JULJUSZ RUDNICKI

GEOMETRJA NIEEUKLIDESOWA HIPERBOLICZNA

KSIĄŻNICA-ATLAS
ZJEDNOCZONE ZAKŁADY KARTOGRAFICZNE I WYDAWNICZE
TOW. NAUCZ. SZKÓŁ ŚREDN. I WYŻSZ. SP. AKC.
LWÓW – WARSZAWA
1926

l. inw. 25 a.

JULJUSZ RUDNICKI

GEOMETRJA NIEEUKLIDESOWA HIPERBOLICZNA

KSIĄŻNICA-ATLAS
ZJEDNOCZONE ZAKŁADY KARTOGRAFICZNE I WYDAWNICZE
TOW. NAUCZ. SZKÓŁ ŚREDN. I WYŻSZ. SP. AKC.
LWÓW—WARSZAWA
1926

Odbitka z czasopisma „Przegląd Matematyczno-Fizyczny“ r. 1925.

Skład i druk wykonano w zakładach graficznych „Książnica-Atlas“ we Lwowie.

1.

Praca niniejsza zawiera treściwy i elementarny wykład własności utworów geometrycznych w geometrji nieeuklidesowej hiperbolicznej. Badanie przeprowadzone jest przy pomocy interpretacji, podanej przez Poincarégo w rozprawie „Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie", Bulletin de la S. M. Fr., rok 1888. Z pośród wielu interpretacji geometrji nieeuklidesowej, podanych przez Poincaré'go i innych matematyków, interpretacja, którą posługuję się w tym wykładzie, mojem zdaniem, jest może najprostszą, a z drugiej strony także w prosty sposób daje się ująć analitycznie.

2.

Co to jest interpretacja? Pomiędzy tworami, którémi zajmuje się matematyka, istnieją pewne stosunki i zależności, przyczem całokształt tych logicznych wiązań może być oddzielony od treści wyobrażeniowej, która w naszym umyśle zwykle jest skojarzona nierozdzielnie z przedmiotem badania matematycznego. Przy takiem oddzieleniu całokształt wiązań logicznych staje się czemś samowystarczającem. Jednocześnie zyskujemy to, że jeden i ten sam schemat wiązań logicznych może mieć rozmaite i wielokrotne zastosowanie, zależnie od tego, czy nam uda się podstawić na miejsce nieokreślonych dotąd elementów, między którémi zachodziły owe zależności, taką albo inną treść matematyczną. Mamy tu jakgdyby abstrakcję abstrakcji; wychodząc ze świata przedmiotów konkretnych, przy pomocy abstrakcji (pierwszy stopień) budujemy przedmioty idealne, np. punkt, prostą, koło i t. p. Koło nasze nie jest już tem albo owem kołem z drzewa lub tektury, ale pojęciem oderwanem, lecz w każdym razie jeszcze *silnie* związanem ze światem przedmiotów konkretnych, z którego się to pojęcie wyłoniło drogą abstrakcji.

Możemy pójść jeszcze krok dalej, zerwać ostatnie więzy, łączące nasze rozważania ze światem przedmiotów konkretnych. Między idealnemi tworami, któremi zajmuje się geometrja, istnieją związki, które poznajemy drogą rozumowania logicznego, gdyż możemy otrzymać te zależności w postaci twierdzeń ze stosunkowo niewielkiej liczby aksjomatów. Nazwijmy $a, b, c, \ldots$ te zasadnicze utwory, przy pomocy których budujemy wszystkie inne w danej gałęzi matematyki. Narazie możemy wyobrazić sobie, że a to są np. punkty, b proste, c płaszczyzny... Lecz łatwo spostrzec, iż te same zależności, ten sam całokształt wiązań logicznych może istnieć nawet i wtedy, gdy $a, b, c, \ldots$ oznaczają jakieś określone, ale zupełnie inne niż poprzednio utwory geometryczne. Nastręcza się więc tutaj możność posunięcia się o krok dalej w abstrakcji: niech $a, b, c, \ldots$ oznaczają teraz dowolne, bliżej nieokreślone twory pojęciowe, scharakteryzowane tem tylko, że są to takie pojęcia, takie twory myśli, między któremi zachodzą właśnie związki, stanowiące pełny zbiór aksjomatów, tyczących się elementów myślowych $a, b, c, \ldots$ Oczywiście, te aksjomaty muszą być dane i one stanowią określenie utworów $a, b, c, \ldots$, mianowicie $a, b, c, \ldots$ są określone przez to, że spełniają taki właśnie, a nie inny zbiór aksjomatów. Jeżeli na miejsce nieoznaczonych bliżej pojęć $a, b, c, \ldots$ podstawimy określone twory $A, B, C, \ldots$, między któremi zachodzą poprzednio wspomniane związki aksjomatyczne i tylko te, to wszystkie twierdzenia, wynikające z tych aksjomatów będą również miały miejsce dla $A, B, C, \ldots$

Otóż takich podstawień $A, B, C, \ldots$ może być nieskończenie wiele. I może się zdarzyć*), że powstające w ten sposób geometrje utworów $A, B, C, \ldots; A_1, B_1, C_1, \ldots; A_2, B_2, C_2, \ldots$ są równoważne między sobą, równoważne w tem znaczeniu, że istnieje odpowiedniość doskonała między twierdzeniami takich dwóch geometryj. Uzmysłowić to można, jak to robi Poincaré, przy pomocy słownika. Wypisujemy jak w słowniku po jednej stronie czyli w jednej kolumnie nazwy utworów $A, B, C, \ldots$, np. punkt, prosta i t. d.; następnie wypisujemy zawsze w tej

*) Jeżeli układ pewników jest kategoryczny.

samej kolumnie terminy, wyrażające podstawowe związki między temi utworami, jak np. leżeć na, przecinać się, i t. d. Naprzeciw każdej z tych nazw $A, B, C, \ldots$ lub terminów, wyrażających wspomniane związki, piszemy po drugiej stronie odpowiadające nazwy utworów $A_1, B_1, C_1, \ldots$ lub ewentualnie zdania, wyrażające odpowiadające związki między temi utworami. Wystarczy teraz wziąć jakiekolwiek zdanie (twierdzenie), wyrażające własność geometrji utworów $A, B, C, \ldots$ i zastąpić każde słowo lub ewentualnie niektóre wyrażenia tego zdania przez jego odpowiednik, przy pomocy opisanego tylko co słownika; w ten sposób otrzymamy nowe zdanie (twierdzenie), które będzie wyrażało własność geometryczną utworów $A_1, B_1, C_1, \ldots$ Mamy tego przykład bardzo znany w zasadzie dwoistości geometrji rzutowej. Wystarczy np. na płaszczyźnie punkt zastąpić przez prostą, prostą przez punkt, zdanie: „punkt leży na prostej" zastąpić przez „prosta przechodzi przez punkt" i odwrotnie, by z każdego twierdzenia otrzymać nowe twierdzenie, również prawdziwe.

Przypuśćmy, że mamy dwie takie geometrje, pierwsza utworzona z elementów zasadniczych $A, B, C, \ldots$, a druga z tworów $A_1, B_1, C_1, \ldots$; między twierdzeniami obu geometrji istnieje odpowiedniość doskonała i obie odpowiadają temu samemu idealnemu schematowi wiązań logicznych. W takim razie geometrję tworów $A_1, B_1, C_1, \ldots$ będziemy nazywali interpretacją geometrji tworów $A, B, C, \ldots$ i naodwrót. Jasną jest rzeczą, że dla zapoznania się z całokształtem wiązań logicznych danej geometrji obojętną jest rzeczą, którą z interpretacyj bierzemy pod uwagę; w praktyce wyższość ma możliwie najprostsza (chociaż pojęcie prostoty jest bardzo względne!).

W niniejszym artykule będziemy mieli z jednej strony jako utwory $A, B, C, \ldots$ punkty, proste i t. d. geometrji nieeuklidesowej hiperbolicznej (Łobaczewskiego), z drugiej zaś strony, jako utwory $A_1, B_1, C_1, \ldots$ im odpowiadające, pewne utwory geometrji euklidesowej, jako to punkty, jako odpowiedniki punktów, hiperbole, jako odpowiedniki prostych i t. p.

3.

Zajmiemy się narazie geometrją przekrojów hiperboloidy dwupowłokowej $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ płaszczyznami, przechodzącemi przez środek (punkt początkowy układu spółrzędnych).

Ta sama geometrja stosuje się do hiperbol, które są rzutami wzmiankowanych przekrojów na płaszczyznę xoy.

Można ustalić jednoznaczną odpowiedniość między punktami hiperboloidy $z^2 - x^2 - y^2 = 1$, a płaszczyzną zmiennych (u, v) zapomocą wzorów:

$$z = Ch u \; Ch v,$$
$$x = Sh u \; Ch v,$$
$$y = Sh v,$$

gdzie $Ch u = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})$, a $Sh u = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$.

Każdemu punktowi u, v płaszczyzny (u, v) odpowiada jeden punkt na powłoce górnej H_1 hiperboloidy, tak iż $z > 0$. Odwrotnie, każdemu punktowi (x, y, z) na powłoce górnej H_1 odpowiada jeden punkt na płaszczyźnie (u, v). W rzeczy samej $v = \arg Sh y$ (jednoznaczność!!); dalej $u = \arg Th \frac{x}{z}$, co także wyznacza u jednoznacznie, gdyż $z > 0$.

Ograniczymy nasze rozważania do jednej powłoki H_1; tak samo rzut na pł. xoy będzie się składał z jednej tylko gałęzi hiperboli.

4. Prosta.

Prostą (a, b, c) nazwiemy przekrój H_1 płaszczyzną $ax + by + cz = 0$ (lub odpowiedni rzut). Zauważmy, że, jeżeli punkt $(x, y, z > 0)$ leży na prostej (a, b, c), to punkt $(-x, -y, z > 0)$ leży na prostej $(-a, -b, c)$.

Jeżeli przekrój wspomniany rzucimy na płaszczyznę xoy, to otrzymamy równanie rzutu, hiperbolę:

$(ax + by)^2 - c^2x^2 - c^2y^2 - c^2 = o$, (przyczem $[ax + by]\, c < 0$),

czyli $$(a^2 - c^2)\, x^2 + 2abxy + (b^2 - c^2)\, y^2 = c^2. \quad . \quad . \quad (1)$$

Ograniczymy się do przypadku, gdy $a^2 + b^2 \geqslant c^2$; przypadek $a^2 + b^2 < c^2$ nie daje hiperboli, lecz urojoną elipsę i w tym przypadku płaszczyzna $ax + by + cz = o$ nie przecina utworu H_1; (elementów urojonych nie wprowadzamy). Gdy $c = 0$, mamy prostą $ax + by = 0$. Przypadek, gdy $a^2 + b^2 = c^2$ jest przypadkiem granicznym; wtedy płaszczyzna $ax + by + cz = 0$ jest styczna do stożka asymptotycznego $z^2 - x^2 - y^2 = 0$. Niech $a^2 + b^2 = c^2 + \alpha^2$; równanie hiperboli (1) przyjmie kształt

$$\alpha^2 = (b \cos \Theta - a \sin \Theta)^2 + \frac{c^2}{r^2},$$

gdzie $x = r\cos\Theta$, $y = r\sin\Theta$, (spółrzędne biegunowe). Gdy $\alpha \to 0$, to $r \to \infty$, i w granicy $b\cos\Theta - a\sin\Theta = o$. Mamy więc punkt niewłaściwy na prostej $bx - ay = o$.

Ostatecznie więc możemy prostą nazwać trójkę liczb (a, b, c), przyczem $a^2 + b^2 \geqslant c^2$. Warunek, by punkt (x, y, z) leżał na prostej (a, b, c) wyraża się równością

$ax + by + cz = 0$, przyczem jeszcze $(ax + by)\,c < o$.

5. Punkty nieskończenie odległe.

Dla punktów nieskończenie odległych czyli niewłaściwych zachowamy zwykły punkt widzenia: będą to punkty nieskończenie odległe na H_1 lub ewentualnie w płaszczyźnie rzutu. Proste równoległe będą te, które mają wspólny punkt niewłaściwy.

6. Postać normalna równania prostej.

W równaniu $ax + by + cz = 0$, jak wiemy $a^2 + b^2 \geqslant c^2$. Usuwając przypadek graniczny $a^2 + b^2 = c^2$, mamy zawsze $a^2 + b^2 > c^2$. Można więc, przez pomnożenie trzech liczb a, b, c przez odpowiedni czynnik normujący, sprowadzić równanie $ax + by + cz = 0$ do postaci takiej, by $a^2 + b^2 - c^2 = 1$. Wtedy można tak dobrać λ i α, by $a = Ch\,\lambda\cos\alpha$, $b = Ch\,\lambda\sin\alpha$, $c = Sh\,\lambda$. Taką postać równania prostej będziemy nazywali postacią normalną i będziemy stale w dalszych rachunkach posługiwać się równaniem prostej w tej właśnie postaci.

7. Prosta łącząca dwa punkty.

Przez dwa punkty przechodzi zawsze jedna i tylko jedna prosta, (zakładamy, że punkty są różne).

Niech (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) oznaczają dwa różne punkty. By uzasadnić nasze twierdzenie, wystarczy udowodnić, że istnieje zawsze rozwiązanie układu równań:

$$\begin{aligned} &ax_1 + by_1 + cz_1 = 0 \\ &ax_2 + by_2 + cz_2 = 0 \\ &a^2 + b^2 - c^2 = 1. \end{aligned}$$

Z dwóch pierwszych równań wynika, że:

$$\begin{aligned} a &= k\,(y_1 z_2 - y_2 z_1) \\ b &= k\,(z_1 x_2 - z_2 x_1) \\ c &= k\,(x_1 y_2 - x_2 y_1). \end{aligned}$$

Z trzeciego wynika, że:

$$k^2 \{(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 - (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2\} = 1.$$

Lecz z tożsamości Lagrange'a*) wynika, że:

$$(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 - (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 =$$
$$= (z_1 z_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 - 1.$$

Zauważymy teraz, że jest:

$$z_1 z_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 > 1;$$

w rzeczy samej (tożsamość Lagrange'a):

$$z_1^2 z_2^2 = (1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2) = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + 1)^2 + (x_1 y_2 -$$
$$- x_2 y_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2;$$ a więc $z_1^2 z_2^2 > (x_1 x_2 + y_1 y_2 + 1)^2$;

zważymy, że $z_1 > o$; $z_2 > o$, stąd wniosek, że $z_1 z_2 > x_1 x_2 + y_1 y_2 + 1$, czyli $z_1 z_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 > 1$. Dalej

$$k^2 = \frac{1}{(z_1 z_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 - 1} > o; \quad k = \pm \frac{1}{\sqrt{(z_1 z_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 - 1}}.$$

Znaleźliśmy jedną i jedną tylko prostą.

Jednocześnie udowodniliśmy, że:

$$(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 > (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2.$$

8. Przecięcie się dwóch prostych.

Niech (a_1, b_1, c_1) i (a_2, b_2, c_2) oznaczają dwie proste. Punkt przecięcia się (x, y, z) tych dwóch prostych, o ile istnieje, czyni zadość układowi równań:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = o$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = o.$$

O ile układ ten niema rozwiązań, proste się nie przecinają. Z równań wynika, że:

$$x = k(b_1 c_2 - b_2 c_1), \quad y = k(c_1 a_2 - c_2 a_1), \quad z = k(a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

---

*) Tożsamością Lagrange'a nazywamy tożsamość:

$$(A\alpha + B\beta + C\gamma)^2 + (A\beta - B\alpha)^2 + (B\gamma - C\beta)^2 + (C\alpha - A\gamma)^2 = (A^2 + B^2 +$$
$$+ C^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma);$$

kładąc $A = x_1 i$, $B = y_1 i$, $C = z_1$, $\alpha = x_2 i$, $\beta = y_2 i$, $\gamma = z_2$. otrzymamy:

$$(z_1 z_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 - (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 - (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 =$$
$$= (z_2^2 - x_2^2 - y_2^2)(z_1^2 - x_1^2 - y_1^2) = 1,$$

o co właśnie chodzi.

Lecz $$z^2 - x^2 - y^2 = 1.$$ Więc
$$k^2 \{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 - (b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 - (c_1 a_2 - c_2 a_1)^2\} = 1.$$

Tożsamość Lagrange'a:
$$(a_1 a_2 + b_1 b_2 - c_1 c_2)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 - (b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 - (c_1 a_2 - c_2 a_1) = (a_1^2 + b_1^2 - c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 - c_2^2) = 1.$$

Stąd $$k^2 \{1 - (a_1 a_2 + b_1 b_2 - c_1 c_2)\} = 1.$$

Widzimy więc, że dwie proste przecinają wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek:
$$|a_1 a_2 + b_1 b_2 - c_1 c_2| < 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Gdy $|a_1 a_2 + b_1 b_2 - c_1 c_2| = 1$, to proste nazywać będziemy równoległemi; jest to przypadek graniczny poprzedniego. Pozostaje jeszcze przypadek, gdy
$$|a_1 a_2 + b_1 b_2 - c_1 c_2| > 1.$$

Wtedy proste ani się nie przecinają ani nie są równoległe. W każdym razie wtedy dwie proste nie mają żadnego punktu wspólnego.

Równania prostej piszemy zawsze w postaci normalnej.

9. **Przez punkt dany przeprowadzić można dwie proste równoległe do prostej danej.**

Z punktu danego (x_1, y_1, z_1) można przeprowadzić zawsze dwie i tylko dwie równoległe do prostej danej (a_1, b_1, c_1), [zakładając, że punkt (x_1, y_1, z_1) nie leży na prostej (a_1, b_1, c_1)].

Niech (a, b, c) będzie prostą szukaną. Wtedy trzy liczby a, b, c muszą zadość czynić trzem następującym równaniom:

$$aa_1 + bb_1 - cc_1 = 1, \quad \text{(warunek równoległości).}$$
$$ax_1 + by_1 + cz_1 = o,$$
$$a^2 + b^2 - c^2 = 1,$$

które trzeba rozwiązać. Rozwiązując, znajdujemy zapowiedziany wynik. Ponieważ rozwiązanie jest dosyć długie, prędzej dojdziemy do celu, rozumując w sposób następujący.

Równanie $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 1$ jest równaniem hiperboloidy jednopowłokowej, sprzężonej z hiperboloidą $\zeta^2 - \xi^2 - \eta^2 = 1$, t. j. dwie te hiperboloidy posiadają ten sam stożek asymptotyczny $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = o$.

Szukane wartości na a, b, c są wartościami ξ, η, ζ, spełniającemi układ trzech równań:

$$a_1\xi + b_1\eta - c_1\zeta = 1,$$
$$x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta = o,$$
$$\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 1.$$

Dwa pierwsze równania razem wyrażają prostą l (przecięcie się dwóch płaszczyzn). Chodzi więc o punkty przecięcia się prostej (l) z hiperboloidą jednopowłokową $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 1$.

Wiemy, że tych przecięć nie może być więcej jak dwa. Chodzi więc tylko o przekonanie się, czy punkty przecięcia się prostej (l) z hiperboloidą $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 1$ są rzeczywiste. W tym celu wystarczy zauważyć, że stożek asymptotyczny $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = o$ dzieli przestrzeń na dwie połacie; każda prosta, wychodząca z początku układu spółrzędnych i leżąca w pierwszej połaci, przecina hiperboloidę $\zeta^2 - \xi^2 - \eta^2 = 1$, a nie przecina hiperboloidy $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 1$, przeciwnie, każda prosta, wychodząca ze środka i mieszcząca się w drugiej połaci, przecina hiperboloidę $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 1$; a nie przecina hiperboloidy $\zeta^2 - \xi^2 - \eta^2 = 1$. Jeżeli równanie takiej prostej napiszemy w postaci:

$$\frac{\xi}{m} = \frac{\eta}{n} = \frac{\zeta}{p},$$

to prosta ta należeć będzie do pierwszej lub drugiej klasy, zależnie od tego, czy $p^2 > m^2 + n^2$, czy też $p^2 < m^2 + n^2$.

Każda prosta, równoległa do prostej pierwszej klasy, musi przecinać powierzchnię $\zeta^2 - \xi^2 - \eta^2 = 1$, każda zaś prosta, równoległa do prostej drugiej klasy, musi przeciąć powierzchnię $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 1$.

Nasza prosta (l) jest równoległa do prostej:

$$\frac{\xi}{m} = \frac{\eta}{n} = \frac{\zeta}{p},$$

gdzie

$$m = y_1 c' - z_1 b_1,$$
$$n = z_1 a_1 - x_1 c',$$
$$p = x_1 b_1 - y_1 a_1,$$

przyczem $c' = -c_1$. Porównajmy p^2 z $m^2 + n^2$;

$$p^2 - m^2 - n^2 = (x_1 b_1 - y_1 a_1)^2 - (z_1 a_1 - x_1 c')^2 - (y_1 c' - z_1 b_1)^2 =$$
$$= -1 - (a_1 x_1 + b_1 y_1 - c' z_1)^2 < o;$$

tak więc $p^2 < m^2 + n^2$ i prosta (l) musi przeciąć w punktach rzeczywistych powierzchnię $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 1$. Żaden z tych punktów nie może być punktem niewłaściwym, gdyż musiałoby wtedy być $p^2 = m^2 + n^2$, co jak wiemy, niema miejsca. Twierdzę dalej, że te dwa punkty przecięcia są różne; gdyby bowiem zlewały się razem, to prosta (l)

$$a_1 \xi + b_1 \eta - c_1 \zeta = 1,$$
$$x_1 \xi + y_1 \eta + z_1 \zeta = 0,$$

musiałaby być styczną do powierzchni $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 1$. Ponieważ równanie:

$$a_1 \xi + b_1 \eta - c_1 \zeta = 1,$$

wyraża płaszczyznę styczną do powierzchni $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 1$ w punkcie $\xi = a_1$, $\eta = b_1$, $\zeta = c_1$, więc nasza prosta (l) może być styczną do $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy przechodzi przez punkt (a_1, b_1, c_1), co ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 = 0,$$

t. t. gdy punkt $(x_1, y_1, z_,)$ leży na prostej (a_1, b_1, c_1)!

10. Warunek, by trzy punkty leżały na jednej prostej, i warunek, by trzy proste przecinały się w jednym punkcie.

Trzy punkty (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Tak samo, warunek, by trzy proste (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) i (a_3, b_3, c_3) przecinały się w jednym punkcie, jest:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & e_3 \end{vmatrix} = 0. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

11. Grupa przekształceń ruchu.

Grupę przekształceń ruchu utworzymy z przekształceń linjowych:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \\ y_1 &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \\ z_1 &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, \end{aligned} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

które trójkę liczb (x, y, z) przekształcają na trójkę liczb (x_1, y_1, z_1); lecz obie trójki liczb muszą być punktami, czyli dochodzi jeszcze warunek taki: „jeżeli $z^2 - x^2 - y^2 = 1$, to i $z_1^2 - x_1^2 - y_1^2 = 1$, i odwrotnie". Lecz:

$$z_1^2 - x_1^2 - y_1^2 \equiv (\gamma_1^2 - \beta_1^2 - \alpha_1^2)x^2 + (\gamma_2^2 - \beta_2^2 - \alpha_2^2)y^2 + (\gamma_3^2 - \beta_3^2 - \alpha_3^2)z^2 + 2(\gamma_1\gamma_2 - \beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2)xy + 2(\gamma_1\gamma_3 - \beta_1\beta_3 - \alpha_1\alpha_3)xz + 2(\gamma_2\gamma_3 - \beta_2\beta_3 - \alpha_2\alpha_3)yz \equiv z^2 - x^2 - y^2.$$

Stąd:

$$\begin{aligned} &\gamma_3^2 - \beta_3^2 - \alpha_3^2 = 1, &\quad \gamma_1\gamma_2 - \beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2 = 0,\\ &\gamma_2^2 - \beta_2^2 - \alpha_2^2 = -1, &\quad \gamma_1\gamma_3 - \beta_1\beta_3 - \alpha_1\alpha_3 = 0,\\ &\gamma_1^2 - \beta_1^2 - \alpha_1^2 = -1, &\quad \gamma_2\gamma_3 - \beta_2\beta_3 - \alpha_2\alpha_3 = 0. \end{aligned}$$

Z tych równości wynika, że:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \pm 1. \qquad \ldots\ldots \quad (6)$$

W rzeczy samej z

$$\gamma_1\gamma_2 - \beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2 = 0$$
$$\gamma_1\gamma_3 - \beta_1\beta_3 - \alpha_1\alpha_3 = 0,$$

wynika

$$\gamma_1 = k(\beta_2\alpha_3 - \beta_3\alpha_2),$$
$$\alpha_1 = k(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2),$$
$$\beta_1 = k(\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2);$$

natomiast

$$\gamma_1^2 - \beta_1^2 - \alpha_1^2 = -1,$$

czyli: $k^2\{(\beta_2\alpha_3 - \beta_3\alpha_2)^2 - (\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2)^2 - (\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2)^2\} = -1.$

Tożsamość Lagrange'a pozwala równanie poprzednie napisać w postaci:

$$k^2\left\{(\gamma_2^2 - \beta_2^2 - \alpha_2^2)(\gamma_3^2 - \beta_3^2 - \alpha_3^2) - (\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 - \gamma_2\gamma_3)^2\right\} = -1,$$

czyli: $\qquad k^2 = 1, \qquad$ t. j. $\qquad k = \pm 1.$

A więc:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1(\beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3) + \beta_1(\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2) + \gamma_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) = \frac{1}{k}(\alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2) = \frac{1}{k} = \pm 1.$$

Otóż przekształceniami grupy ruchu będziemy nazywali tylko te z pośród rozważanych przez nas poprzednio przekształceń linjowych, dla których wzmiankowany wyznacznik równa się $+1$.

Odwrócenie zależności, czyli przekształcenie odwrotne:

$$x = \frac{D_1}{D}, \text{ gdzie } D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1, \; D_1 = \begin{vmatrix} x_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ y_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ z_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= x_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) + y_1(\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2) + z_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) = \alpha_1 x_1 + \\ + \beta_1 y_1 - \gamma_1 z_1 .$$

Tak więc znajdziemy ostatecznie:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 - \gamma_1 z_1, \\ y &= \alpha_2 x_1 + \beta_2 y_2 - \gamma_2 z_1, \\ z &= -\alpha_3 x_1 - \beta_3 y_1 + \gamma_3 z_1; \end{aligned} \qquad \text{. . . . . (7)}$$

te zależności są tego samego kształtu, co poprzednie, czyli także musi być:

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 &= 1, & \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 &= 0, \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2 &= 1, & \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 - \alpha_3\gamma_3 &= 0, \\ -\gamma_1^2 - \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1, & \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 - \beta_3\gamma_3 &= 0, \end{aligned}$$

ponieważ $z^2 - x^2 - y^2$ jest niezmiennikiem naszego przekształcenia.

12. Niezmienniki.

Zajmiemy się najprzód niezmiennikami dla spółrzędnych punktowych. Chodzić nam będzie o funkcję spółrzędnych dwóch punktów (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2), która nie zmienia się przy ruchu, t. j. przy przekształceniach ruchu.

Jeżeli x_1, y_1, z_1 i x_2, y_2, z_2 są spółrzędne tych dwóch punktów, a x'_1, y'_1, z'_1 i x'_2, y'_2, z'_2 punktów im odpowiadających, to istnieje niezmiennik $f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$, o ile ta funkcja posiada własność, wyrażającą się równaniem:

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = f(x'_1, y'_1, z'_1, x'_2, y'_2, z'_2).$$

Zauważymy przedewszystkiem, że:

$$(z_2 - z_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2$$

jest niezmiennikiem, ponieważ związki między $x'_2 - x'_1$, $y'_2 - y'_1$, $z'_2 - z'_1$ z jednej, a $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ z drugiej strony są takie same, jak pomiędzy x', y', z', a x, y, z, mianowicie:

$$\begin{aligned} x'_2 - x'_1 &= \alpha_1(x_2 - x_1) + \alpha_2(y_2 - y_1) + \alpha_3(z_2 - z_1), \\ y'_2 - y'_1 &= \beta_1(x_2 - x_1) + \beta_2(y_2 - y_1) + \beta_3(z_2 - z_1), \\ z'_2 - z'_1 &= \gamma_1(x_2 - x_1) + \gamma_2(y_2 - y_1) + \gamma_3(z_2 - z_1). \end{aligned}$$

Stąd wniosek, że:

$$(z'_2 - z'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 = (z_2 - z_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (x_2 - x_1)^2$$

lecz:

$$z'_2 - z'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 = (z'^2_2 - y'^2_2 - x'^2_2) + (z'^2_1 - y'^2_1 - x'^2_1) -$$
$$- 2(z'_1 z'_2 - y'_1 y'_2 - x'_1 x'_2).$$

A więc $\qquad z'_1 z'_2 - x'_1 x'_2 - y'_1 y'_2 = z_1 z_2 - x_1 x_2 - y_1 v_2,$

czyli że: $\qquad z_1 z_2 - y_1 y_2 - x_1 x_2 \qquad \ldots\ldots \qquad (8)$

jest nowym niezmiennikiem.

13. Odległość dwóch punktów.

Niech będą punkty (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2). Odległość d_{12} tych dwóch punktów powinna spełniać, jako funkcja zmiennych x_1, y_1, z_1 i x_2, y_2, z_2 następujące warunki:

1) Być niezmiennikiem przy przekształceniach ruchu;

2) $d_{12} = d_{21}$;

3) $d_{12} = 0$ gdy $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$ i tylko wtedy; poza tem $d_{12} > 0$.

4) Jeżeli trzy punkty (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) leżą na jednej prostej, to $d_{12} + d_{23} = d_{13}$, o ile punkt (x_2, y_2, z_2) leży między dwoma pozostałemi.

Odcinkiem będziemy nazywali zbiór wszystkich punktów (x, y, z) prostej, zawartych między dwoma jej punktami.

Wyraz „między" będzie miał dla nas zwykłe znaczenie. Analitycznie, punkt (x, y, z) leży między punktami (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2), o ile wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x & y \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x & y \end{vmatrix}$$

mają znaki różne; o ile zaś $x_1 y - x y_1$ i $x_2 y - x y_2$ są tego samego znaku, to punkt (x, y, z) jest zewnątrz dwóch pozostałych punktów.

Jeżeli ma być spełniony warunek, że po ustaleniu jednego punktu (końcowego) odcinka, odcinek tem samem nie jest jeszcze unieruchomiony, lecz posiada jeszcze jeden stopień swobody, to w takim razie może być dla pary punktów jeden tylko niezmiennik niezależny; t. j. każdy inny musi być funkcją pierwszego. W rzeczy samej, załóżmy istnienie dwóch niezmienników niezależnych dla pary punktów, wtedy przy przekształceniach ruchu mielibyśmy:

$$f(x_1, y_1, z_1, \quad x_2, y_2, z_2) = \text{Const},$$
$$\varphi(x_1, y_1, z_1, \quad x_2, y_2, z_2) = \text{Const}.$$

O ile ustalimy x_1, y_1, z_1, to mamy dla x_2, y_2, z_2 równania:

$$f(x_1, y_1, z_1, x, y, z) = C_1,$$
$$\varphi(x_1, y_1, z_1, x, y, z) = C_2,$$
$$z^2 - x^2 - y^2 = 1.$$

Przez te równania x, y, z są ustalone, o ile niezmienniki są od siebie niezależne. Czyli punkt początkowy (x_1, y_1, z_1) odcinka określałby położenie punktu końcowego (x_2, y_2, z_2) wbrew założonej swobodzie ruchu.

Na tej zasadzie przyjmiemy istnienie jednego tylko niezmiennika grupy ruchu dla pary punktów.

Ponieważ d_{12} jest takim niezmiennikiem, więc $z_1 z_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 = f(d_{12})$, t. j. $z_1 z_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2$ jest funkcją niezmiennika d_{12}.

Postaramy się utworzyć niezmiennik, któryby spełniał wszystkie warunki 2), 3) i 4). Zaczniemy od warunku 4). Przypuśćmy, że rozpatrujemy przypadek, gdy $x_1 y_2 - x_2 y_1$ nie równa się zeru. Oczywiście, musimy założyć także, że $f(d_{12}) = f(d_{21})$.

Niech trzy nasze punkty leżą na jednej prostej. Wtedy:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Lecz:

$$z_1 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1^2 \\ x_2 & y_2 & z_1 z_2 \\ x_3 & y_3 & z_1 z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_1 z_2 - y_1 y_2 - x_1 x_2 \\ x_3 & y_3 & z_1 z_3 - y_1 y_3 - x_1 x_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & f(d_{12}) \\ x_3 & y_3 & f(d_{13}) \end{vmatrix} = 0,$$

czyli:

$$(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) f(d_{12}) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) f(d_{13}) = 0.$$

Tak samo:

$$(x_2 y_3 - x_3 y_2) f(d_{12}) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) f(d_{23}) = 0,$$
$$(x_2 y_3 - x_3 y_2) f(d_{13}) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) f(d_{23}) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0.$$

A więc warunek, by trzy punkty leżały na jednej prostej, przyjmuje postać:

$$\begin{vmatrix} 1 & f(d_{12}) & f(d_{13}) \\ f(d_{12}) & 1 & f(d_{23}) \\ f(d_{13}) & f(d_{23}) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

czyli rozwijając:

$$1 + 2f(d_{12})f(d_{23})f(d_{13}) - f^2(d_{12}) - f^2(d_{23}) - f^2(d_{31}) = 0,$$

skąd:

$$f(d_{13}) = f(d_{12}) \,.\, f(d_{23}) \pm \sqrt{(f^2(d_{23}) - 1)\,(f^2(d_{12}) - 1)}.$$

Możemy teraz zużytkować warunek 4). Mianowicie z warunku tego wynika, że:

$$d_{13} = \pm (d_{12} \pm d_{23}),$$

a więc $f(d_{13}) = f(d_{12} \pm d_{23})$, zależnie od wzajemnego uporządkowania naszych trzech punktów. Stąd:

$$f(d_{12} \pm d_{23}) = f(d_{12}) \,.\, f(d_{23}) \pm \sqrt{\{f^2(d_{23}) - 1\}\,\{f^2(d_{12}) - 1\}}.$$

Gdy punkt trzeci zlewa się z punktem pierwszym, to $z_1 z_3 - y_1 y_3 - x_1 x_3 = 1$, dalej $d_{12} = d_{23}$ i $d_{12} - d_{23} = 0$ i funkcja $f(d_{13})$ równa się jedności. Stąd widzimy, że w ostatnim wzorze musi być po obu stronach albo jednocześnie $+$, albo jednocześnie $-$. Mamy więc ostatecznie wynik taki: funkcja $f(d)$ powinna spełniać równania funkcyjne następujące:

$$f(u + v) = f(u) \,.\, f(v) + \sqrt{\{f^2(u) - 1\}\,\{f^2(v) - 1\}},$$

$$f(u - v) = f(u) \,.\, f(v) - \sqrt{\{f^2(u) - 1\}\,\{f^2(v) - 1\}};$$

stąd przez dodawanie wynika:

$$f(u + v) + f(u - v) = 2f(u) \,.\, f(v). \quad . \;.\; . \quad (9)$$

Taki jest funkcjonalny wyraz warunku czwartego.

14. **Równanie funkcyjne** $f(u + v) + f(u - v) = 2f(u) \,.\, f(v)$.

Udowodnimy, że jedynemi funkcjami ciągłemi, czyniącemi zadość warunkowi (9) są funkcje $\cos ku$ i $Ch\, ku$.

Zauważymy przedewszystkiem, że funkcje $f(u) \equiv 0$ i $f(u) \equiv 1$ spełniają nasze równanie funkcyjne. Odsuniemy te rozwiązania banalne i zajmiemy się poszukiwaniem, czy istnieją inne. Zróbmy narazie założenie, że takowe rozwiązania (funkcje) istnieją i postaramy się zobaczyć, jakie własności posiadają. Niech $v = o$, wtedy $2f(u) = 2f(u) \,.\, f(o)$; ponieważ $f(u) \neq o$, więc $f(o) = 1$. Dalej z powodu ciągłości funkcji $f(u)$ istnieje takie otoczenie punktu $u = o$, w którym funkcja przyjmuje wartości, zawarte między $1 - \varepsilon$ i $1 + \varepsilon$, przy $\varepsilon > o$ dowolnie małym. Jeżeli w równaniu funkcyjnem uczynimy $u = o$, to otrzymamy:

$$f(v) + f(-v) = 2f(o) f(v) = 2f(v),$$

czyli $f(-v) = f(v)$ i funkcja nasza jest parzysta. Wystarczy więc uwzględnić np. tylko prawostronne otoczenie punktu $u = o$.

Przypuśćmy, że punkt $u = a$ jest o tyle w otoczeniu punktu $u = o$, że nietylko $f(a) = k_0 > o$, ale że $f(u) > o$ dla każdej wartości u w przedziale (o, a), co jest możliwe na zasadzie poprzedniej uwagi.

Równanie funkcyjne określa wartość $f(u)$ dla każdej wartości u, o ile tylko znamy jej wartość w punkcie wspomnianym $u = a$.

W rzeczy samej, jeżeli w $f(u + v) + f(u - v) = 2f(u) \,.\, f(v)$ podstawimy kolejno:

$$\begin{aligned} &u = a, \; v = a; \\ &u = 2a, \; v = a; \\ &u = 3a, \; v = a, \\ &\dots\dots \\ &u = pa, \; v = a, \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

to otrzymamy:

$$\begin{aligned} &f(2a) = 2f^2(a) - 1, \\ &f(3a) = 2f(2a) f(a) - f(a), \\ &f(4a) = 2f(3a) \,.\, f(a) - f(2a), \\ &f(5a) = 2f(4a) \,.\, f(a) - f(3a). \\ &\dots\dots\dots \\ &f(pa) = 2f\{(p-1)a\} f(a) - f\{(p-2)a\}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

t. j. wzory dla wszystkich wartości u, które są wielokrotnościami a. W zależności $f(2a) = 2f^2(a) - 1$ uczyńmy $2a = u$, $a = \frac{u}{2}$; wtedy $f(u) = 2f^2\left(\frac{u}{2}\right) - 1$, czyli $f\left(\frac{u}{2}\right) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{f(u) + 1}$.

Niech

$$u = a, \frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \dots, \frac{a}{2^m}, \dots$$

Wtedy:

$$f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{f(a)+1},\quad f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{f\left(\frac{a}{2}\right)+1},\ldots$$

$$f\left(\frac{a}{2^m}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{f\left(\frac{a}{2^{m-1}}\right)+1},\ldots,$$

przyczem wartości szukane są tu wyznaczone jednoznacznie przez wartość $+$ pierwiastka, gdyż $\frac{a}{2^m}$ należy do przedziału (o, a), a więc wartość $f\left(\frac{a}{2^m}\right)$ jest dodatnia. Tak więc wartość szukanej funkcji dla $u=\frac{a}{2^m}$, przy $m \geqslant o$ całkowitym jest w zupełności i jednoznacznie wyznaczona.

Poprzednio z wartości funkcji $f(u)$ w punkcie $u=a$ wyprowadziliśmy wartość tejże funkcji w punkcie $u=pa$, gdzie $p>o$ całkowite. Zastępując punkt $u=a$ punktem $u=\frac{a}{2^m}$, znajdziemy wartość $f(u)$ dla $u=\frac{p}{2^m}a$, gdzie p i m są liczbami całkowitemi dodatniemi, zresztą dowolnemi.

By posunąć się dalej, musimy zrobić założenie, tyczące się wartości $f(a)$; mianowicie może być $f(a)>1$, $f(a)=1$, $f(a)<1$. Ponieważ usunęliśmy przypadek $f(a)\equiv 1$, więc można przyjąć pod warunkiem ewentualnej zmiany punktu a, że $f(a) \neq 1$. *Rozpatrzmy najprzód przypadek* $f(a)<1$.

Można znaleźć kąt Θ, posiadający tę własność, że $\cos\Theta = f(a)>o$, przyczem $o<\Theta<\frac{\pi}{2}$, Θ określone jednoznacznie.

Z łatwością przekonamy się, że:

$$f(2a)=\cos 2\Theta,$$
$$f(3a)=\cos 3\Theta,$$
$$\cdots\cdots$$
$$f(pa)=\cos p\Theta.$$

Tak samo: $$f\left(\frac{a}{2}\right)=\cos\frac{\Theta}{2},\ f\left(\frac{a}{4}\right)=\cos\frac{\Theta}{4},\cdots$$

Wreszcie: $$f\left(\frac{pa}{2^m}\right)=\cos\left(\frac{p\Theta}{2^m}\right).$$

Udowodniliśmy więc, że w przypadku $f(\alpha) < 1$, dla $u = \frac{p}{2^m}\alpha$, mamy $f(u) = \cos\left(u \cdot \frac{\alpha}{\Theta}\right) = \cos\lambda u$, kładąc $\lambda = \frac{\alpha}{\Theta}$.

Stąd wniosek, że: $f(u) = \cos\lambda u$ . . . . (10)
dla każdej wartości $u > o$. Wynika to z dwóch okoliczności, 1^0 że do każdej liczby $u > o$, nie będącej kształtu $\frac{p}{2^m} \cdot \alpha$, może być dobrany ciąg liczb tego kształtu o granicy równej u, i 2^0 że funkcje $f(u)$ i $\cos\lambda u$ są funkcjami ciągłemi zmiennej u.

Na początku zrobiliśmy założenie, że funkcja ciągła $f(u)$ istnieje; otóż to założenie jest spełnione, bo funkcja ciągła $\cos\lambda u$ spełnia, jak wiadomo, nasze równanie funkcyjne. Udowodniliśmy więc, że w przypadku, gdy w punkcie $u = \alpha$*) funkcja jest mniejsza od jedności, to niema innej funkcji ciągłej, spełniającej nasze równanie funkcyjne, oprócz $f(u) = \cos\lambda u$. Jeżeli znamy wartość funkcji w jednym takim punkcie α, to tem samem wyznaczone są wszystkie wartości tej funkcji jednoznacznie i ich zbiór tworzy funkcję $\cos\lambda u$.

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek $f(\alpha) > 1$.

Niech więc $f(\alpha) > 1$. Zawsze można wobec tego znaleźć taką liczbę dodatnią r, większą od jedności, że:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right); \text{ wtedy:}$$

$$f(2\alpha) = \frac{1}{2}\left(r^2 + \frac{1}{r^2}\right),$$

$$f(3\alpha) = \frac{1}{2}\left(r^3 + \frac{1}{r^3}\right), \ldots,$$

zapomocą indukcji udowodnimy, że:

$$f(p\alpha) = \frac{1}{2}(r^p + r^{-p}).$$

Tak samo znajdziemy:

$$f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{r} + \frac{1}{\sqrt{r}}\right),$$

$$f\left(\frac{\alpha}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{r} + \frac{1}{\sqrt[4]{r}}\right), \ldots,$$

*) Punkt $\alpha > o$ jest dowolnym punktem, spełniającym warunek, że w przedziale (o, α) funkcja $f(u) > o$; takich punktów α jest nieskończenie wiele, gdyż $f(o) = 1$, a $f(u)$ jest funkcją ciągłą.

zapomocą indukcji udowodnimy, że:

$$f\left(\frac{a}{2^m}\right)=\frac{1}{2}\left(r^{\frac{1}{2^m}}+r^{-\frac{1}{2^m}}\right),$$

i ostatecznie: $$f\left(\frac{p}{2^m}a\right)=\frac{1}{2}\left(r^{\frac{p}{2^m}}+r^{-\frac{p}{2^m}}\right),$$ czyli:

$$f(u)=\frac{1}{2}\left(r^{\frac{u}{a}}+r^{-\frac{u}{a}}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{u}{a}\lg r}+e^{-\frac{u}{a}\lg r}\right)=Ch\lambda u,$$

gdzie $$\lambda=\frac{1}{a}\lg r>0,$$

przyczem równość ta $f(u)=Ch\lambda u$ . . . . . . (11)
została udowodniona tylko dla tych wartości u, które są kształtu $u=\frac{p}{2^m}a$, gdzie p i m dowolne liczby całkowite dodatnie.

Opierając się na ciągłości funkcji $f(u)$ i $Ch\lambda u$, udowodnimy, rozumując jak poprzednio, że:

$$f(u)=Ch\lambda u$$

ma miejsce dla każdej wartości u. Tak więc nasza funkcja w tym przypadku jest identyczna z funkcją $Ch\lambda u$, która to funkcja, jak wiadomo, spełnia równanie funkcyjne:

$$f(u+v)+f(u-v)=2f(u)\,.\,f(v),$$

i innej funkcji, spełniającej to równanie i warunek $f(a)>1$, niema.

Tak więc $\cos\lambda u$ i $Ch\lambda u$ są jedynemi rozwiązaniami ciągłemi naszego równania funkcyjnego, (przyczem $\lambda>0$ jest liczbą dowolną), o ile odrzucić rozwiązania banalne $f(u)=0$ i $f(u)=1$. Funkcje znalezione $\cos\lambda u$ i $Ch\lambda u$ spełniają także, jak łatwo sprawdzić, równania:

$$f(u\pm v)=f(u)\,.\,f(v)\pm\sqrt{\{f^2(u)-1\}\ \{f^2(v)-1\}}.$$

15. Wzór na odległość dwóch punktów.

Poprzednio (Nr. 13) udowodniliśmy, że funkcja, $f(u)$ wyrażająca związek $z_1z_2-y_1y_2-x_1x_2=f(d_{12})$ między niezmiennikami $z_1z_2-y_1y_2-x_1x_2$ i d_{12} spełnia równanie, funkcyjne:

$$f(u+v)+f(u-v)=2f(u)\,.\,f(v);$$

tak więc: $z_1z_2-x_1x_2-y_1y_2=Ch\lambda d_{12}$ lub $\cos\lambda d_{12}$.

Lecz udowodniliśmy (patrz Nr. 7), że $z_1 z_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 > 1$; stąd wniosek, że:

$$z_1 z_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 = Ch\,\lambda d_{12},$$

czyli: $$d_{12} = \frac{1}{\lambda} \left| \operatorname{Arg} Ch\,(z_1 z_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2) \right| . \quad . \quad . \quad (12)$$

Łatwo teraz sprawdzić, że i warunki 2-gi i 3-ci są także spełnione.

Uwaga. W poprzednich rozumowaniach zakładaliśmy, że wyznaczniki $x_1 y_2 - x_2 y_1$, $x_2 y_3 - x_3 y_2$ i $x_3 y_1 - x_1 y_3$ nie równają się wszystkie trzy jednocześnie zeru. Otóż przyjmiemy wzór (12) jako określenie odległości między dwoma punktami w przypadku najogólniejszym. Łatwo sprawdzić, że nie wyniknie stąd żadna sprzeczność.

16. Przekształcenie spółrzędnych linji prostej.

Jeżeli punkt (x, y, z) leży na prostej (a, b, c), to $ax + by + cz = 0$; lecz równania grupy ruchu są:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 - \gamma_1 z_1 \\ y &= \alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 - \gamma_2 z_1 \\ z &= -\alpha_3 x_1 - \beta_3 y_1 + \gamma_3 z_1, \end{aligned}$$

przyczem między spółczynnikami zachodzą znane związki. Na skutek tego z $ax + by + cz = 0$, wynika:

$(a\alpha_1 + b\alpha_2 - c\alpha_3) x_1 + (a\beta_1 + b\beta_2 - c\beta_3) y_1 + (-a\gamma_1 - b\gamma_2 + c\gamma_3) z_1 = 0$,

gdzie x_1, y_1, z_1 oznaczają spółrzędne punktu, odpowiadającego punktowi (x, y, z).

Kładąc: $$\begin{aligned} a_1 &= a\alpha_1 + b\alpha_2 - c\alpha_3, \\ b_1 &= a\beta_1 + b\beta_2 - c\beta_3, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13) \\ c_1 &= -a\gamma_1 - b\gamma_2 + c\gamma_3, \end{aligned}$$

możemy otrzymany wynik wypowiedzieć w sposób następujący, zważywszy, że:

$$a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 = a^2(\alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2) + b^2(\alpha_2^2 + \beta_2^2 - \gamma_2^2) + c^2(\alpha_3^2 + \beta_3^2 - \gamma_3^2) +$$
$$+ 2ab(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2) + 2ac(\gamma_1\gamma_3 - \beta_1\beta_3 - \alpha_1\alpha_3) + 2bc(\gamma_2\gamma_3 -$$
$$- \beta_2\beta_3 - \alpha_2\alpha_3) = a^2 + b^2 - c^2 = 1.$$

Jeżeli punkt (x, y, z) leży na prostej (a, b, c), to punkt przekształcony (przez ruch) (x_1, y_1, z_1) leży na prostej (a_1, b_1, c_1); a_1, b_1, c_1 mają wartości (13).

Wzory (13) będziemy nazywali wzorami na przekształcenie spółrzędnych linji prostej (grupa ruchu).

Ze wzorów (13) wynika jeszcze:

$$
\begin{aligned}
a &= a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1, \\
b &= a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2, \\
c &= a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 + c_1\gamma_3.
\end{aligned}
$$

Widzimy więc, że przekształcenia współrzędnych linji prostej są tego samego typu, co przekształcenia współrzędnych punktu. Będziemy mogli bez nowych rachunków wyprowadzić stąd cały szereg wniosków.

17. Niezmiennik dla spółrzędnych linij prostej.

Ponieważ spółrzędne linji prostej przekształcają się w ten sam sposób, jak spółrzędne punktowe, stąd wniosek, że:

$$c_1c_2 - a_1a_2 - b_1b_2$$

jest niezmiennikiem dla spółrzędnych dwóch linji prostych.

Przytem zauważymy, że:

$$(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 - (c_2 - c_1)^2 = 2\{1 + (c_1c_2 - a_1a_2 - b_1b_2)\}.$$

18. Kąt między dwoma prostemi.

Wspomniany tylko co niezmiennik $c_1c_2 - a_1a_2 - b_1b_2$ dla prostych (a_1, b_1, c_1) i (a_2, b_2, c_2) jest bezpośrednio związany z kątem, jakie tworzą te dwie proste w punkcie przecięcia się, o ile, oczywiście, to przecięcie się istnieje, t. j. o ile

$$|a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2| < 1.$$

Wtedy istnieje kąt φ_{12} między temi prostemi, przyczem φ_{12} jako funkcja liczb a_1, b_1, c_1 i a_2, b_2, c_2 ma spełniać następujące warunki:

1) $\varphi_1(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2)$ jest niezmiennikiem grupy przekształceń ruchu;

2) $\varphi_{12} = \varphi_{21}$*);

3) $\varphi_{12} = o$ gdy $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$ i tylko wtedy; poza tem $\varphi_{12} > o$;

4) jeżeli trzy proste przecinają się w jednym punkcie, to:

$$\varphi_{13} = \varphi_{12} \pm \varphi_{23}.$$

Kładąc: $$a_1a_2 + b_1b_2 - c_1c_2 = f(\varphi_{12}),$$

---

*) φ_{12} jest więc wartością bezwzględną kąta.

i rozumując jak poprzednio, dochodzimy do wniosku, że funkcja $f(\varphi_{12})$ spełnia to samo równanie funkcyjne, które otrzymaliśmy poprzednio (l. 13). Ponieważ jednak tu $|f(\varphi_{12})| < 1$, więc musi być:

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 - c_1 c_2 = \cos k\varphi_{12}.$$

Stąd:

$$\varphi_{12} = \frac{1}{k} \operatorname{Arccos} \{a_1 a_2 + b_1 b_2 - c_1 c_2\} \geqslant o.$$

Niech $a_2 = -a_1$, $b_2 = -b_1$, $c_2 = -c_1$; wtedy $a_1 a_2 + b_1 b_2 - c_1 c_2 = -a_1^2 - b_1^2 + c_1^2 = -1$. Wybieramy k tak, by kąt φ_{12} w tym przypadku był π; w takim razie musi być, oczywiście, $k = 1$.

Ostatecznie będzie:

$$\varphi_{12} = \operatorname{Arccos} \{a_1 a_2 + b_1 b_2 - c_1 c_2\}.$$

Łatwo sprawdzić, że w ten sposób określony kąt φ_{12} spełnia wszystkie cztery wyszczególnione wyżej warunki.

19. Linje proste nie przecinające się.

Jeżeli 3 proste (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) i (a_3, b_3, c_3) przecinają się w jednym punkcie, to, jak wiemy:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = o.$$

Odwrotnie, jeżeli $\Delta = o$, i jeżeli dwie z pomiędzy trzech prostych się przecinają, lub są równoległe, to i trzecia przechodzi przez ten punkt przecięcia dwóch pierwszych lub ewentualnie jest do nich równoległa.

Jeżeli zaś $\Delta = o$ i dwie proste się nie przecinają i nie są równoległe, to żadnego przecięcia się niema i z trzecią (nie zachodzi też i równoległość).

Możemy wtedy wprowadzić pewne idealne punkty; i przy tej umowie, gdy $\Delta = o$, to trzy nasze proste przecinają się zawsze w jednym punkcie, ale ten punkt przecięcia się może być trojakiego rodzaju, może być właściwym, niewłaściwym i idealnym, zależnie od tego czy zachodzi pierwszy, drugi, czy trzeci z pomiędzy rozpatrywanych poprzednio przypadków, t. j. zależnie od tego, czy:

$$|a_1 a_2 + b_1 b_2 - c_1 c_2|$$

jest < 1, równe 1 lub > 1.

Wszystkie proste, przechodzące przez jeden i ten sam punkt, tworzą pęk; pęk będzie pierwszego, drugiego lub trzeciego rodzaju, zależnie od tego, czy wspólny punkt jest właściwy, niewłaściwy (w nieskończoności) czy też idealny. Pęk pierwszego rodzaju jest przez powyższe określony w sposób, nie wymagający dalszych wyjaśnień; to samo tyczy się pęku drugiego rodzaju, który składa się z prostych równoległych. Co się tyczy pojęcia pęku trzeciego rodzaju, musimy się nim zająć teraz bliżej.

Stosując rozważania poprzednie, tyczące się niezmienników, widzimy, że w przypadku, gdy dwie proste (a_1, b_1, c_1) i (a_2, b_2, c_2) należą do pęku 3-go rodzaju, t. j. gdy:

$$|a_1 a_2 + b_1 b_2 - c_1 c_2| > 1,$$

istnieje wielkość λ_{12}, mianowicie:

$$\lambda_{12} = \operatorname{Arg} Ch\, |a_1 a_2 + b_1 b_2 - c_1 c_2|,$$

która posiada wszystkie własności, wymienione poprzednio przy określeniu długości odcinka i wielkości kąta, mianowicie:

1) λ_{12} jest niezmiennikiem grupy ruchu;

2) $\lambda_{12} = \lambda_{21}$;

3) $\lambda_{12} = o$ gdy $a_2 = a_1$, $b_2 = b_1$, $c_2 = c_1$ i tylko wtedy, w pozostałych przypadkach $\lambda_{12} > o$;

4) jeżeli trzy proste należą do tego samego pęku trzeciego rodzaju, to:

$$|\lambda_{12} \pm \lambda_{23}| = \lambda_{13}.$$

Ten ostatni punkt wymaga pewnego wyjaśnienia, mianowicie sens jego stanie się jasny, gdy uświadomimy sobie naturę geometryczną tego niezmiennika.

Przedewszystkiem udowodnimy, że, *jeżeli dwie proste się nie przecinają, to istnieje wspólna do nich prostopadła.*

Niech proste (a_1, b_1, c_1) i (a_2, b_2, c_2) się nie przecinają, t. j. $|a_1 a_2 + b_1 b_2 - c_1 c_2| > 1$,

Napiszmy, że prosta (a, b, c) ma być do nich prostopadła. Mamy równania:

$$a_1 a + b_1 b - c_1 c = o,$$
$$a_2 a + b_2 b - c_2 c = o,$$
$$a^2 + b^2 - c^2 = 1.$$

Udowodnimy, że układ powyższy posiada rozwiązanie, wyznaczające jednoznacznie prostą. Niech:

$$a = \varrho(b_1 c_2 - b_2 c_1),\ b = \varrho(c_1 a_2 - c_2 a_1),\ c = \varrho(a_2 b_1 - a_1 b_2)$$

wtedy dwa pierwsze równania są spełnione, wyznaczmy ϱ tak by było spełnione i trzecie równanie:

$$\varrho^2 \{(b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (c_1 a_2 - c_2 a_1)^2 - (a_2 b_1 - a_1 b_2)^2\} = 1,$$

czyli: $\varrho^2 \{(a_1 a_2 + b_1 b_2 - c_1 c_2)^2 - 1\} = 1$, co daje:

$$\varrho = \pm \frac{1}{\sqrt{(a_1 a_2 + b_1 b_2 - c_1 c_2)^2 - 1}},$$

przyczem znaki $\pm$ odpowiadają dwom możliwym kierunkom na tej samej prostej.

Teraz już łatwo wywnioskować, że pęk trzeciego rodzaju jest utworzony ze wszystkich prostych, prostopadłych do tej samej prostej, [do prostej (a, b, c)].

Spółrzędne (x_1, y_1, z_1) punktu przecięcia się tej wspólnej prostopadłej z pierwszą prostą (a_1, b_1, c_1) spełniają warunki następujące:

$$a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 = o,$$

$$(b_1 c_2 - b_2 c_1)\, x_1 + (c_1 a_2 - c_2 a_1)\, y_1 + (a_2 b_1 - a_1 b_2)\, z_1 = o.$$

Rozwiązując, otrzymujemy:

$$x_1 = \nu \{b_1 (a_2 b_1 - a_1 b_2) - c_1 (a_2 c_1 - c_2 a_1)\} = \nu \{a_2 - a_1 \varepsilon\, Ch\, \lambda_{12}\},$$

kładąc: $a_1 a_2 + b_1 b_2 - c_1 c_2 = \varepsilon\, Ch\, \lambda_{12}$, gdzie $\varepsilon = \pm 1$;

dalej: $y_1 = \nu \{b_2 - b_1 \varepsilon\, Ch\, \lambda_{12}\}$, $z_1 = \nu \{c_1 \varepsilon\, Ch\, \lambda_{12} - c_2\}$.

Ponieważ $z_1^2 - x_1^2 - y_1^2 = 1$, więc:

$$\nu^2 \{(\varepsilon c_1\, Ch\, \lambda_{12} - c_2)^2 - (b_2 - \varepsilon b_1\, Ch\, \lambda_{12})^2 - (a_2 - \varepsilon a_1\, Ch\, \lambda_{12})^2\} = 1,$$

skąd $\nu = \pm \dfrac{1}{Sh\, \lambda_{12}}$.

Ostatecznie więc:

$$x_1 = \varepsilon' \frac{a_2 - a_2 \varepsilon\, Ch\, \lambda_{12}}{Sh\, \lambda_{12}}, \quad y_1 = \varepsilon' \frac{b_2 - \varepsilon b_1\, Ch\, \lambda_{12}}{Sh\, \lambda_{12}}, \quad z_1 = \varepsilon' \frac{\varepsilon c_1\, Ch\, \lambda_{12} - c_2}{Sh\, \lambda_{12}},$$

gdzie $\varepsilon' = \pm 1$, tak, by $z_1 > 0$.

W ten sam sposób znajdziemy spółrzędne punktu (x_2, y_2, z_2) przecięcia się tej samej wspólnej prostopadłej z drugą prostą (a_2, b_2, c_2):

$$z_2 = \varepsilon'' \frac{\varepsilon c_2\, Ch\, \lambda_{12} - c_1}{Sh\, \lambda_{12}}; \quad x_2 = \varepsilon'' \frac{a_1 - a_2 \varepsilon\, Ch\, \lambda_{12}}{Sh\, \lambda_{12}}, \quad y_2 = \varepsilon'' \frac{b_1 - b_2 \varepsilon\, Ch\, \lambda_{12}}{Sh\, \lambda_{12}}$$

przyczem $\varepsilon'' = \pm 1$, tak by $z_2 > 0$.

Znajdziemy teraz odległość d_{12} tych dwóch punktów:

$$Ch\,d_{12} = z_1 z_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 = \varepsilon' \varepsilon'' \frac{(\varepsilon c_1 Ch \lambda_{12} - c_2)\,(\varepsilon c_2 Ch \lambda_{12} - c_1) -}{Sh^2 \lambda_{12}}$$

$$\frac{-(a_1 - \varepsilon a_2 Ch \lambda_{12})\,(a_2 - \varepsilon a_1 Ch \lambda_{12}) - (b_1 - \varepsilon b_2 Ch \lambda_{12})\,(b_2 - \varepsilon b_1 Ch \lambda_{12})}{Sh^2 \lambda_{12}} =$$

$$= -\varepsilon' \varepsilon'' \varepsilon \frac{1}{Sh^2 \lambda_{12}} \{Ch^3 \lambda_{12} - Ch \lambda_{12}\} = -\varepsilon' \varepsilon'' \varepsilon\, Ch \lambda_{12}.$$

Tak więc: $Ch\,d_{12} = -\varepsilon \varepsilon' \varepsilon'' Ch \lambda_{12}$; lecz ponieważ $Ch\,d_{12} > o$, $Ch \lambda_{12} > o$, więc $Ch\,d_{12} = Ch \lambda_{12}$; ponieważ zaś $d_{12} > o$, $\lambda_{12} > o$, to $d_{12} = \lambda_{12}$.

Tak więc niezmiennik λ_{12} wyraża odcinek wspólnej prostopadłej, zawartej między dwoma naszemi prostemi, t. j. od punktu przecięcia się z jedną do punktu przecięcia się z drugą.

Tem samem zostało wyjaśnione pojęcie pęku trzeciego rodzaju. Dwie proste, nie przecinające się i nie równoległe, posiadają wspólną, prostopadłą; wszystkie proste, prostopadłe do tej wspólnej prostopadłej tworzą pęk trzeciego rodzaju. Przynależność prostej (a, b, c) do pęku, wyznaczonego przez proste (a_1, b_1, c_1) i (a_2, b_2, c_2), wyrazi się więc jako warunek prostopadłości przez:

$$a(b_1 c_2 - b_2 c_1) + b(c_1 a_2 - c_2 a_1) - c(a_2 b_1 - a_1 b_2) = o,$$

czyli przy:
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = o, \text{ t. j. istotnie przez } \triangle = o.$$

20. Niezmiennik mieszany punktu i prostej. Odległość punktu i prostej.

Ponieważ spółrzędne linji prostej przekształcają się w sposób analogiczny jak spółrzędne punktu przy ruchu, więc musi istnieć niezmiennik, utworzony ze spółrzędnych dowolnej prostej (a_1, b_1, c_1) i dowolnego punktu (x_1, y_1, z_1). Łatwo się przekonać, że tym niezmiennikiem jest:

$$a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1.$$

Niezmiennik ten jest blisko związany z odległością punktu x_1, y_1, z_1 od prostej a_1, b_1, c_1.

Prosta (a, b, c) prostopadła do prostej (a_1, b_1, c_1) i przechodząca przez punkt (x_1, y_1, z_1) spełnia warunki:

$$aa_1 + bb_1 - cc_1 = o,$$
$$ax_1 + by_1 + cz_1 = o,$$

skąd:

$$a = \varrho(b_1 z_1 + y_1 c_1), \quad b = -\varrho(c_1 x_1 + a_1 z_1), \quad c = \varrho(a_1 y_1 - b_1 x_1),$$

gdzie:

$$\varrho = \pm \frac{1}{\sqrt{(a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1)^2 + 1}}.$$

Proste (a, b, c) i (a_1, b_1, c_1) przecinają się, gdyż $aa_1 + bb_1 - cc_1 = 0$.

Znajdźmy spółrzędne (x, y, z) ich punktu przecięcia się:

$$x = \varrho_1 (bc_1 - b_1 c), \text{ gdzie } \varrho_1 = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - (aa_1 + bb_1 - cc_1)^2}} = \pm 1,$$
$$y = \varrho_1 (ca_1 - ac_1),$$
$$z = \varrho_1 (ab_1 - a_1 b).$$

Tak więc:

$$x = -\varepsilon[(c_1 x_1 + a_1 z_1) c_1 + (a_1 y_1 - b_1 x_1) b_1] \varrho;$$
$$y = \varepsilon\{(a_1 y_1 - b_1 x_1) a_1 - (b_1 z_1 + y_1 c_1) c_1\} \varrho;$$
$$z = \varepsilon\{(b_1 z_1 + y_1 c_1) b_1 + (c_1 x_1 + a_1 z_1) a_1\} \varrho.$$

Gdzie:

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{(a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1)^2 + 1}};$$

gdzie $\varepsilon = \pm 1$, przyczem $z > o$, t. j. $\varepsilon = \operatorname{sign} z$;

niech $a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 = Sh\lambda$; wtedy $\varrho = \frac{1}{Ch\lambda}$;

dalej $x = \frac{x_1 - a_1 Sh\lambda}{Ch\lambda}$; $y = \frac{y_1 - b_1 Sh\lambda}{Ch\lambda}$; $z = \frac{z_1 + c_1 Sh\lambda}{Ch\lambda}$;

przyczem $\varepsilon = 1$, gdyż przy $\lambda = 0$, poprzednie wzory powinny dać $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$.

Oznaczmy przez d odległość punktów (x, y, z) i (x_1, y_1, z_1). Wtedy:

$$Ch d = zz_1 - xx_1 - yy_1 = \{z_1(z_1 + c_1 Sh\lambda) - x_1(x_1 - a_1 Sh\lambda) - y_1(y_1 - b_1 Sh\lambda)\} \frac{1}{Ch\lambda} = (1 + Sh^2\lambda)\frac{1}{Ch\lambda} = Ch\lambda, \text{ czyli } \lambda = \pm d.$$

A więc $a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 = \pm Sh d$, gdzie d jest odległość punktu (x_1, y_1, z_1) od prostej (a_1, b_1, c_1).

21. Spółrzędne jednorodne.

Trzy dowolne liczby A, B, C mogą być uważane za spółrzędne jednorodne:

1) punktu, jeżeli $C^2 > A^2 + B^2$;

2) prostej, jeżeli $C^2 < A^2 + B^2$;

3) punktu niewłaściwego lub prostej niewłaściwej, jeżeli $C^2 = A^2 + B^2$.

W pierwszym przypadku będziemy mieli punkt (x, y, z), kładąc $x = A\varrho$, $y = B\varrho$, $z = C\varrho$, gdzie $\varrho = \dfrac{+1}{\sqrt{C^2 - A^2 - B^2}} \cdot \operatorname{sign} C$, tak by $z > o$.

[sign C oznacza $+1$, -1 lub o, zależnie od tego, czy $C > o$, $C < o$ lub $C = o$].

W drugim przypadku będziemy mieli prostą (a, b, c) gdzie $a = A\varrho$, $b = B\varrho$, $c = C\varrho$, przyczem $\varrho = \pm \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}$.

W trzecim przypadku przejście do spółrzędnych niejednorodnych normalnych nie jest możliwe.

22. Koło, hipercykl i horicykl.

Równanie $Ax + By + Cz = o$ t. j. jednorodne pierwszego stopnia trzech zmiennych x, y, z wyraża, jak wiemy, prostą (o ile $A^2 + B^2 > C^2$).

Co wyraża równanie niejednorodne

$$Ax + By + Cz + D = o?$$

Rozróżniamy trzy przypadki:

1. $A^2 + B^2 < C^2$.

Równanie $Ax + By + Cz + D = o$ wyraża w tym przypadku koło, którego środek posiada spółrzędne jednorodne $A, B, -C$. W rzeczy samej, niech ε oznacza $-\operatorname{sign} C$; niech:

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{+\sqrt{C^2 - A^2 - B^2}},\ x_0 = A\varrho,\ y_0 = B\varrho,\ z_0 = -C\varrho > o;$$

$$D\varrho = -A\varrho x - B\varrho y - C\varrho z = zz_0 - yy_0 - xx_0,$$

które to wyrażenie, jak wiemy (l. 7), jest większe od jedności, ponieważ $z > o$, $z_0 > o$. Wskutek tego i $D\varrho$ musi być większe od jedności, czyli $D^2 > C^2 - A^2 - B^2$ i D znaku przeciwnego do C. O ile to będzie spełnione, możemy określić r tak, by $Chr = D\varrho$; wtedy $zz_0 - xx_0 - yy_0 = Chr$, co wyraża, że odległość punktu (x, y, z) od punktu x_0, y_0, z_0 jest równa r. Równanie nasze wyraża więc *koło* o promieniu r. Odwrotnie, miejsce geometryczne punktów (x, y, z) których odległość od punktu stałego (x_0, y_0, z_0), jest stała i równa się r, wyraża się równaniem rozważanego typu $zz_0 - xx_0 - yy_0 = Chr$. Gdy $D^2 < C^2 - A^2 - B^2$, to równanie nasze nie wyraża żadnego miejsca geometrycznego (rzeczywistego); gdy $D^2 = C^2 - A^2 - B^2$ i $D . C < o$, to równanie nasze wyraża koło o promieniu zero czyli punkt $x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0$.

2. Przypadek drugi $C^2 < A^2 + B^2$.

Niech
$$\varrho = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}},$$

$a = A\varrho,\ b = B\varrho,\ c = C\varrho;$ wtedy $Ax + By + Cz + D = o$

jest równoważne równaniu:

$$ax + by + cz = - D\varrho;$$

określmy odległość d w ten sposób, by $Sh\, d = |D\varrho|$, wtedy otrzymamy

$$ax + by + cz = \pm Sh\, d,$$

co wyraża, jak wiemy (20), że odległość punktu (x, y, z) od prostej (a, b, c) jest d. Łatwo sprawdzić, że odwrotnie miejsce geometryczne punktów jednakowo odległych od danej prostej jest rozważanego przez nas kształtu. To miejsce geometryczne nazywa się *hipercyklem*. Tak więc równanie

$$Ax + By + Cz + D = o,$$

gdzie
$$A^2 + B^2 > C^2$$

jest równaniem hipercyklu.

3. Przypadek, gdy $C^2 = A^2 + B^2$.

Jest to przypadek graniczny poprzednich. Omawiane tu miejsce geometryczne może być rozważane dwojako, zależnie od tego, czy C zmierza do granicy $\sqrt{A^2 + B^2}$ będąc stale mniejsze albo stale większe od tej granicy. C i D muszą być znaków przeciwnych; innych ograniczeń dla D niema. W tym przypadku krzywa nazywa się *horicyklem* czyli kołem granicznem.

23. Dwa punkty w nieskończoności na prostej.

Ponieważ do prostej można przeprowadzić przez każdy punkt dwie równoległe, każda prosta należy do dwóch różnych pęków; przypuśćmy, naprzykład, że do prostej l przez punkt jakiś M, nie leżący na l, przechodzą dwie proste równoległe do l, dajmy na to l_1 i l_2. Para prostych równoległych l i l_1 wyznacza jeden pęk, para l i l_2 drugi pęk. Wierzchołkami tych pęków są punkty niewłaściwe, należące do prostej l. Tak więc na każdej prostej mamy dwa punkty niewłaściwe, które będziemy nazywali końcami prostej.

Niech daną będzie prosta: $ax+by+cz=0$. Kładąc $x= =r\cos\Theta$, $y=r\sin\Theta$, mamy $z=\sqrt{1+r^2}$ i równanie przybiera postać

$$a\cos\Theta+b\sin\Theta+c\sqrt{1+\frac{1}{r^2}}=0;$$

niech $r\to\infty$, to równanie poprzednie zmieni się na $a\cos\Theta+ +b\sin\Theta+c=0$, skąd dla punktu w nieskończoności

$$\cos\Theta=\frac{-ac\pm b}{c^2+1},\quad \sin\Theta=\frac{-bc\mp a}{c^2+1}.$$

Ten sam wynik moglibyśmy otrzymać w inny sposób, zauważywszy, że w naszej interpretacji możemy podporządkować naszej prostej półhiperbolę, a punktom w nieskończoności na prostej odpowiadają punkty w nieskończoności na hiperboli, przyczem wartości, znalezione poprzednio dla $\sin\Theta$ i $\cos\Theta$, dają kierunki asymptot do hiperboli.

Zauważymy dalej, że przy zamianie liczb a, b, c przez liczby $-a$, $-b$, $-c$, wyrażenie $-ac+b$ przechodzi na $-ac-b$, a wyrażenie $-bc-a$ na $-bc+a$, skąd wniosek, że przy tej zmianie znaku spółczynników a, b, c przestawiamy „końce“ prostej. Można więc prostą rozbić na dwie półproste, na $ax+by+cz=0$ i na $-ax-by-cz=0$, czyli na (a, b, c) i na $(-a, -b, -c)$. Przyczem każda z tych półprostych będzie miała tylko jeden „koniec“. Półprosta tem się różni od prostej, że posiada oznaczony kierunek (zwrot), przyczem każdemu kierunkowi odpowiada jeden „koniec“.

Z tego punktu widzenia równoległość dwóch prostych polega na posiadaniu wspólnego punktu niewłaściwego, czyli wspólnego „końca". Niech prosta l posiada dwa końce A i B. Równoległemi do prostej l przez punkt M, są dwie proste, łączące punkt M z „końcami" A i B. Można, zresztą, bezpośrednio sprawdzić, że warunek wyrażający, że dwie proste (a, b, c) i (a_1, b_1, c_1) mają wspólny „koniec", jest równoważny warunkowi równo ległości $|aa_1 + bb_1 - cc_1| = 1$.

Weźmy teraz pod uwagę „horicykl" $Ax + By + Cz + D = 0$, gdzie $A^2 + B^2 = C^2$ i zbadajmy, co wyraża to równanie, w przypadku, gdy $D = 0$. Przejdźmy i tu do spółrzędnych biegunowych, $x = r \cos \Theta$, $y = r \sin \Theta$; połóżmy, dalej $A = - C \cos \varphi$, $B = - C \sin \varphi$; wtedy równanie nasze przyjmie kształt: $\cos(\Theta - \varphi) = \sqrt{1 + \frac{1}{r^2}}$, któremu to równaniu nie można zadość uczynić przy żadnej skończonej wartości r. Przechodząc zaś do granicy, gdy $\lim \frac{1}{r} = 0$, otrzymujemy $\cos(\Theta - \varphi) = +1$, czyli $\Theta = \varphi + 2k\pi$, $\cos \Theta = \cos \varphi = -\frac{A}{C}$, $\sin \Theta = \sin \varphi = -\frac{B}{C}$. Stąd wniosek, że nasze równanie $Ax + By + Cz = 0$ nie jest odpowiednikiem żadnego punktu w odległości skończonej, lecz może być uważane jako odpowiednik pewnego punktu niewłaściwego. Taki punkt niewłaściwy będziemy oznaczali przez (A, B, C) z warunkiem $A^2 + B^2 = C^2$.

Powstaje więc pytanie, kiedy prosta (a, b, c) przechodzi przez punkt niewłaściwy (A, B, C), który więc ma być „końcem" tej prostej. Znaleźliśmy poprzednio dla prostej (a, b, c) „końce" wyznaczone przez

$$\cos \Theta = \frac{-ac \pm b}{a^2 + b^2} \quad \text{i} \quad \sin \Theta = \frac{-bc \mp a}{a^2 + b^2},$$

stąd widzimy, że

$$A = ac - b; \; B = bc + a; \; C = a^2 + b^2;$$

a dla 2-go końca

$$A = ac + b, \; B = bc - a, \; C = a^2 + b^2.$$

Odwrotnie, jeżeli dane są A, B i C, i jeżeli określimy trzy liczby a, b, c przez równania

$$a = \frac{A\lambda \mp B}{C}, \; b = \frac{B\lambda \pm A}{C}, \; c = \lambda,$$

na zasadzie których $a^2 + b^2 = c^2 + 1$, to prosta $ax + by + cz = 0$, czyli prosta (a, b, c) przechodzi przez punkt niewłaściwy (A, B, C) dla każdego λ; czyli nieskończony zbiór trójek liczb (a, b, c), wyznaczony przez poprzednie równania na a, b, i c, gdy λ zmienia się od $-\infty$ do $+\infty$, daje nam pęk wszystkich prostych o wierzchołku (A, B, C).

Przejdźmy teraz do „horicyklu“ $Ax + By + Cz = \mu$, $(\mu \neq 0)$; odrazu widać, że punkt niewłaściwy (A, B, C) jest granicą punktów leżących na horicyklu $Ax + By + Cz = \mu$, a więc, jak zwykle, powiemy, że horicykl przechodzi przez punkt niewłaściwy (A, B, C).

Niech $Ax + By + Cz = \mu$

i $Ax + By + Cz = \mu_1$, $(\mu \neq \mu_2)$

oznaczają dwa horicykle o wspólnym punkcie niewłaściwym (A, B, C) i niech $ax + by + cz = 0$, oznacza dowolną prostą pęku o wierzchołku (A, B, C). Twierdzę, iż odcinek każdej takiej prostej, zawarty między punktami jej przecięcia się z jednym i z drugim horicyklem, jest wielkością stałą. W rzeczy samej, ponieważ

$$a = \frac{A\lambda - B}{C}, \; b = \frac{B\lambda + A}{C}, \; c = \lambda,$$

więc $bA - Ba = C$, $Ac - Ca = B$, $Cb - Bc = A$,

a z równań:
$$Ax + By + Cz = \mu$$
$$ax + by + cz = 0,$$

wynika, że
$$Cy = -(\mu a + Bz)$$
$$Cx = b\mu - Az;$$

ponieważ zaś $z^2 - x^2 - y^2 - 1 = 0$,

więc $(C^2 - A^2 - B^2)z^2 + 2(Ab - Ba)\mu z - C^2 - \mu^2(a^2 + b^2) = 0$, czyli, zważywszy, że $C^2 - A^2 - B^2 = 0$,

mamy $2C\mu z = C^2 + \mu^2(\lambda^2 + 1)$.

Tak więc, spółrzędne punktu M przecięcia się prostej (a, b, c) z horicyklem $Ax + By + Cz = \mu$ wyznaczone są przez:

$$z = \frac{C^2 + \mu^2(\lambda^2 + 1)}{2C\mu}, \; x = \frac{b\mu - Az}{C}; \; y = -\frac{\mu a + Bz}{C}.$$

Tak samo, punkt M_1 przecięcia się tejże prostej (a, b, c) z horicyklem $Ax + By + Cz = \mu_1$, wyznaczone są przez

$$z_1 = \frac{C^2 + \mu_1^2 (\lambda^2 + 1)}{2C\mu_1};\ Cx_1 = b\mu_1 - Az_1;\ Cy_1 = -(\mu_1 a + Bz_1).$$

Niech d oznacza odległość tych punktów przecięcia się M i M_1.

$$Chd = zz_1 - xx_1 - yy_1 = \frac{1}{C^2}\{(C^2 - A^2 - B^2) zz_1 + (Ab - aB)$$

$$(\mu_1 z + \mu z_1) - \mu\mu_1 (\lambda^2 + 1)\},\ \text{bo } a^2 + b^2 = \lambda^2 + 1.$$

Czyli $C^2 . Chd = C\mu_1 z + C\mu z_1 - \mu\mu_1 (\lambda^2 + 1) = \dfrac{C^2 (\mu^2 + \mu_1^2)}{2\mu\mu_1}$.

$2Chd = \dfrac{\mu}{\mu_1} + \dfrac{\mu_1}{\mu}$; niech $\mu_1 > \mu > 0$; wtedy $C > 0$, a $2Shd =$

$= \dfrac{\mu_1}{\mu} - \dfrac{\mu}{\mu_1}$, $\dfrac{\mu_1}{\mu} = Shd + Chd = e^d$, czyli $d = lg\dfrac{\mu_1}{\mu}$. Można, oczywiście, odrzucić warunek $\mu_1 > \mu$, i wzór poprzedni pozostanie w mocy, o ile μ i μ_1 są tego samego znaku, pod warunkiem, że d oznaczać będzie nie liczbę dodatnią „odległość“, ale liczbę, odpowiadającą odcinkowi skierowanemu, liczbę, mogącą być dodatnią i ujemną; wtedy najogólniejszą postacią poprzedniego wzoru byłoby

$$d = lg\left|\frac{\mu_1}{\mu}\right|,$$

gdzie μ_1 i μ mogą być już znaków różnych.

Zauważmy na zakończenie, że dwa końce (A, B, C) i (A_1, B_1, C_1) prostej wyznaczają najzupełniej tę prostą. Niech (a, b, c) będzie tą prostą,

wtedy:
$$\begin{aligned} ac + b &= \varrho A & \qquad ac - b &= \sigma A_1 \\ bc - a &= \varrho B \quad \text{i} & \qquad bc + a &= \sigma B_1 \\ a^2 + b^2 &= \varrho C & \qquad a^2 + b^2 &= \sigma C_1, \end{aligned}$$

skąd
$$a = \frac{B_1 C - BC_1}{CC_1 - AA_1 - BB_1},\quad b = \frac{AC_1 - A_1 C}{CC_1 - AA_1 - BB_1},$$

$$c = \frac{A_1 C + AC_1}{B_1 C - BC_1} = \frac{BC_1 + CB_1}{AC_1 - A_1 C}.$$

Wzory te wyznaczają półprostą. Przestawiając końce $(A, B, C,)$ i (A_1, B_1, C_1), widzimy, że liczby a, b, c zmieniają znak, czyli otrzymujemy drugą półprostą.

Stąd znów wniosek, że trzy punkty niewłaściwe (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2) i (A_3, B_3, C_3) wyznaczają trójkąt o trzech wierzchołkach w nieskończoności, utworzony przez trzy proste, wzajemnie do siebie równoległe. W naszej interpretacji są to gałęzie trzech hiperbol, wzajemnie do siebie asymptotyczne.

24. Geometrja analityczna; spółrzędne prostokątne.

Przyjmijmy jako osie proste (1, 0, 0) i (0, 1, 0); liczby te spełniają warunek $a^2 + b^2 - c^2 = 1$; oprócz tego proste te są prostopadłe do siebie, bo kładąc $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $c_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_2 = 1$, $c_2 = 0$, spełniamy warunek prostopadłości $aa_1 + bb_1 - cc_1 + 0$.

Jako spółrzędne punktu M (x, y, z) w tym układzie prostokątnym przyjmiemy liczby ξ i η, wyrażające odległości punktu M od osi, czyli od prostych (1, 0, 0) i (0, 1, 0). Ponieważ odległość d punktu (x, y, z) od prostej (a, b, c) wyraża się wzorem $Sh d = ax + by + cz$, więc otrzymujemy tu dla ξ i η wzory

$$Sh \xi = x, \quad Sh \eta = y,$$

przyczem dla jednoznaczności odwzorowania, przyjmiemy, że ξ i η mogą mieć wartości dodatnie, ujemne lub zero.

Spuśćmy*) z punktu M prostopadłe MP i MQ odpowiednio na oś (0, 1, 0) i (1, 0, 0); $MP = \eta$, $MQ = \xi$. W ten sposób utworzy się czworokąt trzyprostokątny $MQOPM$, gdzie punkt O oznacza początek układu spółrzędnych. Odcinek OQ oznaczmy przez σ, odcinek OP przez μ, przekątnią OM przez r, przyczem r będzie oznaczać odległość OM i będzie zawsze $\geqslant 0$, gdy tymczasem σ i μ będą mogły mieć wartości dodatnie i ujemne. Ponieważ dla punktu O, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 1$, więc odległość r punktów O i M wyrazi się wzorem $Ch r = zz_1 - xx_1 - yy_1$, czyli $Ch r = z$.

Obliczmy teraz μ; dla prostej MP jest $a = \mp \dfrac{z}{\sqrt{1 + y^2}}$, $b = 0$, $c = \pm \dfrac{x}{\sqrt{y^2 + 1}}$, a więc odległość μ punktu O (0, 0, 1)

---

*) Czytelnik zechce wykreślić odpowiedni rysunek.

od tej prostej wyrazi się wzorem $Sh\mu = ax + by + cz =$ $= \pm \frac{x}{\sqrt{y^2+1}} = \pm \frac{Sh\xi}{Ch\eta}$, przyczem znak zależy od tego, którą z półprostych tej prostej bierzemy pod uwagę, czyli zależy od zwrotu na prostej. Wybieramy zwrot taki, by μ i ξ były zawsze tego samego znaku, a więc

$$Sh\mu = \frac{Sh\xi}{Ch\eta},$$

czyli odcinek μ wyraziliśmy przy pomocy spółrzędnych prostokątnych ξ i η punktu M. Łatwy rachunek daje nam

$$Ch\mu = \frac{Chr}{Ch\eta}.$$

Tak samo obliczymy odcinek OQ czyli σ. Dla prostej MQ mamy $b = \mp \frac{z}{\sqrt{1+x^2}}$, $c = \pm \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}$, $a = 0$, a więc odległość punktu O (0, 0, 1) od tej prostej wyrazi się wzorem $Sh\sigma =$ $= \pm \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}$, czyli

$$Sh\sigma = \frac{Sh\eta}{Ch\xi},$$

przyczem znak obraliśmy tak, by σ i η były zawsze tego samego znaku. Dalej $Ch\sigma = \frac{Chr}{Ch\xi}$.

25. Spółrzędne biegunowe punktu *M*.

Spółrzędnemi biegunowemi punktu M (x, y, z) są: odległość r punktów O i M i kąt półprostej OM z osią (czyli półprostą) $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$. Wiemy już, że $Chr = z$, czyli $Chr = +\sqrt{Sh^2\xi + Sh^2\eta + 1}$; pozostaje do obliczenia kąt Θ półprostej OM z osią; dla osi mamy $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$; dla półprostej OM jest $a_1 = -\frac{y}{\sqrt{z^2-1}}$, $b_1 = \frac{x}{\sqrt{z^2-1}}$, $c_1 = 0$,

a więc $\cos\Theta = aa_1 + bb_1 - cc_1 = \frac{x}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{Sh\xi}{Shr}$, a stąd $$\cos\Theta = \frac{Sh\xi}{Shr},\quad \sin\Theta = \frac{Sh\eta}{Shr},$$

gdyż $\sin\Theta$ i η muszą mieć ten sam znak.

26. Trójkąt prostokątny.

Na zasadzie poprzednich wyników możemy z łatwością otrzymać szereg innych zależności między wielkościami ξ, η, σ, μ, r i t. p.

Tak naprzykład

$$\cos\Theta = \frac{Sh\xi}{Shr} = \frac{Sh\mu\, Ch\eta}{Shr} = \frac{Sh\mu}{Shr}\,\frac{Chr}{Ch\mu} = Th\mu\,.\,Cthr.$$

Albo też ze wzorów na $\sin\Theta$ i $\cos\Theta$ otrzymujemy $\operatorname{tg}\Theta = \frac{Sh\eta}{Sh\xi}$, czyli $Sh\xi = Sh\eta \operatorname{cotg}\Theta$;

dalej $$Sh\mu = \frac{Sh\xi}{Ch\eta} = \frac{Sh\eta \operatorname{cotg}\Theta}{Ch\eta} = Th\eta\,.\operatorname{cotg}\Theta.$$

Możemy z tych zależności skorzystać, by znaleźć związki między elementami w trójkącie prostokątnym ABC, gdzie kąt prosty jest A, przeciwprostokątna $BC = a$, przyprostokątne AC i AB są równe b i c. Poprzednio mieliśmy do czynienia z trójkątem prostokątnym MOP, przyczem przy utożsamieniu tego trójkąta PMO z trójkątem ABC, przyjmujemy, że $x > 0$, $y > 0$, czyli, że $\xi > 0$, $\eta > 0$. Wtedy $a = r$, $b = \mu$, $c = \eta$, a kąt C równa się kątowi Θ. Wypiszmy te z pomiędzy poprzednio znalezionych zależności, w których wchodzą jedynie wielkości r, μ, η i Θ. Są to:

$$\begin{aligned} Chr &= Ch\mu\,.\,Ch\eta,\\ Sh\eta &= Shr\,.\sin\Theta,\\ \cos\Theta &= Th\mu\,.\,Cthr,\\ Sh\mu &= Th\eta\,.\operatorname{cotg}\Theta.\end{aligned}$$

Zmieniając znakowania, otrzymujemy dla $\triangle\ ABC$:

$$\begin{aligned} Cha &= Chb\,.\,Chc,\\ Shc &= Sha\,.\sin C,\\ \cos C &= Thb\,.\,Ctha,\\ Shb &= Thc\,.\operatorname{cotg} C.\end{aligned}$$

Ze wzorów, zawierających kąt C otrzymujemy wzory, zawierające kąt B na mocy symetrji.

Tak więc mamy następujące wzory:

$$\begin{aligned}
Shb &= Sha \ \sin B = \operatorname{cotg} C \,.\, Thc; \\
Shc &= Sha \ \sin C = \operatorname{cotg} B \,.\, Thb; \\
\cos B &= Chb \,.\, \sin C = Ctha \,.\, Thc; \\
\cos C &= Chc \,.\, \sin B = Ctha \,.\, Thb; \\
Cha &= Chb \,.\, Chc = \operatorname{cotg} B \,.\, \operatorname{cotg} C;
\end{aligned}$$

tę ostatnią równość otrzymujemy, mnożąc stronami równości

$$Shb = \operatorname{cotg} C \,.\, Thc \quad \text{i} \quad Shc = \operatorname{cotg} B \,.\, Thb.$$

Funkcje są hiperboliczne względem boków, a trygonometryczne względem kątów.

Wszystkie powyższe wzory można objąć jednem prawidłem mnemotechnicznem w następujący sposób: rysujemy pięciobok i boki oznaczamy kolejno przez a, B, (c), (b), C; następnie mamy prawidło: cosinus każdego wyrazu (hiperboliczny, jeżeli ten wyraz jest bokiem, trygonometryczny, jeżeli jest kątem) w pięcioboku jest równy iloczynowi sinusów wyrazów przeciwległych, lub też cotangensów dwóch wyrazów przyległych, przyczem elementy (c) i (b) grają osobną rolę, gdyż w stosunku do nich należy funkcje z wysłowionego prawidła zastąpić przez odpowiednią kofunkcję, t. j. zamiast np. Sh od (c) należy wziąć Chc, zamiast Cth od (c) należy wziąć Thc i tak samo z (b).

27. Trójkąt dowolny.

Ponieważ ruch nie zmienia ani kątów, ani długości boków, można przypuścić, iż jeden z wierzchołków naszego trójkąta jest w początku układu spółrzędnych O, dwa inne wierzchołki są M_1 (x_1, y_1, z_1) i M_2 (x_2, y_2, z_2). Jeżeli $M_1 M_2$ oznacza odległość punktów M_1 i M_2, to, jak wiemy, $ChM_1M_2 = z_1 z_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2$; lecz $z_1 = ChOM_1$, $z_2 = ChOM_2$, gdzie OM_1 oznacza odległość punktu O od punktu M_1, czyli długość boku OM_1 trójkąta; tak samo OM_2 oznacza długość boku OM_2 tegoż trójkąta. Niech φ oznacza kąt między OM_1 i OM_2; w takim razie $\cos \varphi = a_1 a_2 + b_1 b_2 - c_1 c_2$, gdzie $a_1 = -\frac{y_1}{\sqrt{z_1^2 - 1}}$,

$$b_1 = \frac{x_1}{\sqrt{z_1^2 - 1}}, \ c_1 = 0; \ a_2 = -\frac{y_2}{\sqrt{z_2^2 - 1}}, \ b_2 = \frac{x_2}{\sqrt{z_2^2 - 1}}, \ c_2 = 0.$$

Wobec tego $\cos \varphi = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{z_1^2 - 1} \cdot \sqrt{z_2^2 - 1}}$; lecz $\sqrt{z_1^2 - 1} = ShOM_1$, $\sqrt{z_2^2 - 1} = ShOM_2$, czyli $x_1 x_2 + y_1 y_2 = ShOM_1 \,.\, ShOM_2 \,.\, \cos \varphi$ i ostatecznie $ChM_1M_2 = ChOM_1 \,.\, ChOM_2 - ShOM_1 \,.\, ShOM_2 \cos \varphi$.

Przenosząc ten wzór na trójkąt o wierzchołkach A, B, C i o bokach przeciwległych a, b, c, otrzymujemy wzory:

$$Cha = Chc\ Chb - Shb \,.\, Shc \,.\, \cos A,$$
$$Chb = Cha\ Chc - Sha\ Shc \,.\, \cos B,$$
$$Chc = Cha \,.\, Chb - Sha \,.\, Shb \,.\, \cos C.$$

Nowe wzory na zależności między elementami w trójkącie otrzymamy, prowadząc w trójkącie ABC wysokość BD, gdzie $BD \perp AC$. Otrzymamy dwa trójkąty prostokątne ABD i BDC; zastosujmy wzór, wyrażający związek między przeciwprostokątna, przyprostokątną i kątem przeciwległym; otrzymamy z $\triangle\ BDC$: $ShBD = Sha \,.\, \sin C$, a z $\triangle\ BDA$: $ShBD = Shc \,.\, \sin A$, czyli

$$\frac{Sha}{ShA} = \frac{Shb}{ShB} = \frac{Shc}{ShC}.$$

Wróćmy znowu do naszego trójkąta OM_1M_2, i niech θ_1 i r_1 oznaczają spółrzędne biegunowe punktu M_1, a θ_2 i r_2 — punktu M_2; mamy $x_1 = Sh\xi_1 = Shr_1 \cos \theta_1$, $y_1 = Sh\eta_1 = Shr_1 \sin \theta_1$; tak samo $x_2 = Shr_2 \cos \theta_2$, $y = Shr_2 \sin \theta_2$; a więc $x_1 y_2 - y_1 x_2 = Shr_1 Shr_2 \sin (\theta_2 - \theta_1) = Shr_1 \,.\, Shr_2 \,.\, \sin \varphi$, przytem tutaj kąt φ między OM_2 i OM_1 może być dodatni albo ujemny.

Ostatecznie więc

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = Shr_1 \,.\, Shr_2 \,.\, \sin \varphi.$$

Przejdźmy teraz do dowolnie położonego trójkąta ABC i niech x_1, y_1, z_1 odpowiadają punktowi A i tak samo B (x_2, y_2, z_2) i C (x_3, y_3, z_3).

Utwórzmy wyznacznik

$$\triangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix};$$

łatwo sprawdzić, że wartość wyznacznika $\triangle$ jest niezmiennikiem grupy ruchu, gdyż jeżeli wykonamy odpowiednie podstawienie:

$$x_k = \alpha_1 x'_k + \alpha_2 y'_k + \alpha_3 z'_k,$$
$$y_k = \beta_1 x'_k + \beta_2 y'_k + \beta_3 z'_k,$$
$$z_k = \gamma_1 x'_k + \gamma_2 y'_k + \gamma_3 z'_k,$$

gdzie $k = 1, 2, 3$, a (x'_k, y'_k, z'_k) oznacza punkt, który powstał z punktu (x_k, y_k, z_k) przez ruch, to

$$\triangle = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ x'_3 & y'_3 & z'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ x'_3 & y'_3 & z'_3 \end{vmatrix},$$

gdyż $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1.$

Gdy punkt C jest w początku układu spółrzędnych, to $x_3 = 0$, $y_3 = 0$, $z = 1$ i $\triangle = x_1 y_2 - x_2 y_1 = Shr_1 Shr_2 \cos\varphi$. Ponieważ r_1 i r_2 jako długości odcinków, a φ jako kąt są także niezmiennikami grupy ruchu, więc

$$\triangle = Shb\,.\,Shc\,.\sin A = Shc\,.\,Sha\,.\sin B = Sha\,.\,Shb\,.\sin C =$$
$$= Sha\,.\,Shh_a = Shb\,.\,Shh_b = Shc\,.\,Shh_c,$$

gdzie h_a, h_b, h_c są trzema wysokościami trójkąta ABC.

Wzory z wysokością h_a, h_b, h_c wynikają stąd, że odległość δ punktu O od prostej M_1M_2 w trójkącie OM_1M_2 wyraża się wzorem:

$$Sh\delta = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\sqrt{(z_1 z_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 - 1}}$$

28. Uwagi rozmaite.

Godnym uwagi jest fakt następujący. Przekształcenia grupy ruchu więcej symetrja wyczerpują w naszej geometrji wszystkie przekształcenia, zmieniające prostą na prostą, bo te przekształcenia były najogólniejszemi przekształceniami linjowemi nad trzema zmiennemi x, y, z, przy których wartość wyrażenia $z^2 - x^2 - y^2$ pozostaje bez zmiany*). Tymczasem rzecz się

*) Myśmy znaleźli, że współczynniki α_k, β_k, γ_k, $k = 1, 2, 3$ tego przekształcenia muszą zadość czynić pewnym warunkom, z których wynika, że wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

ma zupełnie inaczej w geometrji euklidesowej, gdyż oprócz przekształceń grupy ruchu mamy w geometrji euklidesowej przekształcenia homograficzne (kollineacje), posiadające tę samą własność, mianowicie, że prostą przekształcają na prostą. I nie można tego faktu zmienić przez wprowadzenie innych nowych utworów jako proste, oprócz tych, któreśmy wprowadzili, bez naruszenia aksjomatu, że przez dwa punkty przechodzi jedna tylko prosta.

W geometrji euklidesowej prostą zmienia na prostą, poza ruchem, naprzykład jeszcze podobieństwo. W geometrji hiperbolicznej (Łobaczewskiego), jak łatwo widzieć, podobieństwa niema. By się o tem przekonać, wystarczy przypomnieć sobie wzór $Cha = \operatorname{cotg} B \,.\, \operatorname{cotg} C$, który w trójkącie prostokątnym ABC wyznacza przeciwprostokątną a w zależności od kątów B i C tego trójkąta. Oczywiście, fakt taki stoi w sprzeczności z istnieniem podobieństwa.

Moglibyśmy i dla trójkąta jakiegokolwiek otrzymać wzór, wyrażający boki a, b, c w zależności od trzech kątów A, B, C, ale poprzestaniemy na tem, zaniechawszy dalszych rozważań w tym kierunku, gdyż osiągnięte już podstawowe wyniki pozwalają z łatwością rozwiązać cały szereg zagadnień z dziedziny geometrji Łobaczewskiego, pokrewnych zagadnieniom elementarnej geometrj i euklidesowej. Dla przykładu udowodnimy tutaj, że trzy wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie, (który ewentualnie będzie niewłaściwym lub idealnym), t. j., że trzy wysokości trójkąta tworzą pęk pierwszego, drugiego lub trzeciego rodzaju.

Niech $A\,(x_1, y_1, z_1)$, $B\,(x_2, y_2, z_2)$ i $C\,(x_3, y_3, z_3)$ oznaczają trzy wierzchołki trójkąta ABC; wysokości trójkąta są prostemi (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) i (a_3, b_3, c_3) gdzie $a_i = \lambda_i\,(y_i Z_i - z_i Y_i)$, $b_i = \lambda_i\,(z_i X_i - x_i Z_i)$, $c_i = \lambda_i\,(x_i Y_i - y_i X_i)$, gdzie $i = 1, 2, 3$; λ_1, λ_2, λ_3 są spółczynnikami proporcjonalności, a X_i, Y_i, Z_i oznaczają minory, należące odpowiednio do elementów x_i, y_i, z_i w wyznaczniku

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} .$$

Jeżeli wartość wyznacznika jest $+1$, to odpowiednie przekształcenia stanowią grupę ruchu. Jeżeli tego ograniczenia nie wprowadzimy, to mamy grupę ruchu rozszerzoną przez symetrję.

W takim razie:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \begin{vmatrix} y_1 Z_1 - z_1 Y_1 & z_1 X_1 - x_1 Z_1 & x_1 Y_1 - y_1 X_1 \\ y_2 Z_2 - z_2 Y_2 & z_2 X_2 - x_2 Z_2 & x_2 Y_2 - y_2 X_2 \\ y_3 Z_3 - z_3 Y_3 & z_3 X_3 - x_3 Z_3 & x_3 Y_3 - y_3 X_3 \end{vmatrix} = 0,$$

bo w ostatnim wyznaczniku sumy elementów tej samej kolumny równają się zeru, np. $y_1 Z_1 - z_1 Y_1 + y_2 Z_2 - z_2 Y_2 + y_3 Z_3 - - z_3 Y_3 = y_1 Z_1 + y_2 Z_2 + y_3 Z_3 - (z_1 Y_1 + z_2 Y_2 + z_3 Y_3) = 0$, gdyż $y_1 Z_1 + y_2 Z_2 + y_3 Z_3 = 0$ i t. p.

Lecz
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

wyraża właśnie, że wysokości (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) i (a_3, b_3, c_3) tworzą pęk prostych.

29. Teorja równoległości.

Wróćmy do naszego czworokąta trzyprostokątnego $OPMQ$, utworzonego przez osie $(0, 1, 0)$ i $(1, 0, 0)$ i dwie prostopadłe MP i MQ spuszczone z punktu M (x, y, z) przy $x > 0$, $y > 0$ na te osie; półprosta PM jest półprostą (a_1, b_1, c_1), przyczem

$a_1 = -\dfrac{z}{\sqrt{y^2+1}}$, $b_1 = 0$, $c_1 = \dfrac{x}{\sqrt{y^2+1}}$; półprosta QM jest to:

$a_2 = 0$, $b_2 = \dfrac{-z}{\sqrt{x^2+1}}$, $c_2 = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+1}}$; a więc kąt ψ, jakie tworzą

półproste MP i MQ jest wyznaczony przez wzór:

$$\cos\psi = a_1 a_2 + b_1 b_2 - c_1 c_2 = \frac{xy}{\sqrt{x^2+1} \, . \, \sqrt{y^2+1}} = \frac{Sh\xi \, . \, Sh\eta}{Ch\xi \, . \, Ch\eta},$$

czyli $\cos\psi = Th\xi \, . \, Th\eta < 1$, przyczem $\cos\psi \neq 0$.

Tak więc w czworokącie o trzech kątach prostych, czwarty kąt ψ nie jest prosty, lecz zależy od długości ξ i η dwóch boków czworokąta, obejmujących czyli tworzących kąt, jak to wskazuje wzór:

$$\cos\psi = Th\xi \, . \, Th\eta.$$

Suma więc kątów w czworokącie nie równa się czterem kątom prostym, lecz jest mniejsza; tak samo suma kątów w trójkącie jest mniejsza od dwóch kątów prostych.

Odległości PM i QM punktu M od osi, czyli ξ i η tworzą spółrzędne prostokątne w geometrji Łobaczewskiego. Prostopadłe te odcinają odcinki $OP = \mu$ i $OQ = \sigma$ na osiach. W geometrji euklidesowej byłoby $OP = QM$, $OQ = PM$, czyli byłoby $\xi = \mu$, $\eta = \sigma$. Tu, oczywiście, to nie zachodzi, bo np.

$$Sh\sigma = \frac{Sh\eta}{Sh\xi}.$$

Stąd wynika, że zamiast spółrzędnych ξ i η można używać spółrzędne μ i η. Wtedy przejście od x, y, z do μ i η wyraża się wzorami znalezionemi poprzednio

$$x = Ch\eta \,.\, Sh\mu,\quad y = Sh\eta,\quad z = Ch\mu \,.\, Ch\eta.$$

Te to spółrzędne zastosujemy teraz do badania linij równoległych.

Dzięki grupie ruchu nie zmniejszamy ogólności badania, zakładając, że jedna z naszych prostych jest osią (0, 1, 0), a punkt M, przez który przechodzi druga równoległa jest na osi (1, 0, 0). Niech odcinek $MO = p$.

Niech (a, b, c) oznacza naszą równoległą do osi (0, 1, 0); wtedy $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $c_1 = 0$ i warunek równoległości: $aa_1 + bb_1 - cc_1 = \cos\varphi = \pm 1$, przy $\varphi = 0$ lub π. Wartość $+1$ odpowiada przypadkowi, gdy nasza półprosta równoległa i oś mają ten sam „koniec“, a więc ten sam zwrot czyli kierunek; wartość -1 odpowiada przypadkowi, gdy nasza półprosta ma ten sam „koniec“, co oś (0, $-$1, 0), leżąca na tej samej prostej, co oś (0, 1, 0), ale o zwrocie (kierunku) przeciwnym.

Ponieważ $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $c_1 = 0$, warunek równoległości daje $b = 1$ lub $b = -1$, a warunek $a^2 + b^2 - c^2 = 1$, daje $a^2 = c^2$, czyli $a = \pm c$. Mamy więc równanie prostej równoległej w postaci $ax \pm y \pm az = 0$, czyli poprostu $y = a\,.\,(z \pm x)$ przy a dowolnem. Wprowadzając spółrzędne μ i η, mamy

$$Sh\eta = a\,(Ch\mu\, Ch\eta \pm Sh\mu\, Sh\eta) = a\,Ch\eta\,(Ch\mu \pm Sh\mu),$$

czyli:

$$Th\eta = ae^{\pm\mu};$$

gdy $\mu = 0$, to $\eta = p$, więc równania dwóch równoległych, przechodzących przez punkt M będą

$$1)\quad Th\eta = Thp\,.\,e^{-\mu}$$

$$2)\quad Th\eta = Thp\,.\,e^{\mu}.$$

Gdy $\mu \to +\infty$, to w pierwszym przypadku $\eta \to 0$, a w drugim $\eta \to +\infty$, jeżeli $p > 0$, lub do $-\infty$, jeżeli $p < 0$. Gdy $\mu \to -\infty$, jest odwrotnie.

Wracając do spółrzędnych x, y, z możemy równania naszych równoległych napisać w postaci

$$Thp \cdot x - y + Thp \cdot z = 0$$

$$\text{i} \quad Thp \cdot x + y - Thp \cdot z = 0;$$

zmieniając w tych równaniach wszystkie znaki na odwrotne, mielibyśmy te same proste, ale półproste byłyby inne. Jaki kąt tworzą napisane półproste z osią (1, 0, 0)?

Na zasadzie wzoru $\cos\varphi = aa_1 + bb_1 - cc_1$, mamy $\cos\varphi = Thp$; dla półprostych przeciwnych byłoby, jak należało oczekiwać,

$$\cos\varphi = - Thp.$$

Nie zmniejszając ogólności, możemy założyć, że $p > 0$, kąt φ wyznaczony przez $\cos\varphi = Thp$ jest ostry. Ten kąt φ między prostą l i prostopadłą, spuszczoną z dowolnego punktu M prostej l na równoległą do prostej l (tu na oś), zależy tylko od długości tej prostopadłej p i oznacza się przez $\pi(p)$. Tak więc

$$\cos\pi(p) = Thp,$$

stąd

$$\sin\pi(p) = \frac{1}{Chp}$$

$$\operatorname{ctg}\pi(p) = Shp.$$

Z tych wzorów widzimy, że kąt ten $\pi(p)$ zmierza do zera, gdy $p \to \infty$, a dąży do kąta prostego, gdy $p \to 0$. Zależność ta między kątem $\pi(p)$, a odległością p, jest zasadniczą w geometrji Łobaczewskiego.

Prosta (a, b, c) przecina oś (1, 0, 0) tylko wtedy, gdy $|a| < 1$ i kąt utworzony z tą osią jest $\arccos a$ dla półprostej (a, b, c), a $\pi - \arccos a$ dla półprostej $(-a, -b, -c)$. Tak samo prosta (a, b, c) przecina oś (0, 1, 0) wtedy i tylko wtedy, gdy $|b| < 1$; przypadek, gdy $a = \pm 1$ odpowiada równoległości do osi (1, 0, 0), a $b = \pm 1$ wyraża równoległość do osi (0, 1, 0).

Stąd wniosek, że proste

$$\varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y + \varepsilon_3 z = 0,$$

gdzie ε_1, ε_2 i ε_3 oznaczają $+1$ albo -1 są równaniami prostych, równoległych jednocześnie do obu osi; mamy 8 możliwych przypadków czyli 8 półprostych, ale tylko 4 różne równania, t. j. tylko cztery różne proste, mianowicie 4 proste, łączące 4 „końce“ tych osi. Przechodząc do spółrzędnych μ i η, równania te przyjmują kształt

$$Th\eta = \pm e^{\pm\mu}.$$

Gdy w $Th\eta = e^{\mu}$, $\mu \to -\infty$, to $\eta \to 0$, $\eta > 0$; gdy $\mu \to 0$‘ to $\eta \to +\infty$; μ nie może tu być większe od zera. Prosta $Th\eta = e^{\mu}$ przebiega całkowicie w drugiej ćwiartce $\mu < 0$, $\eta > 0$. Do każdej więc z czterech ćwiartek przynależy jedna z czterech naszych prostych.

30. Równanie hipercyklu, horicyklu i koła.

Hipercykl jest miejscem geometrycznem punktów jednakowo odległych od prostej. Równanie hipercyklu przyjmuje postać najprostszą, gdy tą prostą jest jedna z osi, np. (0, 1, 0). Wtedy równanie przyjmuje, oczywiście, postać $\eta = \lambda$, gdzie λ jest stałą odległością punktów miejsca geometrycznego.

Dla celów, związanych z późniejszemi rozważaniami, obliczmy długość cięciwy δ hipercyklu $\eta = \lambda$, łączącej dwa dowolne punkty tej krzywej M_1 i M_2 o spółrzędnych, odpowiednio, μ_1 i $\eta_1 = \lambda$ i μ_2 i $\eta_2 = \lambda$. Wtedy dla M_1 mamy

$$x_1 = Sh\mu_1 Ch\lambda$$
$$y_1 = Sh\lambda$$
$$z_1 = Ch\lambda\, Ch\mu_1,$$

a dla punktu M_2

$$x_2 = Ch\lambda \,.\, Sh\mu_2$$
$$y_2 = Sh\lambda$$
$$z_2 = Ch\lambda \,.\, Ch\mu_2$$

$$Ch\delta = z_1 z_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 = Ch^2\lambda\, Ch(\mu_2 - \mu_1) - Sh^2\lambda;$$

$$Sh^2\frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}(Ch\delta - 1) = Ch^2\lambda\, Sh^2\frac{\mu_2 - \mu_1}{2},$$

skąd
$$Sh\frac{\delta}{2} = Ch\lambda\, Sh\frac{\mu_2 - \mu_1}{2}.$$

Przejdźmy teraz do horicyklu.

Równanie $Ax + By + Cz = D$, gdzie $A^2 + B^2 = C^2$, przedstawia, jak wiemy horicykl. Jeżeli przechodzi przez początek, t. j. przez punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, to

$$C = D.$$

Jeżeli horicykl ma przechodzić przez jeden z punktów w nieskończoności, czyli „końców“ osi (0, 1, 0), to $b=0$ i $a=\pm c$, skąd równanie przybiera postać

$$z \pm x = 1,$$

czyli $\quad Ch\mu Ch\eta \pm Ch\eta \,.\, Sh\mu = 1, \quad Ch\eta \,.\, e^{\pm\mu} = 1$

i ostatecznie $\quad Ch\eta = e^{\mu}$ lub $Ch\eta = e^{-\mu}$,

przyczem dla pierwszej krzywej zawsze $\mu \geqslant 0$, a dla drugiej $\mu \leqslant 0$, bo $Ch\eta \geqslant 1$.

Tak więc prostą postacią równania horicyklu jest równanie

$$Ch\eta = e^{\mu}.$$

Rozpatrzmy wreszcie trzeci przypadek: koło. Równanie $Ax + By + Cz = D$, gdzie $C^2 > A^2 + B^2$ przedstawia koło; tak więc $z = d$ jest równaniem pewnego koła. Zaraz zobaczymy, że jest to koło o środku w punkcie początkowym układu i o promieniu λ, czyniącym zadość warunkowi $Ch\lambda = d$. W rzeczy samej, jeżeli odległość punktu (x, y, z) od punktu (0, 0, 1) stale równa się λ, to

$$Ch\lambda = zz_1 - xx_1 - yy_1,$$

gdzie $\quad x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 1,$

a więc $\quad z = Ch\lambda = d.$

Jeżeli teraz przejdziemy do spółrzędnych prostokątnych μ i η, to równanie przyjmie postać

$$Ch\eta \,.\, Ch\mu = Ch\lambda;$$

to jest równanie koła w najprostszej postaci.

31. Długość łuku.

Jeżeli Δs oznacza długość cięciwy, łączącej dwa punkty (x, y, z) i $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, to

$$Ch\Delta s = z(z + \Delta z) - x(x + \Delta x) - y(y + \Delta y),$$

czyli $\quad z\Delta z - x\Delta x - y\Delta y = Ch\Delta s - 1 = 2 \,.\, Sh^2\dfrac{\Delta s}{2}.$

Ponieważ $\quad z^2 = x^2 + y^2 + 1,$

więc $\quad (z + \Delta z)^2 = (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 + 1,$

czyli $\quad 2z\Delta z + \Delta z^2 = 2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2,$

a więc $\quad z\Delta z - x\Delta x - y\Delta y = \frac{1}{2}\{\Delta x^2 + \Delta y^2 - \Delta z^2\}$,

czyli $4Sh^2\frac{\Delta s}{2} = \Delta x^2 + \Delta y^2 - \Delta z^2 = \Delta s^2 +$ wyrazy rzędów wyższych.

Stąd, przechodząc do różniczek, mamy

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2,$$

gdzie ds oznacza różniczkę łuku.

Przez zmianę zmiennych możemy z łatwością otrzymać wzór na ds we spółrzędnych prostokątnych μ i η.

Mianowicie:

$$x = Ch\eta\, Sh\mu, \quad y = Sh\eta, \quad z = Ch\mu\, Ch\eta,$$

$$dx = Ch\eta\, Ch\mu\, d\mu + Sh\eta\, Sh\mu\, d\eta$$

$$dy = Ch\eta\, d\eta; \quad dz = Sh\mu\, Ch\eta\, d\mu + Ch\mu\, Sh\eta\, d\eta$$

$$dx^2 + dy^2 - dz^2 = Ch^2\eta\, d\mu^2 + d\eta^2,$$

skąd $$ds^2 = Ch^2\eta \,.\, d\mu^2 + d\eta^2.$$

Możemy wreszcie wyrazić ds przy pomocy spółrzędnych biegunowych (r, Θ).

$$x = Sh\xi = Shr \cos\Theta$$

$$y = Sh\eta = Shr \sin\Theta, \quad z = Chr$$

$$dx = - Shr \sin\Theta\, d\Theta + Chr \cos\Theta\, dr;$$

$$dy = Shr \cos\Theta\, d\Theta + Chr \sin\Theta\, dr; \quad dz = Shr\, dr$$

$$dx^2 + dy^2 - dz^2 = dr^2 + Sh^2 r \,.\, d\Theta^2,$$

czyli $$ds^2 = dr^2 + Sh^2 r \,.\, d\Theta^2.$$

Dla przykładu obliczmy długość okręgu koła:

wtedy $$r = \text{Const}; \quad dr = 0$$

$$ds^2 = Sh^2 r \,.\, d\Theta^2; \quad ds = Shr \,.\, d\Theta$$

$$s = Shr\int_{\Theta_1}^{\Theta_2} d\Theta = Shr\,(\Theta_2 - \Theta_1) \text{ dla łuku koła.}$$

Długość okręgu koła o promieniu r, równa się więc

$$s = 2\pi Shr.$$

Obliczmy teraz długość łuku hipercyklu.

Równanie hipercyklu

$$\eta = \lambda = \text{stała}; \quad d\eta = 0$$

$$ds^2 = Ch\eta^2 d\mu^2 + d\eta^2 = Ch^2\lambda d\mu^2$$

$$ds = Ch\lambda \, . \, d\mu$$

$$s = Ch\lambda \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu = (\mu_2 - \mu_1) \, . \, Ch\lambda;$$

jest to długość łuku między dwoma punktami M_1 i M_2, których spółrzędne są μ_1 i $\eta_1 = \lambda$ i μ_2 i $\eta_2 = \lambda$. Liczba λ jest parametrem stałym, charakteryzującym krzywą, a $\mu_2 - \mu_1$ jest odległością rzutów punktów końcowych M_1 i M_2 łuku na oś hipercyklu.

Łuk horicyklu.

Równanie horicyklu $Ch\eta = e^\mu$;

$$ds^2 = Ch^2\eta d\mu^2 + d\eta^2;$$

lecz $Sh\eta d\eta = e^\mu d\mu = Ch\eta d\mu; \quad Ch^2\eta d\mu^2 = Sh^2\eta d\eta^2;$

stąd $$ds^2 = Sh^2\eta d\eta^2 + d\eta^2 = Ch^2\eta \, . \, d\eta^2.$$

$$ds = Ch\eta d\eta$$

$$s = \int_{\eta_1}^{\eta_2} Ch\eta d\eta = Sh\eta_2 - Sh\eta_1.$$

32. Mierzenie pól.

Zaczniemy od stwierdzenia następującego faktu: wyrażenie $\frac{dx\,dy}{z}$ jest niezmiennikiem grupy ruchu.

W rzeczy samej, grupa ruchu jest określona przez przekształcenie, podporządkowujące punktowi (x, y, z) punkt (x_1, y_1, z_1):

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_3 z_1,$$
$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_3 z_1,$$
$$z = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 y_1 + \gamma_3 z_1,$$

gdzie
$$\begin{array}{l|l} \gamma_1\gamma_2 - \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 = 0 & \gamma_3^2 - \beta_3^2 - \alpha_3^2 = 1 \\ \gamma_2\gamma_3 - \beta_2\beta_3 - \alpha_2\alpha_3 = 0 & \alpha_2^2 + \beta_2^2 - \gamma_2^2 = 1 \\ \gamma_1\gamma_3 - \beta_1\beta_3 - \alpha_1\alpha_3 = 0 & \alpha_1^2 + \beta_1^2 - \gamma_1^2 = 1 \end{array}$$

i $$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = +1.$$

Niech $d\sigma = dx\,dy; \quad d\sigma_1 = dx_1\,dy_1.$

$d\sigma = \Delta d\sigma_1$, gdzie Δ jest wyznacznikiem:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y}{\partial y_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 \dfrac{\partial z_1}{\partial x_1} & \alpha_2 + \alpha_3 \dfrac{\partial z_1}{\partial y_1} \\ \beta_1 + \beta_3 \dfrac{\partial z_1}{\partial x_1} & \beta_2 + \beta_3 \dfrac{\partial z_1}{\partial y_1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} + \frac{\partial z_1}{\partial y_1} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} + \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_2 \\ \beta_3 & \beta_2 \end{vmatrix} + \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial y_1} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_3 \\ \beta_3 & \beta_3 \end{vmatrix};$$

lecz $\quad z_1^2 - x_1^2 - y_1^2 = 1$, skąd $\dfrac{\partial z_1}{\partial x_1} = \dfrac{x_1}{z_1}$; $\dfrac{\partial z_1}{\partial y_1} = \dfrac{y_1}{z_1}$;

stąd $\quad \Delta = \gamma_3 + \dfrac{y_1}{z_1}\gamma_2 + \dfrac{x_1}{z_1}\gamma_1 = \dfrac{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 y_1 + \gamma_3 z_1}{z_1} = \dfrac{z}{z_1}$;

czyli $\quad \Delta = \dfrac{z}{z_1}$; $\dfrac{d\sigma}{d\sigma_2} = \Delta = \dfrac{z}{z_1}$; $\dfrac{d\sigma}{z} = \dfrac{d\sigma_1}{z_1}$,

czyli $$\frac{dx\,dy}{z} = \frac{dx_1 \, . \, dy_1}{z_1},$$

co trzeba było udowodnić.

Niech S oznacza obszar na płaszczyźnie x, y. Powiadam, że całka $\displaystyle\iint\limits_S \frac{dx\,dy}{z}$ wyraża pole P obszaru S.

Wynika to stąd, iż:

1. Jeżeli S i U są dwoma figurami przystającemi w znaczeniu geometrji hiperbolicznej (t. j. na mocy przekształceń grupy ruchu), to

$$\iint\limits_S \frac{dx\,dy}{z} = \iint\limits_U \frac{dx\,dy}{z},$$

2. Addytywność. Jeżeli obszar S jest sumą dwóch obszarów S_1 i S_2, t. j. $S = S_1 + S_2$, to

$$\iint\limits_S \frac{dx\,dy}{z} = \iint\limits_{S_1} \frac{dx\,dy}{z} + \iint\limits_{S_2} \frac{dx\,dy}{z},$$

3. Jeżeli obszary S i U są równe przez rozkład na figury przystające (zawsze w znaczeniu geometrji hiperbolicznej), to także

$$\iint\limits_S \frac{dx\,dy}{z} = \iint\limits_U \frac{dx\,dy}{z};$$

w rzeczy samej:

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n; \; U = U_1 + U_2 + \ldots U_n.$$

Dalej $\displaystyle\iint\limits_{S_i} \frac{dx\,dy}{z} = \iint\limits_{U_i} \frac{dx\,dy}{z}$, dla $n = 1, 2, \ldots n$.

Tymczasem (addytywność)

$$\iint\limits_{S} \frac{dx\,dy}{z} = \iint\limits_{S_1} \frac{dx\,dy}{z} + \iint\limits_{S_2} \frac{dx\,dy}{z} + \ldots \iint\limits_{S_n} \frac{dx\,dy}{x};$$

$$\iint\limits_{U} \frac{dx\,dy}{z} = \iint\limits_{U_1} \frac{dx\,dy}{z} + \iint\limits_{U_2} \frac{dx\,dy}{z} + \ldots \iint\limits_{U_n} \frac{dx\,dy}{z}.$$

Stąd $$\iint\limits_{S} \frac{dx\,dy}{z} = \iint\limits_{U} \frac{dx\,dy}{z}.$$

4. $\displaystyle\iint\limits_{S} \frac{dx\,dy}{z} = \iint\limits_{U} \frac{dx\,dy}{z}$ i w tym przypadku, gdy S i U są równe przez wyczerpywanie t. j. rozkład na przeliczalną (nieskończoną) liczbę części wzajem przystających.

To samo rozumowanie, co poprzednio, więcej przejście do granicy dla $n \to \infty$; zamiast sum skończonej liczby wyrazów, szeregi zbieżne o wyrazach dodatnich.

5. Jeżeli obszar S mieści się całkowicie na płaszczyźnie zmiennej x, y, wewnątrz kwadratu o boku $\lambda \neq 0$,

$$\iint\limits_{S} \frac{dx\,dy}{z} < \lambda^2,$$

bo $z \geqslant 1$.

Zauważymy przytem, że $\displaystyle\iint\limits_{S} \frac{dx\,dy}{z}$ ma zawsze wartość dodatnią.

Do każdego więc obszaru S przyporządkujemy w ten sposób pewną liczbę $P = \displaystyle\iint\limits_{S} \frac{dx\,dy}{z}$, posiadającą własności pola. Każdy inny zbiór liczb podporządkowany obszarom S, spełniający te same warunki, musiałby być zbiorem liczb dajmy na to Q, proporcjonalnych do P, bo z własności 1[ej], 3[ej] i 4[ej] wynika, że liczby Q musiałyby być funkcjami, jednowartościowemi liczb P, a z własności 2[ej] i 5[ej] wynika, że ta zależność funkcyjna jest zależnością linjową typu $Q = k \cdot P$.

Ponieważ wartość spółczynnika proporcjonalności k zależy od jednostek długości i pola, można zawsze przyjąć $k = 1$.

Pole we spółrzędnych biegunowych.

$$x = Shr\cos\Theta, \quad y = Shr\sin\Theta, \quad z = Chr.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \Theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \Theta} \end{vmatrix} = Chr\,Shr$$

$$\frac{d\sigma}{z} = \frac{\Delta\,dr\,d\Theta}{z} = Shr\,dr\,d\Theta;$$

a więc
$$P = \iint\limits_S \frac{dx\,dy}{z} = \iint\limits_{S'} Shr\,dr\,d\Theta.$$

Pole we spółrzędnych prostokątnych: μ i η.

$$x = Sh\mu Ch\eta; \quad y = Sh\eta; \quad z = Ch\mu Ch\eta.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \mu} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = Ch\mu Ch^2\eta.$$

$$\frac{dx\,dy}{z} = \frac{\Delta\,d\mu\,d\eta}{Ch\mu Ch\eta} = Ch\eta\,d\mu \cdot d\eta;$$

a więc
$$\iint\limits_S \frac{dx\,dy}{z} = \iint\limits_{S'} Ch\eta \cdot d\mu\,d\eta.$$

Zastosujmy, dla przykładu, te wzory do obliczenia pól pewnych najprostszych figur.

1. Pole hipercyklu.

Niech S oznacza obszar, ograniczony brzegiem, utworzonym przez łuk M_1M_2 hipercyklu $\eta = \lambda =$ stała, przez oś i dwie prostopadłe, spuszczone z punktów M_1 i M_2 na oś $\eta = 0$. Niech μ_1 i $\eta_1 = \lambda$ oznaczają spółrzędne punktu M_1, a μ_2 i $\eta_2 = \lambda$ oznaczają spółrzędne punktu M_2. Pole

$$P = \iint\limits_S Ch\eta\, d\eta\, d\mu = \int\limits_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu \int\limits_o^{\lambda} Ch\eta\, d\eta = Sh\lambda \,.\, (\mu_2 - \mu_1),$$

gdzie $\mu_2 - \mu_1$ oznacza rzut łuku $M_1 M_2$ na oś.

2. *Pole horicyklu.*

Niech S oznacza obszar, ograniczony brzegiem, utworzonym przez łuk OM horicyklu $Ch\eta = e^{\mu}$, (gdzie spółrzędne punktu O są $\mu = o$, $\eta = o$; a spółrzędne punktu M są μ i η), przez oś $\eta = o$ i prostopadłą, spuszczoną z punktu M na oś.

$$P = \iint\limits_S Ch\eta\, d\mu\, d\eta = \int\limits_o^{\mu} d\mu \int\limits_o^{\arg Ch\mu} Ch\eta\, d\eta = \int\limits_o^{\mu} \sqrt{e^{2\mu} - 1}\, d\mu = s - \mathrm{Arctg}\, s,$$

gdzie $s = Sh\eta =$ długości łuku OM horicyklu, a $\mathrm{Arctg}\, s$ oznacza gałąź główną funkcji $\mathrm{arctg}\, s$, która dla $s = o$ równa się zeru.

3. *Pole koła: $r =$ stała.*

$$P = \iint\limits_S Shr\, d\Theta\, dr = \int\limits_{\Theta_1}^{\Theta_2} d\Theta \int\limits_o^{r} Shr\, dr = \{Chr - 1\}\, (\Theta_2 - \Theta_1);$$

wzór ten wyraża pole wycinka koła. Pole całego koła jest

$$P = 2\pi \{Chr - 1\} = 4\pi Sh^2 \frac{r}{2}.$$

4. *Pole trójkąta.*

A) Trójkąt prostokątny asymptotyczny t. j. z jednym kątem równym zeru. Taki trójkąt jest utworzony przez oś $\eta = o$, przez równoległą do osi, przechodzącą przez punkt M i przez prostopadłą, spuszczoną z punktu M równoległej na oś. Odległość punktu M od osi oznaczmy, jak poprzednio, przez p, wtedy kąt $\varphi = \pi(p)$, którą tworzy prostopadła do osi z równoległą, jest określony, jak wiemy, przez wzór $\cos\varphi = Thp$, a równanie równoległej jest $Th\eta = Thp \,.\, e^{-\mu}$; $p > o$.

Oznaczmy przez S obszar naszego trójkąta asymptotycznego; wtedy jego pole P wyrazi się następującą całką:

$$P = \iint\limits_S Ch\eta\, d\eta\, d\mu = \int\limits_o^{\infty} d\mu \int\limits_o^{a} Ch\eta\, d\eta = \int\limits_o^{\infty} \Big| Sh\eta \Big|_o^{a} d\mu,$$

gdzie $\quad a = \mathrm{Arg}\, Th\, \{Thpe^{-\mu}\}$, t. j. $Tha = Thp \,.\, e^{-\mu}$;

a więc $P = \int\limits_0^\infty \frac{Thp\,.\,e^{-\mu}d\mu}{\sqrt{1 - Th^2pe^{-2\mu}}} = \Big|\operatorname{Arc}\cos(Thpe^{-\mu})\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} -$

$$- \operatorname{Arc}\cos(Thp) = \frac{\pi}{2} - \varphi = \pi - \left\{\frac{\pi}{2} + \varphi + o\right\} = \text{defekt } \delta,$$

gdzie defekt δ oznacza π mniej suma kątów trójkąta.

To się się stosuje i do trójkąta prostokątnego z dwoma kątami równemi o; wtedy, gdy $p \to \infty$, kąt $\varphi \to 0$, i pole zmierza do

$$\frac{\pi}{2} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + 0 + 0\right) = \text{defekt}.$$

B) Obliczmy teraz pole czworokąta trzyprostokątnego. Obszar S w tym przypadku jest ograniczony brzegiem, utworzonym przez dwie osie $\mu = 0$ i $\eta = 0$, następnie przez dwie prostopadłe MP i MQ, spuszczone z punktu M na osie. Długość odcinka MQ jest ξ, zgodnie z naszemi poprzedniemi znakowaniami (patrz l. 24), prostopadła zaś MP równa się η. Długość odcinka OQ oznaczmy przez p, $p > 0$. Jeżeli $ax + by + cz = 0$ oznacza prostą MQ, to z prostopadłości prostych (a, b, c) i $(1, 0, 0)$, wynika $a = 0$; spółrzędne punktu Q są $x = 0$, $y = Shp$, $z = Chp$. Spółczynniki b i c muszą być tak dobrane, by $b^2 = c^2 + 1$ i by $bShp + cChp = 0$; skąd $b = Chp$, $c = -Shp$ i równanie prostej QM jest

$$Chp\,.\,y - Shp\,.\,z = 0;$$

przechodząc do spółrzędnych prostokątnych η i μ, podstawiamy $y = Sh\eta$, $z = Ch\eta\, Ch\mu$, czyli równanie przybiera kształt

$$Th\eta = Thp\,Ch\mu.$$

Pole czworokąta trzyprostokątnego $MPOQ$:

$$P = \iint\limits_S Ch\eta\, d\eta\, d\mu = \int\limits_0^\mu d\mu \int\limits_0^\alpha Ch\eta\, d\eta = \int\limits_0^\mu Sh\alpha\, d\mu,$$

gdzie
$$\alpha = \arg Th\,(Thp\,Ch\mu),$$

czyli
$$Th\alpha = Thp\,.\,Ch\mu;$$

a więc $P = \int\limits_0^\mu \frac{Thp\,Ch\mu\, d\mu}{\sqrt{1 - Th^2p\,Ch^2\mu}} = \left|\operatorname{Arctg}\frac{Thp\,.\,Sh\mu}{\sqrt{1 - Th^2p\,Ch^2\mu}}\right|_0 =$

$$= \operatorname{Arctg}\frac{Thp\,Sh\mu}{\sqrt{1 - Th^2p\,Ch^2\mu}};$$

oczywiście $Thp Ch\mu < 1$, czyli $Ch\mu < \frac{1}{Thp}$, bo $Thp \,.\, Ch\mu = Th\eta < 1$; gdy $\eta \to \infty$, to $\mu \to \mu_o$, przyczem $Ch\mu_o = \frac{1}{Thp} = Cthp$.

Oznaczmy, jak poprzednio, przez ψ kąt przy wierzchołku M w czworokącie trójprostokątnym $MPOQ$. Widzieliśmy poprzednio (l. 29), że $\cos\psi = Th\xi Th\eta = Th\xi Thp Ch\mu$; lecz $Sh\xi = Sh\mu Ch\eta$, $Ch\xi = \frac{Sh\eta}{Shp}$, (patrz l. 24, gdzie $\sigma = p$); stąd $Th\xi = \frac{Sh\mu Shp}{Th\eta} = \frac{Sh\mu Shp}{Thp Ch\mu} = Th\mu \,.\, Chp$; $\cos\psi = Th\xi Thp Ch\mu = Th\mu Chp Thp Ch\mu = Sh\mu Shp$; $\sin\psi = \sqrt{1 - Sh^2\mu Sh^2 p} = \sqrt{Ch^2 p - Sh^2 p - Sh^2 p (Ch^2\mu - 1)} = Chp \,.\, \sqrt{1 - Th^2 p Ch^2\mu}$. A więc $\operatorname{cotg}\psi = \frac{Sh\mu \,.\, Thp}{\sqrt{1 - Th^2 p Ch^2\mu}}$. Znaleźliśmy poprzednio dla pola P naszego czworokąta:

$$P = \operatorname{Arctg}\frac{Thp Sh\mu}{\sqrt{1 - Th^2 p Ch^2\mu}};$$

teraz możemy napisać: $P = \operatorname{Arctg}(\operatorname{cotg}\psi) = \frac{\pi}{2} - \psi = 2\pi - \frac{3}{2}\pi - \psi = 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \psi\right)$, t. j. pole P równa się 2π mniej suma kątów naszego czworoboku.

C) Trójkąt prostokątny.

Niech ABC będzie trójkątem prostokątnym. Ze środka E przeciwprostokątnej CB spuszczamy prostopadłą ED na przyprostokątną AC, a z wierzchołka B spuszczamy prostopadłą BF na prostą DE. Utworzył się czworokąt trójprostokątny $ABFD$, z kątami prostemi w A, F i D, a z kątem ostrym w B. Trójkąt ABC i czworokąt $ADFB$ są równe przez rozkład, gdyż trójkąty CED i EFD są przystające przez obrót (hiperboliczny) naokoło punktu E o kąt półpełny. Po takim obrocie odcinek BE przystanie do odcinka CE, punkt B padnie na punkt C; półprosta EF padnie na półprostą ED, a BF przystanie do CD, na mocy prostopadłości.

A więc pole trójkąta ABC równa się polu czworokąta $ADFB = \frac{\pi}{2} - \psi = \frac{\pi}{2} - (\sphericalangle B + \sphericalangle C)$, ponieważ kąt ψ przy B w czworokącie $= \sphericalangle B + \sphericalangle C$.

A więc pole $\triangle\ ABC = P = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \sphericalangle C + \sphericalangle B\right) = \delta =$ defektowi, t. j. $= \pi$ mniej suma kątów w trójkącie.

D) Trójkąt nieprostokątny.

Niech będzie ABC trójkąt jakikolwiek (nieasymptotyczny). Z wierzchołka C spuszczamy prostopadłą CD; powstają dwa trójkąty prostokątne ACD i CBD. Pole trójkąta naszego ABC jest sumą albo różnicą pól trójkątów prostokątnych ACD i CBD, zależnie od tego, czy punkt D leży między AB, czy też na przedłużeniu tego odcinka. Z tego, iż pole trójkąta prostokątnego równa się π mniej suma kątów, z łatwością wyprowadzamy słuszność tego twierdzenia i dla trójkąta ABC, co czytelnik sprawdzi sam z największą łatwością.

E) Trójkąt asymptotyczny.

Prostokątne trójkąty z jednym lub z dwoma kątami, równemi zeru, były rozpatrywane poprzednio, na początku tego paragrafu i wynik był zawsze ten sam, iż pole równa się defektowi. Przejdźmy do rozpatrzenia przypadku trójkąta trójasymptotycznego, t. j. z trzema kątami, równemi zeru. Przypuśćmy więc, że trójkąt ABC posiada boki wzajemnie do siebie równoległe, a wierzchołki ABC są punktami niewłaściwemi. Łatwo sprawdzić, że istnieje prostopadła do jednego z boków*), bę-

---

*) Mamy wiec następujące zagadnienie: „Przez punkt niewłaściwy (A, B, C) przeprowadzić prostopadłą do prostej (a, b, c). Jak wiemy, każda prosta pęku, wyznaczonego przez wierzchołek (A, B, C) jest kształtu $\left(\frac{A\lambda - B}{C}, \frac{B\lambda + A}{C}, \lambda\right)$. Należy λ określić w ten sposób, by zadość uczynić warunkowi prostopadłości. Warunek ten daje $\frac{a\,(A\lambda - B)}{C} + \frac{b\,(B\lambda + A)}{C} - c\lambda = 0$, czyli $\{aA + bB - cC\}\,\lambda = Ba - Ab$, czyli $\lambda = \frac{Ba - Ab}{aA + bB - cC}$, o ile $aA + bB - Cc \neq 0$. Gdy $aA + bB - cC = 0$, to prosta (a, b, c) przechodzi przez punkt niewłaściwy (A, B, C), jak to łatwo sprawdzić, gdyż kładąc $c = \lambda$ równania $a^2 + b^2 = \lambda^2 + 1$, $Aa + Bb = C\lambda$ dają $a = \frac{A\lambda \mp B}{C}$, $b = \frac{B\lambda \pm A}{C}$ $c = \lambda$, co dowodzi, że prosta (a, b, c) przechodzi przez punkt (A, B, C), W tym wypadku przeprowadzenie prostopadłej do (a, b, c) przez punkt (A, B, C) jest rzeczą niemożliwą.

dąca jednocześnie równoległą do dwóch pozostałych boków; ta prostopadła przechodzi wówczas przed odpowiedni wierzchołek trójkąta i dzieli trójkąt na dwa trójkąty prostokątne z dwoma kątami, równemu zeru.

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi - (0 + 0 + 0).$$

Wzór ogólny sprawdza się i w tym przypadku. Pozostają jeszcze do rozpatrzenia przypadki, gdy trójkąt ABC ma jeden albo dwa kąty równe zeru, ale nie jest prostokątny. Przypadek, gdy jeden kąt równa się zeru, nie przedstawia trudności, bo stosujemy znowu rozkład na dwa trójkąty prostokątne przez spuszczenie prostopadłej z wierzchołka właściwego na bok przeciwległy. Ten sam rozkład można stosować i w przypadku trójkąta z dwoma kątami równemi zeru.

Wynik ogólny jest więc taki: pole trójkąta równa się defektowi, t. j. π mniej suma kątów tego trójkąta.

33. Zakończenie.

Przez zastosowanie wyników, osiągniętych dotychczas, moglibyśmy rozwiązywać szereg zagadnień geometrycznych geometrji hiperbolicznej, mając możność stosowania do tych zagadnień metod geometrji analitycznej. Przypuszczam, że czytelnik nie napotkałby trudności przy rozwiązywaniu szeregu zadań, o ile zadania te nie są zbyt złożone, wobec tego cel tej pracy jest osiągnięty i na wyłożonem dotychczas poprzestaniemy. Natomiast praca ta wymagałaby uzupełnienia w innym kierunku. Mianowicie, opierając się na interpretacji, staraliśmy się otrzymać przy jej pomocy szereg własności figur geometrji hiperbolicznej, nie troszcząc się o to, czy otrzymujemy całokształt twierdzeń, wystarczających dla samodzielnego stworzenia całości, i jednocześnie niesprzecznych; gdyż niesprzeczność wynikała, na mocy zasady interpretacji, z niesprzeczności twierdzeń geometrji euklidesowej. A o samowystarczalność także nie dbaliśmy, gdyż w każdej chwili moglibyśmy czerpać ze źródła, jakiem jest, na mocy interpretacji, geometrja euklidesowa. Naturalnem więc uzupełnieniem tego artykułu byłoby zbadanie geometrji hiperbolicznej z punktu widzenia aksjomatycznego. W tej sprawie odsyłamy czytelnika do prac D. Hilbert'a, przedewszystkiem do jego „Grundlagen der Geometrie".