353.

NOTE SUR LA SURFACE DU QUATRIÈME ORDRE DE STEINER.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. LXIV. (1865), pp. 172—174.]

En considérant les deux coniques définies par les équations

$$U = (a\,,\ b\,,\ c\,,\ f\,,\ g\,,\ h\between x\,,\ y\,,\ z)^2 = 0$$

$$U' = (a',\ b',\ c',\ f',\ g',\ h'\between x',\ y',\ z')^2 = 0,$$

on en déduit les trois équations dérivées

$$F = (bc - f^2,\ ca - g^2,\ ab - h^2,\ gh - af,\ hf - bg,\ fg - ch \between \xi,\ \eta,\ \zeta)^2 = 0,$$

$$G = (bc' + b'c - 2ff',\ \ldots\ldots\ldots\ldots \between \xi,\ \eta,\ \zeta)^2 = 0,$$

$$F' = (b'c' - f'^2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots \between \xi,\ \eta,\ \zeta)^2 = 0,$$

et l'on sait que $F = 0$ est l'équation tangentielle de la conique $U = 0$ (autrement dit, l'équation qui exprime que cette conique est touchée par la droite $\xi x + \eta y + \zeta z = 0$), que de même $F' = 0$ est l'équation tangentielle de la conique $U' = 0$, et enfin que $G = 0$ est l'équation tangentielle de la conique enveloppée par une droite $\xi x + \eta y + \zeta z = 0$ qui coupe harmoniquement les deux coniques $U = 0$, $U' = 0$.

Or, en considérant les deux surfaces quadriques

$$U = (a,\ b,\ c\,,\ d,\ f,\ g\,,\ h\,,\ l,\ m,\ n \between x,\ y, z,\ w)^2 = 0,$$

$$U' = (a',\ b',\ c',\ d',\ f',\ g',\ h',\ l',\ m',\ n' \between x,\ y, z,\ w)^2 = 0,$$

on forme d'une manière analogue les quatre équations dérivées

$$F = (bcd + \text{etc.}, \ldots \between \xi,\ \eta,\ \zeta,\ \omega)^2 = 0,$$

$$G = (b'cd + \text{etc.}, \ldots \between \xi,\ \eta,\ \zeta,\ \omega)^2 = 0,$$

$$G' = (b'c'd + \text{etc.}, \ldots \between \xi,\ \eta,\ \zeta,\ \omega)^2 = 0,$$

$$F' = (b'c'd' + \text{etc.}, \ldots \between \xi,\ \eta,\ \zeta,\ \omega)^2 = 0.$$

$F=0$ est l'équation tangentielle de la surface $U=0$ (et de même $F'=0$ est l'équation tangentielle de la surface $U'=0$). Les deux équations $G=0$, $G'=0$, qui ont des coefficients formés d'après une loi facile à saisir, se changent l'une dans l'autre lorsqu'on échange entre elles les deux surfaces quadriques $U=0$, $U'=0$. L'équation $G'=0$ (celle des deux dont il s'agira dans la suite) est l'équation tangentielle de la surface quadrique enveloppée par un plan $\xi x+\eta y+\zeta z+\omega w=0$ qui coupe les surfaces $U=0$, $U'=0$ selon des coniques $S=0$, $S'=0$ telles qu'il y ait sur la conique $S=0$ une infinité de systèmes de trois points conjugués par rapport à la conique $S'=0$.

En supposant à présent que l'équation $U'=0$ est celle d'un cône, on peut dire que $G'=0$ est l'équation tangentielle de la surface quadrique enveloppée par un plan qui coupe la surface $U=0$ selon une conique $S=0$ telle que par cette conique et par le sommet du cône $U'=0$ on puisse faire passer une infinité de systèmes de trois droites conjuguées par rapport au cône $U'=0$. On peut présenter le théorème sous une autre forme; en faisant passer par le sommet du cône $U'=0$ trois droites conjuguées par rapport à ce cône, et en choisissant à volonté l'un des deux points de rencontre de chacune des droites avec la surface $U=0$, on obtient trois points qui déterminent un plan; en considérant tous les systèmes des trois droites conjuguées, on a pour chaque système un plan, et l'enveloppe de ces plans n'est autre chose que la surface quadrique $G'=0$.

Je suppose que le sommet du cône $U'=0$ soit situé sur la surface $U=0$, et je dis que la surface $G'=0$ se réduira à un système de deux points, à savoir le sommet du cône $U'=0$ et un autre point. Pour démontrer cela, on peut prendre pour coordonnées du sommet $x=0$, $y=0$, $z=0$; les deux équations seront alors

$$U=(a,\ b,\ c,\ 0,\ f,\ g,\ h,\ l,\ m,\ n\between x,\ y,\ z,\ w)^2=0,$$
$$U'=(a',\ b',\ c',\ 0,\ f',\ g',\ h',\ 0,\ 0,\ 0\between x,\ y,\ z,\ w)^2=0,$$

(ou, ce qui est la même chose, $U'=(a',\ b',\ c',\ f',\ g',\ h'\between x,\ y,\ z)^2=0$ et) en substituant ces valeurs on voit sans peine que les coefficients de x^2, y^2, z^2, xz, zx, xy dans la fonction G' se réduiront à zéro, et que l'équation $G'=0$ aura la forme

$$G'=(0,\ 0,\ 0,\ D,\ 0,\ 0,\ 0,\ L,\ M,\ N\between \xi,\ \eta,\ \zeta,\ \omega)^2=0,$$

c'est-à-dire nous aurons

$$G'=\omega\,(D\omega+2L\xi+2M\eta+2N\zeta)=0,$$

équation qui représente en effet le point $\omega=0$ (ou ce qui est la même chose le point $x=0$, $y=0$, $z=0$) et un autre point $D\omega+2L\xi+2M\eta+2N\zeta=0$, ou ce qui est la même chose le point $x:y:z:w=2L:2M:2N:D$.

Dans le cas actuel chacune des trois droites rencontre la surface $U=0$ dans le sommet et de plus dans un seul point, et en prenant ce dernier point pour point de rencontre de la droite avec la surface $U=0$ le plan mené par les trois points ne passe pas par le sommet; ce plan passe donc par le point $x:y:z:w=2L:2M:2N:D$, et on a ainsi

THÉORÈME I. En faisant passer par un point donné de la surface quadrique $U=0$ trois droites conjuguées par rapport au cône $U'=0$ (qui a ce même point pour sommet) le plan mené par les trois points de rencontre des droites avec la surface $U=0$ passe toujours (quel que soit le système des trois droites conjuguées) par un point fixe.

J'ajoute que, lorsque les équations $U=0$, $U'=0$ ont la forme spéciale qui leur a été donnée en dernier lieu, les coordonnées du point seront $x:y:z:w=2L:2M:2N:D$, et il convient de remarquer que ces valeurs L, M, N, D sont des fonctions quadriques par rapport aux coefficients $(a', \ldots)$ du cône $U'=0$.

Au lieu d'un cône donné $U'=0$, considérons le système entier des cônes $\lambda P+\mu Q+\nu R=0$, où $P=0$, $Q=0$, $R=0$ sont des cônes donnés ayant leur sommet commun dans le point $(x=0,\ y=0,\ z=0)$ de la surface et λ, μ, ν des coefficients arbitraires, système qui est celui des cônes en involution avec les cônes donnés $P=0$, $Q=0$, $R=0$. A chaque système des coefficients λ, μ, ν correspond un point fixe, et en conservant pour ses coordonnées la notation antérieure $x:y:z:w=2L:2M:2N:D$, les quantités L, M, N, D sont des fonctions quadriques des quantités arbitraires λ, μ, ν. Le lieu du point dont il s'agit sera évidemment une surface, et on démontre sans peine que cette surface est du quatrième ordre. Car, pour trouver en combien de points la surface est rencontrée par une droite quelconque, il faut combiner avec les équations $x:y:z:w=2L:2M:2N:D$ les équations de la droite dont il s'agit, c'est-à-dire deux équations linéaires en x, y, z, w; cela donne deux équations linéaires en L, M, N, D, ou quadriques en (λ, μ, ν). On a ainsi quatre systèmes de valeurs de (λ, μ, ν); et à chaque système correspond un seul point (x, y, z, w), il y a par conséquent quatre points d'intersection, et la surface est du quatrième ordre. Nous avons donc

THÉORÈME II. En considérant au lieu du cône $U'=0$ le système entier des cônes $\lambda P+\mu Q+\nu R=0$ en involution avec les cônes $P=0$, $Q=0$, $R=0$ qui ont leur sommet commun dans un point de la surface $U=0$, le lieu du point fixe du théorème I. est une surface du quatrième ordre.

Cette surface du quatrième ordre est la surface de Steiner, considérée dernièrement par MM. Kummer, Weierstrass, Schröter, et Cremona.

Cambridge, 2 *Novembre*, 1864.