352.

SUITE DES RECHERCHES SUR L'ÉLIMINATION ET LA THÉORIE DES COURBES.

[From the *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), tom. LXIV. (1865), pp. 167—171.]

DANS le mémoire "Recherches sur l'élimination et la théorie des courbes," t. XXXIV. pp. 30—45 de ce Journal (1847), [53], j'ai donné pour une courbe $U=0$ du n-ième ordre sans points doubles ou de rebroussement, les expressions pour les degrés, tant par rapport aux coefficients que par rapport aux variables, des fonctions qui entrent dans l'équation $FFU = KU(PU)^2(QU)^3 U$ qui sert à expliquer comment la réciproque de la réciproque de la courbe $U=0$ se réduit à la courbe originale $U=0$. En partant des principes établis dans le mémoire, "Nouvelles Recherches sur l'élimination et la théorie des courbes," t. LXIII., pp. 34—39 de ce Journal (1864), [338], je suis parvenu à résoudre à peu près cette question pour le cas d'une courbe $U=0$ du n-ième ordre avec α points doubles et β points de rebroussement; mon investigation a cependant par rapport à quelques points besoin de confirmation.

Je commence par rappeler que l'équation d'une courbe avec des points doubles et de rebroussement peut être présentée sous la forme

$$U = aP + bQ + cR + \ldots = 0,$$

où $a, b, c, \ldots$ sont des quantités absolument arbitraires, $P=0$, $Q=0$, $R=0, \ldots$ sont des courbes du n-ième ordre (je suppose toujours que $U=0$ est une courbe du n-ième ordre avec α points doubles et β points de rebroussement) qui ont chacune pour chaque point double de la courbe $U=0$ un point double au même point, et pour chaque point de rebroussement de la courbe $U=0$ un point de rebroussement au même point et avec la même tangente. En parlant des coefficients de U, je désignerai toujours les quantités $(a, b, c, \ldots)$ sans faire attention aux constantes contenues dans les fonctions $(P, Q, R, \ldots)$. La fonction U (voir les Nouvelles Recherches etc.) a un discriminant special KU du degré $3(n-1)^2 - 7\alpha - 11\beta$: il y a en outre une certaine fonction AU des coefficients, laquelle dépend des points de rebroussement, qui semble jouer un rôle analogue en quelque sorte à celui du discriminant. Car soient pour un moment (x, y, z) les coordonnées d'un des points de rebroussement de la courbe $U=0$; écrivons $D=xd_x+yd_y+zd_z$, et dans la fonction U substituons (x, y, z) au lieu de (x, y, z); l'équation $D^2U=0$ donne le carré de la tangente au point de rebroussement: or $D^2U=aD^2P+bD^2Q+cD^2R+\ldots$, et puisque les courbes $P=0$, $Q=0$, $R=0,\ldots$ ont chacune la même tangente au point de rebroussement, les fonctions D^2P, D^2Q, $D^2R,\ldots$ seront des fonctions de la forme $\lambda\Phi^2$, $\mu\Phi^2$, $\nu\Phi^2,\ldots$ où $\Phi=0$ est l'équation de la tangente, et λ, μ, $\nu\ldots$ sont des quantités constantes qui ne dépendent que des constantes que contiennent les fonctions P, Q, $R,\ldots$. Nous aurons donc $D^2U=(a\lambda+b\mu+c\nu+\ldots)\Phi^2$; et je remarque que l'équation $a\lambda+b\mu+c\nu+\ldots=0$ serait la condition pour qu'il y eût au lieu du point de rebroussement un point triple. On obtient donc l'équation du système des carrés des tangentes aux points de rebroussement sous la forme

$$(a\lambda_1+b\mu_1+c\nu_1\ldots)(a\lambda_2+b\mu_2+c\nu_2\ldots)\ldots(a\lambda_\beta+b\mu_\beta+c\nu_\beta+\ldots)\,\Phi_1{}^2\Phi_2{}^2\ldots\Phi_\beta{}^2=0:$$

le facteur constant $(a\lambda_1+b\mu_1+c\nu_1\ldots)\ldots(a\lambda_\beta+b\mu_\beta+c\nu_\beta\ldots)$, du degré β par rapport aux coefficients, est précisément la dérivée que je nomme AU (de manière que $AU=0$ est la condition pour l'existence d'un point triple): l'autre facteur $\Phi_1{}^2\Phi_2{}^2\ldots\Phi_\beta{}^2$ est du degré 0 par rapport aux coefficients.

Cela étant, je pose d'abord, pour la vérifier plus tard, la table suivante:

	Degrés par rapport aux variables	Degrés par rapport aux coefficients
équation de la courbe, $U=0$	2	1
condition pour un nouveau point double, $KU=0$	0	$3(n-1)^2-7\alpha-11\beta$
condition pour un point triple, $AU=0$	0	β
équation de la courbe réciproque, $FU=0$	$n(n-1)-2\alpha-3\beta$	$2(n-1)$
équation de la courbe des inflexions, $HU=0$	$3(n-2)$	3
équation des tangentes aux points d'inflexion, $QU=0$	$3n(n-2)-6\alpha-8\beta$	$3n(n-2)-3\alpha-4\beta$
équation de la courbe des contacts des tangentes doubles $\Pi U=0$	$(n-2)(n^2-9)$	$(n+4)(n-3)$
équation des tangentes doubles, $PU=0$	$\tfrac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)-(n^2-n-6)(2\alpha+3\beta)+2\alpha(\alpha-1)+6\alpha\beta+\tfrac{9}{2}\beta(\beta-1)$	$2n(n-2)(n-3)-(2n-6)(2\alpha+3\beta)-\beta$
équation de la courbe réciproque de la réciproque de la courbe, $FFU=0$	$(n^2-n-2\alpha-3\beta)(n^2-n-1-2\alpha-3\beta)$	$2(n^2-n-1-2\alpha-3\beta)2(n-1)$.

Et puis on a l'équation

$$FFU = AU \,.\, KU \,.\, (PU)^2 . (QU)^3 .\, U.$$

La comparaison des degrés par rapport aux variables donne

$$\begin{aligned}(n^2-n-2\alpha-3\beta)(n^2-n-1-2\alpha-3\beta) = \\ n(n-2)(n^2-9)-(n^2-n-6)(4\alpha+6\beta)+4\alpha(\alpha-1)+12\alpha\beta+9\beta(\beta-1) \\ +9n(n-2) \qquad -18\alpha-24\beta \\ +n\end{aligned}$$

ce qui est exacte. La comparaison des degrés par rapport aux coefficients donne

$$\begin{aligned}4(n-1)(n^2-n-1-2\alpha-3\beta) = \quad & \beta \\ & +3(n-1)^2-7\alpha-11\beta \\ & +4n(n-2)(n-3)-(4n-12)(2\alpha+3\beta)-2\beta \\ & +9n(n-2)-9\alpha-12\beta \\ & +1\end{aligned}$$

ce qui de même est exacte.

Les expressions pour les degrés de KU et AU sont déjà démontrées; pour les autres expressions, en considérant d'abord la courbe générale $W=0$ du n-ième ordre, laquelle, en établissant entre les coefficients les relations convenables, se réduit à la courbe $U=0$ avec α points doubles et β points de rebroussement, on sait par la théorie de M. Plücker quels sont les facteurs desquels seront affectés FW, QW, PW, et qu'il faut écarter pour réduire ces fonctions à FU, QU, PU respectivement.

Pour FW ce facteur est A^2B^3, où $A=0$ est l'équation tangentielle des points doubles, et $B=0$, l'équation tangentielle des points de rebroussement: la réduction du degré par rapport aux variables est donc de $2\alpha+3\beta$ unités. En prenant (x, y, z) pour les coordonnées d'un point double quelconque on a $A=\Pi(\xi \mathrm{x}+\eta \mathrm{y}+\zeta \mathrm{z})$, et de même en prenant (x, y, z) pour les coordonnées d'un point de rebroussement quelconque on a $B=\Pi(\xi \mathrm{x}+\eta \mathrm{y}+\zeta \mathrm{z})$; A et B ne contiennent donc pas les coefficients $a, b, c, \ldots$ de U, et une réduction de degré par rapport aux coefficients n'a pas lieu.

Pour QW le facteur est M^3N^4, où $M=0$ est l'équation des tangentes aux points doubles et $N=0$ l'équation des carrés des tangentes aux points de rebroussement: la réduction de degré par rapport aux variables est donc $6\alpha+8\beta$ unités. Soient (x, y, z) les coordonnées d'un point double, $D=\mathrm{x}d_x+\mathrm{y}d_y+\mathrm{z}d_z$; en substituant comme auparavant (x, y, z) au lieu de (x, y, z) dans la fonction U, l'équation des deux tangentes au point double est $D^2U=0$, où D^2U est du degré 1 par rapport aux coefficients: en formant l'équation analogue pour chaque point double on a $M=\Pi(D^2U)=0$, et M sera du degré α par rapport aux coefficients. En prenant (x, y, z) pour les coordonnées d'un point de rebroussement, on a de même $N=\Pi(D^2U)=0$ pour l'équation des carrés des tangentes aux points de rebroussement; N est donc du degré β par rapport aux coefficients. Nous avons vu que l'équation $N=0$ se réduit à la forme $N=AU.\Phi_1{}^2\Phi_2{}^2\ldots\Phi_\beta{}^2$, j'admets cependant qu'il faut retenir ce facteur constant AU, et considérer ainsi N comme étant effectivement du degré β. Le facteur M^3N^4 est donc du degré $3\alpha+4\beta$, et la réduction de degré par rapport aux coefficients qui a lieu pour QW est donc de $3\alpha+4\beta$ unités.

Pour PW le facteur est R^2S^3T, ou $R=0$ est l'équation du système des tangentes menées à la courbe par les points doubles, $S=0$ l'équation du système des tangentes menées à la courbe par les points de rebroussement, $T=0$ l'équation des droites qui contiennent deux points doubles (chacune de ces droites étant comptée 4 fois) ou qui contiennent un point double et un point de rebroussement (chacune de ces droites étant comptée 6 fois), ou enfin qui contiennent deux points de rebroussement (chacune de ces droites étant comptée 9 fois). Par rapport aux variables le degré de R est égal à $\alpha\{n^2-n-6-2(\alpha-1)-3\beta\}$, celui de S à $\beta\{n^2-n-6-2\alpha-3(\beta-1)\}$: le degré de R^2S^3 est donc égal à $(n^2-n-6)(2\alpha+3\beta)-4\alpha(\alpha-1)-6\alpha\beta-9\beta(\beta-1)$. Le degré de T est égal à $4.\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)+6\alpha\beta+9.\frac{1}{2}\beta(\beta-1)$, le degré de R^2S^3T s'élève donc à $(n^2-n-6)(2\alpha+3\beta)-2\alpha(\alpha-1)-3\alpha\beta-\frac{9}{2}\beta(\beta-1)$, nombre qui exprime la réduction de degré par rapport aux variables qui a lieu pour PW. Par rapport aux coefficients le degré de R est égal à $(2n-6)\alpha$, celui de S à $(2n-6)\beta$, celui de T à zéro: le degré de R^2S^3T s'élève donc à $(2n-6)(2\alpha+3\beta)$. On aurait par conséquent pour PW par rapport aux coefficients une réduction de degré égale à $(2n-6)(2\alpha+3\beta)$ unités ; mais d'après un exemple très-particulier (il est vrai) j'admets que PW contiendra encore le facteur constant AU, ce qui donnerait pour le nombre dont il s'agit la valeur $(2n-6)(2\alpha+3\beta)+\beta$.

J'ai dit que par rapport aux coefficients le degré de R est égal à $(2n-6)\alpha$ et celui de S à $(2n-6)\beta$: pour prouver l'exactitude de ces nombres il faut se rappeler que l'équation $\Theta=0$ des tangentes menées par un point quelconque est du degré (n^2-n) par rapport aux variables et du degré $2(n-1)$ par rapport aux coefficients. En prenant pour le point dont il s'agit un point double ou de rebroussement et supposant que dans la courbe il n'y a que ce seul point double ou de rebroussement, le degré par rapport aux variables est (n^2-n-6) et celui par rapport aux coefficients est $2n-6$. Mais dans le cas général Θ contiendra comme facteur G^2H^3, en dénotant par $G=0$ l'équation des droites menées par le point dont il s'agit à tous les points doubles, et par $H=0$ l'équation des droites menées par ce point à tous les points de rebroussement. De cette manière on obtient un abaissement de $2(\alpha-1)+3\beta$, ou de $2\alpha+3(\beta-1)$ unités pour le degré par rapport aux variables, mais le degré par rapport aux coefficients est toujours $(2n-6)$. Donc en considérant les systèmes des points doubles et des points de rebroussement, pour R la réduction est égal à $(2n-6)\alpha$ et pour S à $(2n-6)\beta$ unités.

Les difficultés de cette investigation sont dues aux points de rebroussement: en admettant en FFU l'existence d'un facteur $(AU)^m$, il n'est pas clair que l'on doit avoir $m=1$; et la démonstration pour les valeurs des termes en β, des expressions $3\alpha+4\beta$ et $(2n-6)(2\alpha+3\beta)-\beta$ est imparfaite. Écrivons

$$FFU=(AU)^m.KU.(PU)^2(QU)^3.U$$

et supposons que le nombre qui exprime la réduction de degré par rapport aux coefficients soit donné par la valeur $3\alpha + k\beta$ pour QU et par la valeur $(2n-6)(2\alpha+3\beta)+l\beta$ pour PU. La comparaison des degrés par rapport aux coefficients donne

$$\begin{aligned} 4(n-1)(n^2-n-2\alpha-3\beta) = \quad & m\beta \\ & +3\ (n-1)^2 - 7\alpha - 11\beta \\ & +4n(n-2)(n-3) - (4n-12)(2\alpha+3\beta) - 2l\beta \\ & +9n(n-2) - 9\alpha - 3k\beta \\ & +1, \end{aligned}$$

ce qui établit la relation $m - 2l = 3k - 13$, à laquelle on satisfait en prenant $m=1$, $l=1$, $k=4$ Mais je serais bien aise de prouver ces valeurs par une démonstration plus concluante.

Cambridge, 26 *Mai*, 1864.