

53 / 1980

Jan K. Frąckowiak

FALE POWIERZCHNIOWE
NA GRANICY OŚRODKA
ŻYROTROPOWEGO

P. 269



WARSZAWA 1980

Prace Zakładu Teorii Fal Elektromagnetycznych

Praca nr 179

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 8 grudnia 1980 r.

Zarejestrowana pod nr 53/1980



57108



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 190 egz. Ark.wyd. 0,75. Ark. druk. 1..

Oddano do drukarni w grudniu 1980 r.

Nr zamówienia 798/o/80

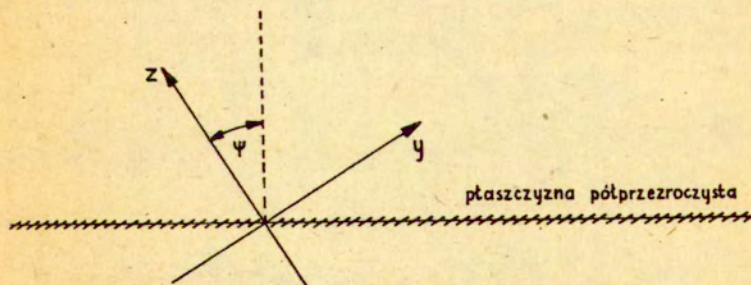
Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Jan Krzysztof Frąckowiak
Zakład Teorii Fal
Elektromagnetycznych

FALE POWIERZCHNIOWE NA GRANICY OŚRODKA
ŻYROTROPOWEGO

1.

Zagadnienie podjęte w przedstawionej pracy jest pewnym uogólnieniem problemu rozwiązanego w [1], gdzie impedancyjne warunki brzegowe zadano w taki sposób, aby można było rozpatrywać pole elektromagnetyczne tylko po jednej stronie powierzchni granicznej. Obecnie przyjęto, że powierzchnia graniczna jest płaszczyzną półprzezroczystą, na której spełnione są warunki brzegowe sprzęgające pole po obu jej stronach [2, 3]. Założono, że płaszczyzna ta umieszczona jest w ośrodku żyotropowym, scharakteryzowanym tensorami przenikalności dielektrycznej i magnetycznej $\underline{\epsilon}$, $\underline{\mu}$ o pokrywającej się osi żyotropii. Układ współrzędnych kartezjańskich wybrano w taki sposób, by oś żyotropii pokrywała się z osią "z"; oś ta może być nachylona pod kątem ψ do powierzchni granicznej. Geometrię problemu ilustruje rys. 1.



Rys. 1

Rozwiązując postawione zagadnienie posłużono się metodą wyznaczenia współczynników odbicia i transmisji [2, 4]. Równania określające punkty osobliwe tych współczynników pozwalają obliczyć składowe wektorów falowych poszukiwanych fal powierzchniowych. Pole elektromagnetyczne w badanym ośrodku izotropowym wyrażono przez jedną funkcję skalarną, superpotencjał U , zdefiniowany w [5] i wykorzystany także w [1]. Wspomniane wyżej współczynniki odbicia i transmisji dotyczą właśnie tego superpotencjału.

Przedstawione obliczenia prowadzą do dosyć skomplikowanych równań, których rozwiązanie - dla konkretnych ośrodków i warunków brzegowych - jest jednak możliwe na drodze numerycznej.

2.

Pole elektromagnetyczne \underline{E} , \underline{H} w ośrodku izotropowym scharakteryzowanym tensorami przenikalności elektrycznej $\underline{\epsilon}$ i magnetycznej $\underline{\mu}$:

$$/1/ \quad \underline{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon & -i\epsilon_g & 0 \\ i\epsilon_g & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_o \end{pmatrix}, \quad \underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & -i\mu_g & 0 \\ i\mu_g & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_o \end{pmatrix}$$

można wyrazić przez dwie funkcje skalarne /potencjały/ u , v

$$/2/ \quad \underline{E} = \underline{\epsilon}^{-1} \cdot \nabla \times (\underline{\epsilon} \cdot \nabla \times u \underline{z}_o) + \frac{i\omega\mu}{\epsilon} \tilde{\epsilon} \cdot \nabla \times v \underline{z}_o$$

$$\underline{H} = \underline{\mu}^{-1} \cdot \nabla \times (\underline{\mu} \cdot \nabla \times v \underline{z}_o) - \frac{i\omega\epsilon}{\mu} \tilde{\mu} \cdot \nabla \times u \underline{z}_o$$

Potencjały u , v są z kolei generowane przez jedną funkcję skalarną /superpotencjał/ U

$$/3/ \quad u = -\omega\mu\tau_g \frac{\partial U}{\partial z}, \quad v = \frac{\epsilon}{\epsilon_o} \left(\nabla_t^2 + \frac{\epsilon_g}{\epsilon_o} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_e^2 \right) U,$$

która spełnia równanie różniczkowe czwartego rzędu

$$/4/ \quad \left[\left(\nabla_t^2 + \frac{\epsilon_o}{\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_e^2 \right) \left(\nabla_t^2 + \frac{\mu_o}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_m^2 \right) k_o^2 \tau_g^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] U = 0.$$

We wzorach /2/, /3/ i /4/ użyliśmy oznaczeń

$$\tau_g = \frac{\epsilon_g}{\epsilon} + \frac{\mu_g}{\mu}, \quad k_e^2 = \omega^2 \epsilon_a^2 \frac{\mu^2 - \mu_a^2}{\mu}, \quad k_m^2 = \omega^2 \mu_a^2 \frac{\epsilon^2 - \epsilon_a^2}{\epsilon},$$

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad k_a^2 = \omega^2 \epsilon_a \mu_a.$$

Przez Z_0 oznaczono wersor osi "z" kartezjańskiego układu współrzędnych, w którym tensory przenikalności dielektrycznej i magnetycznej przybierają postać /1/; $\tilde{\epsilon}$, $\tilde{\mu}$ oznaczają transponowane macierze ϵ , μ .

Jeżeli do /4/ podstawimy elementarne rozwiązanie

$$/5/ \quad U = e^{ikr}, \quad \text{gdzie } \underline{k} = [\alpha, \beta, \gamma], \quad \underline{r} = [x, y, z],$$

otrzymamy równanie dyspersyjne dla superpotencjału

$$/6/ \quad (\kappa_e^2 - \gamma^2)(\kappa_m^2 - \gamma^2) - k^2 \tau_g^2 \gamma^2 = 0,$$

$$\text{gdzie } \kappa_e^2 = (k_e^2 - \alpha^2 - \beta^2) \frac{\epsilon}{\epsilon_a}, \quad \kappa_m^2 = (k_m^2 - \alpha^2 - \beta^2) \frac{\mu}{\mu_a}, \quad k^2 = \omega^2 \epsilon \mu.$$

Równanie to ma dwie pary rozwiązań odpowiadające falom zwyczajnym i nadzwyczajnym rozchodzącym się w rozważanym ośrodku izotropowym.

3.

Przyjmijemy następujące warunki brzegowe dla pola elektromagnetycznego na płaszczyźnie półprzezroczystej:

$$/7/ \quad \underline{n} \times (\underline{H}^+ - \underline{H}^-) = -\frac{1}{R} \underline{n} \times (\underline{n} \times \underline{E}^+)$$

$$\underline{n} \times (\underline{E}^+ - \underline{E}^-) = 0 \quad \text{na powierzchni granicznej.}$$

Wektor \underline{n} jest jednostkowym wektorem prostopadłym do płaszczyzny półprzezroczystej, a R jest opornością powierzchniową.

Tutaj i w dalszym ciągu wskaźnikiem "+" będziemy oznaczać składowe i funkcje pola w półprzestrzeni, do której skierowany jest wektor normalny \underline{n} ; wskaźnik "-" odnosi się do obszaru pozostałego.

Jeśli płaszczyzna graniczna umieszczona jest pod kątem ψ do osi z wrotropii "z" i równoległe do osi "x" wybranego układu współrzędnych /rys. 1/, warunki /7/ można zapisać w postaci

$$\begin{array}{l}
 (H_z^+ - H_z^-) \sin \psi + (H_y^+ - H_y^-) \cos \psi = -\frac{1}{R} E_x^+ \\
 H_x^+ - H_x^- = \frac{1}{R} (E_z^+ \sin \psi + E_y^+ \cos \psi) \\
 (E_z^+ - E_z^-) \sin \psi + (E_y^+ - E_y^-) \cos \psi = 0 \\
 E_x^+ - E_x^- = 0
 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right| z = y \tan \psi .$$

Wypisane warunki brzegowe powodują sprzęganie się modów falowych typu TE i TM, co oznacza, że fala jednego typu padająca na płaszczyznę półprzezroczystą pobudza fale odbite i transmitowane obydwu typów.

Superpotencjał fali padającej oznaczmy przez U_1^+ fali odbitej przez U_2^+ , fali transmitowanej przez U^- . Superpotencjał całkowitego pola nad i pod płaszczyzną półprzezroczystą oznaczmy przez U :

$$/9/ \quad U = U_1^+ + U_2^+ + U^- = U^+ + U^- .$$

Wyrażając przez odpowiednie superpotencjały pole elektromagnetyczne nad i pod płaszczyzną graniczną, ze wzorów /2/ i /3/ otrzymamy

$$\begin{array}{l}
 \underline{E}^+ = \underline{K} U^+ , \quad \underline{E}^- = \underline{K} U^- , \\
 \underline{H}^+ = \underline{L} U^+ , \quad \underline{H}^- = \underline{L} U^- .
 \end{array} \quad /10/$$

gdzie \underline{K} i \underline{L} są operatorami różniczkowymi

$$\cdot \underline{K} = -\underline{\epsilon}^{-1} \cdot \underline{\nabla} \times (\underline{\epsilon} \cdot \underline{\nabla} \times \omega \mu \tau_q z_0 \frac{\partial}{\partial z}) + \frac{i \omega \mu}{\epsilon} \underline{\epsilon} \cdot \underline{\nabla} \times \frac{\epsilon}{\epsilon_0} (\underline{\nabla}^2 + \frac{\epsilon_a}{\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_e^2) z_0$$

/11/

$$\underline{L} = \underline{\mu}^{-1} \cdot \underline{\nabla} \times \left[\underline{\mu} \cdot \underline{\nabla} \times \frac{\epsilon}{\epsilon_0} (\underline{\nabla}^2 + \frac{\epsilon_a}{\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_e^2) z_0 \right] + \frac{i \omega \epsilon}{\mu} \underline{\mu} \cdot \underline{\nabla} \times \omega \mu \tau_q z_0 \frac{\partial}{\partial z}$$

Podstawiając wyrażenia /10/ do warunków brzegowych /8/ otrzymamy warunki jakie muszą spełniać superpotencjały U^+ i U^- na płaszczyźnie półprzezroczystej

$$\begin{aligned} & (L_z \sin \Psi + L_y \cos \Psi + \frac{1}{R} K_x) U^+ - (L_z \sin \Psi + L_y \cos \Psi) U^- = 0, \\ /12/ & (L_x - \frac{1}{R} K_x \sin \Psi - \frac{1}{R} K_y \cos \Psi) U^+ - L_x U^- = 0, \\ & (K_z \sin \Psi + K_y \cos \Psi) U^+ - (K_z \sin \Psi + K_y \cos \Psi) U^- = 0, \\ & K_x U^+ - K_x U^- = 0, \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \\ \\ \\ z = y \tau q \Psi \end{array} \right.$$

gdzie $K_i, L_i; \quad i = x, y, z$ są składowymi operatorów \underline{K} i \underline{L} .

Załóżmy, że na płaszczyznę półprzezroczystą pada płaska fala zwyczajna, której superpotencjał $\exp(i \underline{k}'_1 r)$ ma amplitudę jednostkową. Superpotencjały pola elektromagnetycznego nad i pod powierzchnią graniczną mają wówczas postać

$$\begin{aligned} /13/ & U^+ = e^{i \underline{k}'_1 r} + R_{11} e^{i \underline{k}'_2 r} + R_{12} e^{i \underline{k}'_3 r}, \\ & U^- = T_{11} e^{i \underline{k}'_3 r} + T_{12} e^{i \underline{k}'_2 r}, \end{aligned}$$

gdzie R_{ij}, T_{ij} są współczynnikami odbicia i transmisji dla superpotencjałów. Podstawiając /13/ do warunków /12/ otrzymamy cztery równania algebraiczne na cztery współczynniki odbicia i transmisji $R_{11}, R_{12}, T_{11}, T_{12}$ oraz związki między składowymi wektorów falowych na powierzchni granicznej.

$$/14/ \quad \left. \begin{aligned} \underline{k}_1^i r = \underline{k}_2^i r = \underline{k}_2^u r = \underline{k}_3^i r = \underline{k}_3^u r \end{aligned} \right|_{z=ytq\psi}$$

Zakładając iż na płaszczyznę półprzezroczystą pada płaska fala nadzwyczajna o superpotencjale $\exp(i\underline{k}_1^u r)$, możemy podobnie wypisać superpotencjały pól wzbudzonych po obu stronach powierzchni granicznej

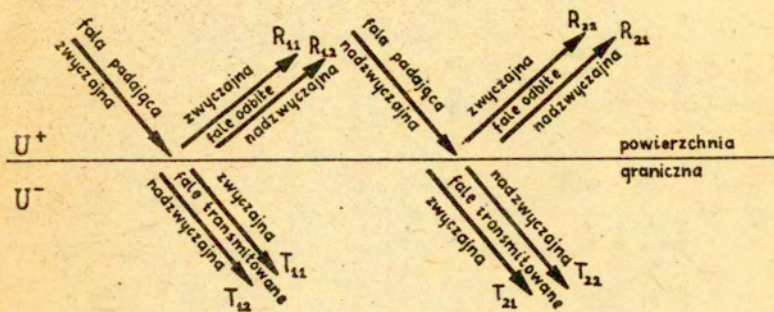
$$/15/ \quad \begin{aligned} U^+ &= e^{i\underline{k}_1^u r} + R_{22} e^{i\underline{k}_2^u r} + R_{21} e^{i\underline{k}_2^i r} \\ U^- &= T_{22} e^{i\underline{k}_3^u r} + T_{21} e^{i\underline{k}_3^i r} \end{aligned}$$

oraz związki między składowymi wektorów falowych na powierzchni granicznej

$$/16/ \quad \left. \begin{aligned} \underline{k}_1^u r = \underline{k}_2^u r = \underline{k}_2^i r = \underline{k}_3^i r = \underline{k}_3^u r \end{aligned} \right|_{z=ytq\psi}$$

Przez podstawienie /15/ do warunków /12/ otrzymamy równania na dalsze cztery współczynniki odbicia i transmisji R_{22} , R_{21} , T_{22} , T_{21} .

W użytych wyżej oznaczeniach wskaźniki 1, 2, 3 wektorów falowych \underline{k} oznaczają odpowiednio fale padające, odbite i transmitowane; wskaźniki górne "prim" i "bis" oznaczają odpowiednio fale zwyczajne i nadzwyczajne. Sposób oznaczenia współczynników odbicia i transmisji R_{ij} , T_{ij} ilustruje schematycznie rys. 2.



Rys. 2

Współczynniki R_{ij} , T_{ij} /i, j = 1, 2/ obliczymy w dwóch szczególnych przypadkach: gdy oś zyrotopii jest prostopadła do powierzchni granicznej ($\psi=0$) i gdy jest do niej równoległa ($\psi = \pi/2$). Założymy także, iż padająca fala płaska nie zależy od współrzędnej "x", tzn. że $d=0$ w formule /5/.

A. $\psi = 0$

Z formuł /14/ wynika teraz

$$\begin{aligned} /17/ \quad & \beta_2' = \beta_2'' = \beta_3' = \beta_3'' = \beta_4' \\ & \gamma_2' = -\gamma_4'; \quad \gamma_3' = \gamma_4'; \quad \gamma_2'' = -\gamma_3'' \end{aligned}$$

Oznaczając dla uproszczenia zapisu $\beta_4' = \beta$; $\gamma_2' = \gamma'$; $\gamma_3'' = \gamma''$, dostaniemy z /12/ po podstawieniu superpotencjałów /13/ układ równań na współczynniki odbicia i transmisji padającej fali zwyczajnej

$$/18/ \quad \underline{D}_0 \cdot \underline{R}' = \underline{A}'_0, \quad ,$$

gdzie

$$\underline{R}' = \begin{pmatrix} R_{41} \\ R_{42} \\ T_{41} \\ T_{42} \end{pmatrix}, \quad \underline{A}'_0 = \begin{pmatrix} -L_y(r') + \frac{1}{R} K_x(r') \\ -L_x(r') - \frac{1}{R} K_y(r') \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Macierz \underline{D}_0 ma postać

$$/19/ \quad \underline{D}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} K_x(-r') + L_y(-r'') & \frac{1}{R} K_x(-r'') + L_y(-r'') & -L_y(r') & -L_y(r'') \\ -\frac{1}{R} K_y(-r') - L_x(-r'') & -\frac{1}{R} K_y(-r'') + L_x(-r'') & -L_x(r') & -L_x(r'') \\ K_y(-r') & K_y(-r'') & -K_y(r') & -K_y(r'') \\ K_x(-r') & K_x(-r'') & -K_x(r') & -K_x(r'') \end{pmatrix}$$

gdzie składowe operatorów \underline{K} i \underline{L}

$$K_x(r) = -ik^2 \tau_g \beta r$$

$$K_y(r) = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} r \beta \left(\beta^2 + \frac{\epsilon_0}{\epsilon} r^2 - k_e^2 \right) - k^2 \frac{\mu_0}{\mu} \tau_g \beta r$$

$$/20/ \quad K_z(r) = -\frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0} \beta^2 \left(\beta^2 + \frac{\epsilon_0}{\epsilon} r^2 - k_e^2 \right)$$

$$L_x(r) = \omega \mu \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \beta \left(\beta^2 + \frac{\epsilon_0}{\epsilon} r^2 - k_e^2 \right)$$

$$L_y(r) = i \omega \mu \tau_g \beta r^2 - i \omega \mu \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \beta \left(\beta^2 + \frac{\epsilon_0}{\epsilon} r^2 - k_e^2 \right)$$

$$L_z(r) = -\omega \mu \tau_g \frac{\epsilon}{\epsilon_0} i r \beta^2$$

Podobnie otrzymujemy układ równań na współczynniki odbicia i transmisji padającej fali nadzwyczajnej (wtedy $r_3'' = r_1'' = r''$)

$$/21/ \quad \underline{D}_0 \cdot \underline{R}'' = \underline{A}''_0$$

gdzie

$$\underline{R}'' = \begin{pmatrix} R_{21} \\ R_{22} \\ T_{24} \\ T_{22} \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_0'' = \begin{pmatrix} -L_y(\gamma'') + \frac{1}{R} K_x(\gamma'') \\ -L_x(\gamma'') - \frac{1}{R} K_y(\gamma'') \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

B. $\psi = \frac{\pi}{2}$

Z formuł /12/ otrzymujemy teraz warunki, jakie muszą spełniać superpotencjały U^+ i U^- po obu stronach powierzchni granicznej $y = 0$:

$$\begin{array}{l} /22/ \\ \left. \begin{array}{l} (L_z + \frac{1}{R} K_x) U^+ - L_z U^- = 0 \\ (L_x - \frac{1}{R} K_z) U^+ - L_x U^- = 0 \\ K_z U^+ - K_z U^- = 0 \\ K_x U^+ - K_x U^- = 0 \end{array} \right\} y=0. \end{array}$$

Z kolei ze wzorów /14/ i /16/ wynika, że można teraz zastosować następujące oznaczenia dla przypadku gdy falą padającą jest fala zwyczajna

$$\begin{array}{l} /23/ \\ \gamma = \gamma_1' = \gamma_3' = \gamma_3'' = \gamma_2' = \gamma_2'' \\ \beta' = \beta_1' = \beta_3' = -\beta_2' ; \quad \beta'' = \beta_3'' = -\beta_2'' \end{array}$$

oraz gdy falą padającą jest fala nadzwyczajna

$$\begin{array}{l} /24/ \\ \gamma = \gamma_1'' = \gamma_3' = \gamma_3'' = \gamma_2' = \gamma_2'' \\ \beta'' = \beta_1'' = \beta_3'' = -\beta_2'' ; \quad \beta' = \beta_3' = -\beta_2' \end{array}$$

Podstawienie do /22/ postaci superpotencjałów /13/ i /15/ prowadzi podobnie jak w przypadku A. do równań na współczynniki odbicia i transmisji R_{ij} , T_{ij}

$$/25/ \quad \underline{D}_{\pi/2} \cdot \underline{R}' = \underline{A}'_{\pi/2}$$

$$/26/ \quad \underline{D}_{\pi/2} \cdot \underline{R}'' = \underline{A}''_{\pi/2} \quad ,$$

gdzie

$$\underline{A}'_{\pi/2} = \begin{pmatrix} -L_z(\beta') - \frac{1}{R} K_x(\beta') \\ -L_x(\beta') + \frac{1}{R} K_z(\beta') \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{A}''_{\pi/2} = \begin{pmatrix} -L_z(\beta'') - \frac{1}{R} K_x(\beta'') \\ -L_x(\beta'') + \frac{1}{R} K_z(\beta'') \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oraz

$$/27/ \quad \underline{D}_{\pi/2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} K_x(-\beta') + L_z(-\beta') & \frac{1}{R} K_x(-\beta'') + L_z(-\beta'') & -L_z(\beta') & -L_z(\beta'') \\ -\frac{1}{R} K_z(-\beta') + L_x(-\beta') & -\frac{1}{R} K_z(-\beta'') + L_x(-\beta'') & -L_x(\beta') & -L_x(\beta'') \\ K_z(-\beta') & K_z(-\beta'') & -K_z(\beta') & -K_z(\beta'') \\ K_x(-\beta') & K_x(-\beta'') & -K_x(\beta') & -K_x(\beta'') \end{pmatrix} .$$

Układy równań algebraicznych /18/ i /21/ dla przypadku

$\Psi = 0$, albo /25/ i /26/ dla przypadku $\Psi = \pi/2$ wyznaczają wszystkie współczynniki odbicia i transmisji dla superpotencjałów fal płaskich, padających na płaszczyznę półprzezroczystą. Z podanych formuł wynika, że nawet w szczególnych przypadkach usytuowania osi żyrotropii względem powierzchni granicznej mamy do czynienia ze sprzężeniem obydwu modów fal elektromagnetycznych.

Powierzchniowe fale elektromagnetyczne w opisywanym przypadku mogą rozchodzić się po obu stronach powierzchni granicznej. Podlegają one tym samym sprzężeniom co fale przestrzenne: fala padająca każdego rodzaju wzbudzi fale powierzchniowe obydwu rodzajów, podtrzymywane przez płaszczyznę półprzezroczystą.

Przy zadanym źródle pełne pole elektromagnetyczne w rozpatrywanym ośrodku można otrzymać metodami syntezy fourierowskiej z rozważanych wyżej elementarnych fal płaskich. Bieguny współczynników odbicia i transmisji, występujących w wyrażeniach podoalkowych, prowadzą wtedy do przyczynków postaci fal powierzchniowych. Odpowiednie residua dają - dla danego źródła - amplitudy fal powierzchniowych, natomiast składowe wektorów falowych tych fal, (składowe te zależą jedynie od własności płaszczyzny, która je podtrzymuje) uzyskuje się z równań określających punkty osobliwe współczynników odbicia i transmisji, czyli miejsca zerowe wyznaczników macierzy /19/, albo /27/.

Rozwiązanie tych równań

$$/28/ \quad \left| D_0 \right| = 0, \quad \text{albo} \quad \left| D_{\pi/2} \right| = 0$$

jest możliwe na drodze rachunków numerycznych.

LITERATURA

- [1] J.K. FRĄCKOWIAK - Fale powierzchniowe w ośrodku żyotropowym nad płaszczyzną impedancyjną. Prace IPPT, 48/1979.
- [2] T.B.A. SENIOR - Half Plane Edge Diffraction. Radio Science, Vol. 10, No 6, pp 645-50 /1975/.
- [3] J.K. FRĄCKOWIAK - Wzbudzenie fal powierzchniowych nad płaszczyzną półprzezroczystą w ośrodku jednoosiowo anizotropowym. Prace IPPT, 48/1979.
- [4] J.K. FRĄCKOWIAK - Wzbudzenie elektromagnetycznych fal powierzchniowych w ośrodku jednoosiowo anizotropowym nad płaszczyzną impedancyjną. Prace IPPT, 36/1977.
- [5] S. PRZEŹDZIECKI, R.A. HURD - A Note on Scalar Hertz Potentials for Gyrotropic Media. Appl. Phys. 20, pp 313-317 /1979/.