}, \\
 & \text{tr } \mathbf{E}^2\mathbf{P}, \text{tr } \mathbf{D}^2\mathbf{P}, \text{tr } \mathbf{E}\mathbf{D}^2, \text{tr } \mathbf{E}\mathbf{P}^2, \text{tr } \mathbf{D}\mathbf{P}^2, \\
 & \text{tr } \mathbf{E}^2\mathbf{D}^2, \text{tr } \mathbf{E}^2\mathbf{P}^2, \text{tr } \mathbf{D}^2\mathbf{P}^2, \text{tr } \mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{P}.
 \end{aligned}$$

Ograniczając się do zależności liniowych otrzymujemy:

⇒ dla naprężeń w szkielecie

$$\begin{aligned}
 (6.2.3) \quad \mathbf{T}^s = & \left\{ \alpha_1 \text{tr } \mathbf{E} + \underline{\alpha_2 \Theta_{II}} + \alpha_3 \text{tr } \mathbf{E}\mathbf{P} + \left[\alpha_4 \text{tr } \mathbf{D} + \alpha_5 \text{tr } \mathbf{D}\mathbf{P} \right] \mathbf{1} \right. \\
 & + \left\{ \alpha_6 + \alpha_7 \text{tr } \mathbf{P} \right\} \mathbf{E} + \left[\alpha_8 + \alpha_9 \text{tr } \mathbf{P} \right] \mathbf{D} + \\
 & + \left\{ \alpha_{10} \text{tr } \mathbf{E} + \underline{\alpha_{11} \Theta_{II}} + \left[\alpha_{12} \text{tr } \mathbf{D} \right] \cdot \mathbf{P} + \alpha_{13} \left\{ \mathbf{E}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{E} \right\} \right. \\
 & \left. + \left[\alpha_{14} \left\{ \mathbf{D}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{D} \right\} \right] \right\},
 \end{aligned}$$

gdzie obramowane wyrazy charakteryzują sprzężenie lepkościowe pomiędzy szkieletem i cieczą, natomiast wyrazy podkreślone reprezentują sprzężenie objętościowe. Na tej podstawie stwierdzamy, że

|| ciśnienie cieczy generuje naprężenia styczne w anizotropowym porowatym szkielecie.

⇒ dla naprężeń w cieczy

$$\begin{aligned}
 (6.2.4) \quad \mathbf{T}^f = & \left\{ \underline{\beta_1 \text{tr } \mathbf{E}} + \underline{\beta_2 \Theta_{II}} + \underline{\beta_3 \text{tr } \mathbf{E}\mathbf{P}} + \beta_4 \text{tr } \mathbf{D} + \beta_5 \text{tr } \mathbf{D}\mathbf{P} \right\} \mathbf{1} \\
 & + \left(\beta_6 \text{tr } \mathbf{D} \right) \mathbf{P} + \beta_7 \left\{ \mathbf{D}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{D} \right\},
 \end{aligned}$$

gdzie podkreślone wyrazy reprezentują wpływ zmian objętościowych szkieletu na naprężenia w cieczy. Przy pominięciu efektów lepkości wzór.

$$(6.2.5) \quad \mathbf{T}^f = \{ \beta_1 \text{tr} \mathbf{E} + \beta_2 \Theta_{11} + \beta_3 \text{tr} \mathbf{E} \mathbf{P}_0 \} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{G} \mathbf{1}$$

określa ciśnienie w cieczy wypełniającej pory ośrodka o strukturze wewnętrznej scharakteryzowanej tensorem \mathbf{P}_0 .

⇒ ewolucję strukturalnej przepuszczalności

$$(6.2.6) \quad \mathbf{P} = \{ \delta_1 \text{tr} \mathbf{E} + \delta_2 \Theta_{11} + \delta_3 \text{tr} \mathbf{E} \mathbf{P}_0 + [\delta_4 \text{tr} \mathbf{D} + \delta_5 \text{tr} \mathbf{D} \mathbf{P}_0] \} \mathbf{1} \\ + \{ \delta_6 + \delta_7 \text{tr} \mathbf{P}_0 \} \mathbf{E} + \{ 1 + \delta_8 \text{tr} \mathbf{E} + \delta_9 \Theta_{11} + [\delta_{10} \text{tr} \mathbf{D}] \} \mathbf{P} \\ + [\delta_{11} + \delta_{12} \text{tr} \mathbf{P}_0] \mathbf{D} + \delta_{13} \{ \mathbf{E} \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_0 \mathbf{E} \} + [\delta_{14} \{ \mathbf{D} \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_0 \mathbf{D} \}]$$

gdzie wyrazy obramowane charakteryzują wpływ lepkości cieczy na zmiany \mathbf{P} , natomiast wyrazy podkreślone reprezentują zmiany \mathbf{P} wywołane ciśnieniem cieczy w porach.

Stwierdzamy przy tym, że

|| ciśnienie cieczy w porach szkieletu o anizotropowej strukturze pogłębia tę anizotropię.

Siły dyfuzji (6.2.1)₄ w zakresie liniowym mają postać

$$(6.2.7) \quad \boldsymbol{\tau} = \eta \mathbf{P}_0 \mathbf{u}, \quad \eta = \text{const.}$$

Związek (6.2.7) w powiązaniu z równaniem ruchu (4.3.9)₂, przy pominięciu sił bezwładności, daje w wyniku prawo przepływu Darcy dla ośrodka anizotropowego, (por. [10]),

$$(6.2.8) \quad - \text{grad } p + \mathbf{g}^f \mathbf{b} = - \frac{\eta}{f_v} \mathbf{P}_0 \mathbf{u}.$$

Na podstawie (6.2.8) stwierdzamy, że

|| tensor \mathbf{P} reprezentujący geometryczną strukturę porów szkieletu odpowiada za własności przepuszczalności ośrodka w sensie oporów przepływu przy ruchu cieczy przez ten ośrodek.

Identyfikując

$$\begin{aligned} c_{11} &= 2N + A, & c_{12} &= A, & c_{13} &= F, & c_{33} &= C, \\ c_{44} &= L, & c_{45} &= M, & c_{55} &= Q, & c_{57} &= R \end{aligned}$$

związki (6.2.9) są zbieżne z otrzymanymi przez Biota [10] dla takiego przypadku anizotropii.

Dalsza analiza stałych materiałowych (6.2.10) pozwala ustalić, że α_1 i α_0 są stałymi izotropowego materiału wyjściowego szkieletu (bez porów) i reprezentują

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \lambda, & \text{stała Lamé} \\ \alpha_0 &= 2\mu, & \mu - \text{moduł ścinienia.} \end{aligned}$$

Na tej podstawie wnioskujemy, że

stałe materiałowe porowatego szkieletu złożone są ze stałych materiału wyjściowego szkieletu oraz stałych uwzględniających wpływ porowatości powierzchniowych.

Taką strukturę stałych potwierdzają wyniki pracy Khoroszuna [38] dla ośrodka izotropowego.

Na podstawie przeprowadzonej analizy oraz uzyskanych wyników widzimy, że

tensor \mathbf{P}_0 reprezentujący geometryczną strukturę porów można wykorzystać do opisanie symetrii kierunkowych własności szkieletu, scharakteryzowania oddziaływań pomiędzy składnikami oraz określenia oporu przepływu cieczy przez szkielet.

W podsumowaniu tych rozważań należy nadmienić, że stałe materiałowe mogą zależeć w sposób nieliniowy od porowatości. W naszym przypadku zależność liniowa jest konsekwencją przyjętego założenia o liniowości związków fizycznych względem \mathbf{P}_0 .

7. Zakończenie

Zaprezentowane w pracy rozważania dotyczą opisu zjawisk mechanicznych zachodzących w silnie odkształcalnych ośrodkach porowatych wypełnionych cieczą z uwzględnieniem wewnętrznej geometrii ośrodka. Geometryczną strukturę porowatego szkieletu scharakteryzowano wektorem i tensorem strukturalnej przepuszczalności wykazując ich związek z porowatością objętościową i powierzchnią.

Wykorzystanie tensora strukturalnej przepuszczalności \mathbf{P} przy analizie równań bilansu oraz związków konstytutywnych pozwoliło zbadać sprzężenie kinematyczne i fizyczne pomiędzy składnikami. Uwzględnienie tensora \mathbf{P} w równaniach ciągłości wyjaśnia istotę podziału cieczy na swobodną i uwięzioną oraz daje podstawę do stwierdzenia, że prędkość cieczy całkowitej (w teorii Biota) jest prędkością barycentryczną.

Analizie zmiany pędu ośrodka pozwoliła na właściwą interpretację sprzężenia przez masę występującego w równaniach ruchu poszczególnych składników jako konsekwencji struktury szkieletu. Przy odpowiednich uproszczeniach otrzymuje się zgodność równań ruchu ze znanymi równaniami Biota [11] i Derskiego [21].

Związki konstytutywne sformułowane są w ramach teorii nieliniowej dla ośrodka złożonego z silnie sprężystego szkieletu i lepkiej cieczy. Zastosowane narzędzie reprezentacji funkcji tensorowych przy budowie tych związków pozwala wyspecyfikować charakter sprzężeń mechanicznych pomiędzy składnikami ośrodka jak również zbadać wpływ struktury szkieletu na siły dyfuzji. Ponadto, umożliwia określenie związku pomiędzy geometryczną strukturą szkieletu, jego kierunkowymi własnościami mechanicznymi i oporami przepływającej przez niego cieczy.

Na uwagę zasługuje fakt, że linearyzacja otrzymanych związków fizycznych prowadzi do znanej teorii konsolidacji

Biota poszerzonej o równania ewolucji własności geometrycznych szkieletu. Daje to podstawę do uwzględnienia zmian porowatości i przepuszczalności w teorii liniowej w zagadnieniach, w których zmiany te mają znaczenie.

W pracy nie analizowano sposobu formułowania warunków brzegowych dla ośrodków wieloskładnikowych. Może jednak powstać pytanie, dla jakich składników, fizycznych czy kinematycznych formułowanie tych warunków jest bardziej odpowiednie? Problem ten dyskutowano w pracy [41]. Ponieważ istnieją związki pomiędzy wielkościami opisującymi odpowiednie składniki, zdaniem autora, klesycznie formułowane warunki brzegowe w teorii konsolidacji dla składników fizycznych nie tracą ważności.

Przedstawione rozważania nie wyczerpują wszystkich problemów mechaniki ośrodków porowatych wypełnionych cieczą. Nie uwzględniono w nich oddziaływań cieplnych jak również aktywności chemicznej składników, które mogą wywierać istotny wpływ na zjawiska zachodzące w ośrodku w obecności temperatury. W niektórych zagadnieniach nabierają znaczenia efekty mikropolarne, warstwy przyściennej oraz oddziaływania magneto-elektryczne. Problemy te, oczekujące rozwiązania, stwarzają konieczność dalszego rozwoju i doskonalenia teorii ośrodków porowatych.

Niezbędne są również odpowiednio ukierunkowane badania doświadczalne. Mogą one dotyczyć analizy wielkości geometrycznych ośrodka porowatego jak też określenia funkcji materiałowych w zależności od jego struktury wewnętrznej. Innym kierunkiem badań jest ustalenie doświadczalne własności plastycznych ośrodków porowatych o anizotropowej strukturze wewnętrznej z zastosowaniem wyników do analizy nośności granicznej elementów konstrukcyjnych.

L I T E R A T U R A

- [1] ADKINS J.E., Diffusion of fluids through anisotropic highly elastic solids. Arch.Rational Mech.Anal., 15, 1964, (222-234)
- [2] AHMED N., SUNADA D.K., Nonlinear flow in porous media. J.Hydraulics Div. Proc. ASCE, Nov., 1969, (1847-1856)
- [3] ATKIN R.J., Constitutive theory for a mixture of an isotropic elastic solid and a non-newtonian fluid. ZAMP, Vol. 18, 1967, (803-825)
- [4] AURIAULT J.L., Dynamic behaviour of a porous medium saturated by a newtonian fluid. Int. J. Engng Sci. Vol. 18, 1980, (775-785)
- [5] BEAR J., ZASLAWSKY D., IRMAY S., Physical principles of water percolation and seepage. Edit. S. Irmay, UNESCO, 1968
- [6] BEAVERS G.S., WILSON T.A., MASHA B.A., Flow through a deformable porous material. J. Appl. Mech., Trans. ASME, Sept. 1975, (592-602)
- [7] BEAVERS G.S., SPARROW E.M., Non-Darcy flow through fibrous porous media. J. Appl. Mech., Trans. ASME, Dec. 1969, (711-714)
- [8] BECKER R., McIVOR I.K., A nonlinear mixture theory representation of saturated sand. Int. J. Engng Sci., Vol. 16, 1978, (931- 942)
- [9] BIOT M.A., General theory of three - dimensional consolidation. J. Appl. Phys., ,12, 1941, (115- 164)
- [10] BIOT M.A., Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. J. Appl. Phys., Vol. 26, No. 2, 1955, (182-185)
- [11] BIOT M.A., Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range, II. Higher frequency range. J. Acoust. Soc. Am. 28, 2, 1956, (168-191)
- [12] BIOT M.A., Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. J. Appl. Phys., 33, 1962, (1482-1492)

- [13] BIOT M.A., Theory of finite deformations of porous solids. *Indiana Univ. Math. Journal* 21, 7, 1972, (597-620)
- [14] BOEHLER J.P., A simple derivation of representations for non-polynomial constitutive equations in some cases of anisotropy. *ZAMM* No. 4, 59, 1979, (157-167)
- [15] BOEHLER J.P., Loi de comportement anisotrope des milieux continus. *J. Méc.*, 2, 17, 1978, (153-190)
- [16] BOEHLER J.P., On irreducible representations for isotropic scalar functions. *ZAMM* 6, 57, 1977, (323-327)
- [17] BOEHLER J.P., SAWCZUK A., On yielding of oriented solids. *Acta Mech.*, 27, 1977, (185-206)
- [18] CHAO B.T., SHA W.T., SOO S.L., On inertial coupling in dynamic equations of components in a mixture. *Int. J. Multiphase Flow* 4, 1978
- [19] CROCHET M.J., NAGHDI P.M., On constitutive equations for flow of fluid through an elastic solid. *Int. J. Engng Sci.* Vol. 4, 1966, (383-401)
- [20] DERSKI W., Wstęp do matematycznej teorii konsolidacji. *Zesz. Nauk. Pol. Łódzkiej, Mechanika* 11, 1964
- [21] DERSKI W., Equations of motion for a fluid - saturated porous solids. *Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. tech.* Vol. XXVI, No. 1, 1978, (11-16)
- [22] DERSKI W., KOWALSKI S.J., On the motion and mass continuity equations in a porous fluid - saturated medium. *Studia geot. et mech.*, No. 2, 1980, (3-12)
- [23] DERSKI W., ENE H.I., Les equations du mouvement dans les milieux poreux. *Preprint Series in Mathematics* No. 4, Bucuresti 1978
- [24] DULLIEN F.A.L., Porous media, fluid transport and pore structure. *Academic Press, New York*, 1979
- [25] DZIĘCIELAK R., Propagacja fal nieciągłości w ośrodku porowatym nasyconym cieczą. *Wyd. Pol. Poznańskiej, Seria Rozprawy* Nr 118, 1980
- [26] ERINGEN A.C., Theory of Continuous Media. *John Wiley, Sons Inc., New York* 1965
- [27] ERINGEN A.C., INGRAM J.D., A continuum theory of chemically reacting media - I. *Int. J. Engng Sci.*, Vol. 3, 1965, (197-212)

- [28] FERRANDON J., Les lois de l'écoulement de filtration. Génie Civil, No. 2, 1948, (125-127)
- [29] GREEN A.E., A continuum theory of anisotropic fluids. Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 60, 1964
- [30] GREEN A.E., ADKINS J.E., A contribution to the theory of nonlinear diffusion. Arch. Rational Mech. Anal., 15, 1964, (235-246)
- [31] GREEN A.E., NAGHDI P.M., A dynamical theory of interacting continua. Int. J. Engng Sci., Vol. 3, 1965, (231-241)
- [32] GREEN A.E., NAGHDI P.M., On basic equations for mixtures. Quart. J. Appl. Math., XXII, 1969, (427-438)
- [33] GREEN A.E., NAGHDI P.M., The flow of fluid through an elastic solid. Acta Mech., 9, 1970, (329-340)
- [34] GREEN A.E., STEEL T.R., Constitutive equations for interacting continua. Int. J. Engng Sci., Vol. 4, 1966, (483-500)
- [35] GURTIN M.E., OLIVER M.L., WILLIAMS W.O., On balance of forces for mixtures. Quart. Appl. Math., January 1973, (527-530)
- [36] HSIEH L., YEW C.H., Wave motion in a fluid saturated porous medium. J. Appl. Mech. Trans. ASME, 40, 1973, (657-661)
- [37] IGNACZAK J., Tensorial equations of motion for a fluid saturated porous elastic solid. Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. techn., Vol. XXVI, No. 8-9, 1978, (371-375)
- [38] Хорошун Л.Л., К теории насыщенных пористых сред. Л. Мех. 12, No. 12, 1976, (12-35).
- [39] KOELLER R.C., ZEBIB A., A non-equilibrium thermodynamic theory of flow through deformable porous media. Acta Mech., 30, 1978, (259-274)
- [40] KOŁODZIEJ J.A., Opór filtracyjny układu prętów cylindrycznych przy podłużnym laminarnym przepływie. Arch. Bud. Maszyn, T. XXVII, Z. 4, 1980
- [41] KOWALSKI S.J., Współrzędne normalne i warunki brzegowe w teorii mieszanin. Prace IPPT, Nr 5, 1980, (praca habilitacyjna)
- [42] KUBIK J., Permeability tensor and porosity of material with rectilinear channels. Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. techn., Vol. XXVII, No. 10-11 1979, (445-453)

- [43] KUBIK J., Balance of mass of a fluid-solid mixture with directional properties of the skeleton. Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. techn., Vol. XXVIII, No. 9-10, 1980
- [44] KUBIK J., Large elastic deformations of a fluid - saturated porous solid. J. Mec. Appl., (in press)
- [45] KUBIK J., MIELNICZUK J., Kinematyka ośrodków porowatych wypełnionych cieczą. Prace IPPT, Nr 59, 1977
- [46] KUBIK J., RYBICKI A., Porowatość ośrodka porowatego scharakteryzowanego tensorem przepuszczalności. Prace IPPT, Nr 72, 1979
- [47] KUBIK J., RYBICKI A., Porosity - permeability relation in material with channel pore structure. Studia geot. et mech., No. 3, 1980
- [48] KUBIK J., SAWCZUK A., A theory of anisotropic consolidation. (praca złożona do druku)
- [49] LITEWKA A., SAWCZUK A., A yield criterion for perforated sheets. Ing. Arch., Vol. 50, 1981
- [50] LITWINISZYN J., Stationary flows in heterogeneous anisotropic mediums. Ann. Soc. Polon. Math., 22, 1949
- [51] MATHERON G., Random sets and integral geometry. Wiley Series in Probability and Math. Statistics, New York 1975
- [52] MORLAND L.W., A simple constitutive theory for a fluid-saturated porous solid. J. Geoph. Res., Vol. 77, No. 5, 1972, (890-900)
- [53] MORLAND L.W., Effective stress in mixture theory. Arch. Mész. Stos., 27, 1975, (883-887)
- [54] MÜLLER I., Entropy, absolute temperature and coldness in thermodynamics. Boundary conditions in porous materials. CISM, Springer Verlag, Udine 1971
- [53] Николаевский В.Н., О процессах неустановившейся деформации водонасыщенных грунтов. Arch. Mech. Stos., 17; 1965
- [56] Николаевский В.Н., О распространении продольных волн в насыщенных жидкостью упругих пористых средах. Инж. Журн., III, 2, 1963, (251-261)

- [57] Нигматуллин Р. У., Основы механики гетерогенных сред. Изд. Наука, Москва 1978
- [58] Нигматуллин Р. У., Методы механики сплошной среды для описания многофазных смесей. П. М. Н. Т. 34, 1970, (1097-1112)
- [59] NEUMAN S.P., Theoretical derivation of Darcy's law. Acta Mech., Vol. 25, No. 3-4, 1977, (153-170)
- [60] POREH M., ELATA C., An analytical derivation of Darcy's law. Israel J. Technology, 4, 1966, (214-217)
- [61] PRÉVOST J.H., Mechanics of continuous porous media. Int. J. Engng Sci., Vol. 18, 1980, (787-800)
- [62] RAATS P.A.C., Forces acting upon the solid phase of a porous medium. ZAMP, Vol. 19, 1968, (606-613)
- [63] RAATS P.A.C., KLUTE A., Transport in soils: The balance of mass. Soil Sci. Soc. Amer. Proc., Vol. 32, No. 2, 1968 (161-166)
- [64] RAATS P.A.C., KLUTE A., Transport in soils: The balance in momentum. Soil Sci. Soc. Amer. Proc., Vol. 32, No. 4, 1968, (452-456)
- [65] RAMIREZ G.A., Constitutive equations for the flow of incompressible fluids through an elastic porous solid. Israel J. Techn., Vol. 9, No. 5, 1971, (411-425)
- [66] SCHEIDEGGER A.E., The physics of flow through porous media. 3rd ed. Univ. of Toronto Press, Toronto, 1974
- [67] SCHEIDEGGER A.E., Hydrodynamics in porous media. Handbuch der Physik, Vol. III/2, Ed. S. Fluge, C. Truesdell, Springer - Verlag, 1963
- [68] SMITH G.F., On isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors. Int. J. Engng Sci., 9, 1971, 899-916
- [69] SOBCZYŃSKA Z., Teoria niesymetrycznej konsolidacji ośrodków porowatych. Wyd. Pol. Poznańskiej, Seria Rozprawy Nr 57, Poznań 1973
- [70] SOLECKI R., Miejsce teorii porowatości Biota w mechanice ośrodków ciągłych. Rozpr. Inż., 3, 16, 1968, (313-317)

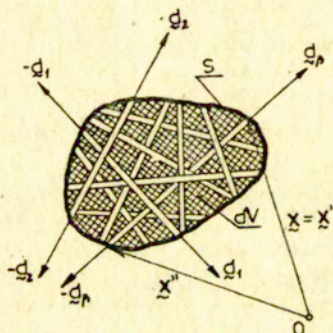
- [71] SPENCER A.J.M., Theory of invariants, w : Continuum Physics, T.I, Ed. C. Eringen, Academic Press 1971 (239-353)
- [72] STEEL T.R., Applications of a theory of interacting continua. Quart. J. Mech. Appl. Math., Vol. XX, Pt. I, 1967, (57-72)
- [73] SZEFER G., Nonlinear problems of consolidation theory. Problemes de Reologie, Symposium Franco-Polonais, Cracovie 1977, PWN Warszawa 1978
- [74] TERZAGHI K., Erdbaumechanik auf bodenphysikalischen Grundlage, Deutice Wiedeñ 1925
- [75] TRUESDELL C., TOUPIN R.A., The classical field theories, In Handbuch der Physik, Vol. III/1, Ed. S. Fluge, Springer - Verlag, 1960
- [76] TSYTOVICH N.A., ZARETSKY Y.K., The development of the theory of soil consolidation in the USSR. Geotech., No. 3, 1969, (357-375)
- [77] WANG C.C., A new representation theorem for isotropic functions. Part 1,2. Arch. Rational Mech. Anal., 3, 36, 1970, (166-223)
- [78] WANG C.C., Corrigendum to the papers on: Representations for isotropic functions. Arch. Rational Mech. Anal., 5, 43, 1971, (392-395)
- [79] WILMAŃSKI K., Zarys termodynamiki ośrodków ciągłych. Prace IPPT, Nr 6, 1975
- [80] Зарецкий Ю.К., Теория консолидации грунтов. Изг. Наука, Москва 1967.

D O D A T E K

D.1. Symetrie tensora \mathbf{P}

Rozważamy elementarną objętość ΔV ośrodka porowatego ograniczonego powierzchnią S . Moment wektora \mathbf{n}^p określonego dla elementu powierzchni ΔS względem dowolnie obranego bieguna O zapiszemy jak następuje

$$(D.1.1) \quad \mathbf{m} = \mathbf{x} \times \mathbf{n}^p \Delta S .$$



Wektor \mathbf{x} określa położenie elementu ΔS względem O . Wykorzystując przyrostową postać definicji (3.2.2)

$$\frac{\Delta \mathbf{d}}{\Delta S} = \mathbf{n}^p + \boldsymbol{\epsilon} , \quad \Delta \mathbf{d} = \sum_{\beta} \mathbf{d}_{\beta} ,$$

$$\text{gdzie } \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0} ,$$

moment (D.1.1) można zapisać w następującej postaci

$$\mathbf{x} \times \frac{\Delta \mathbf{d}}{\Delta S} \cdot \Delta S = \mathbf{x} \times \mathbf{n}^p \Delta S + \mathbf{x} \times \boldsymbol{\epsilon} \Delta S.$$

Sumując wszystkie momenty dla powierzchni zamkniętej S , jeśli ilość jej elementów podziału rośnie nieograniczenie, otrzymamy

$$(D.1.2) \quad \lim_{\max \Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\sum \mathbf{x}_i \times \mathbf{d}_i}{\Delta S_i} \right\} \Delta S_i = \int_S \mathbf{x} \times \mathbf{n}^p dS.$$

Ponieważ względem tego samego bieguna O dla każdego mikrokanalika mamy dwa momenty równe lecz o przeciwnych zwrotach, zatem dla zamkniętej powierzchni S stwierdzamy, że

$$(D.1.3) \quad \int_S \mathbf{x} \times \mathbf{n}^p dS = \mathbf{0}.$$

Korzystając z zależności (3.2.7) oraz twierdzenia Greena-Ostrogradzkiego otrzymujemy równanie

$$\epsilon_{ijk} (x_j P_{kl}),_{,l} = 0,$$

z którego, po uwzględnieniu (3.2.4), wynika że

$$(D.1.4) \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}^T.$$

Na tej podstawie stwierdzamy, że tensor \mathbf{P} jest tensorem symetrycznym.

D.2. Twierdzenia o reprezentacji izotropowych funkcji tensorowych

Niech $A_1, \dots, A_N, W_1, \dots, W_M, v_1, \dots, v_R$ oznaczają odpowiednio N tensorów symetrycznych, M tensorów skośnie symetrycznych oraz R wektorów i są argumentami funkcji skalarnej ϕ , wektorowej \mathbf{f} lub tensora symetrycz-

nego H . Mówimy, że ϕ , f i H są funkcjami izotropowymi jeżeli dla dowolnego tensora ortogonalnego Q mamy (por. [68], [71], [77]):

$$(D.2.1) \quad \begin{aligned} \phi(QA_iQ^T, QW_pQ^T, Qv_m) &= \phi(A_i, W_p, v_m), \\ f(\quad) &= Qf(A_i, W_p, v_m), \\ H(\quad) &= QH(A_i, W_p, v_m)Q^T, \end{aligned}$$

gdzie $QQ^T = \mathbf{1}$, $\det Q = \pm \mathbf{1}$,
 $i = 1, \dots, N$; $p = 1, \dots, M$; $m = 1, \dots, R$.

● Reprezentacja funkcji skalarnej

Twierdzenie.

W przestrzeni trójwymiarowej izotropową funkcję skalarną (D.2.1), można przedstawić jako funkcję następującego nieredukowalnego zbioru niezmienników:

$$\begin{aligned} &v_\alpha \cdot v_\alpha, \quad v_\alpha \cdot v_\beta, \\ &\text{tr } A_i, \quad \text{tr } A_i^2, \quad \text{tr } A_i^3, \quad \text{tr } A_i A_j, \quad \text{tr } A_i^2 A_j, \quad \text{tr } A_i A_j^2, \quad \text{tr } A_i^2 A_j^2, \\ &\text{tr } A_i A_j A_k, \quad \text{tr } W_p^2, \quad \text{tr } W_p W_q, \quad \text{tr } W_p W_q W_r, \\ &v_\alpha \cdot A_i v_\alpha, \quad v_\alpha \cdot A_i^2 v_\alpha, \quad v_\alpha \cdot A_i A_j v_\alpha, \quad v_\alpha \cdot A_i v_\beta, \\ &v_\alpha \cdot A_i^2 v_\beta, \quad v_\alpha \cdot (A_i A_j - A_j A_i) v_\beta, \\ &v_\alpha \cdot W_p^2 v_\alpha, \quad v_\alpha \cdot W_p W_q v_\alpha, \quad v_\alpha \cdot W_p^2 W_q v_\alpha, \quad v_\alpha \cdot W_p W_q^2 v_\alpha, \\ &v_\alpha \cdot W_p v_\beta, \quad v_\alpha \cdot W_p^2 v_\beta, \quad v_\alpha \cdot (W_p W_q - W_q W_p) v_\beta, \\ &\text{tr } A_i W_p^2, \quad \text{tr } A_i^2 W_p^2, \quad \text{tr } A_i^2 W_p^2 A_i W_p, \quad \text{tr } A_i W_p W_q, \\ &\text{tr } A_i W_p W_q^2, \quad \text{tr } A_i W_p^2 W_q, \quad \text{tr } A_i A_j W_p, \\ &\text{tr } A_i A_j W_p^2, \quad \text{tr } A_i W_p^2 A_j W_p, \quad \text{tr } A_i A_j^2 W_p, \end{aligned}$$

$$v^\alpha \cdot A_i W_p v_\alpha, v_\alpha \cdot A_i W_p^2 v_\alpha, v_\alpha \cdot W_p A_i W_p^2 v_\alpha,$$

$$v^\alpha \cdot A_i^2 W_p v_\alpha, v_\alpha \cdot (A_i W_p - W_p A_i) v_\beta,$$

gdzie $i, j, k = 1, \dots, N$; $i < j < k$,
 $p, q, r = 1, \dots, M$; $p < q < r$,
 $\alpha, \beta = 1, \dots, R$; $\alpha < \beta$.

● Reprezentacja funkcji wektorowej

Twierdzenie.

W przestrzeni trójwymiarowej pełną reprezentację izotropowej funkcji wektorowej (D.2.1)₂ można przedstawić w postaci sumy

$$(D.2.2) \quad f(A_i, W_p, v_m) = \alpha_r f_r(A_i, W_p, v_m),$$

gdzie funkcje skalarne α_r zależą od A_i, W_p, v_m , natomiast generatory wektorowe f_r ($r = 1, \dots, s$) mają postać:

$$v_m,$$

$$A_i v_m, A_i^2 v_m, (A_i A_j - A_j A_i) v_m,$$

$$W_p v_m, W_p^2 v_m, (W_p W_q - W_q W_p) v_m$$

$$(A_i W_p - W_p A_i) v_m,$$

gdzie $i, j = 1, \dots, N$; $i < j$,
 $p, q = 1, \dots, M$; $p < q$,
 $m = 1, \dots, R$.

● Reprezentacja funkcji tensorowej
(w postaci tensora symetrycznego)

Twierdzenie.

W przestrzeni trójwymiarowej izotropowa funkcja tensorowa (D.2.1)₃ może być przedstawiona w postaci sumy

$$(D.2.3) \quad H(A_i, W_p, v_m) = \alpha_r H_r(A_i, W_p, v_m),$$

gdzie funkcje skalarne α_r zależą od A_i, W_p, v_m , natomiast generatory tensorowe H_r ($r = 1, \dots, s$) mają postać:

$$\begin{aligned} & 1, A_i, A_i^2, A_i A_j + A_j A_i, A_i^2 A_j + A_j A_i^2, A_i A_j^2 + A_j^2 A_i, \\ & v_m \otimes v_m, v_m \otimes v_n + v_n \otimes v_m, \\ & W_p^2, W_p W_q + W_q W_p, W_p W_q^2 - W_q^2 W_p, W_p^2 W_q - W_q W_p^2, \\ & v_m \otimes A_i v_m + A_i v_m \otimes v_m, v_m \otimes A_i^2 v_m + A_i^2 v_m \otimes v_m, \\ & A_i (v_m \otimes v_n - v_n \otimes v_m) - (v_m \otimes v_n - v_n \otimes v_m) A_j, \\ & A_i W_p - W_p A_i, W_p A_i W_p, A_i^2 W_p - W_p A_i^2, \\ & W_p A_i W_p^2 - W_p^2 A_i W_p, W_p v_m \otimes W_p v_m, \\ & v_m \otimes W_p v_m + W_p v_m \otimes v_m, W_p v_m \otimes W_p^2 v_m + W_p^2 v_m \otimes \\ & \otimes W_p v_m, W_p (v_m \otimes v_n - v_n \otimes v_m) + (v_m \otimes v_n - v_n \otimes v_m) W_p, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} & i, j = 1, \dots, N; \quad i < j, \\ & p, q = 1, \dots, M; \quad p < q, \\ & m, n = 1, \dots, R; \quad m < n. \end{aligned}$$

SPIS TREŚCI

	str
1. Wstęp	3
2. Cel i zakres pracy	7
3. Charakterystyka geometrycznej struktury ośrodka	10
3.1. Porowatość objętościowa, powierzchniowa, przepuszczalność	10
3.2. Wektor i tensor strukturalnej przepuszczalności	12
3.3. Związek porowatość - przepuszczalność	16
4. Kinematyka oraz równania bilansu ośrodka dwufazowego	20
4.1. Opis deformacji	20
4.2. Równania bilansu masy. Składniki fizyczne i kinematyczne	23
4.3. Bilans pędu i momentu pędu. Równania ruchu składników fizycznych i kinematycznych	29
5. Związki konstytutywne	38
6. Zastosowanie wyników do liniowej teorii konsolidacji	47
6.1. Konsolidacja ośrodka izotropowego. Związki z równaniami Biota i Derskiego	47
6.2. Anizotropowa konsolidacja ośrodków porowatych	54
7. Zakończenie	60
Literatura	62
Dodatek	68