

56 / 1980

Włodzimierz Laprus

METODA FAL BIEGNĄCYCH  
DLA RÓWNAŃ HIPERBOLICZNYCH  
DYSPERSYWNYCH

P. 269



WARSZAWA 1980

ISSN 0208-5658

Prace Zakładu Teorii Fal Elektromagnetycznych  
Praca nr 178

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 26 listopada 1980r.

Zarejestrowana pod nr 56/1980



57105



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN  
Nakład 170 egz. Ark. wyd. 0,7. Ark. druk. 1.  
Oddano do drukarni w styczniu 1980 r.  
Nr zamówienia 28/o/81

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul. Śniadeckich 8



METODA FAL BIEGNĄCYCH DLA RÓWNAŃ  
HIPERBOLICZNYCH DISPERSYWNYCH

1. WPROWADZENIE

Rozwinięcie typu fali biegnącej zawierające "duży" parametr stosowane jest w optyce geometrycznej do rozwiązania zredukowanego równania falowego, tj. równania falowego z wyeliminowaną zależnością od czasu. R.M. Lewis [1] zastosował podobne rozwinięcie do równania falowego zawierającego wyraz nieróżniczkowany, który jest wymnożony przez "duży" parametr w kwadracie. Wyraz nieróżniczkowany jest odpowiedzialny za dyspersję fal, a jego wymnożenie przez parametr występujący w rozwinięciu powoduje, że wyraz dyspersyjny pojawia się w równaniach określających promienie dla metody fal biegnących. W wyniku takiego zabiegu promienie nie są już bicharakterystykami równania falowego, a prędkość po promieniu jest równa prędkości grupowej fal.

Celem pracy jest uogólnienie metody Lewisa na przypadek układów równań cząstkowych pierwszego rzędu i zbadanie możliwości zastosowania tej metody do równań quasi-liniowych. Punktem wyjścia takiego zastosowania byłaby praca [2], gdzie metoda fal biegnących została użyta do analizy układów hiperbolicznych quasi-liniowych.

2. UKŁAD RÓWNAŃ

Równania różniczkowe cząstkowe dyspersywne można zdefiniować przez tzw. równanie dyspersyjne. Jest to równanie algebraiczne wiążące  $\omega$  i  $k_x$  dla  $x = 1, \dots, m$ , które otrzymuje się przy założeniu, że współczynniki wyjściowych równań są stałe i że istnieją rozwiązania proporcjonalne do

$$/2.1/ \quad \exp(-i\omega t + ik_{\alpha} x_{\alpha}),$$

gdzie  $t, x_{\alpha}$  są zmiennymi niezależnymi w równaniach /por. G. B. Whitham [3] /.

Dyspersji nie ma wtedy, gdy równanie dyspersyjne ma postać

$$/2.2/ \quad -\omega + \lambda |k_{\alpha}| = 0,$$

przy czym  $\lambda$  jest funkcją jednorodną /stopnia pierwszego/ wektora  $k_{\alpha} / |k_{\alpha}|$ , gdzie  $|k_{\alpha}|$  oznacza moduł wektora  $k_{\alpha}$ . Podobnie jest wtedy, gdy lewa strona równania dyspersyjnego daje się przedstawić jako iloczyn wyrażeń postaci lewej strony równania /2.2/ z różnymi  $\lambda$ .

W równaniach cząstkowych pierwszego rzędu obecność wyrazów nieróżniczkowanych oznacza, że rozwiązania tych równań ulegają dyspersji. Rozważmy układ równań

$$/2.3/ \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + A_{ik}^{\alpha} \frac{\partial u_k}{\partial x_{\alpha}} + B_{ik} u_k = 0$$

dla  $i, k = 1, \dots, n$  oraz  $\alpha = 1, \dots, m$ . Macierze rzeczywiste  $A_{ik}$  i  $B_{ik}$  są niezależne od  $t, x_{\alpha}$ . Zakładamy, że układ /2.3/ jest symetrycznie hiperboliczny, co jest równoznaczne z założeniem, że macierze  $A_{ik}^{\alpha}$  są symetryczne. Równanie dyspersyjne ma postać

$$/2.4/ \quad \det(-\omega I_{ik} + k_{\alpha} A_{ik}^{\alpha} - i B_{ik}) = 0,$$

gdzie  $I_{ik}$  oznacza macierz jednostkową. Lewa strona tego równania jest względem  $\omega$  wielomianem stopnia  $n$ . Pierwiastki  $\omega^{(j)}$



są na ogół zespolone dla rzeczywistego wektora  $k_{\alpha}$ , chyba że macierz  $B_{ik}$  jest antysymetryczna. Wówczas bowiem macierz  $k_{\alpha} A_{ik}^{\alpha} - i B_{ik}$  jest hermitowska i ma  $n$  rzeczywistych wartości własnych  $\omega^{(i)}$ . W takim przypadku układ równań /2.3/ jest dyspersywny, ale nie jest dysypatywny, tzn. fale nie są tłumione.

Jeżeli  $B_{ik}=0$ , to dyspersji nie ma. Równanie dyspersyjne /2.4/ można wtedy zapisać, zważywszy na jednorodność względem  $\omega$  i  $k_{\alpha}$ , jako

$$/2.5/ \quad \det (\lambda I_{ik} - n_{\alpha} A_{ik}^{\alpha}) = 0,$$

gdzie  $\lambda = \omega / |k_{\alpha}|$ ,  $n_{\alpha} = k_{\alpha} / |k_{\alpha}|$ . Widać, że pierwiastki  $\lambda^{(i)}$  tego równania są funkcjami jednorodnymi /stopnia pierwszego/ zmiennych  $n_{\alpha}$ , i że pokrywają się z prędkościami charakterystycznymi dla układu równań /2.3/.

Dalej będziemy rozważać układ równań pierwszego rzędu z wyrazem nieróżniczkowanym mnożonym przez /duży/ parametr  $p > 0$ ,

$$/2.6/ \quad L_i [u] = \frac{\partial u_i}{\partial t} + A_{ik}^{\alpha} \frac{\partial u_k}{\partial x_{\alpha}} + p B_{ik} u_k = 0,$$

gdzie  $i, k = 1, \dots, n$ ,  $\alpha = 1, \dots, m$ . Taka postać równań zapewnia udział wyrazu dyspersyjnego w procedurze określającej współczynniki rozwinięcia asymptotycznego względem ujemnych potęg parametru  $p$  /por. R.M. Lewis [1]/. Będziemy zakładać, że macierze rzeczywiste  $A_{ik}^{\alpha}$  i  $B_{ik}$  są dostatecznie regularnymi funkcjami zmiennych  $t, x_{\alpha}$  w obszarze  $D$ . Ponadto zakładamy, że układ równań /2.6/ jest symetrycznie hiperboliczny, i że macierz  $B_{ik}$  jest antysymetryczna.

Układ /2.6/ można zapisać w bardziej zwartej postaci,

$$/2.7/ \quad L_i [u] = A_{ik}^k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + p B_{ik} u_k = 0$$

dla  $k = 0, 1, \dots, m$ , gdzie  $A_{ik}^0 = I_{ik}$ ,  $x_0 = t$

### 3. ROZWINIĘCIE ASYMPTOTYCZNE

Rozwinięcie zastosowane przez Lewisa do równania falowego z wyrazem dyspersyjnym mnożonym przez  $p^2$  jest właściwe także dla układu /2.7/. Rozwinięcie to wprowadził P.D. Lax [4]. Ma ono postać

$$/3.1/ \quad u_k(x) = \sum_{\nu=0}^N q_k^\nu(x) e^{ip\varphi} (ip)^{-\nu} + R_k(x),$$

przy czym przez  $x$  oznaczono zespół zmiennych  $x_k$ ,  $\varphi$  jest funkcją  $x_k$ .

Rozwinięcie typu fali biegnącej /patrz D.Ludwig [5] /,

$$/3.2/ \quad u_k(x) = \sum_{\nu=0}^N q_k^\nu(x) S_\nu(\varphi) + R_k(x),$$

w wersji zastosowanej w pracy [2] jest nieprzydatne do naszych celów. Nie można bowiem uzależnić funkcji  $S_\nu(\varphi)$  od parametru  $p$  w taki sposób, by macierz  $B_{ik}$  pojawiła się w równaniu dyspersyjnym.

Ze względu na możliwe zastosowanie metody Lewisa do układu równań quasi-liniowych postaci /2.7/ byłaby pożądana następująca własność ciągu funkcji  $\{S_\nu\}$ : iloczyn dwóch funkcji należących do  $\{S_\nu\}$  także należy do  $\{S_\nu\}$ . Funkcje  $S_\nu$  w rozwinięciu /3.2/ w pracy [2] spełniają to wymaganie z dokładnością do czynnika stałego, co wystarcza. Natomiast funkcje

$S_\nu(\varphi) = e^{ip\varphi} (ip)^{-\nu}$  w rozwinięciu /3.1/ wymnożone przez siebie dają

$$/3.3/ \quad S_\nu S_\mu = e^{ip\varphi} S_{\nu+\mu},$$



czyli iloczyn należy do ciągu  $\{S_\nu\}$ , ale z dokładnością do czynnika zależnego od funkcji  $\psi(x)$  i od parametru  $p$ .

Omawiana własność na szczęście nie jest konieczna. Wiadomo bowiem /patrz Y. Bruhat [5] /, że do równań quasi-liniowych stosuje się rozwinięcie typu fali asymptotycznej,

$$/3.4/ \quad u_k(x) = \sum_{\nu=0}^N g_k^\nu(x, p\psi) p^{-\nu} + R_k(x),$$

które wprowadził J. Leray [6] /patrz także L. Garding, T. Kotake, J. Leray [7] /. Rozwinięcie /3.1/ jest szczególnym przypadkiem rozwinięcia /3.4/.

Powstaje pytanie, czy rozwinięcie /3.1/ zastosowane przez Lewisa jest jedynie właściwe dla równań postaci /2.7/. Dla zbadania tej sprawy posłużymy się rozwinięciem typu fali asymptotycznej. Wstawiamy /3.4/ do równań /2.7/ i otrzymujemy

$$/3.5/ \quad \sum_{\nu=0}^N [(ip)^{-\nu} D_{ik} g_k^\nu + (ip)^{-\nu+1} g_k^\nu D_{ik} \psi - (ip)^{-\nu+1} i B_{ik} g_k^\nu] + L_i[R] = 0.$$

Kropka oznacza różniczkowanie względem zmiennej  $\psi = p\psi$ ,

$D_{ik} = A_{ik}^k \partial / \partial x_k$  jest operatorem różniczkowym. Żądanie znikania współczynników przy  $p^{-\nu}$  dla  $\nu = -1, 0, 1, \dots$  prowadzi do równań, z których pierwsze ma postać

$$/3.6/ \quad A_{ik} \dot{g}_k^0 - i B_{ik} g_k^0 = 0,$$

przy czym  $A_{ik} = D_{ik} \psi$  jest macierzą charakterystyczną dla układu /2.7/. Funkcja  $\psi(x)$  nie jest znana i równanie /3.6/, które jest pierwsze w procedurze rekurencyjnej, powinno tę funkcję określić. Niech  $g_k^0(x, \psi) = g_k(x) S(\psi)$ . Wtedy

$$/3.7/ \quad (A_{ik} \dot{S} - i B_{ik} S) q_k = 0 ,$$

albo

$$/3.8/ \quad (A_{ik} \dot{S} S^{-1} - i B_{ik}) q_k = 0 .$$

Równaniem dla funkcji  $\psi$  jest

$$/3.9/ \quad \det (A_{ik} \dot{S} S^{-1} - i B_{ik}) = 0 .$$

Stąd wniosek, że stosunek  $\dot{S}/S$  nie może zależeć od  $p$ , może być jedynie funkcją zmiennych  $\psi$  oraz  $x_k$ . W najprostszym przypadku  $\dot{S}/S = f(\psi)$  i wówczas w rozwinięciu /3.1/ zamiast czynnika  $\exp(ip\psi)$  mamy czynniki  $\exp(ipF)$ , gdzie  $F(\psi)$  jest funkcją pierwotną dla  $f(\psi)$ . Zatem rozwinięcie /3.1/ pozostaje w istocie takie samo.

Jeszcze jedna uwaga. Rozwinięcie /3.1/ zastosowane do równań postaci /2.7/, w których występuje explicite parametr  $p$ , nie ma właściwie charakteru fali biegnącej. Funkcje  $S_\nu$  są bowiem w tym rozwinięciu określone, podczas gdy w metodzie fal biegnących wybrany ciąg funkcji  $S_\nu$  może być dowolny, byle tylko spełniał warunek  $S'_\nu = S_{\nu-1}$ .

#### 4. RÓWNANIE DISPERSYJNE

Wstawiając rozwinięcie /3.1/ do równań /2.7/ dostajemy

$$/4.1/ \quad \sum_{\nu=0}^N \left[ (D_{ik} q_k^\nu) S_\nu + (D_{ik} \psi) q_k^\nu S_{\nu-1} - i B_{ik} q_k^\nu S_{\nu-1} \right] + L_i[R] = 0 ,$$

czyli równanie postaci



$$/4.2/ \quad \sum_{\nu=-1}^N E_i^\nu S_\nu + L_i[R] = 0$$

Tutaj  $S_\nu = e^{i\nu\varphi} (i\nu)^\nu$ . Dla spełnienia równania /4.2/ wystarczy, by  $E_i^\nu = 0$  dla  $\nu = -1, 0, 1, \dots, N-1$  oraz  $E_i^N S_N + L_i[R] = 0$ . Stąd mamy układ równań rekurencyjnych

$$/4.3/ \quad A_{ik} q_k^0 = 0,$$

$$/4.4/ \quad A_{ik} q_k^{\nu+1} + D_{ik} q_k^\nu = 0, \quad \text{dla } \nu = 0, 1, \dots, N-1$$

$$/4.5/ \quad L_i[R] + S_N D_{ik} q_k^N = 0,$$

gdzie  $A_{ik} = A_{ik} - iB_{ik} = I_{ik} \varphi_t + A_{ik}^* \varphi_x - iB_{ik}$  oznacza "macierz dyspersyjną".

Warunkiem koniecznym na to, by równanie /4.3/ miało niezerowe rozwiązanie  $q_k^0$ , jest znikanie wyznacznika macierzy  $A_{ik}$ . W ten sposób dochodzimy do "równania dyspersyjnego"

$$/4.6/ \quad Q(\varphi_t, \varphi_x) = 0$$

z  $Q = \det(A_{ik})$ . Wprowadzimy oznaczenia

$$/4.7/ \quad \varphi_t = -\omega, \quad \varphi_x = k_x$$

i zamiast /4.6/ mamy teraz

$$/4.8/ \quad Q(-\omega, k) = 0$$

/  $k$  oznacza zespół zmiennych  $k_x$  /.  $Q$  jest dla ustalonego  $k_x$  wielomianem stopnia  $n$  względem  $\omega$ . Zgodnie z założeniami o układzie równań /2.6/ macierz  $k_x A_{ik}^* - iB_{ik}$  jest hermitowska dla rzeczywistych  $k_x$ , co oznacza, że równanie dyspersyjne /4.8/ ma  $n$  rzeczywistych pierwiastków dla każdego  $k_x$ :

$$/4.9/ \quad \omega^{(i)} = \mathcal{H}^{(i)}(x, k)$$

dla  $i = 1, \dots, n$ . Zatem  $Q$  można przedstawić jako iloczyn  
wyrażeń

$$/4.10/ \quad Q^{(i)} = -\omega + \mathcal{H}^{(i)}(x, k).$$

W przypadku, gdy układ równań /2.6/ nie jest dyspersywny ( $B_{ik}=0$ )  
"hamiltonian"  $\mathcal{H}^{(i)}$  jest jednorodną funkcją stopnia pierwszego  
względem  $k_{\alpha}$ , a dokładniej.

$$/4.11/ \quad \mathcal{H}^{(i)} = \lambda^{(i)} |k_{\alpha}|$$

/por. /2.2/ i /2.5//. W takim przypadku /4.6/ staje się równa-  
niem charakterystycznym dla układu /2.6/, a  $\lambda^{(i)}$  są jego prę-  
dkościami charakterystycznymi.

Równanie dyspersyjne /4.6/ jest równaniem cząstkowym pier-  
wszego rzędu określającym funkcję  $\psi(x)$ . Jej gałęzie określone  
są równaniami

$$/4.12/ \quad Q^{(i)}(-\omega, k) = 0$$

dla  $i = 1, \dots, n$ . Wybierzemy jedną z gałęzi funkcji  $\psi(x)$  i bę-  
dziemy dalej opuszczać wskaźnik "(i)". Z równaniem /4.12/ zwią-  
zany jest układ równań kanonicznych

$$/4.13/ \quad \dot{x}_K = \partial Q / \partial k_K,$$

$$/4.14/ \quad \dot{k}_K = -\partial Q / \partial x_K,$$

dla  $K = 0, 1, \dots, m$ , przy czym  $k_0 = \psi_t = -\omega$ , a kropką ozna-



czono pochodne względem parametru  $s$ , którego funkcjami są  $x_k$  i  $k_k$ . Wstawiając do /4.13/ - /4.14/ funkcję  $Q$  postaci /4.10/ otrzymujemy równania kanoniczne Hamiltona

$$/4.15/ \quad \dot{x}_k = \partial \mathcal{H} / \partial k_k,$$

$$/4.16/ \quad \dot{k}_k = -\partial \mathcal{H} / \partial x_k,$$

dla  $k = 1, \dots, m$ , a ponadto

$$/4.17/ \quad \dot{t} = 1$$

$$/4.18/ \quad \dot{\omega} = \partial \mathcal{H} / \partial t.$$

Wziąwszy pod uwagę /4.17/ kładziemy  $s=t$ . Równanie /4.18/ dla funkcji  $\omega(s)$  jest zbędne, gdyż  $\omega$  można wyliczyć za pomocą /4.12/ po uprzednim rozwiązaniu układu równań /4.15/ - /4.16/ dla funkcji  $x_k(s)$  i  $k_k(s)$ .

Równania kanoniczne określają krzywe  $\{x_k(t)\}$  albo  $\{t, x_k(t)\}$  które są charakterystykami równania /4.12/. Będziemy te krzywe nazywać promieniami układu równań /2.6/, a prędkość po promieniu  $\dot{x}_k$  będziemy nazywać prędkością grupową i oznaczać przez  $\tau_k$ . Tak więc

$$/4.19/ \quad \tau_k = \partial \mathcal{H} / \partial k_k.$$

Funkcja  $\psi(x)$  nie jest stała na promieniach, gdyż pochodna

$$/4.20/ \quad \dot{\psi} = \psi_t + \psi_k \dot{x}_k = -\omega + \tau_k k_k = \mathcal{L}$$

jest na ogół różna od zera.  $\mathcal{L}$  oznacza "lagrangian". Korzystając z równań /4.12/ i /4.20/ stwierdzamy, że

$$/4.21/ \quad \mathcal{L}(x, k) = -\mathcal{H} + k_k \partial \mathcal{H} / \partial k_k.$$

Przy braku dyspersji  $\mathcal{H}$  dane jest przez /4.11/ i wtedy  $L=0$ , a więc  $\psi = \text{const}$  na promieniach.

Przechodzimy do wyznaczenia funkcji  $\psi(x)$ . Wartości początkowe dla układu równań /4.15/ - /4.18/ oraz /4.20/ zadaje się na hiperpowierzchni  $m$ -wymiarowej w przestrzeni zmiennych  $t$ ,  $x_{\alpha}$ . Dla uproszczenia założymy, że tą hiperpowierzchnią jest płaszczyzna  $t = \text{const} = t_0$ . Niech  $x_{\alpha}^0$  będą współrzędnymi punktów na płaszczyźnie  $t=t_0$  i niech

$$/4.22/ \quad x_{\alpha} = x_{\alpha}(t; x_{\alpha}^0), \quad k_{\alpha} = k_{\alpha}(t; x_{\alpha}^0), \quad \psi = \psi(t; x_{\alpha}^0)$$

będzie rozwiązaniem naszego układu równań przyjmującym dla  $t_0$  wartości

$$/4.23/ \quad x_{\alpha}(t_0; x_{\alpha}^0) = x_{\alpha}^0, \quad k_{\alpha}(t_0; x_{\alpha}^0) = k_{\alpha}^0(x_{\alpha}^0), \\ \psi(t_0; x_{\alpha}^0) = \psi^0(x_{\alpha}^0),$$

gdzie  $\psi^0(x_{\alpha}^0)$  jest daną funkcją, a  $k_{\alpha}^0(x_{\alpha}^0) = \partial\psi^0(x_{\alpha}^0)/\partial x_{\alpha}^0$ .  
Przy tych oznaczeniach całka z równania /4.20/ daje

$$/4.24/ \quad \psi[t, x_{\alpha}(t; x_{\alpha}^0)] = \psi^0(x_{\alpha}^0) + \int_{t_0}^t \mathcal{L}[s, x_{\alpha}(s; x_{\alpha}^0), k_{\alpha}(s; x_{\alpha}^0)] ds.$$

Zatem funkcję  $\psi(t, x_{\alpha})$  można otrzymać rozwiązując układ równań Hamiltona /4.15/ - /4.16/, a następnie korzystając z /4.24/.



## 5. RÓWNANIA TRANSPORTU

Macierz dyspersyjna  $A_{ik}(x, k)$  jest osobiwa dla  $k_x$  spełniającego równanie dyspersyjne /4.8/. Niech  $l_i(x, k)$ ,  $r_i(x, k)$  oznaczają odpowiednio lewy i prawy wektor zerowy macierzy  $A_{ik}$ . Udowodnimy następujący "lemat o kierunkach promieniowych", który jest odpowiednikiem "lematu o kierunkach bicharakterystycznych" dla układu hiperbolicznego.

LEMAT. Jeżeli  $k_x$  spełnia równanie dyspersyjne  $Q(k)=0$  i macierz  $A_{ik}(x, k)$  ma rząd  $n - 1$  dla  $x_k \in D$ , to przy warunku  $l_i r_i = 1$  mamy

$$/5.1/ \quad l_i r_k D_{ik} = \frac{d}{ds},$$

gdzie  $d/ds$  oznacza różniczkowanie po promieniu będącym charakterystyką równania dyspersyjnego.

Dowód. Równość

$$/5.2/ \quad A_{ik} r_k = 0$$

jest prawdziwa dla każdego  $k_x$  spełniającego  $Q(k)=0$ .  
Zatem różniczkowanie tej równości daje

$$/5.3/ \quad \left( \frac{\partial A_{ik}}{\partial k_x} r_k + A_{ik} \frac{\partial r_k}{\partial k_x} \right) dk_x = 0$$

dla wszystkich  $dk_x$  spełniających warunków

$$/5.4/ \quad \frac{\partial Q}{\partial k_x} dk_x = 0.$$

Mnożąc /5.3/ przez  $l_i$  i wyliczając pochodną  $\partial A_{ik} / \partial k_x$  otrzymujemy

$$/5.5/ \quad l_i A_{ik}^K r_k dk_k = 0$$

Porównanie równości /5.4/ i /5.5/ prowadzi do wniosku, że wyrażenia mnożone przez różniczkę  $dk_k$  są proporcjonalne, tj.

$$/5.6/ \quad l_i A_{ik}^K r_k = f(s) \partial Q / \partial k_k,$$

gdzie  $f(s)$  jest współczynnikiem proporcjonalności. Kładąc  $K = 0$  stwierdzamy, że  $f(s) = l_i r_i = 1$ . Uwzględniając /4.13/ mamy ostatecznie

$$/5.7/ \quad l_i A_{ik}^K r_k = \dot{x}_k,$$

stąd wynika poszukiwany związek /5.1/.

Wyznamy teraz funkcje  $q_k^y(x)$ . Równanie /4.3/ daje

$$/5.8/ \quad q_k^0(x) = \sigma r_k(x, k).$$

Współczynnik proporcjonalności  $\sigma$  jest funkcją zmiennych  $x_k$ . Na promieniach można go wyznaczyć za pomocą równania /4.4/ dla  $y=0$ . Po wymnożeniu tego równania przez  $l_i$  i podstawieniu /5.8/ dostajemy równanie transportu

$$/5.9/ \quad \dot{\sigma} + (l_i D_{ik} r_k) \sigma = 0$$

określone na promieniach. Oznaczmy przez  $\sigma(t; x_{\mathcal{X}}^0)$  rozwiązanie równania /5.9/ o wartości początkowej  $\sigma(t_0; x_{\mathcal{X}}^0) = \sigma_0(x_{\mathcal{X}}^0)$ . W takim razie

$$/5.10/ \quad \sigma \left[ t, x_{\mathcal{X}}(t; x_{\mathcal{X}}^0) \right] = \sigma_0(x_{\mathcal{X}}^0) \exp \left[ - \int_{t_0}^t (l_i D_{ik} r_k) ds \right],$$



gdzie do wyrażenia podcałkowego należy wstawić rozwiązania równań kanonicznych Hamiltona /4.15/ - /4.16/ postaci /4.22/.

Za pomocą równań /4.4/ i /4.5/ można rekurencyjnie wyznaczyć kolejne funkcje  $q_i^v$  dla  $v = 1, \dots, N$  na promieniach. Z równań /4.4/ wynika, że

$$/5.11/ \quad q_i^v(x) = \sigma^v r_i(x, k) + h_i^v,$$

przy czym  $h_i^v$  jest rozwiązaniem równania algebraicznego

$$/5.12/ \quad A_{ik} h_k^v = -D_{ik} q^{v-1},$$

a  $\sigma^v$  jest rozwiązaniem równania transportu

$$/5.13/ \quad \dot{\sigma}^v + (L_i D_{ik} r_k) \sigma^v + L_i D_{ik} h_k^v = 0$$

na promieniach. Dla  $v = N$  równanie transportu otrzymuje się z równania /4.5/ przy założeniu, że  $L_i L_i [R] = 0$ . Rozwiązanie równania /5.13/ łatwo otrzymać metodą "uzmienniania stałej" z rozwiązania równania jednorodnego /5.9/ danego formułą /5.10/.

Otrzymane współczynniki rozwinięcia  $q_i^v(x)$  i funkcja faza  $\psi(x)$  są regularnymi funkcjami zmiennych  $x_k$  w pewnym otoczeniu powierzchni początkowej  $t = t_0$  dla  $t > t_0$ , pod warunkiem że dostatecznie regularne w obszarze  $D$  są współczynniki równań /2.7/ i dane początkowe. Regularność funkcji  $q_i^v$  i  $\psi$  jest zapewniona co najmniej lokalnie, tj. w otoczeniu każdego punktu  $x_k^0$  powierzchni początkowej należącego do obszaru  $D$ .

Reszta  $R_k(x)$  rozwinięcia /3.1/ jest także regularną funkcją zmiennych  $x_k$ .

## 6. WNIOSKI

Metoda Lewisa stosuje się z powodzeniem do układów cząstkowych pierwszego rzędu hiperbolicznych dyspersywnych. Równania transportu są typowe dla metody fal biegnących, tyle że są określone na promieniach nie będących bicharakterystykami wyjściowego układu równań. Rozwinięcie /3.1/ fali biegnącej ma regularne współczynniki, a także resztę.

## LITERATURA

- [1] R.M. LEWIS - Asymptotic methods for solution of dispersive hyperbolic equations, w "Asymptotic Solutions of Differential Equations and Their Applications", wyd. C.H. Wilcox. John Wiley & Sons, 1964.
- [2] W. LAPRUS - Analiza słabych nieciągłości w rozwiązaniach układów hiperbolicznych quasi - liniowych w zastosowaniu do równań magnetogazodynamiki, Prace IPPT, 80/1975.
- [3] G.B. WHITHAM - Linear and Nonlinear Waves, John Wiley & Sons, 1974.
- [4] P.D. LAX - Asymptotic solutions for oscillatory initial value problems, Duke Math. J., 24 /1957/, 627 - 646.
- [5] Y. BRUHAT - Ondes asymptotiques pour un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires, C.R. Acad. Sc., 264 /1967/, A 625 - A 628.
- [6] J. LERAY - Particules et singularités des ondes..., Cahier de Phys., 15 /1961/, 373 - 381.
- [7] L. GARDING, T. KOTAKE, J. LERAY - Uniformisation et solution du problème de Cauchy linéaire..., Bull. Sc. Math., 94 /1966/, 25 - 48.